

Méthode d'optimisation : *Simulated Annealing* ou "le recuit simulé"

1.1 Historique

La méthode de "recuit simulé" ou *simulated annealing* [1, 2] est un algorithme d'optimisation. En mathématiques, l'optimisation consiste en la recherche de minimum d'une fonction donnée: le domaine d'application couvre ainsi des disciplines aussi diverses que l'informatique et la génétique en passant, entre autres, par la physique^a.

Historiquement, la méthode de "recuit simulé" tire son nom et son inspiration de pratiques issues de la thermodynamique et plus particulièrement, de la façon dont les métaux sont chauffés puis refroidis. En métallurgie, le recuit d'une pièce métallique est un procédé correspondant à un cycle de chauffage, maintien en température puis refroidissement contrôlé permettant de modifier les caractéristiques de ce métal. À l'origine, les atomes qui composent le métal sont pris dans une structure cristalline solide. Lorsque le métal est chauffé, l'énergie disponible permet aux molécules de briser leurs liaisons chimiques rendant aux atomes, leur mobilité. Si le métal est refroidi lentement, la mobilité thermique diminue et les atomes cherchent à former de nouvelles liaisons. Chose surprenante, ils se répartissent souvent de manière plus régulière vis-à-vis de leur configuration initiale. Du point de vue chimique, la stabilité du métal tient à l'agencement des atomes et au fait que leurs états respectifs atteignent alors un minimum global d'énergie. Si tout est fait dans les règles de l'art, le métal devient plus souple, plus flexible et présente moins d'irrégularités^b. Dans le cas contraire, si le métal est refroidi brusquement, il atteint un état "instable", polycristallin d'énergie plus élevée.

Le cœur du processus est ainsi un refroidissement lent, autorisant des temps suffisamment longs pour que les atomes se redistribuent au fur et à mesure que leur mobilité diminue. Physiquement, le mécanisme naturel de minimisation de l'énergie repose sur la distribution de probabilité de Boltzmann

$$p(E) \propto \exp(-E/kT) \tag{1.1}$$

Cette équation traduit le fait qu'un système à l'équilibre thermique à la température T , présente une distribution de ces états d'énergie E . À basse température, il est possible, bien que la probabilité soit infime, de trouver le système dans un état de grande énergie. Cependant, il existe

^ade telles approches souffrent toutefois d'une certaine forme de discrédit au sein de la communauté physicienne. La principale raison tient à leur important "contenu" mathématique qui a tendance à rebuter le physicien *lambda*. Nous verrons néanmoins que cette réputation est largement surfaite et que la mise en œuvre de telles méthodes ne présentent pas de réelles difficultés.

^bce procédé est notamment utilisé lors de la fabrication de semi-conducteurs en silicium pour les microprocesseurs et les modules de mémoire des ordinateurs. Ces composants nécessitent un cristal de silicium extrêmement pur, ne présentant en particulier aucune irrégularité.

également une probabilité complémentaire autorisant le système à rejoindre un état de moindre énergie; l'objectif final étant de parvenir d'un état métastable correspondant à un minimum local d'énergie, à l'état stable de plus basse énergie. Ce faisant, le système "emprunte" ponctuellement des états de plus haute énergie, d'autant plus défavorisés que la température est faible, mais qui, à terme, lui permettront de rejoindre l'état d'énergie minimum.

La probabilité qu'un système thermodynamique passe d'un état d'énergie E_1 à un état d'énergie E_2 , est donc égale à $p = \exp[-(E_2 - E_1)/kT]$. Si $E_1 > E_2$, la probabilité p est toujours plus grande que 1, le système choisira systématiquement cette nouvelle configuration. Toutefois, un état de plus grande énergie sera toléré avec une probabilité p d'autant plus faible que la température sera minime.

Metropolis *et al.* [3] furent les premiers à implémenter, dès 1953, ce type de principe dans le calcul numérique. Inévitablement, les méthodes reposant sur ce schéma général, privilégiant systématiquement les états de moindre "énergie" tout en tolérant, sous certaines conditions, des états naturellement défavorisés, se regroupent sous le nom d'algorithme Metropolis(-Hastings)^c.

1.2 Présentation de l'algorithme Métropolis-Hastings

Dans le "recuit simulé", chaque paramètre ou ensemble de paramètres \mathbf{y} est analogue à l'état physique d'un système tandis que la fonction à minimiser -- vraisemblance, χ^2 , lagrangien ... -- est similaire à l'énergie interne de ce système. Le but est "d'amener" progressivement, le système d'un état initial arbitraire vers un état correspondant au minimum global "d'énergie" c'est-à-dire au minimum global de la fonction à minimiser. L'algorithme Metropolis-Hastings [3, 4] dont nous allons décrire formellement le principe à l'aide de la Figure 1.1, présente le double intérêt d'être à la fois simple et polyvalent, répondant ainsi à une grande variété de problèmes.

METROPOLIS-HASTINGS(\mathbf{x})

```

1   $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y}_{\text{init}} ; T \leftarrow T_{\text{init}}$ 
2  faire
3       $\mathbf{y}_{\text{candidat}} \leftarrow \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$ 
4       $\Delta E \leftarrow E(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{\text{candidat}}) - E(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 
5      si  $\exp(-\Delta E/T) \geq \mathcal{U}[0,1]$ 
6           $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y}_{\text{candidat}}$ 
7       $T \leftarrow T \searrow$ 
8  jusqu'à refroidissement
9  retourner  $\mathbf{y}$ 
```

Figure 1.1 -- Algorithme Metropolis-Hastings [3, 4] adapté à la méthode de "recuit simulé". L'observable est représentée par le vecteur \mathbf{x} .

Étant donné le signal observé \mathbf{x} , les paramètres \mathbf{y}_{init} sont initialisés de telle sorte que le coût *i.e.* la valeur de la fonction à minimiser soit non-nulle (Ligne 1). Lors de cette phase d'initialisation, le système est artificiellement porté à "haute température" afin d'autoriser le parcours des différentes structures de la fonction à minimiser. Une boucle est ensuite initiée (Ligne 2) où à chaque itération i , les paramètres antérieurs \mathbf{y}_{i-1} sont perturbés (Ligne 3). L'"énergie" est de nouveau évaluée (Ligne 4) et le nouvel état du système est systématiquement accepté (Ligne 5) dès lors que le coût en énergie est moindre ($\Delta E \leq 0$). Cette condition impose au système de tendre vers un état correspondant à un minimum local, éventuellement global, d'énergie. Cependant, les problèmes complexes présentent généralement de nombreux minima locaux et les processus d'optimisation

^cl'algorithme a été nommé d'après Nicholas Metropolis, qui avec Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller et Edward Teller rédigea l'article fondateur de 1953, "Equations of State Calculations by Fast Computing Machine" [3] proposant l'algorithme pour le cas spécifique de la distribution de Boltzmann; Keith W. Hastings [4] l'étendit au cas plus général en 1970.

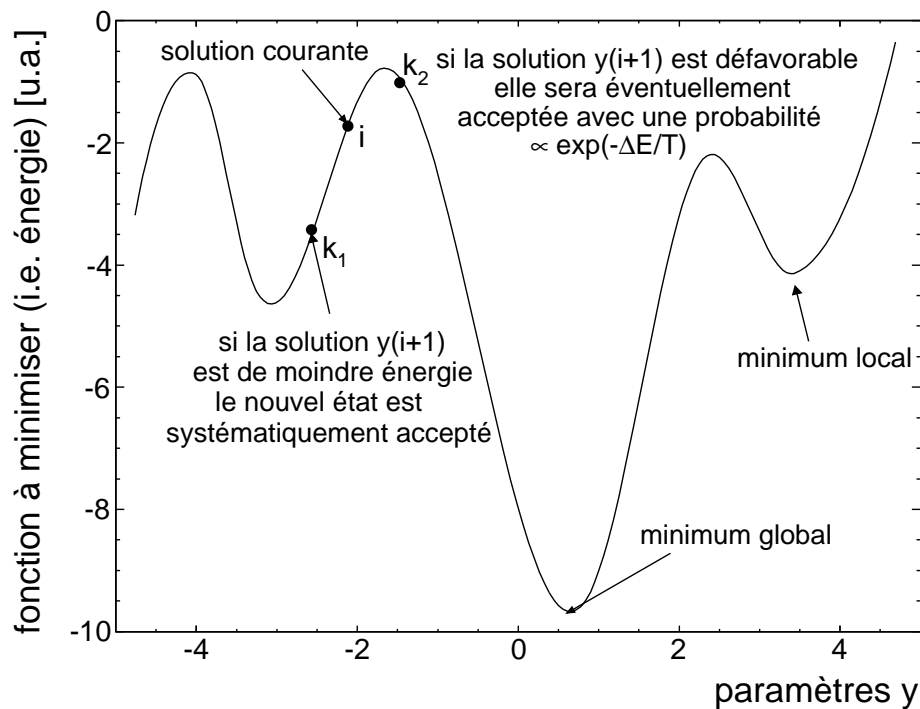


Figure 1.2 -- Détermination d'un nouvel état pour la méthode de "recuit simulé".

ont tendance à se "stabiliser" au voisinage de ces états métastables. Afin de s'extraire de ces minima locaux, une augmentation de l'énergie est alors tolérée (Ligne 5) avec une probabilité égale à la valeur déduite de l'équation de Boltzmann (Équation 1.1). Initialement, la température T est excessivement haute de telle sorte que la probabilité de Boltzmann est voisine de 1 indépendamment du changement d'énergie: la grande majorité des nouveaux états sont par conséquent acceptés. Néanmoins, la probabilité d'adopter une configuration défavorable (*i.e.* d'énergie plus grande) est d'autant plus faible que le système se refroidit (Ligne 7). Ainsi, le système "parcourt", lors des premières itérations, une vaste région de l'espace des paramètres y contenant minima locaux et solution globale, tout en ignorant les faibles variations de la fonction à minimiser. La température diminuant, le système dérive progressivement vers les régions de moindre énergie, l'amplitude des variations devenant également de plus en plus faible. Dans les derniers stades de l'algorithme, seules les configurations telles que $\Delta E < 0$ sont acceptées. Ainsi, l'algorithme explore l'ensemble du domaine de variation de la fonction à minimiser évitant de la sorte de converger vers un minimum local. La solution finale est obtenue lorsque le système est gelé à savoir lorsque la température atteint une valeur critique (Ligne 8).

Les principales caractéristiques de la méthode de "recuit simulé" sont illustrées sur la Figure 1.2. À titre d'exemple, le nouvel état k_1 est toujours accepté alors que l'état k_2 est toléré avec une certaine probabilité. Cette probabilité d'accepter des nouveaux états de plus grande énergie est grande au début du processus itératif mais diminue au fur et à mesure que le système se refroidit. C'est cette faculté à accepter des configurations naturellement défavorables qui permet à l'algorithme de s'extraire des régions de minimum local garantissant, au moins théoriquement, la convergence vers la solution globale.

1.3 Forces et faiblesses de la méthode de "recuit simulé"

En tant que technique générale d'optimisation, la méthode de "recuit simulé" apporte une solution appropriée aux modèles hautement non-linéaires, aux données bruitées ou soumises à de fortes contraintes. L'un des ses principaux avantages vis-à-vis des méthodes de régression tient à sa polyvalence étant donné que l'algorithme Metropolis-Hastings sur lequel repose la méthode, ne s'appuie sur aucunes propriétés intrinsèques au modèle. Ainsi, la méthode est tout aussi efficace dans l'ajustement de fonctions multi-paramètres (cf. Partie 1 du projet) que dans l'optimisation du parcours du voyageur de commerce (cf. Partie 2 du projet).

Cependant, il existe clairement un compromis entre "la qualité" de la solution trouvée et le temps nécessaire à sa détermination. Si le système est refroidit rapidement autrement dit si le temps de calcul est court, l'algorithme peut se trouver alors "bloqué" dans un état métastable relativement éloigné de l'état de moindre énergie. D'autre part, plusieurs conditions sont requises afin de garantir la convergence de la procédure. En particulier, les perturbations aléatoires Δy doivent être symétriques de façon à assurer l'équivalence des chemins aller et retour *i.e.*

$$p(y + \Delta y | y) = p(y | y + \Delta y)$$

Dans la pratique, on choisira donc des perturbations gaussiennes de moyenne nulle et de variance fixe en prenant garde aux conditions aux limites (par exemple, en faisant "rebondir" les paramètres aux limites en utilisant la valeur absolue). Enfin, l'amplitude des perturbations Δy relève d'un savant dosage afin que le taux d'acceptation (Ligne 5) ne soit ni trop grand de telle manière que la chaîne stagne dans des minima locaux, ni trop faible restreignant alors l'exploration de la distribution des paramètres y à certaines valeurs. L'optimisation de la convergence qui est en soi un domaine de recherches intensives revêt, de ce point de vue, un intérêt et une attention particulière^d.

1.4 Projet informatique associé à la méthode de "recuit simulé"

1.4.1 Préalable à l'utilisation de la méthode

Dans un premier temps, le projet consistera en l'implémentation de la méthode de "recuit simulé". Pour ce faire, on définira une classe abstraite `OptimizationMethod` contenant les méthodes virtuelles pures d'initialisation, d'exécution et de finalisation. On définira ensuite une classe `SimulatedAnnealing`, héritant des propriétés de la classe `OptimizationMethod`, et spécifiant les méthodes et les membres. On fera en sorte que les paramètres inhérents à la méthode de "recuit simulé" (amplitude des perturbations, températures initial et final, taux de refroidissement) puissent être lus *via* un fichier texte indépendant. D'autre part, on définira une classe abstraite `CostFunction` dont hériteront les fonctions à minimiser (χ^2, \dots). Les définitions des fonctions à minimiser seront donc données *via* la redéfinition des méthodes de `CostFunction`. Le choix de la fonction à minimiser devra également se faire à l'aide du fichier texte de paramètres. Le modèle à optimiser appartiendra quant à lui à une classe `OptimizationModel` comprenant les paramètres du modèle (ex. les coefficients d'une droite) et les méthodes permettant de les extraire. On oubliera pas de privilégier l'utilisation d'énumérateurs afin de rendre la sélection des méthodes et des modèles d'optimisations la plus transparente possible.

1.4.2 Première partie du projet : ajustement de fonction multi-paramètres

Il s'agit de tester l'efficacité de la méthode de "recuit simulé" dans l'ajustement de données. Dans un premier temps, un programme génère des données suivant une loi quelconque dont on cherche à retrouver les paramètres *via* la méthode de "recuit simulé". Typiquement, un nombre N de points sont tirés suivant une loi linéaire, l'algorithme devant déterminer le coefficient directeur de la

^dpour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages suivants [5, 6, 7].

droite et son ordonnée à l'origine. Par la suite, des jeux de données issus de loi plus complexes pourront être simulés et reconstruits. On évaluera et commentera notamment la variation du coût en fonction du nombre d'itérations (comportement, convergence). On pourra finalement ajouter aux jeux de données un bruit gaussien et voir dans quelle mesure l'algorithme de "recuit simulé" reconstruit les paramètres du modèle.

1.4.3 Deuxième partie du projet : le problème du voyageur de commerce

Dans la seconde partie du projet, la méthode de "recuit simulé" est appliquée au problème du voyageur de commerce. L'exercice consiste, étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données, à déterminer le plus court chemin reliant toutes ces villes. Énoncé sous forme de jeu par William Rowan Hamilton en 1859, ce problème d'optimisation combinatoire a historiquement été résolu grâce à la méthode de "recuit simulé". On proposera différentes configurations où le nombre de villes N variera et on évaluera l'efficacité de l'algorithme. Visuellement, on pourra sauvegarder les itérations successives afin de représenter l'évolution du chemin parcouru par le voyageur.

References

- [1] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt and M. P. Vecchi, *Optimization by Simulated Annealing*, Science, vol. 220, pp. 671-680 (1983) 1
- [2] S. Kirkpatrick, *Optimization by Simulated Annealing: Quantitative Studies*, Journal of Statistical Physics, vol. 34, pp. 975-986 (1984) 1
- [3] N. Metropolis *et al.*, *Equations of State Calculations by Fast Computing Machines*, Journal of Chemical Physics, vol. 21, pp. 1087-1092 (1953) 2
- [4] W. K. Hastings, *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*, Biometrika, vol. 57, pp. 97-109 (1970) 2
- [5] C. P. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag, 2004 4
- [6] J.-M. Marin and C.P. Robert, *Bayesian Core: A Practical Approach to Computational Bayesian Statistics*, Springer-Verlag, 2007 4
- [7] W. R. Gilks, S. Richardson and D. Spiegelhalter, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996 4
- [8] J. S. Rosenthal, *Optimal Proposal Distributions and Adaptive MCMC*, Chapter for MCMC Handbook, S. Brooks, A. Gelman, G. Jones, and X.-L. Meng, eds.
- [9] G. O. Roberts and J. S. Rosenthal, *Examples of Adaptive MCMC*, to be print