

Approche probabiliste du modèle des piles abéliennes

Yvann Le Fay

Juillet 2020

Resumé

L'étude numérique proposée dans [JAA14] de la taille des blocs de glaces qui se détachent lors d'un vêlage, montre que cette grandeur suit une loi de puissance similaire à celles retrouvées dans l'étude des grandeurs moyennes associées au modèle des piles abéliennes. Dans ce cadre, les piles abéliennes modélisent un effondrement de particules qui à l'échelle locale suivent un processus de diffusion probabiliste caractérisé par un graphe. L'objet de ce travail est de calculer certaines grandeurs moyennes (Φ le flux carré moyen, σ le coefficient de diffusion) ainsi que des profils asymptotiques pour le modèle des piles abéliennes sur une certaine classe de graphes donnés. Chaque graphe étant caractérisé par la fonction de pondération φ qui lui est associée. Il est à noter que le modèle ainsi étudié est très proche des modèles des marches aléatoires embranchantes dans des milieux variables (BRWE).

Dhar dans [DD16] calcule grâce à de l'analyse complexe, de l'analyse numérique et avec l'aide de propriétés de symétrie, le flux carré moyen Φ associé à $\varphi(\delta, t) = 1/3\mathbb{1}(\delta)_{\{-1,0,1\}}$.

L'objectif de ce papier est de généraliser et approfondir les travaux de Dhar dans [DD16]. Nous démontrons d'abord que l'équation qui régit la probabilité $p : (x, t) \mapsto p(x, t)$ qu'un site x s'effondre à l'instant t est identique à celle qui régit une marche aléatoire dont les pas dépendent du graphe que l'on s'est donné (théorème 1.1). En particulier, on montre que le calcul qu'un site (x, t) est une somme réalisée sur l'ensemble des solutions d'une équation diophantienne linéaire dépendante de φ , x et t (lemme 1.2). Dans le cas particulier où l'effondrement est isotropique (en ce sens, chaque arête du graphe a autant de probabilité d'être empruntée), ce calcul revient à dénombrer le nombre de solutions à cette équation diophantienne. Nous donnons l'expression exacte de la probabilité qu'un site s'effondre lorsque $\varphi(\delta, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(\delta)_{k[-n,n]}$ (théorème 1.10) en exploitant le théorème 1.6 et les calculs menés dans [CCSC00]. Nous montrons toujours dans ce cas que la taille d'un effondrement évolue en $n\sqrt{t}$ (théorème 1.7), (théorème 1.9), mieux encore, on montre que la loi de probabilité $(p(x, t))_{x \in \mathbb{Z}}$ est bien approchée par une loi normale centrée d'écart-type $\sqrt{n(n+1)t/3}$. Sous la condition d'isotropie de l'effondrement, nous proposons une généralisation du calcul du flux carré Φ défini par Dhar dans [DD16] (théorème 2.1). Nous confirmons par le calcul que le flux carré Φ évolue en \sqrt{t} pour t grand, en fait, nous obtenons un équivalent de Φ (théorème 2.1). Nous faisons la conjecture, supportée par des tests numériques que les flux d'ordres k , Φ_k évoluent proportionnellement en $t^{(k-1)/2}$.

Dans une dernière partie, nous généralisons les équations régissant p à des mesures quelconques puis à des temps continus. Des intégrales de chemins apparaissent.

Mots clés — marche aléatoire embranchante dans des milieux variables (BRWE), équation de diffusion, équation de Chapman-Kolmogorov, chaînes de Markov, équations diophantiennes, théorème central limite, intégrale de chemin

1 Modèle sur \mathbb{Z}^d : définitions et résultats préliminaires

1.1 Définition de la dynamique du modèle

Un sommet du graphe, aussi appelé un site, est un élément $s = (x, t) \in \mathcal{S} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. Une application de pondération est une application partant de l'ensemble des sites vers les réels positifs, $\varphi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^+$. L'ensemble des arêtes, noté $\mathcal{V}(\varphi)$ est défini par $\{(s, s + (\delta, 1)) \text{ de poids } \varphi(\delta, t) : \delta \in \mathbb{Z}^d, s \in \mathcal{S}\}$. Le graphe associé est noté $\mathcal{G}(\varphi) = (\mathcal{S}, \mathcal{V}(\varphi))$.

Une configuration sur \mathcal{G} est une application $\omega : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$. Une configuration est dite instable s'il existe un site s tel que $\omega(s) \geq c_t = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\delta, t)$.

Soit ω une configuration, soit $t \geq 0$, on note $\omega_t(x) = \omega(x, t)$ pour $x \in \mathbb{Z}^d$.

Soit ω_0 une configuration initiale. On calcule de manière récursive les configurations successives $\omega_1, \omega_2, \dots$ en faisant, à chaque instant t , effondrer tous les sites instables s de la configuration ω_t sur ses voisins $\{s + (\delta, 1)\}_\delta$ selon les quantités $\{\varphi(\delta, t)\}_\delta$.

On définit la variable suivante

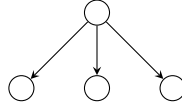
$$X : s \mapsto \text{Qté de grains qui s'effondrent sur } s$$

D'après la dynamique précédente, on a l'équation récursive suivante

$$\forall s \in \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}^d\}, X(s) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} X(s - (\delta, 1)) \varphi(\delta, t - 1)$$

Le problème est initialisé par le profil d'effondrements initiaux, $X(x, 0)$ pour $x \in \mathbb{Z}^d$.

Exemple 1.1. Posons $d = 1$ et $\varphi(x, t) = \mathbb{1}(x)_{\{-1, 0, 1\}}$, le graphe correspondant est composé de la maille suivante



La dynamique associée est la suivante : si un site (x, t) est à hauteur $\omega(x, t) \geq 3$ alors ce site distribue un grain à ses voisins $(x + \delta, t + 1)$ pour $\delta \in \{-1, 0, 1\}$.

Dans toute la suite, on considère φ normalisé, quitte à poser $\varphi(., t) = \varphi(., t)/c_{t+1}$, et $c_t = c_t/c_{t+1}$.

1.2 Modèle probabiliste

Considérons une configuration ω tirée uniformément parmi l'ensemble des configurations exactement instables qu'en $s = (0_{\mathbb{Z}^d}, 0)$, i.e $\omega \in \Omega_0 = \{\omega : \forall s \in (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}) \setminus \{(0, 0)\}, \omega(s) < \sigma_t, \omega(0, 0) = c_0\}$. On pose $p(s) = \mathbb{E}(X(s))$, pour $s \in \mathcal{S}$, la quantité (normalisée) de grains qui s'effondrent sur s sachant qu'il y a initialement ($t = 0$) effondrement qu'en $0 \in \mathbb{Z}^d$.

De la relation de récurrence précédente, on obtient une relation identique à celle d'une marche aléatoire embranchante partant de $(0, 0)$ avec des pas de déplacements $(\delta, +1)$ de poids $\varphi(\delta, t)$ donnée par le théorème suivant

Théorème 1.1. *La quantité moyenne de grains qui se transmettent au sommet s normalisée est donnée par*

$$\forall s \in \mathcal{S}^*, \quad p(s) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} p(s - (\delta, 1)) \varphi(\delta, t - 1)$$

On définit la série génératrice $\tilde{p}(\Theta, t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x, t) e^{ix \cdot \Theta}$ et l'on pose $\mathcal{L}(t, \Theta) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} e^{i\delta \cdot \Theta} \varphi(\delta, t - 1)$, de manière à avoir $\tilde{p}(\Theta, t) = \tilde{p}(\Theta, t - 1) \mathcal{L}(t, \Theta)$.

Exemple 1.2. L'exemple du graphe précédent donne

$$p(x, t) = \frac{1}{3} \sum_{\delta=-1}^1 p(x + \delta, t - 1) \quad \mathcal{L}(t, \theta) = 1/3(1 + 2 \cos(\theta)) \quad \tilde{p}(\theta, t) = 1/3^t(1 + 2 \cos(\theta))^t$$

Lemme 1.2. *Si l'effondrement initial a lieu en 0_d alors*

$$\forall (x, t) \in S, p(x, t) = \sum_{(\delta_0, \dots, \delta_{t-1}) : (E)} \prod_{i=0}^{t-1} \varphi(\delta_i, i)$$

où (E) est la condition $\sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x$.

Démonstration. Par hypothèse, l'effondrement initial a lieu en 0 ainsi $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$. D'après le résultat qui précède,

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \sum_{(\delta_0, \dots, \delta_{t-1}) \in (\mathbb{Z}^d)^t} e^{i\Theta \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i} \prod_{i=0}^{t-1} \varphi(\delta_i, i)$$

Le résultat est obtenu en appliquant la transformée de Fourier inverse. \square

Dans le cas particulier où $\varphi(x, t) = C \mathbb{1}_E(x)$, on obtient

$$p(x, t) = C^t \text{Card}\{(\delta_i) \in E^t : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$$

Lemme 1.3. *Soit $A \subset \mathbb{Z}^d$, on suppose que pour tout $x \in A$, il y a effondrement, i.e, $X(x, 0) = \mathbb{1}_A(x)$ alors $\tilde{p}(\Theta, t|X) = \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in A} e^{i\Theta \cdot x}$ et $p(s|X) = \sum_{x' \in A} p(x - x', t)$.*

Démonstration. Les sites $x \in A$ s'effondrent initialement, donc $p(x, 0) = \mathbb{1}_A(x)$ puis $\tilde{p}(\Theta, 0) = \sum_{x \in A} e^{i\Theta \cdot x}$. La dynamique est identique, on obtient $\tilde{p}(\Theta, t|A) = \tilde{p}(\Theta, t-1|A) \mathcal{L}(t, \Theta) = \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in A} e^{i\Theta \cdot x}$. \square

Lemme 1.4. *Notons $p(s_x \cap s_y)$ la probabilité qu'il y ait un effondrement en x et en y à l'instant t , on a*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{N}^*, x \neq y, \quad p(s_x \cap s_y) = \sum_{(\delta_1, \delta_2) \in (\mathbb{Z}^d)^2} p(s_x - (\delta_1, 1) \cap s_y - (\delta_2, 1)) \varphi(\delta_1, t - 1) \varphi(\delta_2, t - 1) \quad (1)$$

Et initialement, $p((x, 0) \cap (y, 0)) = X(x, 0)X(y, 0)$.

Démonstration. On pose $p(s_x \cap s_y) = \mathbb{E}(X(x, t)X(y, t))$ et l'on obtient le résultat. \square

Lemme 1.5. *Le processus respecte l'équation de Chapman-Kolmogorov,*

$$\forall t_2 \leq t, p(s|s') = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(s|(y, t_2))p((y, t_2)|s')$$

Avec la condition initiale, $p((x, t')|(x', t')) = \mathbb{1}_{\{x'\}}(x)$.

2 Le cas où $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{[-n; n]}$

Théorème 2.1. *Si $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{[-n; n]}$ alors*

$$\frac{1}{C^t} \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(x, t) X^{nt+x} = \left(\sum_{i=0}^{2n} X^i \right)^t$$

Démonstration. On a $C\mathcal{L}(\theta) = \sum_{\delta=-n}^n e^{i\delta\theta} = 1 + 2 \sum_{\delta=1}^n \cos \delta t$. En posant $\theta = -i \ln X$, le résultat est obtenu. \square

Théorème 2.2. *Dans les conditions précédentes,*

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{3}n(1+n)t$$

Démonstration. Notons $P(X) = \sum_{i=0}^{2n} X^i$ et $\binom{t}{j}_{2n+1}$ le coefficient en X^j dans $P(X)^t$, par le théorème qui précède, on a $(2n+1)^t p(j-nt, t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$. Par symétrie, $p(x, t) = p(-x, t)$ et donc $\sum_{x=-nt}^{nt} p(x, t)x = 0$. Ainsi,

$$\sigma^2(t) = \sum_{x=-nt}^{nt} x^2 p(x, t) = \frac{1}{(2n+1)^t} \sum_{j=0}^{2nt} (j-nt)^2 \binom{t}{j}_{2n+1}$$

Aussi, les identités 4.2 et 4.3 de [CCSC00] sont

$$\sum_{j=0}^{2nt} j^2 \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{12} (2n(3t+1) + 2) \quad \sum_{j=0}^{2nt} j \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{2}$$

d'où le résultat. \square

Théorème 2.3. *Si $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{[-n; n] + \mu}$ alors*

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu t, \sigma(t)^2 = \frac{1}{3}tn(n+1))$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\varphi(x, t) = \mathbf{1}(x)_{\llbracket -n, n \rrbracket}$, le théorème précédent nous dit que si $X(t)$ est une loi normale alors nécessairement $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{3}tn(n+1))$. De plus, l'expression de la fonction caractéristique de $X(t)$ coïncident avec celle de la somme de variables i.i.d uniformes sur $\llbracket -n, n \rrbracket$ à un décalage prêt.

Soient $X_1, \dots, X_t \stackrel{iid}{\sim} U(\llbracket -n, n \rrbracket)$, on a

$$X(t) \sim \sum_{i=1}^t X_i - nt$$

Le théorème central limite s'applique et le résultat est obtenu. La variance peut aussi être obtenue en utilisant l'expression de la variance de la loi uniforme. Un théorème central limite pour marches aléatoires embranchantes à milieux variables est présenté dans [Kle82]. Ce théorème s'applique dans ce cadre et est plus général que le résultat ainsi démontré. \square

Théorème 2.4. Si $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbf{1}(x)_{\llbracket -n, n \rrbracket}$ alors

$$p(x, t) = t/(2n+1)^t \sum_{p=0}^{\lfloor (x+nt)/(2n+1) \rfloor} \frac{(-1)^p \Gamma(t+x+nt-p(2n+1))}{\Gamma(p+1)\Gamma(t-p+1)\Gamma(x+nt-p(2n+1)+1)}$$

Démonstration. Pour l'expression de p , voir 2.8 de [CCSC00] donnant l'expression de $\binom{t}{j}_{2n+1}$. \square

Théorème 2.5. Si $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbf{1}(x)_{k\llbracket -n, n \rrbracket + \mu}$ pour un certain $k \geq 1$ alors

$$p(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2k^2\sigma(t)^2}} \mathbf{1}_{k\mathbb{Z}}(x - \mu t)$$

où $\sigma(t)^2 = 1/3n(n+1)t$.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité que $\mu = 0$. D'après le lemme 1.2, on a pour tout $(x, t) \in \mathcal{S}$,

$$p(x, t) = C^t \text{Card}\{(\delta_0, \dots, \delta_{t-1}) \in \llbracket -n, n \rrbracket^t : k \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$$

Si k ne divise pas x , alors $p(x, t) = 0$. Sinon, $p(x, t) = C^t \text{Card}\{(\delta_0, \dots, \delta_{t-1}) \in \llbracket -n, n \rrbracket^t : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x/k\}$. D'après le théorème 2.3, on a le résultat. \square

3 Flux carré moyen

Le flux carré moyen Φ est défini par

$$\forall t, \Phi(t) = \mathbb{E} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} X(s_x) \right)^2$$

Théorème 3.1. *En dimension $d = 1$, supposons que φ ne dépend pas de t alors*

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

où γ est défini dans la démonstration.

Démonstration. On a

$$\Phi(t) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} p(s_x \cap s_y)$$

L'équation linéaire (1) que respecte la loi conjointe sur une même ligne t a pour solution, pour une certaine fonction f ,

$$p(s_x \cap s_y) = \sum_{Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z) p(s_y|Z)$$

Définissons $F(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(s_x)$. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport à t implique qu'il y a conservation du nombre moyen de grains qui se déplacent à chaque instant, donc de $\mathbb{E} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} X(s_x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)$. On pose, sans perte de généralité par linéarité, $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x) = 1$.

Nous obtenons en utilisant ce qui précède,

$$\Phi(t) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} \sum_{Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z) p(s_y|Z) = \sum_{t'=0}^t F(t')$$

Posons $K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)^2$, $\tilde{F}(z) = \sum_{t \in \mathbb{N}} F(t) z^t$ et \tilde{K} les séries génératrices associées. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport au temps implique $p(s|s') = p(s - s')$ puis

$$1 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d, Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z)^2 = \sum_{t'=0}^t F(t') K(t - t')$$

Sur les fonctions génératrices,

$$\tilde{K}(z) \tilde{F}(z) = \frac{1}{1 - z} \quad (2)$$

Il ne reste plus qu'à calculer $K(t)$. Si la distribution admet une symétrie par rapport à 0_d , c'est-à-dire $\varphi(-\delta) = \varphi(\delta)$ alors l'équation de Chapman-Kolmogorov donne $p(0, 2t) = K(t)$.

Plus généralement,

$$|\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} e^{i\Theta \cdot (x-y)} p(s_x) p(s_y)$$

d'où,

$$K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} |\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) d\Theta$$

Ainsi,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} \frac{d\Theta}{1 - z|\mathcal{L}(\Theta)|^2} \tilde{p}(\Theta, 0)$$

Supposons que $d = 1$, posons $c_2 = \sum_{\delta_1 < \delta_2} (\delta_1 - \delta_2)^2 \varphi(\delta_1) \varphi(\delta_2)^*$ alors

$$|\mathcal{L}(\theta)|^2 = 1 - c_2 \theta^2 + o(\theta^4)$$

Où la dernière ligne est obtenue en effectuant un développement limité de \cos et la constante est bien $c_1 = \sum_{\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}} \varphi(\delta_1) \varphi(\delta_2) = 1 \times 1$ par normalisation et indépendance de φ par rapport à t .

Il s'agit d'obtenir un équivalent de \tilde{K} lorsque $z \rightarrow 1^-$. Sans perte de généralité, prenons $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, pour z au voisinage de 1,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - z|\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z(1 - c_2 \theta^2)}$$

La première égalité est justifiée par $|\mathcal{L}(\theta)|^2 = |\mathcal{L}(2\pi - \theta)|^2$. La première équivalence est justifiée car les deux seuls pôles de la fonction qu'on intègre quand $z \mapsto 1^-$ sont $\{0, 2\pi\}$. De plus,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z(1 - c_2 \theta^2)} = \frac{1}{\pi} \frac{\arctan \varepsilon \sqrt{\frac{c_2 z}{1-z}}}{\sqrt{c_2 z(1-z)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{1-z}}$$

Ainsi,

$$\Phi(t) = \sum_{t'=0}^t \left(\frac{1}{(1-z)\tilde{K}(z)} \right)_{t'} \sim \frac{1}{2\gamma} \sum_{t'=0}^t \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} \right)_{t'}$$

En utilisant les deux identités suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{t'=0}^{+\infty} z^{t'} \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} \quad \sum_{t'=0}^t \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(1+t)\Gamma(1/2(3+2t))}{\Gamma(2+t)} \sim 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

On obtient

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Si $\varphi = 1/(2n+1)\mathbb{1}_{[-n, n]}$, on a $c_1 = 1$ et $c_2 = 1/3n(n+1)$ puis

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n(1+n)}}$$

et pour t grand,

$$\Phi(t) \sim 4\sqrt{\frac{tn(n+1)}{3\pi}}$$

De plus, par rapport au théorème 1.7, on remarque que $\sigma(t)$ et $\Phi(t)$ sont proportionnels pour t grand et le facteur de proportionnalité est $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ i.e

$$\Phi(t) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma(t)$$

□

Exemple 3.1. Dans le cas du graphe initialement traité par Dhar dans [DD16] et qui nous sert d'exemple,

$$\varphi = 1/3 \mathbb{1}_{\llbracket -1, 1 \rrbracket}, \quad \Phi(t) \sim \sqrt{\frac{32t}{3\pi}}$$

Dans les conditions du théorème précédent,

Lemme 3.2.

$$F(t) \sim \frac{1}{2\gamma\sqrt{t\pi}}$$

Démonstration. En reprenant la démonstration du théorème précédent, on obtient

$$F(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x, t) \sim \frac{1}{2\gamma} \binom{-1/2}{t} (-1)^t$$

D'où le résultat. □

4 Généralisations du modèle

4.1 Généralisation à une mesure quelconque

Remarquons que $p(\cdot, t)$ est défini par un produit de convolution de $p(\cdot, t-1)$ avec une certaine mesure qui dépend de t . Donnons-nous une collection $(\mu_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ de mesures finies sur les boréliens de \mathbb{R} de la forme

$$d\mu_t(y) = g_t(y)dy$$

où g_t est une fonction quelconque intégrable. On définit \mathfrak{s}_t par

$$\mathfrak{s}_t(f)(x) = \int f(x-y) d\mu_t(y) \tag{1}$$

où f est une fonction μ_t -intégrale quelconque. On définit $\mathfrak{s}_0(f) = f$. On définit par récurrence,

$$\begin{aligned} \Phi(f)(t)(x) &= \mathfrak{s}_t(\Phi(f)(t-1))(x) \\ &= \int \Phi(f)(t-1)(x-y_t) d\mu_t(y_t) \\ &= \int \dots \left(\int f(x - \sum_{j=1}^t y_j) d\mu_1(y_1) \right) \dots d\mu_t(y_t) \end{aligned}$$

Lemme 4.1. On note $p(x, t) = p(t)(x)$ et $X(0)$ est le profil initial de l'avalanche en $t = 0$, on a alors $p(t)(x) = \Phi(X(0))(t)(x)$ pour $t \geq 1$, en posant pour $t \geq 1$

$$g_t(y) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}} \varphi(t-1, \delta) \delta'(y - \delta)$$

où δ' est compris comme la limite de la suite des dérivées d'une famille naissante de Dirac.

Démonstration. Posons g_t comme dans l'énoncé. Montrons que $p(t) = \mathfrak{s}_t(p(t-1))$ et par récurrence, on aura le résultat. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_t(p(t-1))(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}} d\mu_t(y) p(t-1)(x-y) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} g_t(y) p(t-1)(x-y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left[\sum_{d \in \mathcal{E}} \delta'(y-d) \varphi(t-1, d) \right] p(t-1)(x-y) dy \\ &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} \varphi(t-1, d) \int_{y \in \mathbb{R}} \delta'(y-d) p(t-1)(x-y) dy \\ &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} \varphi(t-1, d) p(t-1)(x-d) \\ &= p(t)(x) \end{aligned}$$

La somme est finie, l'interversion somme-intégrable est donc justifiée, la dernière égalité est donnée par le théorème 1.1. L'initialisation est bien vérifiée car $p(0) = X(0)$. □

Lemme 4.2. Etant donné $p(0)$ un profil initial, et (μ_t) une collection de mesures finies. On définit $p(t) = \Phi(p(0))(t)$ et on note $\mathcal{L}(\theta, t) = \int_{y \in \mathbb{R}} e^{iy\theta} g_t(y) dy$ et on définit $\tilde{p}(\theta, t) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} p(t)(x) dx$ alors

$$\tilde{p}(\theta, t) = \mathcal{L}(\theta, t) \tilde{p}(\theta, t-1)$$

C'est le pendant des lemmes 1.2 et 1.3.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{N}^*$, on a formellement

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\theta, t) &= \int_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} \int_{y \in \mathbb{R}} g_t(y) p(t-1)(x-y) dy dx \\ &= \tilde{p}(\theta, t-1) \int_{y \in \mathbb{R}} e^{iy\theta} g_t(y) dy \\ &= \tilde{p}(\theta, 0) \int_{y \in \mathbb{R}^t} e^{i\theta(y_1 + \dots + y_t)} \times \left(\underbrace{\prod_{j=1}^t g_j(y_j)}_{=\mathcal{P}(y) \text{ poids du chemin } (y_1, \dots, y_t)} \right) dy \end{aligned}$$

Où les interversions des intégrales sont justifiées par le théorème de Fubini-Lebesgue (μ_t est une mesure finie). Nous sommes à deux doigts d'arriver à une intégrale de chemin... Ainsi,

$$p(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^t} \int_{y \in \mathbb{R}^t} e^{i\theta(y \cdot \mathbf{1} - x)} \tilde{p}(\theta, 0) \mathcal{P}(y) dy$$

On pose $\tilde{p}(\theta, 0) = 1$, alors

$$p(t)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^t} \mathbf{1}_{\{x\}}(y_1 + \dots + y_t) \mathcal{P}(y) dy$$

Ainsi, si $\tilde{p}(\theta, 0) = \int p(x, 0) e^{ix\theta} dx$ alors

$$p(t)(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} p(0)(z) \int_{y \in \mathbb{R}^t} \mathbf{1}_{\{x-z\}}(y_1 + \dots + y_t) \mathcal{P}(y) dy dz$$

Dans le cas précédent, on a $\tilde{p}(\theta, 0) = \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} p(x, 0)$, on remplace $p(0)(x)$ dans $\tilde{p}(\theta, 0) = \int p(0)(x) e^{ix\theta} dx$ par $p(x, 0) g_0(x)$ avec $g_0(x) = \sum_d \delta'(x-d) p(d, 0)$. Soit (y_1, \dots, y_t) un chemin, on a dans ce cas

$$\mathcal{P}(y) = \prod_{j=1}^t g_j(y_j) = \prod_{j=1}^t \varphi(j-1, y_j)$$

Et l'on retrouve le résultat les lemmes 1.2 et 1.3. □

4.2 Passage en temps continu

On exploite le lemme 4.2 pour nous ramener à une intégrale de chemin. Notons $g_t(y) = g(t, y)$. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un chemin. On définit alors le poids du chemin y par

$$\mathcal{P}(y) = \exp\left\{ \int_0^t \ln g(t, \dot{y}(t)) dt \right\}$$

alors en utilisant la notation des intégrales de chemin de Feynman,

$$\tilde{p}(\theta, t) = \tilde{p}(\theta, 0) \int e^{i\theta(y(t) - y(0))} \mathcal{P}(y) \mathcal{D}y$$

Puis,

$$p(t)(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} p(0)(z) \int_{y(t) - y(0) = x - z} \mathcal{P}(y) \mathcal{D}y dz$$

5 Temps de relaxation du modèle discret

5.1 Temps de relaxation

Définissons la variable de temps de relaxation, $T = \inf\{t \in \mathbb{N} : \cap_{x \in \mathbb{Z}} [X(s_x) = 0]\}$, étant donné une configuration ω , $T(\omega)$ est le temps d'effondrement.

Théorème 5.1. *Dans le cas où φ est indépendante de t , d'après [GL15], pour une certaine constante C connue dépendante de φ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} \mathbb{P}(T > t) = C$$

6 Conjecture sur les flux d'ordre supérieur

On définit le flux d'ordre k pour $k \geq 1$ par

$$\Phi_k(t) = \mathbb{E} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} X(s_x) \right)^k = \sum_{X=(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k} \mathbb{P}(s_{x_1} \cap \dots \cap s_{x_k})$$

En reprenant le calcul de Φ_2 , on pose par analogie $K_k(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(x, t)^k$. La conjecture (motivée par des résultats numériques) que nous faisons est que

$$K_k(t) \sim t^{(1-k)/2} / C_k$$

pour une certaine constante C_k , puis similairement, on obtient $\Phi_k(t) \sim C_k \sum_{t'=0}^t \left((1-z)^{(1-k)/2} \right)_{t'}$.

En utilisant $\sum_{t'=0}^t (-1)^{t'} \binom{(1-k)/2}{t'} \sim t^{(k-1)/2} C_{2,k}$, on aurait, $\Phi_k(t) \sim C_k C_{2,k} t^{(k-1)/2}$ avec $C_{2,2k} = 2^k / (2k-1)!! \sqrt{\pi}$ et $C_{2,2k+1} = 1/k!$. De manière à ce qu'on ait

$$\Phi_{2n+1}(t) \sim \frac{C_{2n+1}}{n!} t^n \quad \Phi_{2n}(t) \sim \frac{C_{2n} 2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!} t^{(2n-1)/2}$$

7 Questions ouvertes

Calculer les grandeurs suivantes

$$\forall I \subset \mathbb{Z}^d, \forall n \in \mathbb{N}, \forall T \in \mathbb{N}, \mathbb{P} \left(\sum_{x \in I} A(x, t) \geq n \right), \mathbb{P} \left(\sum_{t=0}^T \sum_{x \in I} A(x, t) = 0 \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n = \min \{ t \in \llbracket 0; +\infty \rrbracket / \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A(x, t) = n \}, \mathbb{E} \tau_n$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall n \in \mathbb{N}, \forall T \in \mathbb{N}, \mathbb{P} \left(\sum_{\tau=0}^T A(x, \tau) \geq n \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A(x, t) \right) (\omega) \mathbb{1}_{t=\tau_n}(\omega), \mathbb{E}(S_n^2)$$

References

- [CCSC00] Pushpa N. Rathie Camila C. S Caiado. Polynomial coefficients and distribution of the sum of discrete uniform variables. 2000.
- [DD16] Paul Expert Kim Christensen Nicky Zachariou Deepak Dhar, Gunnar Pruessner. Directed abelian sandpile with multiple downward neighbors. *Phys. Rev. E* 93, 042107, 2016.
- [GL15] Jean-François Le Gall and Shen Lin. The range of tree-indexed random walk in low dimensions. *The Annals of Probability*, 43(5):2701 – 2728, 2015.
- [JAA14] M. Schäfer E.Z. Welty S. O’Neel T.C. Bartholomäus Yan Liu T. I. Riikilä T. Zwinger J. Timonen J. C. Moore J. A. Astrom, D. Vallot. Termini of calving glaciers as self-organized critical systems. *Nature geoscience*, 2014.
- [Kle82] C. F. Klebaner. Branching random walk in varying environments. *Advances in Applied Probability*, 14(2):359–367, 1982.