# Алгебра та геометрія
# Питання екзамену

9 червня 2025 р.

1. Комплексні числа. Дії над ними. Тригонометрична форма комплексного числа.

Комплексним числом називається число виду $z = a + bi$, де $a, b \in R$ і $i$ — уявна одиниця, така що $i^2 = -1$. $a$ — дійсна частина; $b$ — уявна частина.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ називаються рівними, якщо їх дійсні частини рівні ($a_1 = a_2$) і уявні частини рівні ($b_1 = b_2$).

Нехай z = a + bi, тоді комплексно спряженим для нього є число $\overline{z}$ = a - bi. Зрозуміло, що $\overline{\overline{z}}$ = z, z + $\overline{z} \in R$, z - $\overline{z}$ - чисто уявне.

Дії над комплексними числами:

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$z_1 * z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ $z_2 \neq 0$. Домножимо чисельник і знаменник на число компексно спряжене до знаменника.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2+b_1 b_2)+(a_1 b_2-a_2 b_1)i}{a_2^2-(b_2 i)^2} = \frac{(a_1 a_2+b_1 b_2)+(a_1 b_2-a_2 b_1)i}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_1 b_2-a_2 b_1}{a_2^2 b_2^2} i$

Тригонометрична форма комплексного числа:

Так як геометрично комплексне число - це вектор. Тоді вектор $\vec{OA}$ = a, b, де r - довжина цього вектора, $\alpha$ - кут між Ox і вектором. $r = \sqrt{a^2 + b^2}, a = rcos\alpha, b = rsin\alpha, z = rcos\alpha + rsin\alpha i = r(cos\alpha + isin\alpha)$

$a > 0$, $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

$a < 0$ і $b \geq 0$, додайте $\pi$;

$a < 0$ і $b < 0$, додайте $-\pi$ ;

$a = 0$ і $b > 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;

$a = 0$ і $b < 0$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ .

2. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра. Корені з комплексних чисел.

Дії:

$z = z_1 + z_2 = (r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2) + (r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2) \cdot i$ це треба розписувати через розкриття дужок

$z = z_1 - z_2 = (r_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cos \alpha_2) + (r_1 \sin \alpha_1 - r_2 \sin \alpha_2) \cdot i$ те ж саме що і з додаванням

$z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1), z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2).$

Тоді множення $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + i^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) =$
$r_1 r_2((\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)) =$
$= r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$

Тоді ділення $z_2 \neq 0 \Rightarrow r_2 \neq 0$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)}{r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)}$ домножимо на комплексно-спряжене знаменнику

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) r_2(\cos(-\alpha_2) + i \sin(-\alpha_2))}{r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) r_2(\cos(-\alpha_2) + i \sin(-\alpha_2))} =$

$= \frac{r_1 r_2(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{r_2^2(\cos 0 + i \sin 0)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$

Формула Муавра:

$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ треба піднести в степінь n ($n \in N$). Згідно правилу множення комплексних чисел одержимо $z^n = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)}$ Запишемо 1 в чисельнику в триг. вигляді.

$z^{-n} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)} = \frac{1}{r^n}(\cos(0 - n\alpha) + i \sin(0 - n\alpha)) = r^{-n}(\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha))$

Корені з комплексних чисел:

Нехай існує $c \in C$. Запишемо його в триг. формі $c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ і припустимо що $z \in C$ - є коренем n-го степеня з числа с ($z^n = c$).

$k = (0; \overrightarrow{n} - 1)$ тому що $z_n = z_0$ і по колу.

$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin(\frac{\alpha + 2k\pi}{n})))$

3. Поняття числового поля. Многочлени над числовим полем. Ділення многочленів.

Числовим полем називається підмножина множини $C$ всіх комплексних чисел, яка містить 0 і 1, замкнена відносно операцій додавання, віднімання, множення і ділення на ненульові числа.

Має виконуватись:

(а) $a+b=b+a$ для всіх $a,b \in F$.

(б) $(a+b)+c=a+(b+c)$ для всіх $a,b,c \in F$.

(в) снує $0 \in F$, таке що $a+0=a$ для всіх $a \in F$.

(г) для кожного $a \in F$ існує $-a \in F$, таке що $a+(-a)=0$.

(д) $a \cdot b = b \cdot a$ для всіх $a,b \in F$, $a,b \neq 0$.

(е) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всіх $a,b,c \in F$, $a,b,c \neq 0$.

(ж) $1 \in F$, таке що $a \cdot 1 = a$

(и) $a \in F$, $a \neq 0$, існує $a^{-1} \in F$, таке що $a \cdot a^{-1} = 1$.

(к) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ для всіх $a,b,c \in F$.
$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для всіх $a,b,c \in F$.

Многочлени над числовим полем:

Нехай F - числове поле, а x - деяка змінна, тоді F[x] - множина всіх многочленів з коеф. з поля F від змінної x. Множина F[x] називається кільцем многочленів над полем F. F[x] має такі властивості:

(а) $f_1, f_2 \in F[x] \Rightarrow f_1 + f_2 \in F[x], f_1 - f_2 \in F[x]$

(б) $f_1, f_2 \in F[x] \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in F[x]$

(в) Якщо степінь g $\in F[x]$ не перевищує степеня многочлена f $\in F[x]$, то многочлен f можна поділити на g із залишком: $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, степінь r(x) < степеня g(x) і g, r $\in F[x]$

Ділення многочленів:

Розглянемо кільце многочленів F[x] над фіксованим числовим полем F.

Вважаємо, що многочлени g(x) і q(x) є дільниками f(x), якщо існує многочлен $p(x) \in F(x) : f(x) = g(x) \cdot q(x) + p(x)$, цей факт позначатимемо $g(x)|f(x), q(x)|f(x)$.

Многочлен p(x) називається спільним дільником многочленів f(x), g(x), якщо p(x)|f(x) і p(x)|g(x).

Означення:

Многочлен d(x) називається найбільшим спільним дільником многочленів f(x) і g(x), якщо виконується:

(а) d(x) | f(x) і d(x) | g(x);

(б) якщо p(x) такий, що p(x) |f(x) $\wedge$ p(x) | g(x) $\Rightarrow$ p(x) | d(x)

Позначатимемо це d(x) = НСД (f(x), g(x))

Лема

Нехай d(x) - НСД(f(x), g(x)).

Многочлен $\mathrm{d}_1(x) = (f(x), g(x)) \Leftrightarrow d(x) i d_1 x$ асоційовані. Два многочлени $d(x)$ і $d_1(x)$ називаються асоційованими, якщо один із них є кратним іншого з ненульовим коефіцієнтом.

*Доведення.* Якщо $d(x)$ і $d_1(x)$ асоційовані та $d(x) =$ НСД$(f(x), g(x))$, то $d_1(x) =$ НСД$(f(x), g(x))$.
Нехай, навпаки, виконується $d(x) =$ НСД$(f(x), g(x))$,
$d_1(x) =$ НСД$(f(x), g(x))$. За означенням НСД $d(x)|d_1(x) \implies d_1(x) = d(x)q(x), q(x) \in F[x]$. Аналогічно $d_1(x)|d(x)$ і $d(x) = d_1(x)r(x), r(x) \in F[x]$. Тоді $d_1(x) = d(x)g(x) = d_1(x)r(x)q(x)$. Оскільки при множенні степені додаються, то ст. $d_1(x) =$ ст.$d_1(x) +$ ст.$r(x) +$ ст.$q(x) =>$ ст.$r(x)+$ ст. $q(x) = 0 \implies$ ст.$r(x) = 0$, ст.$q(x) = 0$, $r(x) = a = const \neq 0$, $q(x) = b = const \neq 0$. Отже, многочлени $d$ та $d_1$ асоційовані. $\square$

З леми випливає, що НСД 2-х даних многочленів визначається з точністю до ненульового многочлена. Щоб уникнути цієї неоднозначності іноді НСД вважається той, старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці.

**Означення 5.** Два многочлена $f(x)$ та $g(x)$ називаються взаємно простими, якщо НСД$(f(x), g(x)) = const \neq 0$. Враховуючи лему: НСД$(f(x), g(x)) = 1$.

4. Алгоритм Евкліда. Теорема про НСД

Нехай задано два ненульових многочлена $f(x)$ і $g(x)$, для визначеності покладемо ст. $f(x) \geqslant$ ст. $g(x)$. Поділимо $f(x)$ на $g(x)$ із залишком:
$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r_1(x)$, де ст. $r_1 <$ ст. $g$;
якщо $r_1 = 0$, процес закінчується; інакше поділимо $g(x)$ на $r_1(x)$:
$g(x) = r_1(x)g_2(x) + r_2(x)$, ст. $r_2 <$ ст. $r_1$;
якщо $r_2 = 0$, процес закінчується, інакше ділимо $r_1$ на $r_2$:
$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$, ст. $r_3 <$ ст. $r_2$ і т. д.
Оскільки на кожному кроці степінь многочлена зменшується, то через скінченну кількість кроків процес закінчиться. Нехай
$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x)$, ст. $r_k <$ ст. $r_{k-1}$, $r_k \neq 0$;
$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x) + r_{k+1}(x)$, ст. $r_{k+1} <$ ст. $r_k$, $r_{k+1} \neq 0$;
$r_k(x) = r_{k+1}(x)q_{k+2}(x)$.
Покажемо, що $d(x) =$ НСД$(f(x), g(x)) = r_{k+1}(x)$, для цього треба перевірити дві умови НСД.

1) Покажемо, $r_{k+1}(x)|f(x), r_{k+1}(x)|g(x)$. З остатньої рівності $r_{k+1}(x)|$ $r_k(x)$, тоді з передостанньої $r_{k+1}(x)|r_{k-1}(x)$. Далі піднімемось знизу догори і одержимо $r_{k+1}(x)|r_{k-2}(x), ..., r_{k+1}(x)|r_1(x), r_{k+1}(x)|g(x)$, тому $r_{k+1}(x)|$ $f(x)$.

2) Нехай $p(x)|f(x)$ і $p(x)|g(x)$. Ідемо по рівностям зверху вниз. Оскільки $r_1(x) = f(x) - g(x)q(x)$, то $p(x)|r_1(x)$. З другої рівності $p(x)|r_2(x)$, ..., $p(x)|r_{k-1}(x) \implies p(x)|r_k(x) \implies p(x)|r_{k+1}(x)$. Таким чином умови НСД виконуються, $r_{k+1}(x) =$НСД$(f(x), g(x))$.

Теорема про НСД:

**Теорема 1.** *Нехай $d(x)$ є НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$, тоді існують такі многочлени $f_1(x)$ і $g_1(x)$, що $d(x) = f_1(x)f(x) + g_1(x)g(x)$. При цьому, якщо ст. $f(x) > 0$, ст. $g(x) > 0$, то множники $f_1$ і $g_1$ можна вибрати так, що ст. $f_1(x) <$ ст. $g(x)$, а ст. $g_1(x) <$ ст. $f(x)$.*

*Доведення.* Нехай $d(x) =$НСД$(f(x), g(x))$, $f(x), g(x)$ — ненульові много-

Доведення:

Нехай знову $d(x) = \text{НСД}(f(x), g(x))$, для визначеності вважаємо ст. $f(x) \geqslant$ ст. $g(x)$. Будемо знаходити НСД за допомогою алгоритма Евкліда.

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), r_1(x) \neq 0;$$
$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), r_2(x) \neq 0;$$
$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), r_3(x) \neq 0;$$
$$r_2(x) = r_3(x)q_4(x) \implies d(x) = r_3(x).$$

Тоді з передостанньої рівності одержуємо:

$$d(x) = r_3(x) = r_1(x) - r_2(x)q_3(x) = r_1(x) + (-q_3(x))r_2(x);$$
$$r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x) \implies d(x) = r_1(x) + (-q_3(x))(g(x) - r_1(x)q_2(x)) =$$
$$= (-q_3(x))g(x) + (1 + q_3(x)q_2(x))r_1(x);$$
$$r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x) \implies$$
$$\implies d(x) = (-q_3(x))g(x) + (1 + q_3(x)q_2(x))(f(x) - g(x)q_1(x)) =$$
$$= (1 + q_3(x)q_2(x))f(x) + (-q_3(x) + (1 + q_3(x)q_2(x))q_1(x))g(x);$$
$$f_1(x) = 1 + q_3(x)q_2(x);$$
$$g_1(x) = -q_3(x) + (1 + q_3(x)q_2(x))q_1(x).$$

Одержали шукані многочлени. Залишається довести остатню частину теореми. Припустимо ми вже знайшли многочлени $f_1(x)$ та $g_1(x)$, такі що $d(x) = f_1(x)f(x) + g_1(x)g(x)$ але, наприклад ст. $f_1(x) \geqslant$ ст. $g(x)$. Ділимо $f_1(x)$ на $g(x)$ із залишком. Тобто отримаємо $f_1(x) = g(x)q(x) + r(x)$, де ст. $r(x) <$ ст. $g(x)$, тоді $d(x) = (g(x)q(x) + r(x))f(x) + g_1(x)g(x) = r(x)f(x) + (g_1(x) + q(x)f(x))g(x)$. ст. $r(x) <$ ст. $g(x)$, треба показати, що ст. $(g_1(x) + q(x)f(x)) <$ ст. $f(x)$. Припустимо, це невірно: ст. $(g_1(x) + q(x)f(x)) \geqslant$ ст. $f(x)$, тоді ст. $(g_1(x) + q(x)f(x))g(x) \geqslant$ ст. $f(x)+$ ст. $g(x)$. Оскільки ст. $(r(x)f(x)) <$ ст. $f(x)+$ ст. $g(x)$, то ст. $d(x) \geqslant$ ст. $f(x)+$ ст. $g(x)$, що неможливо, а тому ст. $(g_1(x) + q(x)f(x)) <$ ст. $f(x)$. $\square$

Наслідок:

**Наслідок 1.** *Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ взаємно прості, тоді існують многочлени $f_1(x)$ і $g_1(x)$, такі що $f_1(x)f(x) + g_1(x)g(x) = 1$, причому, якщо ст. $f(x) > 0$, ст. $g(x) > 0$, то многочлени $f_1(x)$ і $g_1(x)$*

19

*можна вибрати так, що ст. $f_1(x) <$ ст. $g(x)$, ст. $g_1(x) <$ ст. $f(x)$.*

5. Теорема Безу. Схема Горнера.

Розглянемо кільце $F[x]$ всіх многочленів над числовим полем $F$, $f(x) \in F[x], f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, n \geqslant 1, \alpha \in F$.

**Теорема 2.** *Значення многочлена $f(x)$ при $x = \alpha, \alpha \in F$ дорівнює залишку від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - \alpha)$.*

*Доведення.* Поділимо многочлен $f(x)$ на $(x - \alpha)$ з залишком $f(x) = (x - \alpha)g(x) + r, r = const$. Підставимо $x = \alpha \implies f(\alpha) = r$. $\square$

**Наслідок 2.** *Число $\alpha \in F$ є коренем многочлена $f(x) \in F[x] \iff f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)$, тоді $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.*

Схема Горнера:

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in F[x]$ і поділимо цей многочлен з залишком на $\alpha \in F$. $f(x) = (x - \alpha)g(x) + r, r = f(\alpha)$. Зрозуміло, що ст. многочлена $g(x) = n - 1$, тобто $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$, тоді $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0) + r$. Звідси $a_n = b_{n-1}, a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}, a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2}, ..., a_2 = b_1 - \alpha b_2, a_1 = b_0 - \alpha b_1, a_0 = r - \alpha b_0 \implies b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}, b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}, ..., b_1 = a_2 + \alpha b_2, b_0 = a_1 + \alpha b_1, r = a_0 + \alpha b_0$. Таким чином коефіцієнт частки $g(x)$ і залишок $r$ можна одержати, користуючись схемою Горнера.

| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $b_{n-1} = a_n$ | $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$ | $b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$ | ... | $b_0 = a_1 + \alpha b_1$ | $r = a_0 + \alpha b_0$ |

Приклад:

**Приклад 2** (застосування схеми Горнера). Розкласти многочлен $f(x) = x^5 - 6x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$ по степенях $(x - 1)$. Ділимо $f(x)$ на $(x - 1)$ з залишком $f(x) = (x - 1)g(x) + c_0, c_0 = f(1)$. Ділимо $g(x)$ на $(x - 1)$ з

20

залишком $g(x) = (x-1)h(x) + c_1$, тоді $f(x) = c_0 + c_1(x-1) + (x-1)^2 h(x)$ і т. д.

| | 1 | −6 | −1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −5 | −6 | −5 | −4 | −3 |
| 1 | 1 | −4 | −10 | −15 | −19 | |
| 1 | 1 | −3 | −13 | −28 | | |
| 1 | 1 | −2 | −15 | | | |
| 1 | 1 | −1 | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |

$$d(x) = -3 - 19(x - 1) - 28(x - 1)^2 - 15(x - 1)^3 - (x - 1)^4 + (x - 1)^5.$$

## 6. Незвідні многочлени. Лема про них. Основна теорема про подільність многочленів. Лема про похідну

**Означення 6.** Многочлен $f(x) \in F[x]$ ненульового степеня називається незвідним над полем $F$, якщо з того, що $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, де $f_1(x) \in F[x], f_2(x) \in F[x]$ випливає, що або ст. $f_1(x) = 0$, або ст. $f_2(x) = 0$, тобто, що принаймні один з них є константою.

Якщо многочлен $f(x)$ не є незвідним, то він називається звідним.

Основна теорема арифектики каже, що $\forall n \in N, n \neq 1$ можна розкласти у добуток простих. Аналогом цієї теореми для многочленів є основна теорема про подільність многочленів.

Нехай $p_1(x), p_2(x)$ незвідні многочлени і $p_1(x)|p_2(x)$, причому ст. $p_1(x) > 0$ і ст. $p_2(x) > 0$, $p_2(x) = p_1(x)f(x), f(x) \in F[x]$, тоді за означенням незвідного многочлена ст. $f(x) = 0$, тобто $f(x) = \alpha = const, p_2(x) = \alpha p_1(x)$, тобто многочлен $p_1(x)$ і $p_2(x)$ асоційовані.

Лема:

**Лема 2** (про незвідні многочлени). *Нехай $p(x)$ — незвідний многочлен і $p(x)|f(x)g(x), f(x), g(x) \in F[x]$. Тоді або $p(x)|f(x)$ або $p(x)|g(x)$.*

*Доведення.* Припустимо $g(x)$ не ділиться на $p(x)$ і покажемо, що $p(x)|f(x)$, а для цього доведемо, що $p(x)$ і $g(x)$ взаємно прості. Припустимо супротивне: $\exists k(x) \in F[x]$ : ст. $k(x) > 0$, і $k(x)|p(x), k(x)|g(x)$. Тоді, оскільки $p(x)$ незвідний многочлен, то $k(x) = \alpha p(x), \alpha \in F, \alpha \neq 0$. Тобто многочлени $p(x)$ і $k(x)$ асоційовані. Оскільки $k(x)|g(x)$, то і для асоційованого $p(x)|g(x)$, що суперечить припущенню. Таким чином, $p(x)$ і $g(x)$ взаємно прості многочлени і за наслідком з теореми про НСД $\exists p_1(x)$ і $g_1(x)$ такі, що $1 = p_1(x)p(x) + g_1(x)g(x)$. Домножимо цю рівність на $f(x)$ : $f(x) = f(x)p_1(x)p(x) + g_1(x)f(x)g(x)$. Зрозуміло, що $p(x)|f(x)p_1(x)p(x)$. За умовою теореми: $p(x)|g_1(x)f(x)g(x)$. Звідси $p(x)|f(x)$. □

Основна теорема про подільність многочленів:

**Теорема 3** (Основна теорема про подільність многочлена). *Будь-який многочлен $f(x) \in F[x]$, такий що ст. $f(x) \geqslant 1$, можна розкласти в добуток незвідних многочленів над полем $F$. Причому цей розклад єдиний з точністю до порядку множників і констант.*

*Доведення.* 1) доведемо можливість розкладу.

Якщо многочлен $f(x)$ незвідний, то це виконується.

Якщо $f(x)$ звідний, то $\exists f_1(x), f_2(x)$ : ст. $f_1(x) > 0$, ст. $f_2(x) > 0$, і $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. Якщо многочлени $f_1(x), f_2(x)$ незвідні, то все виконується, інакше їх також можна розкласти в добутки множників ненульового степеня. Оскільки на кожному кроці ст. многочлена зменшується, то через скінченне число кроків ми прийдемо до шуканого розкладу.

Інакше цей факт можна довести індукцією.

Зрозуміло, що для многочлена степеня 1 твердження виконується. Припустимо, що це виконується для всіх многочленів степеней $\leqslant n-1$. Беремо дейкий многочлен $f(x)$ степеня $n$. Якщо він незвідний, то все виконується. Якщо він звідний, то його можна розкласти в добуток двох многочленів меншого степеня, кожен з яких розкладається в добуток незвідних многочленів за припущенням індукції.

2) доведемо, що цей розклад єдиний.

Припустимо існує два розклади: $f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_k(x), f(x) = q_1(x)q_2(x)...q_s(x)$, при чому многочлени $p_1(x), ..., p_k(x), q_1(x), ..., q_s(x)$ незвідні над полем $F$ і мають ненульовий степінь. Треба довести, що $k = s$ і розклади відрізняються лише порядком.

Припустимо, для визначеності, $k \leqslant s$, тоді $p_1(x)p_2(x)...p_k(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)...q_s(x)$. Звідси $p_1(x)|q_1(x)q_2(x)...q_s(x)$ і, оскільки $p_1(x)$ незвідний многочлен, то з леми про незвідні многочлени випливає, що принаймні один з многочленів $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_s(x)$ ділиться на $p_1(x)$. Оскільки в добутку можна переставляти елементи, то можна вважати, що $p_1(x)|q_1(x)$, але многочлени $p_1(x)$ і $q_1(x)$ незвідні, тому вони асоційовані, тобто існує $\alpha_1 \in F, \alpha_1 \neq 0$ такий, що $q_1(x) = \alpha_1 p_1(x) \implies p_1(x)p_2(x)...p_k(x) = \alpha_1 p_1(x)q_2(x)...q_s(x)$. Скорочуємо цю рівність на $p_1(x)$ і отримаємо $p_2(x)p_3(x)...p_k(x) = \alpha_1 q_2(x)q_3(x)...q_s(x)$. Аналогічно доводимо, що $p_2(x)|q_2(x)$ і $\exists \alpha_2 \in F, \alpha_2 \neq 0 : q_2(x) = \alpha_2 p_2(x)$. Тоді після скорочення: $p_3(x)...p_k(x) = \alpha_1\alpha_2 q_3(x)...q_s(x)$. Після k кроків такого процесу одержуємо рівність $1 = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k q_{k+1}(x)...q_s(x)$. В лівій частині многочлен нульового степеня, тому ст. $(q_{k+1}(x)...q_s(x)) = 0$. І при $s > k$ приходимо до протиріччя. Таким чином $s = k$ і $q_i(x) = \alpha_i p_i(x), i = 1, ..., k, \alpha_i \in F, \alpha_i \neq 0$, що доводить теорему. $\square$

Нехай $n$ — непросте число ($n \neq 1$). Як відомо, це число можна розкласти в добуток простих чисел $n = p_1p_2...p_k$. Прості числа в цьому добутку можуть повторюватися, а тому можна зібрати разом однакові прості числа і одержати розклад $n = q_1^{n_1}q_2^{n_2}...q_s^{n_s}$, де всі числа $q_1, q_2, ..., q_s$ прості і різні. Аналогічну операцію можна зробити і для многочленів. Нехай многочлен $f(x)$ розкладається в добуток незвідних множників $f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_k(x)$. Збираємо разом всі множники, які відрізняються лише числовими множниками і одержимо : $f(x) = q_1^{n_1}(x)q_2^{n_2}(x)...q_s^{n_s}(x)$, де всі многочлени $q_1(x), ..., q_s(x)$ незвідні і різні. Цей розклад називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ в добуток незвідних множників.

Лема про похідну:

**Лема 3** (про похідну). *Якщо незвідний многочлен $p(x)$ входить множником до многочлена $f(x)$ з кратністю $k$, то $p(x)$ входить до $f'(x)$ з кратністю $k-1$.*

*Доведення.* За умовою $f(x) = p^k(x)g(x)$, де многочлен $g(x)$ не ділиться на многочлен $p(x)$, тоді $f'(x) = kp^{k-1}(x)p'(x)g(x) + p^k(x)g'(x) = p^{k-1}(x)(kp'(x)g(x) + p(x)g'(x))$. Зрорзуміло, що $p^{k-1}(x)|f'(x)$. Залишається показати, що $f'(x)$ не ділиться на $p^k(x)$. Припустимо супротивне: $p^k(x)|f'(x)$, тоді $p(x)|(kp'(x)g(x) + p(x)g'(x))$, оскільки $p(x)|p(x)g'(x)$, то $p(x)|kp'(x)g(x)$, але $p(x)$ — незвідний многочлен і $g(x)$ не ділиться на $p(x)$ за умовою леми. Це означає, що $p(x)|kp'(x)$ але степінь $p'(x)$ менший степені $p(x)$. Приходимо до протиріччя. □

## 7. Відокремлення кратних множників.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in F[x]$, ст. $f(x) \geqslant 1$, $f(x) = \alpha X_1(x) X_2^2(x) \dots X_s^s(x)$.

1) Зрозуміло, що $d_1(x) = \text{НСД}(f(x), f'(x)) = \alpha_1 X_2(x) X_3^2(x) \dots X_s^{s-1}(x)$,
аналогічно $d_2(x) = \text{НСД}(d_1(x), d_1'(x)) = \alpha_2 X_3(x) X_4^2(x) \dots X_s^{s-2}(x)$,
...
$d_{s-1}(x) = \text{НСД}(d_{s-2}(x), d_{s-2}'(x)) = \alpha_{s-1} X_s(x)$,
$d_s = \text{НСД}(d_{s-1}(x), d_{s-1}'(x)) = d_s = \text{const}$.

2) $E_1(x) = \dfrac{f(x)}{d_1(x)} = \gamma_1 X_1(x) X_2(x) \dots X_s(x)$,
$E_2(x) = \dfrac{d_1(x)}{d_2(x)} = \gamma_2 X_2(x) X_3(x) \dots X_s(x)$,
$E_3(x) = \dfrac{d_2(x)}{d_3(x)} = \gamma_3 X_3(x) X_4(x) \dots X_s(x)$,
...
$E_{s-1}(x) = \dfrac{d_{s-2}(x)}{d_{s-1}(x)} = \gamma_{s-1} X_{s-1}(x) X_s(x)$,
$E_s(x) = \dfrac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)} = \gamma_s X_s(x)$.

26

3) $X_1(x) = \beta_1 \dfrac{E_1(x)}{E_2(x)}$, $X_2(x) = \beta_2 \dfrac{E_2(x)}{E_3(x)}$, $X_3(x) = \beta_3 \dfrac{E_3(x)}{E_4(x)}, \dots,$ $X_{s-1}(x) = \beta_{s-1} \dfrac{E_{s-1}(x)}{E_s(x)}$, $X_s(x) = \beta_s E_s(x)$.

8. Незвідні многочлени над полем комплексних чисел.

**Теорема 5** (Гаусса, основна теорема алгебри). *Будь-який многочлен*

28

*ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має комплексний корінь.*

**Наслідок 6.** *Будь-який многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами можна розкласти в добуток лінійних множників, тобто многочленів першого степеня.*

*Доведення.* Нехай $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, ст. $f(x) \geqslant 1$. За умовою теореми $f(x)$ має комплексний корінь $\alpha_1$, а тому за теоремою Безу $f(x) = (x - \alpha_1)g(x)$. Якщо степінь $g(x) = 0$, все доведено, інакше проведемо аналогічні міркування для $g(x)$ і т.д. Оскільки на кожному кроці степінь $g(x)$ зменшується, то за скінченну кількість кроків ми приходимо до розв'язку. З цього, зокрема, випливає, що число всіх коренів $f(x)$ з урахуванням їх кратності рівне ст. $f(x)$. □

**Теорема 6.** *Незвідними над полем $\mathbb{C}$ є всі многочлени 1-го степеня і лише вони.*

*Доведення.* Нехай $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Якщо ст. $f(x) = 1$, то цей многочлен незвідний. Якщо ст. $f(x) > 1$, то цей многочлен можна розкласти в добуток многочленів поршого степеня, тобто многочлен $f(x)$ звідний. □

9. Незвідні многочлени над полем дійсних чисел.

**Лема 5.** *Нехай $f(x)$ многочлен з дійсними коефіцієнтами ст. $f(x) > 1$ і $\alpha$ — комплексний корінь многочлена $f(x)$. Тоді число $\overline{\alpha}$ (спряжене) також є комплексним коренем многочлена $f(x)$.*

29

*Доведення.* Спочатку випишемо деякі властивості комплексного спряження:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
   Дійсно, нехай $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, тоді $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, $\overline{z_1} = x_1 - y_1 i$, $\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$, $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = \overline{z_1 + z_2}$.

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ аналогічно.

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
   Нехай $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, тоді $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$, $\overline{z_1} = x_1 - y_1 i$, $\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$, $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i = \overline{z_1 z_2}$.

4) $z_2 \neq 0 : \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ аналогічно.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. За умовою $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0$. Звідси $0 = \overline{0} = \overline{(a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0)} = \overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + ... + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = a_n \overline{\alpha^n} + a_{n-1} \overline{\alpha^{n-1}} + ... + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = f(\overline{\alpha}) = 0$. $\square$

**Теорема 7.** *Незвідними над полем $\mathbb{R}$ є многочлени першого степеня і многочлени 2-го степеня, які не мають дійсних коренів. Інших незвідних многочленів немає.*

*Доведення.* 1) Нехай ст. $f(x) = 1$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Тоді $f(x)$ — незвідний многочлен.

2) Нехай ст. $f(x) = 2$ і $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ не має дійсних коренів. Тоді $f(x)$ — незвідний многочлен.

3) Нехай $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, ст. $f(x) \geqslant 2$, $f(x)$ має дійсний корінь $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді за теоремою Безу $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, $g(x) \in \mathbb{R}[x]$, ст $g(x) \geqslant 1$, тому $f(x)$ звідний многочлен.



4) Нехай $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, ст. $f(x) > 2$ і $f(x)$ не має дійсних коренів. За основною теоремою алгебри многочлен $f(x)$ має комплексний корінь $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$. За лемою $\overline{\alpha}$ також є коренем $f(x)$ і при цьому $\alpha \neq \overline{\alpha}$. Тоді многочлен $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)$ і $(x - \overline{\alpha})$. Оскільки $\alpha \neq \overline{\alpha}$, то $(x - \alpha)$ і на $(x - \overline{\alpha})$ незвідні над полем $\mathbb{C}$ і взаємнопрості. А тому $f(x)$ ділиться на $g(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$, але числа $\alpha + \overline{\alpha}$ і $\alpha\overline{\alpha}$ дійсні, тобто $g(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами. Тому $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ і ст. $h(x) \geqslant 1$, тобто многочлен $f(x)$ звідний над полем $\mathbb{R}$.

$\sqcap$

10. Звідні многочлени над полем раціональних чисел.

Теорема про раціональні корені.

Примітивні многочлени. Лема Гауса. Ознака Ейзенштейна.

Теорема про раціональні корені:

**Теорема 8.** *Нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Тоді*

*1)* $p \mid a_0$;

*2)* $q \mid a_n$;

*3)* $(p - mq) \mid f(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

Доведення занадто довге я їбала

Алгоритм знаходження раціональних коренів;

З останньої теореми випливає метод знаходження всіх раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами. Припустимо дано многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{Z}$.

1) Знаходимо всі натуральні дільники числа $a_0 : p_1, p_2, .., p_k$.

2) Знаходимо всі натуральні дільники числа $a_n : q_1, q_2, .., q_s$.

3) Складемо всі можливі нескоротні дроби вигляду $\pm\frac{p_i}{q_j}$. Тоді всі раціональні корені многочлена $f(x)$ знаходяться серед цих дробів, тобто всі ці дроби є можливими раціональними коренями.

4) Якщо цих можливих коренів дуже багато, можна скоротити їх число перевіркою виконання умов $(p - mq) \mid f(m), \forall m \in \mathbb{Z}$. Наприклад, спочатку для $m = 1, m = -1 \implies p-q \mid f(1), p+q \mid f(-1)$. Всі дроби, які не задовільняють хоча б одній з цих умов, можна викреслити.

34

5) Якщо і після цього залишиться багато можливих коренів, можна перевірити ці випадки для $m = 2, m = -2, ...$

6) Всі можливі корені, які залишаться, підставляємо у $f(x)$ і перевіряємо, наприклад, за схемою Горнера. Якщо деяке $x = \alpha$ є коренем, то $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, де степінь $g(x)$ = степені $f(x) - 1$. Користуючись схемою Горнера, ми одержимо $g(x)$, а тому наступні корені можна підставляти вже у $g(x)$.

Примітивні многочлени:

**Означення 12.** Многочлен з цілими коефіцієнтами $f(x)$ називається примітивним, якщо НСД всіх його коефіцієнтів $=1$.

**Лема 6** (Гаусса). *Добуток двох примітивних многочленів є примітивним многочленом.*

*Доведення.* Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — примітивні многочлени: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, де $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, НСД$(a_n, a_{n-1}, ..., a_0) = 1, a_n \neq 0$; $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, де $b_m, b_{m-1}, ..., b_1, b_0 \in \mathbb{Z}$, НСД$(b_m, b_{m-1} ..., b_0) = 1, b_m \neq 0$.
Припустимо, $h(x) = f(x)g(x)$. $h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n}$. Припустимо $d$ —спільний дільник чисел $c_0, ..., c_{m+n}$. Оскільки многочлени $f(x)$ і $g(x)$ — примітивні, то існують такі числа $i$ та $j$, $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$, що $d \mid a_0, d \mid a_1, ..., d \mid a_{i-1}$ і $a_i$ не ділиться на $d$; $d \mid b_0, d \mid b_1, ..., d \mid b_{j-1}$ і $b_j$ не ділиться на $d$. Тоді $c_{i+j} = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + ... + a_{i-1}b_{j+1} + a_i b_j + a_{i+1}b_{j-1} + ... + a_{i+j}b_0$. За припущенням, $d \mid c_{i+j}, d \mid a_0 b_{i+j}, d \mid a_1 b_{i+j-1}, ..., d \mid a_{i-1}b_{j+1}, d \mid a_{i+1}b_{j-1}, d \mid a_{i+j}b_0$, а тому $d \mid a_i b_j$. Припустимо, $d$ — просте число, тоді або $d \mid a_i$ або $d \mid b_j$, що суперечить припущенню. Таким чином $d = 1$ і многочлен $h(x)$ — примітивний. □

## Ознака Ейзенштейна:

**Теорема 9** (ознака Ейзенштейна). *Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Нехай для нього існує раціональне число $p$ таке, що виконуються умови:*

*1) $p \mid a_0, p \mid a_1, ..., p \mid a_{n-1}$ і $a_n$ не ділиться на $p$;*

*2) $a_0$ не ділиться на $p^2$.*

*Тоді многочлен $f(x)$ незвідний над полем раціональних чисел.*

*Доведення.* Згідно з останньою лемою достатньо показати, що многочлен $f(x)$ не можна розкласти в добуток двох многочленів ненульового степеня з цілими коефіцієнтами. Припустимо супротивне: $f(x) = g(x)h(x)$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0, \quad b_m, ..., b_0 \in \mathbb{Z}, b_m \neq 0, 0 < m < n$; $h(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + ... + c_1 x + c_0, \quad c_k, ..., c_0 \in \mathbb{Z}, c_k \neq 0, 0 < k < n, m + k = n$.
Тоді виконується $a_0 = b_0 c_0, a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, ..., a_i = b_0 c_i + b_1 c_{i-1} + ... + b_i c_0, ..., a_n = b_m c_k$. За умовою $p \mid a_0 \implies p \mid b_0 c_0$, але $p$ — просте число. Тому принаймі один з коефіцієнтів $b_0 c_0$ ділиться на $p$. Але $a_0$ не ділиться на $p^2$, тому якщо $p \mid b_0$, то $c_0$ не ділиться на $p$ і навпаки, якщо $p \mid c_0$, то $b_0$ не ділиться на $p$. Припустимо для визначеності, що $p \mid b_0$ і $c_0$ на $p$ не ділиться. Тоді $p \mid a_1, p \mid b_0 c_1, p \mid b_1 c_0$ і, оскільки $c_0$ на $p$ не ділиться, то $p \mid b_1$. Аналогічно отримуємо $p \mid b_2$ і т.д. За умовою $a_n = b_m c_k$ не ділиться на $p$, тобто $b_m$ не ділиться на $p$. Тому існує такий номер $i$, що $p \mid b_0, p \mid b_1, ..., p \mid b_{i-1}$, але $b_i$ не ділиться на $p$.
$a_i = b_0 c_i + b_1 c_{i-1} + ... + b_{i-1}c_1 + b_i c_0$. За умовою $p \mid a_i$, за припущенням $p \mid b_0, p \mid b_1, ..., p \mid b_{i-1} \implies p \mid b_i c_0$, але $c_0$ не ділиться на $p$, тому $p \mid b_i$, що суперечить припущенню. Таким чином, многочлен $f(x)$ незвідний над полем $\mathbb{Q}$. □

## 11. Поняття лінійного простору. Наслідки аксіом лінійного простору.

Нехай $F$ – деяке поле.

Непорожня множина $V$ називається ***лінійним*** або ***векторним простором*** над полем $F$, якщо для її елементів введено операції додавання «+» та множення на елементи поля $F$ «·», які задовольняють умови (аксіоми):

1) для довільних $a, b \in V$ $a + b = b + a$;
2) для довільних $a, b, c \in V$ $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) існує елемент $\theta \in V$ такий, що $a + \theta = \theta + a = a$ для довільного $a \in V$; елемент $\theta$ називається ***нульовим*** або ***нуль-вектором***;
4) для довільного $a \in V$ існує протилежний елемент $-a \in V$ такий, що $a + (-a) = (-a) + a = \theta$; елемент $-a$ називається ***протилежним*** для елемента $a$;
5) для довільного $a \in V$ $1 \cdot a = a$;
6) для довільного $a \in V$ та довільних $\alpha, \beta \in F$ $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
7) для довільного $a \in V$ та довільних $\alpha, \beta \in F$ $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
8) для довільних $a, b \in V$ та довільного $\alpha \in F$ $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Далі елементи векторного простору називаються ***векторами***, а елементи відповідного поля – ***скалярами***.

### 1.2. Елементарні наслідки аксіом лінійного простору.

Нехай $V$ – векторний простір над полем $F$.

1. Нульовий елемент $\theta$ єдиний.
2. Для довільного $a \in V$ протилежний елемент єдиний.
3. Для довільного $a \in V$ $0 \cdot a = \theta$.
4. Для довільного $a \in V$ $(-1) \cdot a = -a$.
5. Для довільних $a, b \in V$ рівняння $a + x = b$ має в просторі $V$ єдиний розв'язок $x$, причому $x = b + (-a) = (-a) + b$.
6. Для довільного $\alpha \in F$ $\alpha \cdot \theta = \theta$.
7. Для довільного $a \in V$ та довільного $\alpha \in F$ рівність $\alpha a = \theta$ виконується тоді і тільки тоді, коли $a = \theta$ або $\alpha = 0$.

## 12. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів, властивості.

Нехай $V$ – фіксований векторний простір над полем $F$.

***Системою векторів*** в просторі $V$ називається довільна скінченна множина векторів. Нехай $a_1, a_2, ..., a_m \in V$ – система векторів, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in F$ – система скалярів, тоді вектор $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_m a_m$ називається ***лінійною комбінацією*** системи $a_1, a_2, ..., a_m$, а скаляри $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ – коефіцієнтами лінійної комбінації. При цьому кажуть, що вектор $a$ ***лінійно виражається*** через систему $a_1, a_2, ..., a_m$.

Лінійна комбінація називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю, і ***нетривіальною***, якщо серед коефіцієнтів є принаймні один ненульовий.

Система векторів називається ***лінійно залежною***, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація, що дорівнює $\theta$.

Система векторів називається ***лінійно незалежною***, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цієї системи дорівнює $\theta$.



1.4. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем.

1) Якщо до системи входить $\theta$, то система лінійно залежна.
2) Система з числом векторів, більшим 1, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з векторів системи лінійно виражається через інші.
3) Упорядкована система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з векторів системи лінійно виражається через попередні, або коли перший вектор в системі нульовий.
4) Якщо підсистема системи векторів лінійно залежна, то вся система лінійно залежна.
5) Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи лінійно незалежна.

Нехай $S$ – непорожня підмножина в просторі $V$.

## 13. Лема про дві системи.

Нехай $S$ – непорожня підмножина в просторі $V$.

***Лінійною оболонкою*** підмножини $S$ називається множина всіх лінійних комбінацій всіх можливих систем векторів з множини $S$ і позначається $<S>$.

***Лема про дві системи (перше формулювання).***

Нехай $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ – системи векторів у просторі $V$. Усі вектори системи $A$ лінійно виражаються через вектори системи $B$. Якщо $m > k$, то система $A$ лінійно залежна.

***Лема про дві системи (друге формулювання).***

Нехай $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ – системи векторів у просторі $V$, причому усі вектори системи $A$ лінійно виражаються через вектори системи $B$. Якщо система $A$ лінійно незалежна, то $m \le k$.

## 14. Поняття базису простору. Теореми про базис.

Непорожня підмножина $B$ векторного простору $V$ називається ***базисом*** простору, якщо:

1) будь-яка скінчена система векторів з $B$ лінійно незалежна;
2) кожний вектор простору лінійно виражається через систему векторів з $B$.

Векторний простір, в якому існує скінченний базис, називається ***скінченновимірним***.

Система векторів $a_1, a_2, ..., a_n \in V$ називається ***базисом*** скінченновимірного простору $V$, якщо

7

1) ця система лінійно незалежна;
2) кожний вектор простору $V$ лінійно виражається через $a_1, a_2, ..., a_n$.

***Теореми про базис.***

***Теорема 1.*** Якщо в просторі $V$ існує базис, що складається з $n$ векторів, то будь-які $m$ векторів при $m > n$ лінійно залежні.

***Наслідок.***
Всі базиси скінченновимірного простору складаються з однакового числа векторів.

***Розмірністю*** скінченновимірного простору $V$ ($\dim V$) називається число векторів в його базисі.

***Теорема 2.*** В скінченновимірному просторі будь-які лінійно незалежну систему можна доповнити до базису простору.

***Наслідок.***
В просторі розмірності $n$ будь-які $n$ лінійно незалежних векторів утворюють базис.

***Теорема 3.*** Нехай $a_1, a_2, ..., a_m \in V$ – система векторів в просторі $V$, $V = < a_1, a_2, ..., a_m >$. Тоді з даної системи за рахунок викреслювання деяких векторів можна отримати базис простору.

***Теорема 4.*** Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ – базис простору $V$, тоді будь-який вектор $x \in V$ однозначно подається як лінійна комбінація базису. Причому, якщо $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$, то коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називаються ***координатами вектора*** $x$ в базисі $a_1, a_2, ..., a_n$.

15. Матриця переходу від одного базису до іншого. Зв'язок координатвектора в різних базисах

Нехай $B_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ – два базиси векторного простору $V$, тоді за означенням всі вектори базису $B_2$ лінійно виражаються через вектори базису $B_1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + ... + \alpha_{n1}a_n,$$
$$b_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + ... + \alpha_{n2}a_n,$$
$$\dots$$

8

$$b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + ... + \alpha_{nn}a_n.$$

Позначимо

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді матриця $T$ називається ***матрицею переходу*** від базису $B_1$ до базису $B_2$. Тобто, для того, щоб скласти матрицю переходу від базису $B_1$ до базису $B_2$, необхідно в стовпчики матриці послідовно виписати координати векторів базису $B_2$ в базисі $B_1$.

Нехай вектори базисів $B_1$, $B_2$ задаються координатами в деякому третьому базисі, матриця $A$ – матриця, яка складається з координат векторів базису $B_1$, записаних у стовпчики, а $B$ – матриця, яка складається з координат векторів базису $B_2$, записаних у стовпчики, тоді має місце матрична рівність

$$B = AT.$$

Причому, якщо $T$ – матриця переходу від базису $B_1$ до базису $B_2$, то $T^{-1}$ – матриця переходу від базису $B_2$ до базису $B_1$.

Нехай довільний вектор $x \in V$ в базисах $B_1$ і $B_2$ має відповідно координати $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ і $x = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Тоді зв'язок координат вектора $x$ в базисах $B_1$ і $B_2$ визначається рівностями

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

## 16. Поняття підпростору, елементарні властивості

1.7. Поняття підпростору.

Непорожня множина $L$ векторного простору $V$ над полем $F$ називається ***підпростором***, якщо виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in L$ $a + b \in L$,
2) для довільних $a \in L$ та $\alpha \in F$ $\alpha a \in L$.

Ці дві умови можна замінити однією: для довільних $a, b \in L$ та $\alpha, \beta \in F$ $\alpha a + \beta b \in L$.

1.8. Елементарні властивості підпростору.

Нехай $L$ – підпростір векторного простору $V$ над полем $F$, тоді

9

1) якщо $a_1, a_2, ..., a_k \in L$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in F$, то $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k \in L$;
2) $\theta \in L$;
3) якщо $a \in L$, то $-a \in L$;
4) множина $L$ утворює векторний простір над полем $F$ відносно операцій простору $V$.

Лінійна оболонка будь-якої непорожньої множини є підпростором.

## 17. .Операції над підпросторами. Поняття суми підпросторів.

1.10. Операції над підпросторами.

1. ***Перетином*** двох лінійних підпросторів $L_1, L_2 \in V$ називається сукупність $D = L_1 \cap L_2$ усіх векторів з $V$, кожний з яких належить як $L_1$, так і $L_2$.

   Перетин підпросторів завжди підпростір.
2. ***Сумою*** двох лінійних підпросторів $L_1, L_2 \in V$ називається сукупність $S = L_1 + L_2$ усіх векторів з $V$, кожний з яких представляється в вигляді $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in L_1$ та $x_2 \in L_2$.

   Сума підпросторів завжди підпростір.

Для скінченого числа підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k \in V$ сумою називається сукупність $L_1 + L_2 + \dots + L_k = \{x_1 + x_2 + \dots + x_k \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, \dots, x_k \in L_k\}$.

18. Поняття прямої суми підпросторів.

Еквівалентність двох означень прямої суми. Теорема про базис прямої суми.

1.11. Поняття прямої суми.

***Означення 1.*** Лінійний простір $V$ називається ***прямою сумою*** своїх підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k \in V$, якщо кожен вектор $x \in V$ можна розкласти в суму вигляду $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, де $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, \dots, x_k \in L_k$ і цей розклад єдиний.

Пряма сума позначається так : $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$.

***Означення 2.*** Лінійний простір $V$ називається ***прямою сумою*** своїх підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k \in V$, якщо

1) $V = L_1 + L_2 + \dots + L_k$;
2) для довільного $i = \overline{1,k}$ $L_i \cap (L_1 + L_2 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\theta\}$.

***Теорема.***
Два означення прямої суми еквівалентні.

10

***Теорема (про базис прямої суми).***
Нехай $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$. Система векторів $B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset L_1$ утворює базис $L_1$, $B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset L_2$ утворює базис $L_2, \dots$, $B_k = \{c_1, c_2, \dots, c_s\} \subset L_k$ утворює базис $L_k$, тоді система $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, c_1, c_2, \dots, c_s\}$ утворює базис $V$.

***Теорема (про розмірність суми та перетину).***
Нехай $L_1, L_2$ – скінченновимірні підпростори векторного простору $V$. Тоді $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$.

19. Теорема про розмірність суми та перетину підпросторів.

Попередній пункт.

20. Поняття лінійного перетворення.

1. Якщо $\theta_1 \in V_1$, $\theta_2 \in V_2$ – нульові елементи, то $\mathscr{A}(\theta_1) = \theta_2$.
2. Якщо $a \in V_1$, то $\mathscr{A}(-a) = -\mathscr{A}(a)$.
3. Якщо $a_1, a_2, \dots, a_k \in V_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F$, то $\mathscr{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 \mathscr{A}(a_1) + \alpha_2 \mathscr{A}(a_2) + \dots + \alpha_k \mathscr{A}(a_k)$.

Два лінійні відображення $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ і $\mathscr{B}: V_1 \to V_2$ будемо вважати ***рівними***, якщо вони співпадають як відображення, тобто, для довільного $x \in V_1$ $\mathscr{A}(x) = \mathscr{B}(x)$.

Якщо $V_1 = V_2 = V$, то лінійне відображення $\mathscr{A}: V \to V$ називають ***лінійним перетворенням*** простору $V$ або ***лінійним оператором*** на просторі $V$.

## 21. Матриця лінійного перетворення в базисі, властивості.

Нехай $\mathscr{A}: V \to V$ – лінійне перетворення скінченновимірного простору $V$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякий базис простору, тоді вектори $\mathscr{A}(a_1)$, $\mathscr{A}(a_2), \ldots$, $\mathscr{A}(a_n)$ лінійно виражаються через цей базис:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n, \\
\mathscr{A}(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n, \\
&\ldots \\
\mathscr{A}(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n.
\end{aligned}$$

З коефіцієнтів складемо таку матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

12

Матриця $A$ називається ***матрицею лінійного перетворення*** $\mathscr{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для того, щоб скласти матрицю лінійного перетворення $\mathscr{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$, необхідно в її стовпчики послідовно виписати координати векторів $\mathscr{A}(a_1)$, $\mathscr{A}(a_2), \ldots$, $\mathscr{A}(a_n)$ в цьому базисі.

## 22. Координати образу вектора при лінійному перетворенні

***Теорема.***

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення скінченновимірного простору $V$, якому в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in V$ – деякий вектор, $\mathscr{A}(x) = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, вектори задаються координатами в цьому ж базисі, тоді має місце матрична рівність:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

### 1.18. Поняття ядра та образу лінійного перетворення.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору $V$ над полем $F$.
***Ядром*** $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x) = \theta\}.$$

23. .Ядро та образ лінійного перетворення. Теорема про розмірність.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору $V$ над полем $F$.

***Ядром*** $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x) = \theta\}.$$

13

[redacted]

Ядро лінійного перетворення є підпростором.

***Дефектом*** $def\ (\mathscr{A})$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ скінченновимірного простору називається розмірність його ядра:

$$def\ (\mathscr{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}.$$

Лінійне перетворення $\mathscr{A}$ називається ***невиродженим***, якщо

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}.$$

***Образом*** $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \{\mathscr{A}(x) \mid x \in V\}.$$

Образ лінійного перетворення є підпростором.

***Рангом*** лінійного перетворення $\mathscr{A}$ скінченновимірного простору $V$ називається розмірність образу лінійного перетворення:

$$r(\mathscr{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

***Теорема (про розмірність ядра та образу лінійного перетворення).***

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору $V$, $\dim V = n$, тоді $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} + \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = n$.

З цієї теореми та наведених вище означень випливає, що

$$def\ (\mathscr{A}) + r(\mathscr{A}) = \dim V = n.$$

## 24. Алгебра лінійних операторів (операції над лінійними операторами).

1. Нульовим оператором називається такий оператор $\mathscr{O}$, що для будь-якого $x \in V$ $\mathscr{O}(x) = \theta$.

   Нульовому оператору $\mathscr{O}$ в довільному базисі відповідає нульова матриця.
2. Одиничним оператором називається такий оператор $\mathscr{E}$, що для будь-якого $x \in V$ $\mathscr{E}(x) = x$.

   Одиничному оператору $\mathscr{E}$ в довільному базисі відповідає одинична матриця.
3. Сумою двох лінійних операторів $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ називається такий лінійний оператор $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, що для довільного $x \in V$ $(\mathscr{A} + \mathscr{B})(x) = \mathscr{A}(x) + \mathscr{B}(x)$. Сумі операторів в довільному базисі відповідає сума матриць операторів в цьому базисі.
4. Якщо $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі $V$ над полем $F$, $\lambda \in F$, то під $\lambda \mathscr{A}$ розуміється лінійний оператор, такий що для довільного $x \in V$ $(\lambda \mathscr{A})(x) = \lambda \mathscr{A}(x)$. Матриця оператора $\lambda \mathscr{A}$ в довільному базисі дорівнює матриці оператора $\mathscr{A}$ в цьому базисі, помноженої на $\lambda$.
5. Добутком двох лінійних операторів $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ називається такий лінійний оператор $\mathscr{A}\mathscr{B}$, що для довільного $x \in V$ $(\mathscr{A}\mathscr{B})(x) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(x))$. Добутку



операторів в довільному базисі відповідає добуток матриць операторів в цьому базисі.

Лінійні оператори, для яких $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$ називаються ***переставними***.

25. Поняття оберненого оператора, умови існування.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі $V$. Якщо для цього оператора існує лінійний оператор $\mathscr{B}: V \to V$, такий що $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$, то оператор $\mathscr{B}$ називається ***оберненим*** для $\mathscr{A}$ і позначається $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{-1}$.

Квадратна матриця $A$ називається не виродженою, якщо $\det A \neq 0$.

***Теорема (про обернений оператор).***

Для лінійного оператора на скінченновимірному просторі існує обернений оператор тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі оператору відповідає невироджена матриця.

Якщо для даного оператора існує обернений, то він єдиний.

Якщо для оператора $\mathscr{A}$ існує обернений, і в даному базису оператору $\mathscr{A}$ відповідає матриця $A$, то в цьому базисі оператору $\mathscr{A}^{-1}$ відповідає матриця $A^{-1}$.

Умови існування:

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на скінченновимірному просторі $V$, тоді наступні умови еквівалентні:

1. Для $\mathscr{A}$ існує обернений оператор.
2. У довільному базисі оператору $\mathscr{A}$ відповідає невироджена матриця.
3. Оператор $\mathscr{A}$ будь-яку лінійно незалежну систему векторів відображає в лінійно незалежну систему.
4. Оператор $\mathscr{A}$ будь-який базис простору відображає в базис простору.
5. $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}$.
6. $\operatorname{Im} \mathscr{A} = V$.
7. Оператор $\mathscr{A}$ взаємно однозначний, тобто якщо $x \neq y$, то $\mathscr{A}(x) \neq \mathscr{A}(y)$.

26. Зв'язок матриць лінійного оператора в різних базисах.

***Теорема.***

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на скінченновимірному просторі $V$, якому в базисі $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ відповідає матриця $A$, а в базисі

15

[redacted]

$B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ відповідає матриця $B$. Якщо $T$ – матриця переходу від базису $B_1$ до $B_2$, то виконується матрична рівність $B = T^{-1}AT$.

Дві квадратні матриці $A$ і $B$ однакового порядку називаються ***подібними***, якщо існує квадратна не вироджена матриця $T$, така що $B = T^{-1}AT$.

27. Характеристичний многочлен лінійного оператора.

Поняття власних векторів та власних чисел. Теореми про власні вектори.

Нехай $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – деяка квадратна матриця порядку $n$, $t$ – деяка змінна. Матриця

$$A - tE = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - t & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - t \end{pmatrix}$$

називається ***характеристичною матрицею*** матриці $A$.

Визначник $\chi(t) = |A - tE|$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці $A$, а корені характеристичного многочлена – ***характеристичними числами*** матриці $A$.

***Теорема.***

Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.

***Характеристичний многочлен оператора*** $\mathscr{A}$ на скінченновимірному просторі $\chi_A(t)$ – це характеристичний многочлен його матриці в деякому базисі.

Власний вектор та власні числа:

1.24. Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі $V$ над полем $F$, вектор $a \in V$ $(a \neq \theta)$ називається ***власним вектором*** оператора $\mathscr{A}$, якщо $\mathscr{A}(a) = \lambda a$ для $\lambda \in F$, при цьому відповідний скаляр $\lambda$ називається ***власним числом*** або ***власним значенням*** оператора $\mathscr{A}$. В цьому випадку вектор $a$ називається $\lambda$***-власним вектором***, або власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda$.

Підпростір $L_\lambda = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x) = \lambda x\}$ називається ***власним підпростором***, що відповідає власному числу $\lambda$.

Теореми:

***Теорема 1.*** Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на скінченновимірному просторі $V$ над полем $F$, $\lambda \in F$ – власне число оператора. Тоді розмірність власного підпростору $L_\lambda$ не перевищує кратності $\lambda$ як кореня характеристичного многочлена оператора.

***Теорема 2.*** Власні вектори лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні.

***Теорема 3.*** Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі $V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ – попарно різні власні числа лінійного оператора, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L_{\lambda_1}$, $b_1, b_2, \ldots, b_k \in L_{\lambda_2}$, …, $c_1, c_2, \ldots, c_k \in L_{\lambda_s}$ – лінійно незалежні системи у відповідних власних підпросторах, тоді система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_k$ – лінійно незалежні.

28. Інваріантність. Теореми 1–5 про інваріантність.

Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі $V$. Підпростір $L \subset V$ називається ***інваріантним*** відносно оператора $\mathscr{A}$, якщо для довільного $x \in L$ $\mathscr{A}(x) \in L$.

***Теореми про інваріантність.***

***Теорема 1.*** Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі $V$ над полем $F$ і всі ненульові вектори підпростору $L$ є $\lambda$-власним векторами оператора $\mathscr{A}$ для фіксованого власного числа $\lambda \in F$. Тоді підпростір $L$ є інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$.

***Наслідок.***
Нехай $\lambda$ – власне число лінійного оператора $\mathscr{A}$. Тоді власний підпростір $L_\lambda$ є інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$.

***Теорема 2.*** Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі $V$ над полем $F$. Тоді лінійна оболонка довільної множини власних векторів оператора $\mathscr{A}$ є підпростором, інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$.

***Теорема 3.*** Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі $V$ над полем $F$. Підпростір $L$ розмірності 1 є підпростором, інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$ тоді і тільки тоді, коли базисний вектор з простору є власним вектором оператора.

***Теорема 4.*** Для будь-якого лінійного оператора у скінченновимірному просторі над полем комплексних чисел існує інваріантний підпростір розмірності 1.

***Теорема 5.*** Для будь-якого лінійного оператора у скінченновимірному просторі над полем дійсних чисел непарної розмірності існує інваріантний підпростір розмірності 1.

***Теорема (про інваріантні підпростори дійсного векторного простору).***
Для будь-якого лінійного оператора у скінченновимірному просторі над полем дійсних чисел існує інваріантний підпростір розмірності 1 або 2.

29. Оператори простої структури.

Достатня умова, критерії оператора простої структури.

### 1.26. Лінійні оператори простої структури.

Будемо вважати, що оператор $\mathscr{A}$ діє на скінченновимірному просторі $V$ над полем $F$ і $\dim V = n$.

Лінійний оператор $\mathscr{A}$ називається ***оператором простої структури***, якщо простір $V$ є прямою сумою одновимірних підпросторів, інваріантних відносно оператора $\mathscr{A}$, тобто $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, $\dim M_j = 1$, $j = \overline{1,n}$, всі $M_j$ інваріантні відносно $\mathscr{A}$.

***Теорема.***

Для лінійного оператора $\mathscr{A}$ на просторі $V$ наступні умови еквівалентні:

1) $\mathscr{A}$ – оператор простої структури;
2) існує базис простору, що складається з власних векторів оператора;
3) існує базис простору, в якому оператору відповідає діагональна матриця.

### 1.27. Достатня умова оператора простої структури.

***Теорема.***

Нехай всі корені характеристичного многочлена оператора $\mathscr{A}$ попарно різні і належать основному полю $F$. Тоді $\mathscr{A}$ – оператор простої структури.

***Теорема (критерій 1).***

Лінійний оператор $\mathscr{A}$ на векторному просторі $V$ є оператором простої структури тоді і тільки тоді, коли

1) всі корені його характеристичного многочлена належать основному полю $F$;
2) якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ – всі попарно різні корені характеристичного многочленна, то розмірність кожного власного підпростору $L_{\lambda_j}$ співпадає з кратністю $\lambda_j$ як кореня характеристичного многочлена.

18

***Теорема (критерій 2).***

Лінійний оператор $\mathscr{A}$ на векторному просторі $V$ є оператором простої структури тоді і тільки тоді, коли

1) всі корені його характеристичного многочлена належать основному полю $F$;
2) якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ – всі попарно різні корені характеристичного многочлена, то $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_s}$.

30. Поняття фактор-простору. Теорема про розмірність.

я в душе не ебу

31. Теорема Гамільтона-Келлі

***Теорема (Гамільтона-Келі).***

Кожна квадратна матриця є матричним коренем свого характеристичного многочлена.

***Наслідок.***

Нехай А – лінійний оператор в скінченновимірному просторі $V$, $\chi(t)$ – його характеристичний многочлен, тоді $\chi(A) = 0$.

32. .Поняття нільпотентного оператора. Критерій нільпотентності. Будова нільпотентного оператора.

сходу идет нахуй тк нет в методичке..

33. Розщеплення лінійного оператора. Теорема Жордана.

***Теорема (Жордана).***

Для кожної квадратної матриці $A$ з елементами з алгебраїчно замкненого поля $F$ існує невироджена квадратна матриця $T$ з елементами з цього поля, що $B = T^{-1}AT$ – жорданова.

Матриця $B$ називається ***жордановою нормальною формою*** матриці $A$.

***Теорема (Жордана в термінах теорії лінійних операторів).***

Для будь-якого лінійного оператора А в скінченовимірному просторі $V$ над алгебраїчно замкненим полем $F$ існує базис, у якому оператору А відповідає жорданова матриця.

Такий базис називається ***жордановим базисом*** оператора А .