МКР №4
з дискретної математики
студентки групи ЧПС-11
Кірієнко Каріни Дмитрівни
Варіант №6

① Граф G довільний граф. Його доповнення це всі ребра повного графа G, окрім тих що належать графу G, тобто якщо об'єднати граф і його доповнення то вийде повний граф.

③ Граф G_1: Цикл C_n (складається з n вершин), з'єднаних у замкнутий ланцюг
Граф G_2: Шлях P_n, де вершини з'єднані послідовно без замикання.
У обох графів діаметр дорівнює $\frac{n}{2}$.
Приклад: $G_1=(V_1, E_1)$ $V_1 = \{A, B, C, D, E\}$
$E_1 = \{AB, BC, CD, DE\}$
$G_2 = (V_2, E_2)$ $V_2 = \{A, B, C, D, E\}$
$E_2 = \{AB, AC, BD, CE\}$
Діаметр у обох графів 4, вони неізоморфні

2 бо мають різні структури.

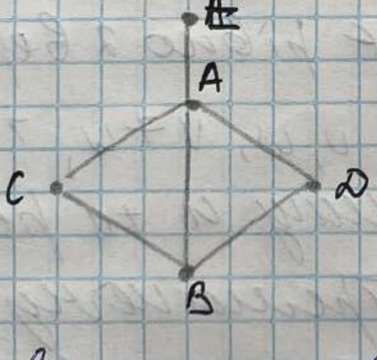
② Нехай $G \simeq G'$, $f: V \to V'$ – ізоморфізм. Множина простих циклів k у графі G – $C_k(G)$. Нехай $C = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v_0$ – простий цикл k у графі G. Тоді за озн. ізоморфізму, ребра $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ $\Rightarrow \{f(v_i), f(v_{i+1})\} \in E'$. Це відобр. $f^*: C_k(G) \to C_k(G')$ взаємно-однозначне (f - бієкція), зберігає простоту циклів, довжину циклу. Отже, для $\forall k \geq 0$ твердження вірне ■

④ Графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їх доповнення. $\Rightarrow$ 2.

⑤ Нехай A – м. суміжності, а B – м. інцидентності графа G. Розглянемо елемент c_{ij} матриці BB^T: $c_{ij} = \sum_k b_{ik} b'_{kj}$, де $b_{ik} = 1$, та $b'_{kj} = b_{jk} = 1$ тоді й тільки тоді, коли ребро з номером k інцидентне вершинам i та j. Оскільки кожне ребро в графі інцидентне лише двом вершинам, то $c_{ii} = a_{ii}$ для $i = j$. Для всіх i та дорівказувати число ребер, інцидентних вершинами з номерами і, тому для отримання матриці A ці елементи слід замінити нулями.

(6) Візьмемо вершини зі степенями 4, 3, 2, 1, ?. $4+3+2+1=10$. Щоб сума була парною, остання вершина має мати парний степінь, нехай це буде 2.

Отже $A: 4$, $B: 3$, $C: 2$, $D: 2$, $E: 1$.



(7) Нетривіальний зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді і тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

=> Нехай вершини v, w, $v \neq w$, є кінцями ейлерового ланцюга. Додамо до графа нову вершину u та ребра $(v, u), (w, u)$;

при цьому збільшиться степені лише вершин v та w (збільшаться на 1). В новому графі ці два ребра разом з ейлеровим ланцюгом утворюють ейлерів цикл, і за теоремою усі вершини мають парний степінь. Кінці ейлерового ланцюга у початковому графі мали степені на 1 менше, ніж у новому, тому ці степені були непарними.

$\Leftarrow$ Якщо граф має рівно 2 вершини непарного степеня v, w, $v \neq w$, то додамо до графу нову вершину u та ребра (v,u), (w,u). В отриманому графі всі вершини першого графа будуть мати парний степінь, додана вершина буде мати степінь 2 (парний), звідси граф буде ейлеровим, тоді в ньому існує ейлерів цикл. Цей цикл проходить через вершину u рівно один раз, без обмеження загальності можна вважати, що вона є початковою та кінцем ейлерового циклу. Тепер вилучимо з графа цю вершину та суміжні з нею ребра. При цьому з ейлерового циклу ми отримаємо ейлерів ланцюг ■

8 Кожен у K_5 є цикл довжини 9.
Вилучимо всі ребра та будемо додавати їх по одному в порядку проходження по ребрах цього циклу. Прийшовши до вершини, ми повинні вийти з неї, тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня. Коли додамо всі 9 ребер, то одержимо граф, у якому кожна вершина має парний степінь і число ребер на одне менше, ніж у K_5. Але в K_5 кожна вершина має степінь 4, тому, якщо з нього вилучено одне ребро, то дві вершини мають степінь 3, 3 - непарне число, одержано супере-

чність. Отже, циклу довжини 9 не існує.

(9) C_{2k+1}

(10) а) такий граф існує, його матриця суміжності:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б) Граф із такими степенями вершин не існує, бо за умовою має 2 ізольовані вершини, отже, макс. значення степеня для будь-якої з решти чотирьох вершин – 3. Тобто в такому графі не може бути вершина зі степенем 4.

в) такий граф не існує, тому що сума степенів усіх його вершин непарна.

(11) $\Rightarrow$ Якщо v_1 і v_5 зв'язані, то існує шлях з v_i до v_j довжини k для

деякого $1 \le k \le n-1$ (макс. довжина простого шляху у графі без циклів $= n-1$). 7

Отже, $A^k_{ij} > 0$ для деякого k. $\Rightarrow$ сума $S_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} A^k_{ij}$ також більше за 0.

$\Rightarrow S_{ij} \neq 0$

$\Leftarrow$ Якщо $S_{ij} \neq 0$, це озн. що існує хоча б одне $k \in \{1, ..., n-1\}$, таке що $A^k_{ij} \geq 0$. Отже, існує принаймні один шлях довжини k з v_i до v_j, тобто v_i і v_j - зв'язані ■

(12) Ізол. вершин: Якщо вершина v ізольована, то її доповнення $\bar{v}$ повинно бути суміжним з усіма вершинами, що суперечить тому, що v не має суміжних вершин.

Верш. суміжн. з усіма іншими: Якщо вершина u суміжна з усіма, то її доповнення й не матиме жодних вершин для суміжності, що суперечить умовам самодоповненості. ■

8 (13) Припустимо, що такий кубічний граф G з n вершинами існує. Тоді з того, що степені всіх вершин графа G та його доповнення $= 3$, випливає, що $(n-1)-3=3$, тобто $n=7$. Звідси $\sum \delta(v_i) = 3 \cdot 7 = 21$, що суперечить твердженню про ізоморфні графи.

(14) Нехай у дереві є m підвісних вершин. Тоді всі інші мають степені не більше s. Тоді з урахуванням леми про рукостискання можемо скласти наступну нерівність:

$2(n-1) \geq m + s(n-m)$

$2n-2 \geq m + sn - sm$

$sm - m \geq sn - 2n + 2$

$m(s-1) \geq n(s-2) + 2$

$m \geq \dfrac{(n(s-2)+2)}{s-1}$ ■

№16 (19) Нехай граф G має тільки один простий цикл. Тоді після вилучення будь-якого ребра цього циклу отримаємо ациклічний граф G' із тією самою кіл-тю компонент зв'язності $\Rightarrow V(G')=0$. Отже, $V(G)=1$. Нехай для графа G з n вершинами та k комп. зв'язності виконується $V(G)=1$. Тоді кіл-ть ребер $m=n-k+1$, і у G є принаймні один цикл Z. Після вилучення ребра з циклу Z графа G отримаємо граф G' з n верш., k комп. зв. та $n-k$ ребрами. Оскільки $V(G')=0$, то G' - ацикл. граф. Отже цикл Z - єдиний у гр. G. З єдиності Z випливає його простота.

(17) Якщо $n>1$ і $m>1$, то діаметр і радіус збігаються і $=2$. Якщо одна з часток складається з одної вершини, а інша - більше ніж з одної, то діаметр $=2$, а радіус $=1$. Нарешті,

$D(K_{n,m})=R(K_{n,m})=1$

18 Найменша — $n-1$, найбільша — $\frac{n^2}{4}$ для парного n і $\frac{n^2-1}{4}$ для непарного n.

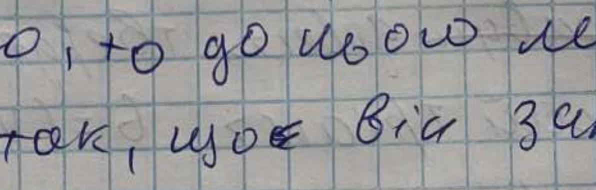
19 Нехай у дереві є m кінцевих вершин. Тоді всі інші (їх $n-m$) мають степені не менше 2, причому одна з них має степінь s. Граф має $n-1$ ребро (бо він зв'язний). Тоді з урахуванням суми степенів вершин графа одержуємо $2(n-1) \geq m+s+2(n-m-1)$; $2n-2 \geq m+s+2n-2m-2$; $\underline{m \geq s}$.

21 Нехай граф має m ребер. Оскільки степінь кожної грані $= 3$, за $\sum_{\text{чол}} \Delta r = 2|E|$ маємо $2m = 3|P|$. За теор. Ейлера $2m = 3|P| = 3(m-n+2)$, звідки $m = 3n-6$ і $|P| = 2n-4$ ∎

22 G — планарний граф, його двогранний граф — це K_5, але K_5 не є планарним $\Rightarrow$ суперечність ∎

(23) Відомо, що кожний планарний граф має не більше $3n-6$ ребер. Отже, щоб граф-K_6 став планарним треба залишити у ньому 12 ребер. Всього у K_6 $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ ребер. Отже, найменша кіл-ть ребер яку треба видалити: 3

(24) Макс. плоский граф є тріангуляцією, тому число додавання ребер повинно бути $3n-6$, де n - кіл-ть вершин. До графа можна додати $(3\cdot 4-6)-4=2$ ребра.



(25) => Якщо плоский граф не є тріангуляцією, то до нього можна додати ребра так, щоб він залишився плоским.

<= Якщо граф з n вершинами є тріангуляцією, то він має $3n-6$ ребер. Якщо додати хоча-б одне ребро, кіл-то

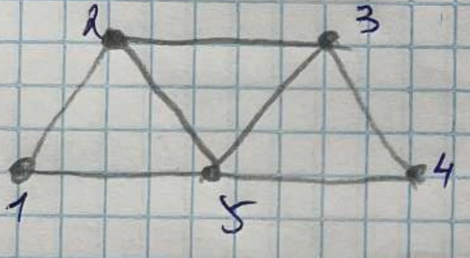
ребер стане більше $3n-6$, що неможливо для плоского графа. Таким чином, тріангуляція є максимальним плоским графом. ■

(20) Розглянемо плоский граф, ізоморфний даному. Його можна доповнити до тріангуляції, при цьому кіл-ть вершин не зменшиться, і, можливо, збільшаться степені деяких вершин. Якщо побудована тріангуляція має принаймні 4 вершини, степені яких не більше 5, то ці самі вершини справджують твердження для нашого графа. Таким чином, достатньо ~~справдити~~ довести твердження для тріангул. Нехай тріанг. $G=(V,E)$ має n вершин і m ребер, n_k - кіл-ть вершин графа степеня k. Кожна вершина має степінь не менше 3. $2m=\sum_{v\in V}\delta(v) \geq$

$\geq 3n_3+4n_4+5n_5+6(n-(n_3+n_4+n_5)) \geq 6n-3(n_3+$

$+ n_4 + n_5)$; з іншого боку, для тріангуляції $m = 3n - 6$, звідки $6n - 12 \geq 6n - 3(n_3 + n_4 + n_5)$ і $n_3 + n_4 + n_5 \geq 4$, що й треба було довести ■

28 Для плоского графа з 5 вершинами ми можемо мати не більше $3n - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ребер. Щоб максимізувати кіл-ть граней будуємо граф так, щоб кожна вершина мала степінь не більше ніж 3:



Отже, найбільша кіл-ть граней такого графа: 6.

29 2, якщо дерево має хоча б одне ребро, якщо одна вершина то 1. У дерева немає циклів => не може бути непарних циклів => граф двочастковий. У двоч. графі завжди дост. 2.