

線形ファクターモデル

羅洪帥 (57165029)

CAPM ではすべての投資家は世の中のすべての資産を所有することを仮定する。ただし、取引コストや資本政策 (外貨制限など?) と税などの取引の摩擦では、投資家は世界中のすべての資産を所有することに制限を掛ける。そして、価格つけなくて、取引もできない資産もある。例えば、人の労働収入。市場ポートフォリオのリスク以外に、投資家はこのような分散できないリスクを直面する。均衡状態では、資産のリスクプレミアムは複数のファクターがあることを想像できる。CAPM が主張する市場ポートフォリオリスクはリスク資産の唯一のリスクの観点の実証分析研究に証明されていなかった。

それに対して、APT モデルでは個別リスク資産の収益率は複数のファクターと固有ファクターに影響されると主張する。このモデルでは具体的なファクターについて言及していない。APT は相対的なアセットプライシングモデルで、各リスクファクターのリスクプレミアムと個別資産はそのプレミアムへの感応度 (因子負荷) で資産のリスクプレミアムを確定する。(CAPM では、リスクプレミアムは市場の超過リターンだけで、各資産はこのファクターに関する感応度は β_i と定義する。) APT は投資家の選好に仮定を置いてなくて、裁定取引で資産のリスクプレミアムに価格をつける。

1 仮定の整理と記号の準備

APT のメインの仮定は以下である。

個別資産のリターンは有数個のリスクファクターと線形関係で、資産の数はリスクファクターの数より多いである。

k 個のリスクファクターと n 個の資産を存在し、 $n > k$ である。 b_{iz} は i 番目資産が z 番目リスクファクターに対する感応度である。 \tilde{f}_z はリスクファクター z の実現値。 $\tilde{\varepsilon}_i$ は資産 i の個別の固有リスクファクターで、 k 個のリスクファクター $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k$ 及び他の個別資産の固有ファクター $\tilde{\varepsilon}_j$ とは独立する。

資産 i の期待リターンは a_i で表記し、資産 i の収益は線形モデルでは

$$\tilde{R}_i = a_i + \sum_{z=1}^k b_{iz} \tilde{f}_z + \tilde{\varepsilon}_i \quad (3.26)$$

となる。

この式のなかでは、 $E[\tilde{\varepsilon}_i] = E[\tilde{f}_z] = E[\tilde{\varepsilon}_i \tilde{f}_z] = 0$ 、且つ、異なる資産の固有ファクター同士は無相関 $E[\tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j] = 0, (i \neq j)$ 。

簡単化のため、リスクファクターの間も無相関と仮定する。さらに、リスクファクターの数値は分散 1 である。相関あるリスクファクターであっても、線形変換で独立なリスクファクターに置き換えられる。

最後に、個別資産の特有リスクは有限であると仮定する。 $E[\tilde{\varepsilon}_i^2] \equiv s_i^2 < S^2$ 、(S^2 is finite number)。

資産 i とリスクファクター z の共分散は $Cov(\tilde{R}_i, \tilde{f}_z) = Cov(b_{iz}\tilde{f}_z, \tilde{f}_z) = b_{iz}Cov(\tilde{f}_z, \tilde{f}_z) = b_{iz}$ であることが分かった。

2 asymptotic arbitrage 裁定取引

3.2 節の例と異なって、今回は資産の個別の固有リスクがあるため、リスクフリーのヘッジポートフォリオは構築不可である。ですが、銘柄数多ければ、個別資産の固有リスクを分散して、排除できる。裁定取引を排除する上でも、資産の期待リターンへの制約は足りない場合に、漸近的な裁定 (asymptotic arbitrage) の概念を用いて、資産のリターンは個別リスクが存在しない結果に漸近することを説明する。

漸近的な裁定の上限は下記のようなものである。

- (1) ポートフォリオの投資額は 0。
- (2) 銘柄数が多くなれば、分散は 0 に漸近。
- (3) ポートフォリオの収益は 0 より大きい。

漸近的な裁定がなければ、資産 i の期待リターンは下記の線形式で与えられる。

$$a_i = \lambda_0 + \sum_{z=1}^k b_{iz}\lambda_z + v_i$$

λ_0 は定数、 λ_z はリスクプレミアム、 v_i は期待値からの偏差。

偏差の期待値は 0 である。偏差は k 個のリスクファクターと無相関である。銘柄数が多ければ、偏差の平方和が 0 に近づく。

回帰方程式を作る。

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \lambda_0 + \begin{bmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k} \\ \vdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

W_i の表記:

$$W_i = \frac{v_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n v_i^2}}$$

(W_i は比率?合計は 1?)

Heaton と Lucas の実証分析では、証券の所有者自身は Small Cap の所有者もしくは経営者、その人たちの賃金収入はすでに自社の倒産リスクがあるから、同様なリスクを避けたい。