

由真假虎照事件引发的对于 二次照片鉴别问题的研究

所在学校:嘉定一中

参赛学生:石易沉,王紫,石天宇

论文摘要

周正龙虎照”在 2008 年曾引起社会广泛的热议。根据题目，我们对判断照片的真伪进行了如下的探究。

本文首先就实物拍摄成照片进行讨论，以正方体为例，求解出实物照片上各点的坐标，再就此用分类讨论的方法，以一次照片是否与光轴垂直为分类依据，得出当垂直时无法鉴别一次与二次照片；当一次照片与光轴成一定角度时可鉴别。在探讨第二种情况（即不垂直时），定义一次照片与竖直方向角度为 β ，得出关于 β 的函数，据画出的函数图像的，此种情况下，二次照片纵高与横向比例缩小，由此鉴别一次与二次照片。最后就实际问题，对周正龙虎照”进行分析研究，得出一般结论。

关键词：正龙拍虎，二次照片，鉴别照片

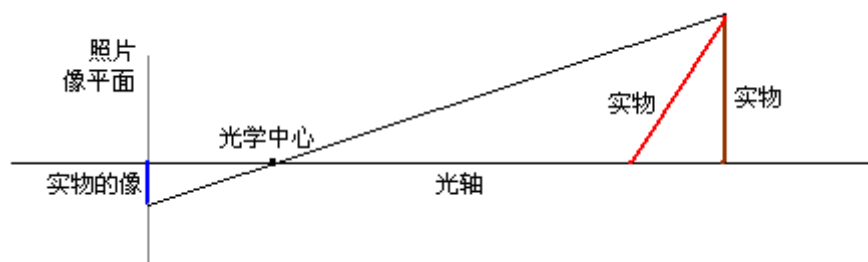
问题提出

周正龙虎照”在 2008 年曾引起社会广泛的热议。虽然最后法院作出了公正的判决，但是“挺虎派”翻案的言行时有所闻。我们使用数学建模的方法对真假相片的问题做了科学性的探索。

模型假设

为简化问题，我们作如下的假设：

1. 照像机按照小孔成像的原理拍照；



图_1

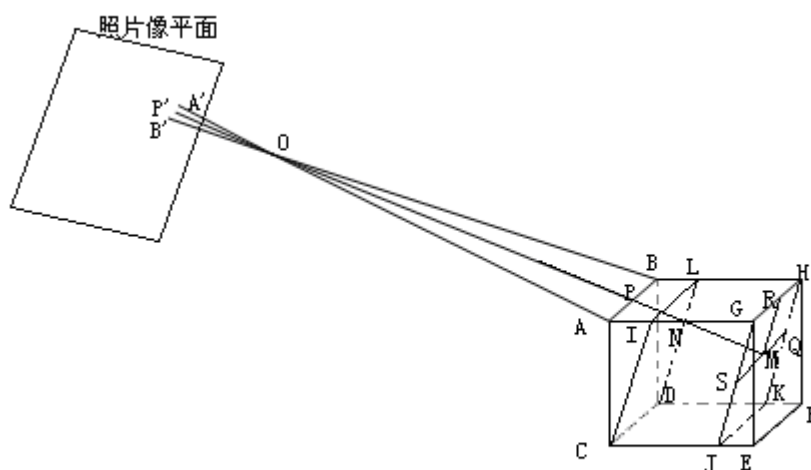
如图，我们只考虑黑白照片，两个实物(分别用红色和褐色标出)的像是一样的。

2. 照片像平面的中心为光轴所在的位置；
3. 照相机的参数（如光学中心到像平面的距离等）不变。
4. 所鉴定的相片未被人为修改、扭曲。

变量表_1

变量名	意义	数值
α	光轴与地面所成角	$\arcsin \frac{0.8}{20}$
d	光学中心 O 到照片像平面距离	后文计算
h	光学中心 O 离地距离	1m
l	正方体棱长	0.2m
OP	光学中心 O 到 P 点的距离	20m
S_1	光学中心 O 到平面 CDIL 的距离	后文计算
S_2	光学中心 O 到平面 HGJK 的距离	后文计算
m	C'Q 在投影面上长;即 C,D 到投影 X 轴的距离	后文计算
n	CD 在投影上的长	后文计算

模型建立



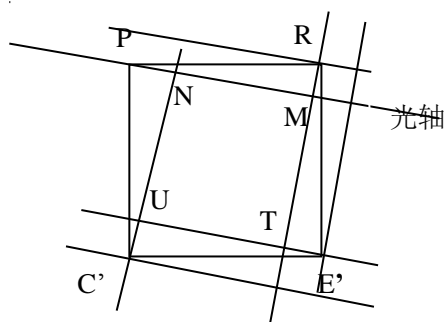
图_2

如图_2, 设正方体为 $ABDC\text{-}GHFE$, 其中正方体上靠近照相机的那条棱的中点为 P , 过 CD 作平面 $CDIL$ 平行于照片像平面, 交平面 $ABGH$ 于 IL , 过 HG 作平面 $HGJK$ 平行于照片像平面交平面 $CDFE$ 于 KJ , 光轴与平面 $HGJK$ 交点为 M , 与平面 $CDIL$ 的交点为 N 在平面 $HGJK$ 中过 M 作 QS 平行于 GH , 交 GE , HF 于 S , Q , 过 M 做 MR 平行于 GJ , 交 GH 于 R 。设照片像平面上正方体各点关于 O 的投影依次为 $A_2B_2D_2C_2\text{-}G_2H_2F_2E_2$;同理, P 点关于 O 的投影为 P_2 。

易知,与光轴垂直的同一平面上的任意线段与关于光学中心在照片像平面上的投影线段成相同比例关系。

模型求解：

问题一：设照相机的光轴通过 P 点。试计算照相机所能拍摄到的正方体各顶点在照片上的坐标以及对应的棱长。我们约定：像平面上 P 点所在棱的长度为单位长度 1。



图_3

以 A_2B_2 为 X 轴，以过 P_2 关于 A_2B_2 的垂线为 Y 轴， P_2 点为原点建立直角坐标系。
根据假设易知 $A_2(0.5,0), B_2(-0.5,0)$ 。

如图_3，正方形 $PRE'C'$ 为正方体过 P 点且平行于平面 $ACEG$ 的截面，PM 为光轴，由示例可知 PC' 在投影的高与 $C'N$ 一样。

$$\angle RPM = \angle \alpha$$

$$\therefore C'N = PC' \times \cos \alpha$$

$$S_1 = OP + PC' \times \sin \alpha$$

$$\frac{S_1}{d} = \frac{C'N}{m} = \frac{CD}{n}$$

$$\therefore m = \frac{d \times C'N}{S_1} = \frac{PC' \times \cos \alpha \times d}{OP + PC' \times \sin \alpha}$$

$$\text{又} \because \frac{op}{d} = \frac{AB}{1} \quad \therefore d = \frac{OP}{AB} = OP / AC = 100$$

$$\therefore m = \frac{PC' \times \cos \alpha \times \frac{OP}{AB}}{OP + PC' \times \sin \alpha} + \quad n = \frac{CD \times \frac{OP}{AB}}{OP + AC \times \sin \alpha}$$

将数据代入得 $m=0.9988$, 即 C_2, D_2 两点纵坐标为 0.9988. $n=0.9996$, 即横坐标的绝对值为

$$\frac{1}{2} n = 0.4998. \text{即 } C_2 (0.4998, 0.9988), D_2 (-0.4998, 0.9988)$$

$$S_1 = AC \times \tan \alpha \times \cos \alpha + OP = 0.2 \times \tan \alpha \times \cos \alpha + 20 = 20.008$$

$$S_2 = (AG - AC \times \tan \alpha) \times \cos \alpha + S_1 \approx 20.2$$

$$SM = MQ = \frac{1}{2} GH = 0.1$$

$$RM = AG \sin \alpha = 8 \times 10^{-3}$$

设 H, G 在照片像平面的射影为 $H_2 (-|X|, -|Y|)$ $G_2 (|X|, -|Y|)$

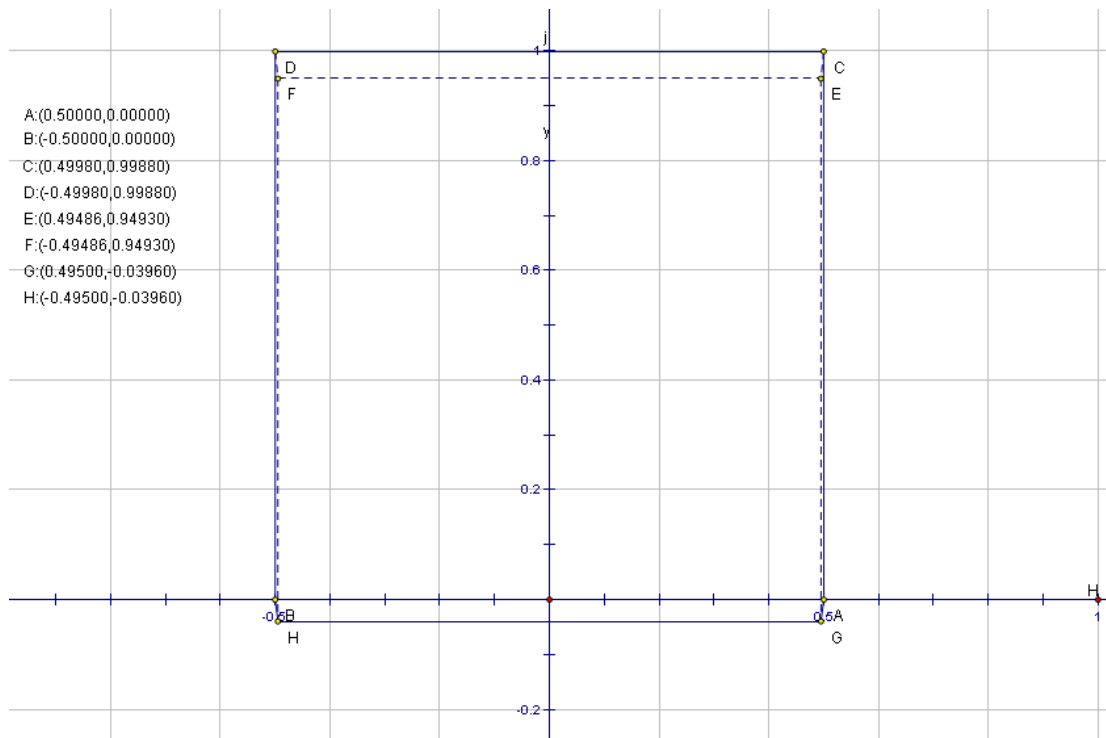
$$RM/|Y|=S_2/d \quad |Y|=RM \times f/S_2 \approx 0.0396$$

$$SM/|X|=S_2/d \quad |X|=SM \times f/S_2 \approx 0.495$$

$$H_2 (-0.495,-0.0396) \quad G_2 (0.495,-0.0396)$$

$$\text{同理 } E_2 (0.49486,0.9493) \quad F_2 (-0.49486,0.9493).$$

根据以上求得的坐标绘图如下，图_4:



图_4

$$\therefore A_2(0.5,0), \quad B_2(-0.5,0)$$

$$C_2 (0.4998,0.9988), \quad D_2 (-0.4998,0.9988)$$

$$H_2 (-0.495,-0.0396), \quad G_2 (0.495,-0.0396)$$

$$E_2 (0.49486,0.9493), \quad F_2 (-0.49486,0.9493).$$

$$|A_2B_2|=1$$

$$|C_2D_2|=0.9996$$

$$|E_2F_2|=0.98972$$

$$|G_2H_2|=0.99$$

$$|A_2C_2|=0.99880002$$

$$|D_2B_2|=0.99880002$$

$$|F_2H_2|=0.988900009$$

$$|E_2G_2|=0.988900009$$

$$|D_2F_2|=0.04974589$$

$$|C_2E_2|=0.04974589$$

$$|A_2G_2|=0.039914408$$

$$|B_2H_2|=0.039914408$$

问题二：如果在前方某位置上放一张你刚才拍摄的照片，照片中 P 点所在的棱长为 a (cm)。现让照相机的光轴通过照片中的 P 点对照片拍照。我们约定由此拍摄得到的照片称为“二次照片”。请用数学建模的方法说明如何区别实体照片与二次照片。要说明你的判别方法所适用的条件。这里所说的照片，都可以理解为“底片”，即像平面上的像。

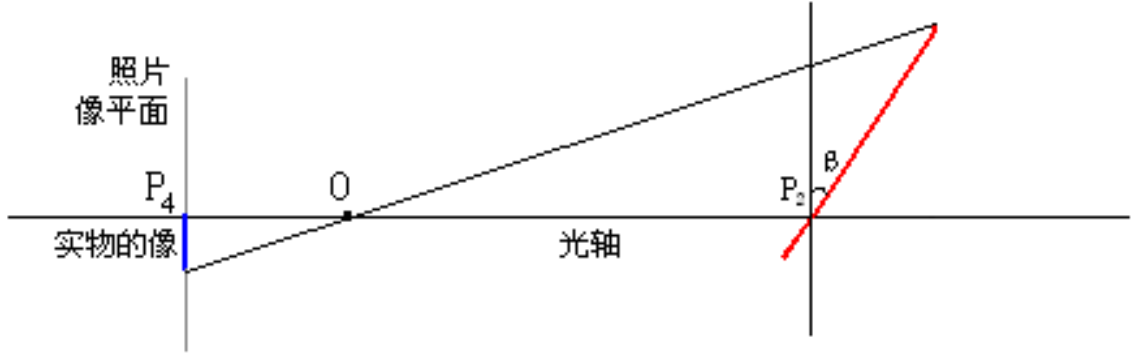
①当相片垂直于地面时，二次照片像平面上的点坐标及棱长： $\frac{b}{100} = \frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{C_2D_2}{C_3D_3} = \dots\dots$

这些棱长及点的相对位置未变化，此时用该方法无法分辨真实照片与二次照片。

②在现实生活中，完全准确地使相片垂直于地面是相当困难的，所以我们假设当相片与竖直方向成一定角度时，二次照片像平面上的点坐标及棱长：

变量表_2		
变量名	意义	数值
α	光轴与地面所成角	0
β	照片与竖直方向的夹角	$[-90^\circ, 90^\circ]$
d	光学中心 O 到照片像平面距离	100
h	光学中心 O 离地距离	$0.0396\cos \beta$ cm
OP ₃	光学中心 O 到 P ₂ 点的距离	bcm
h'	照片像平面上图形的纵高	\

$$\begin{aligned}
 |A_2B_2| &= a \\
 |C_2D_2| &= 0.9996a \\
 |E_2F_2| &= 0.98972a \\
 |G_2H_2| &= 0.99a \\
 |A_2C_2| &= 0.99880002a \\
 |D_2B_2| &= 0.99880002a \\
 |F_2H_2| &= 0.988900009a \\
 |E_2G_2| &= 0.988900009a \\
 |D_2F_2| &= 0.04974589a \\
 |C_2E_2| &= 0.04974589a \\
 |A_2G_2| &= 0.039914408a \\
 |B_2H_2| &= 0.039914408a
 \end{aligned}$$



图_5

如图_5 所示的拍摄方式，令该图中的 β 为正值。

设 $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, H_2$ 在二次照片像平面上的投影为 $A_4, B_4, C_4, D_4, E_4, F_4, G_4, H_4$

易知， $A_4(-50a/b, 0), B_4(50a/b, 0)$ 。

$$\therefore \frac{b + |y_{C_2}| \sin \beta}{100} = \frac{C_2 D_2}{C_4 D_4} = \frac{|y_{C_2}| \cos \beta}{|y_{cd}|}$$

$$\therefore C_4 D_4 = \frac{d C_2 D_2}{b + |y_{C_2}| \sin \beta} = \frac{99.96a}{b + 0.9988a \sin \beta}$$

$$y_{cd} = -\frac{|y_{C_2}| d \cos \beta}{b + |y_{C_2}| \sin \beta} = -\frac{99.88a \cos \beta}{b + 0.9988a \sin \beta}$$

$$\therefore C_4 \left(-\frac{49.98a}{b + 0.9988a \sin \beta}, -\frac{99.88a \cos \beta}{b + 0.9988a \sin \beta} \right);$$

$$D_4 \left(\frac{49.98a}{b + 0.9988a \sin \beta}, -\frac{99.88a \cos \beta}{b + 0.9988a \sin \beta} \right)。$$

设 E_2, F_2 在二次照片像平面上的投影为 $E_4(|X_4|, -|Y_4|), F_4(-|X_4|, -|Y_4|)$

$$\frac{0.49486a}{|X_4|} = \frac{OP_3 + 0.9493a \sin \beta}{100}, \quad \frac{0.49486a}{|X_4|} = \frac{b + 0.9493a \sin \beta}{100}, \quad |X_4| =$$

$$\frac{49.486a}{b + 0.9493a \sin \beta}$$

$$\frac{0.9493a \cos \beta}{|Y_4|} = \frac{OP_3 + 0.9493a \sin \beta}{100}, \quad \frac{0.9493a \cos \beta}{|Y_4|} = \frac{b + 0.9493a \sin \beta}{100}, \quad |Y_4| =$$

$$\frac{94.93a \cos \beta}{b + 0.9493a \sin \beta}$$

$$\therefore E_4\left(\frac{49.486a}{b + 0.9493a \sin \beta}, -\frac{94.93a \cos \beta}{b + 0.9493a \sin \beta}\right)$$

$$F_4\left(-\frac{49.486a}{b + 0.9493a \sin \beta}, -\frac{94.93a \cos \beta}{b + 0.9493a \sin \beta}\right)$$

$$\frac{d}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta} = \frac{G_4 H_4}{G_2 H_2} = \frac{|y_{H_4}|}{|y_{g_2}| \cos \beta}$$

$$G_4 H_4 = \frac{G_2 H_2 \times d}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta} \quad |y_{H_4}| = \frac{d \times |y_{g_2}| \cos \beta}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta}$$

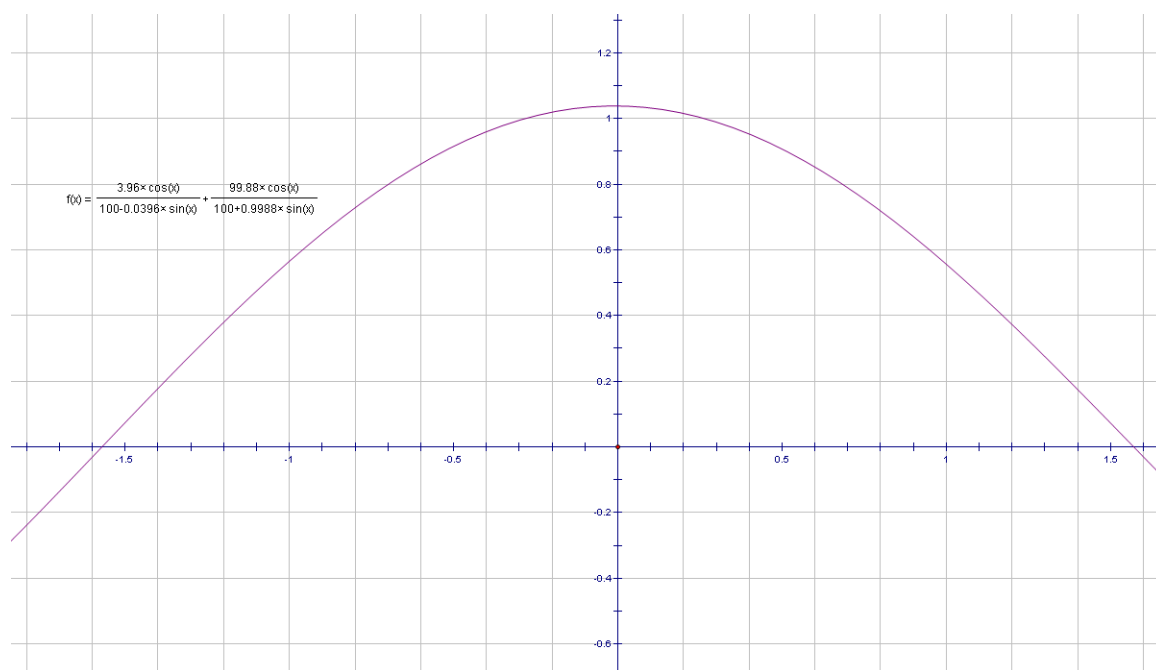
$$G_4\left(\frac{1}{2} \times \frac{G_2 H_2 \times d}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta}, \frac{d \times |y_{g_2}| \cos \beta}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta}\right) \quad H_4\left(-\frac{1}{2} \times \frac{G_2 H_2 \times d}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta}, \frac{d \times |y_{g_2}| \cos \beta}{b - |y_{g_2}| \times \sin \beta}\right)$$

$$\therefore G_4\left(\frac{49.5a}{b - 0.0396a \sin \beta}, \frac{3.96a \cos \beta}{b - 0.0396a \sin \beta}\right)$$

$$H_4\left(-\frac{49.5a}{b - 0.0396a \sin \beta}, \frac{3.96a \cos \beta}{b - 0.0396a \sin \beta}\right)。$$

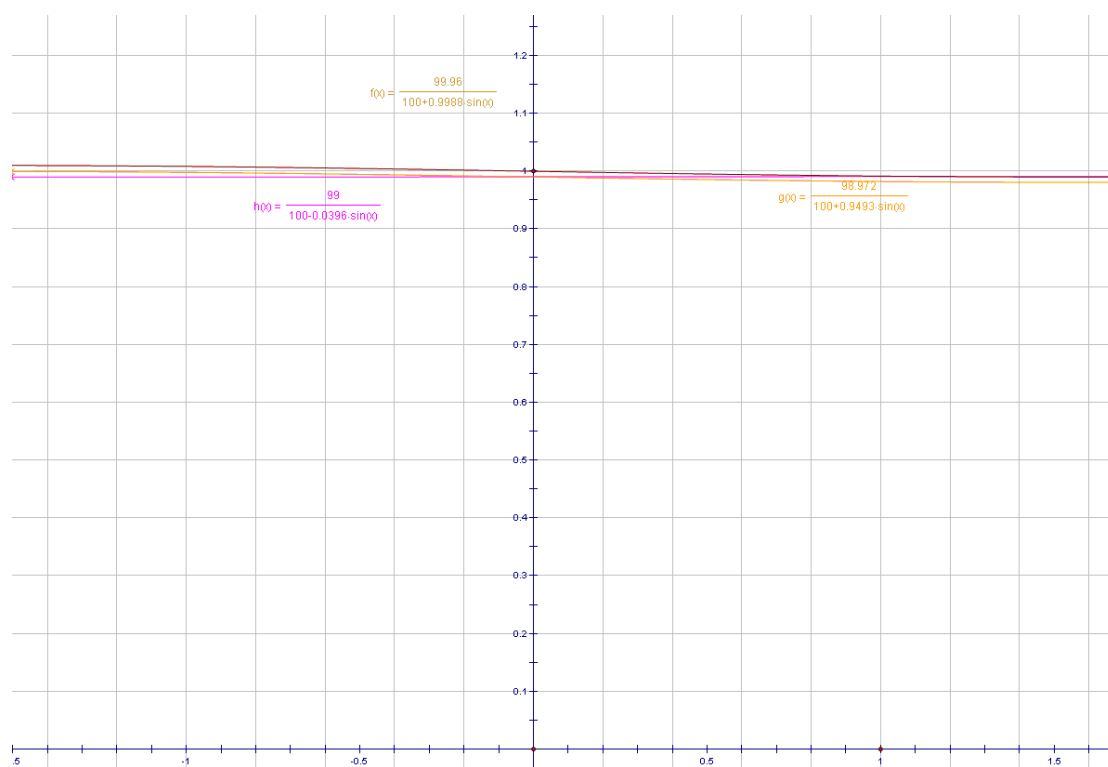
令 $a=1$, $|A_4 B_4|=|A_2 B_2|=1$, 则 $b=100a$ 。

$$\therefore h' = \frac{3.96 \cos \beta}{100 - 0.0396 \sin \beta} + \frac{99.88 \cos \beta}{100 + 0.9988 \sin \beta}, \quad \text{该函数图象如下图所示}$$



图_6

而 C_4D_4 , E_4F_4 , G_4H_4 的图象分别如下所示, 依次为 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 。其中 x 表示变量 β 。我们可以看出, 它们随着 β 所产生的变化并不如 h' 大, 因此我们采用 h' 作为判断标准。



图_7

$\beta = 0$ 时,

$$h_0' = 1.0384$$

若 $h=h_0'$,则无法判断该照片是否为二次照片,

若 $h<h_0'$,则该照片为二次照片。

因此我们的鉴别方法的条件为已知原始照片的高度和两张照片中 $|AB|$ 的长度, 等比放缩鉴别照片, 使鉴别照中 $|AB|$ 的长度和原始照片中的长度相等, 比较两照片的纵高, 若鉴别照的纵高比原始照的纵高小, 则一定为二次照。且 $(h-h_0')$ 越大, 说明拍摄的照片越倾斜。

问题三: 请你对虎照进行思考, 提出用数学知识鉴别真伪的设想, 并对你的设想作简单的说明。



图_8

如图, 上面的一张是周正龙所拍摄的虎照得截图, 下面的是虎年画上的虎头截图。

在真实情况下, 照片上的图形大多并不是形状规则的图形, 但是由于我们的模型主要是计算高度, 所以具体方法并不会有所改变。

首先找到与光轴恒垂直的 A_1B_1 , A_2B_2 (即照片中心点平行于水平方向的线段, 根据实际图形长度相应改变), 等比缩放使 A_1B_1 , A_2B_2 , 比较虎头高度, $h_1<h_2$, 所以 h_1 所在的图是二次照片。

当图片相差较小时, 多次测量不同点到 A_1B_1 (A_2B_2) 的距离 (例如左眼眼角到 A_1B_1 (A_2B_2))

的距离 h_3 (h_4) 等), 得出较为准确的结果计算 $\sum_{i=1}^k (h_{2i} - h_{2i-1})$ 。当该式大于 0 时, 以偶数标

记的图片是真实图片，该式小于 0 时，则以奇数标记的图片是真实图片。

模型检验

1、关于问题二，

若 $b=100a$, $\beta=30^\circ$,

则 $A_4(-0.5,0)$, $B_4(0.5,0)$

$C_4(-0.497316,-0.860688)$ $D_4(0.497316,-0.860688)$

$E_4(0.49252,0.81823)$, $F_4(-0.49252,0.81823)$

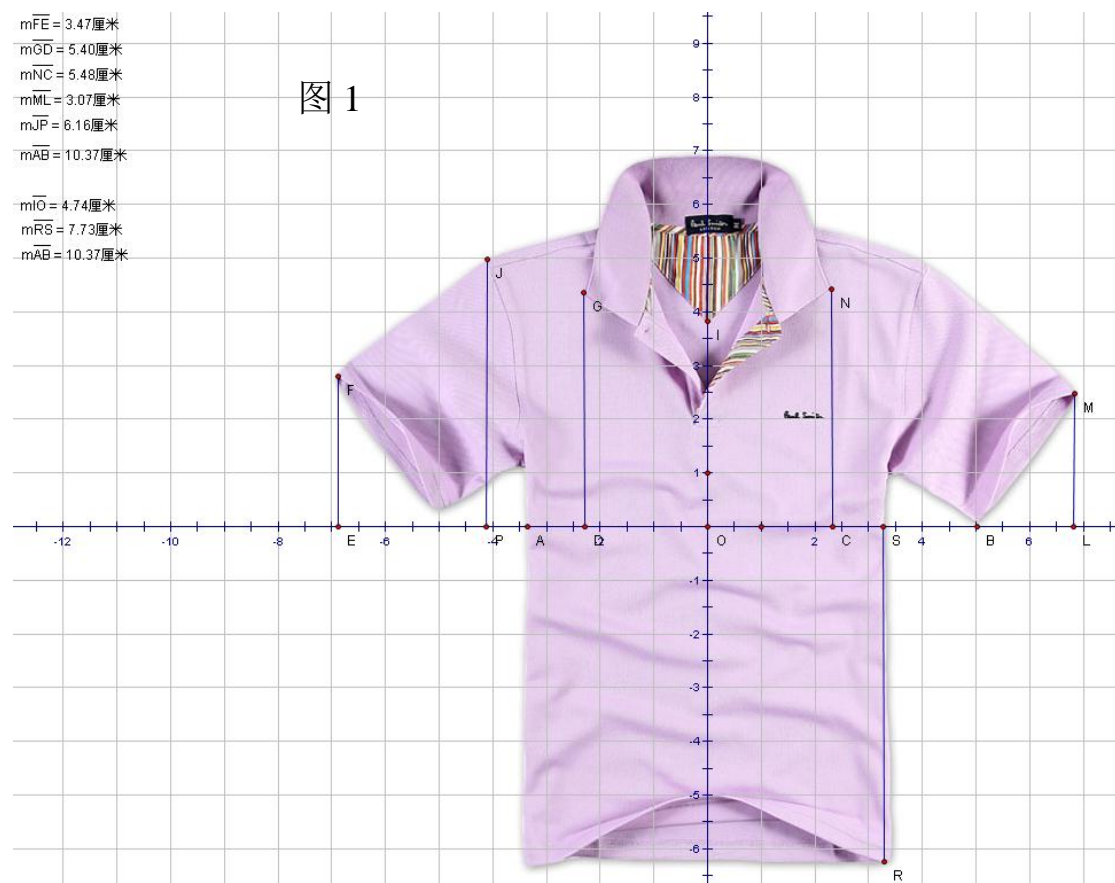
$G_4(0.495098,0.034301294)$ $H_4(-0.495098,0.034301294)$

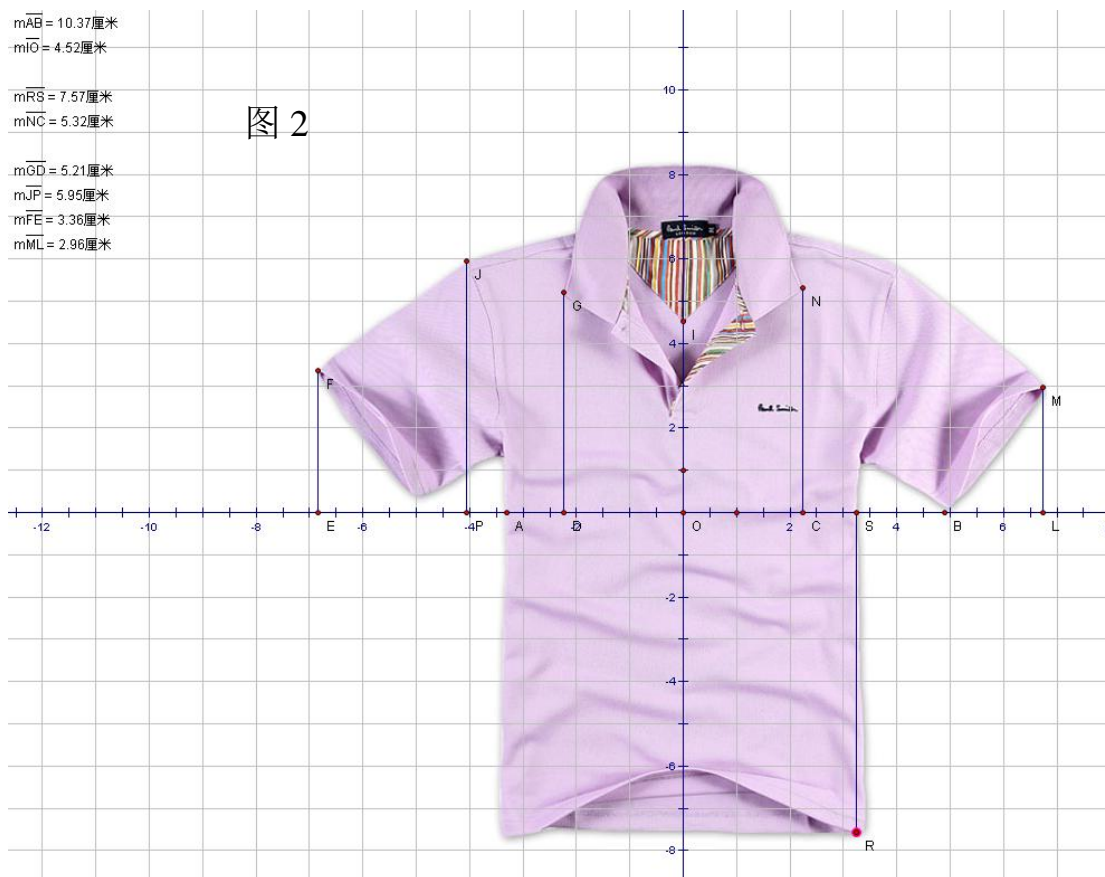
$h=0.894989 < h_0$, 因此是二次照。

2、关于问题三，

我们拍摄了一张衣服的一次照片与二次照片，分别测出与光轴恒垂直的 A_1B_1 , A_2B_2 以及袖角，肩部，领角等到 A_1B_1 (A_2B_2) 的距离，字母依次对应。

$|A_1B_1|=|A_2B_2|=10.37\text{cm}$





$$\therefore \sum_{i=1}^7 (h_i^1 - h_i^2) = 0.111861137 \text{ (cm)}$$

\therefore 图 1 是一次照片，图 2 是二次照片。
 与现实情况吻合，可知模型是正确的。

模型的优缺点：

优点：

- 1、该模型可以运用于各种照片鉴别，包括一次二次照片鉴别，二次三次照片鉴别等等。
- 2、经过多次测量，鉴别出的结果非常精确，不易出错。
- 3、适用于原照片多种角度倾斜，多种方向倾斜而拍摄出的二次照片的鉴别。
- 4、适用于不规则对象，比较灵活。

缺点：

限制条件：照片不可与地面完全垂直。

参考文献

- 1、 <http://baike.baidu.com/view/104209.htm>
- 2、 虎年画来源： <http://www.bokee.org/upload/2008/6/W020071116768701091810.jpg>
- 3、 正龙虎照来源：
http://www.uux.cn/attachments/2007/11/1_200711231440201.thumb.jpg

使用软件

几何画板 4.07 中文版