Модульна контрольна робота №1 1
з дискретної математики
група УПС-11
Кірієнко Каріна Дмитрівна
Варіант №2

1. Правильні твердження: 4, 6, 7, 9, 10, 11

2. $A = \{\varnothing; \{a, b\}\}$

$\beta(A) = \{\varnothing; \{\varnothing\}; \{\{a, b\}\}; \{\varnothing; \{a, b\}\}\}$

3. $A = \{1, 3, 4, 6\}$; $B = \{3, 6, 7\}$

$A \cap B = \{3; 6\}$

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$

$B \setminus A = \{7\}$

$A \setminus B = \{1, 4\}$

$A \triangledown B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1; 4\} \cup \{7\} = \{1, 4, 7\}$

4. $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, $\beta(X)$ – булеан мн. X

Нехай $\forall x \in \beta(A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in \beta(A) \wedge x \in \beta(C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \beta(A) \cap \beta(C)$.

$\Leftarrow \forall x \in \beta(A) \cap \beta(C) \Rightarrow x \in \beta(A) \wedge x \in \beta(C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in \beta(A \cap C)$. ■

2

(5) а) $A \cup (A \cap B) = A \Rightarrow (A \cap \Omega) \cup (A \cap B) =$
$= A \cap (B \cup \Omega) = A \cap \Omega = A$ (за I законом дистрибутивності) ■

б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$

за власт. поглинання $A \cap B = A \cap (B \cup C \cup D) \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cap (B \cup C \cup D) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cap (B \cup C \cup D) \xrightarrow{\text{поглинання}} A \cap B$ ■

(6) Довести, що не можна виразити $\cup$ через $\setminus$ та $\cap$

$A = \{1, 2\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2\}$

$B = \{1\}$ $\quad A \cap B = \{1\}$ $\quad A \setminus B = \{2\}$

$A = B \neq \emptyset$

$A \setminus B \neq \emptyset$

$A \cap B = A$ $\Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$

(7) а) R_2, R_3, R_5

б) R_1

в) R_4

г) R_2, R_4

д) R_3, R_1

е) R_5

є) R_2

3

(8) $(A\setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$

$\forall (x,y)\in (A\setminus B)\times C \Leftrightarrow x\in (A\setminus B)\wedge y\in C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in C \Leftrightarrow (x,y)\in A\times C\wedge$
$\wedge (x,y)\notin B\times C \Leftrightarrow (x,y)\in (A\times C)\setminus(B\times C)$ ■

(9) $R_1\subseteq R_2$ $R_1\circ Q\subseteq R_2\circ Q$?

$\forall (x,y)\in R_1\circ Q \Rightarrow \exists z: (x,z)\in R_1\wedge (z,y)\in Q \Rightarrow$
$\Rightarrow (z,y)\in Q\wedge (x,z)\in R_2 \Rightarrow (x,y)\in R_2\circ Q$

(10) R_1 і R_2 – симетр. відн., $R_1\circ R_2$ – композиція симетр. відн.. $R_1\circ R_2 \overset{?}{\Leftrightarrow} R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$

Нехай R_1 і R_2 сим. відн.

$\forall (x,y)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow (y,x)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow \exists z: (y,z)\in$
$\in R_1\wedge (z,x)\in R_2 \Rightarrow \exists z: (z;y)\in R_1\wedge$
$\wedge (x;z)\in R_2 \Rightarrow (x,y)\in R_2\circ R_1$.

Припустимо, що для R_1 і R_2 викон. $R_1\circ R_2 =$
$= R_2\circ R_1$.

$\forall (x,y)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow (x,y)\in R_2\circ R_1 \Rightarrow \exists z: (x,z)\in R_2\wedge$
$\wedge (z;y)\in R_1 \Rightarrow \exists z: (z,x)\in R_2\wedge (y;z)\in R_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (y,x)\in R_1\circ R_2$ ■

(13) $f\subseteq A\times B$ – сюр'єкт. $\Leftrightarrow i_B\subseteq f^{-1}\circ f$

4 Нехай $f \subset A \times B$ - сюр'єкція, тоді $\forall y \in B.\ \exists x:$ $(x, y) \in f$. $\forall (x, y) \in f^{-1} \circ f \Rightarrow \exists z : (x, z) \in$ $\in f^{-1} \land (z; y) \in f \Rightarrow (z; x) \in f \land (z; y) \in f \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \Rightarrow (x, x) \in f^{-1} \circ f \land (y, y) \in f^{-1} \circ f \Rightarrow$ $\Rightarrow i_B \leq f^{-1} \circ f$

Нехай $i_B \subset f^{-1} \circ f \Rightarrow (x, x) \in f^{-1} \circ f \Rightarrow (x, z) \in$ $\in f^{-1} \land (z; x) \in f \Rightarrow (z, x) \in f \land (z, x) \in f \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists! z \Rightarrow f \subseteq A \times B$ - сюр'єкція ■

14 а) C_1, C_2, C_3

б) C_1, C_2, C_3

в) C_1, C_2, C_5

г) C_1, C_2, C_3

д) C_1, C_2

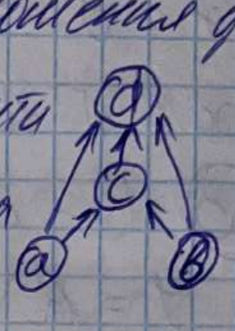
15 а) $(x, y) \in R$

б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, тоді $\exists z \in [x]$, $z \in [y] \Rightarrow xRz, yRz \xRightarrow{R\text{-симетричне}} xRz, zRy \xRightarrow{R\text{-транзитивне}} xRy$. ■

в) $[x]_R = [y]_R$, тоді нехай $a \in [x] \Rightarrow xRa$, $xRy \xRightarrow{R\text{-симетричне}} yRx, xRa \xRightarrow{R\text{-транзитивне}} yRa \Rightarrow a \in$ $\in [y] \Rightarrow [x] = [y] \Rightarrow (xRy) = ([x]_R \cap [y]_R) =$

$= ([x] = [y])$ ■

(16) Нехай на множ. A задано відношення ділиться націло, тоді його можна визначити так: a ділиться націло на собі; b на a; c на a; d на a; d на b; d на c.}



Тоді ми маємо 2 мінімальні елементи (a; b) та один максимальний d ■

(17) Нехай задано віднош. ділиться націло на множині $A = \{2; 6; 9; 10\}$. Тоді 2 мінімальний елемент, а найменшого немає.

(18) R і Q – частково впорядк. на A ?

рефлективність $\Rightarrow i_A \subseteq R, i_A \subseteq Q \Rightarrow i_A \subseteq R \cap Q$

антисиметричність $\Rightarrow (R \cap Q) \cap (R \cap Q)^{-1} \subseteq i_A \Rightarrow$

$\Rightarrow R \cap Q \cap R^{-1} \cap Q^{-1} \subseteq i_A \Rightarrow R \cap R^{-1} \cap Q \cap Q^{-1} \subseteq$

$\subseteq i_A \cap i_A = i_A$

транзитивність $\Rightarrow (R \cap Q) \circ (R \cap Q) \subseteq R \cap Q$

$R \circ R \cap R \circ Q \cap Q \circ R \cap Q \circ Q \subset R \cap Q$

(19) $N^2 = N \times N$

$(x, y) \leq (\sigma; \omega)$

6

$x < \sigma \Rightarrow (x, y) \leq (\sigma; w)$

$x = \sigma \Rightarrow y < w \Rightarrow (x, y) \leq (\sigma, w)$

$x = \sigma \wedge y = w \Rightarrow (x, y) \leq (z; w)$ ■

20 Y - іррац., R - дійсні, Q - раціонал

$Y = R \setminus Q$ - континіум, адже R - континіум, а Q - злічена, а з кожного континіуму можна ~~визнач~~ вилучити злічену множину ■

23 $f: A \to \beta(A)$

$f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$?

Від супротивного:

припустимо, що $f(A) = \beta(A) \Rightarrow f(A) = A \times \beta(A) = \beta(A)$, але $A \times \beta(A) \neq \beta(A)$, тому $f(A) \neq \beta(A)$ ■

$|f(A)| < |\beta(A)|$ - за т. Кантора $\Rightarrow |A| < |\beta(A)|$ і $f(A) \leq |A| \Rightarrow |f(A)| < |\beta(A)|$

25 а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

в) $\varnothing \cap \{\varnothing\} = \varnothing$

г) $\{\varnothing; \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$

д) $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

е) $\{\varnothing; \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$

(26) Поставимо у відповідність кожній підмнож. A_i двійковий вектор довжиною n $(a_1; \dots a_n)$ де $a_1 = 1$, якщо $a_1 \notin A_1$, то $a = a_1$ якщо $a_1 \in A$, тоді число різних векторів довжиною n - це 2^n, тоді $2^n = 2^{|A|}$, тобто $|\beta(A)| = 2^{|A|}$

(27) $N = \{1, 2, 3 \dots\}$; $Z \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$

Встановимо відповідність між парами $(1;0)\,(2;1)\,(3;-1)\,(4;2)\,(5;-2) \dots$

Ця відповідність взаємооднозначна.

Це можна задати таким чином:

$(n; (-1)^n [\frac{n}{2}])$, $n \in N$

(29) а) якщо $A = B$, то $A \sim B$. Так, бієкцією може бути i_A.

б) якщо $A \sim B$, то $A \leq B$. Ні, наприклад $N \sim Z$, однак $N \neq Z$.

(36) $(R_1 \circ R_2)^{-1} \stackrel{?}{=} R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ R_1 і R_2 - дов. в.

8

$\forall (x,y) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z: (y,z) \in R_1 \wedge (z;x) \in R_2 \Leftrightarrow (z;y) \in R_1^{-1} \wedge$

$\wedge (x;z) \in R_2^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ ■

(37) R_1 і R_2 – екв. $R_1 \cup R_2$ екв. $\overset{?}{\Leftrightarrow} R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$

Нехай в. R_1, R_2 і $R_1 \cup R_2$ є екв.

$(a;b) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow (a,b) \in R_1 \cup (a,b) \in R_2 \overset{\text{рефлект.}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (b;b) \in R_2 \wedge (a,a) \in R_1 \Rightarrow (a,b) \in R_1 \circ R_2$

$\Leftarrow (a,b) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow \exists c: (a,c) \in R_1 \cup R_2 \wedge$

$\wedge (c;b) \in R_1 \cup R_2 \overset{\text{транзит.}}{\Rightarrow} (a,b) \in R_1 \cup R_2$ ■

(38) $R \circ R = R$ R – дов. в екв.

$(a,b) \in R \circ R \Rightarrow \exists c: (a,c) \in R \wedge (c,b) \in$

$\in R \overset{\text{транзит.}}{\Rightarrow} (a,b) \in R$

$\Leftarrow (a,b) \in R \overset{\text{рефлекс.}}{\Rightarrow} (b;b) \in R \Rightarrow (a,b) \in$

$\in R \circ R$

(48) $M = \{1;2;3\}$ $R = \{(2,1);(3;2)\}$

$Q = i_M \cup \{(2;1),(1;2),(3;2),(2;3)\}$

(11) Припустимо, що R^+ – транзитивне замикання R на M. Якщо aR^+b, тоді $\exists a_1, a_2, \dots, a_k \mid a_1 = a, a_k = a, a_1 R a_2, a_2 R a_3, \dots, a_{k-1} R a_k \Rightarrow a_1 R^{k-1} a_k$. Тоді $(a,b) \in R^1 \cup R^{-1} \cup \cup R^k \cup$.