Варіант №1

1) Які з наведених співвідношень є неправильними?
$\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$;
$|\{\{\varnothing\}\}| = 2$;
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$1 \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{c, d\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 2, 5, 6\}$, $B=\{2, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \triangledown B$, де $\triangledown$ - симетрична різниця.

4) Довести, що $A \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $\beta(A) \subseteq \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cap (A \cup B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$, де $\overline{X}$ — операція доповнення множини X.

6) Довести, що не можна виразити операцію \ через операції $\cup$ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
$R2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R3=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R4 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення R^+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR^+b, де a, b $\in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_k$, що $a_1 = a$, $a_k = b$ і $a_1Ra_2, a_2Ra_3, ..., a_{k-1}Ra_k$. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R^+ = R$.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - функціональні відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ також функціональне.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є ін'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $f \circ f^{-1} \subseteq i_A$.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C2 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)},
C3 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C4 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C5 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$; (в) $[x]_R = [y]_R$.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з одним мінімальним і двома максимальними елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N^2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \to \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об'єднання зліченної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Довести, що скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли кількість їх елементів співпадає.

32) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кругів, жодні два з яких не перетинаються?

33) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

34) Якою є потужність множини усіх відображень типу N→R?

35) Показати, що сюр'єктивність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

36) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

37) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

38) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

39) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків $[a, b]$ і $[c, d]$.

40) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

41) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b]\times[a, b]$ та площини.

42) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)-1 = R2-1 \circ R1-1$.

43) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

44) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

45) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

46) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3\}$, що включає задане відношення $К = \{(2, 1), (3, 2)\}$.

47) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R-1 = iA$.

48) Нехай $\le$ і $<$ — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$< \circ < \ne <$.

49) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

50) Довести, що перетин $f1 \cap f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

51) За яких умов виконуються рівності
(а) $A \setminus B = B \setminus A$; (б) $A \setminus B = \varnothing$?

Варіант №2

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;
$|\{\varnothing\}| = 0$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$1 \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{a, b\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 3, 4, 6\}$, $B=\{3, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції $\setminus$ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
$R3=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R4 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення R^+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR^+b, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_k$, що $a_1 = a$, $a_k = b$ і a_1Ra_2, a_2Ra_3, ..., $a_{k-1}Ra_k$. Довести, що $R^+ = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup ... \cup R^{(k)} \cup ...$, де $R^{(k)} = R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - всюди визначені відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ - всюди визначене.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $i_B \subseteq f^{-1} \circ f$.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)},
C2 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)},
C3 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C4 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C5 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$; (в) $[x]_R = [y]_R$.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N^2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \rightarrow \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай $A = \{a1, a2, ..., an\}$ — скінченна множина, що складається з n елементів ($|A| = n$). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан $\beta(A)$) дорівнює $2|A|$, тобто $|\beta(A)|=2|A|$.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо $A = B$, то $A \sim B$;
(б) якщо $A \sim B$, то $A = B$.

30) Довести, якщо A та B — зліченні, то $A \times B$ — злічення множина.

31) Довести, що множина всіх злічення послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

32) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

33) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків $[a, b]$ і $[c, d]$.

34) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

35) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b]\times[a, b]$ та площини.

36) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)-1 = R2-1 \circ R1-1$.

37) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

38) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

49) Довести, що об’єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

41) За яких умов виконуються рівності
(а) $(A \setminus B) \cup B = A$; (б) $A \cup B = A \cap B$?

42) Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

43) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кіл, жодні два з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

44) Якою є потужність множини усіх відображень (функцій) типу $R \to N$? (Відповідь обґрунтувати).

45) Показати, що всюди визначеність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

46) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

47) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

48) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3\}$, що включає задане відношення $K = \{(2, 1), (3, 2)\}$.

49) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R\text{-}1 = iA$.

50) Нехай $\le$ і $<$ — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\le \circ < \; = \; <$.

51) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

Варіант №3

1) Які з наведених співвідношень є неправильними?
$\varnothing \subseteq \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;
$|\{\varnothing\}| = 0$;
$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{g, h\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 3, 4, 6\}$, $B=\{3, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $A \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $\beta(A) \subseteq \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cap (A \cup B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$, де $\overline{X}$ — операція доповнення множини X.

6) Довести, що не можна виразити операцію \ через операції $\cup$ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
$R2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R3=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R4 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9). Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де a, b $\in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak$. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R+ = R$.

12) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ і $g\subseteq B\times C$ - сюр'єктивні відношення, то $f\circ g\subseteq A\times C$ також сюр'єктивне.

13) Довести, що відношення $f\subseteq A\times B$ є функціональним відношенням тоді й тільки тоді, коли
$\varphi\text{-}1\circ\varphi\subseteq iB$

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C2 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)},
C3 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C4 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C5 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y)\in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з одним мінімальним і двома максимальними елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R\cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A\rightarrow\beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A)\neq\beta(A)$ і $|f(A)|<|\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання зліченної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

32) Якою є потужність множини усіх монотонних відображень типу R→R? (Відповідь обґрунтувати).

33) Показати, що всюди визначеність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

34) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

35) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

36) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

37) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

38) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

39) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

40) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

41) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

42) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

43) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

44) Довести, що композиція R1○R2 транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо R1○R2 = R2○R1. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

45) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

46) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли R∩R-1 = iA.

47) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
≤○≥ = N2.

48) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

49) Довести, що об'єднання f1∪f2 двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

50) За яких умов виконуються рівності
(д) A \ B = A; (е) A \ B = B?

51) Довести, що скінченна множина не рівнопотужна (не еквівалентна) жодній своїй власній підмножині.

Варіант №4

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;
$|\{\varnothing\}|=1$;
$\varnothing \in \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{e, f\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{2, 3, 5, 6\}$, $B=\{3, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R2=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
$R4 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak\text{-}1Rak$. Довести, що $R+ = R(1) \cup R(2) \cup ... \cup R(k) \cup ...$, де $R(k)= R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - ін'єктивні відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є всюди визначеним відношенням тоді й тільки тоді, коли $iA \subseteq \varphi \circ \varphi\text{-}1$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$,
$C4 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C5 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу $(0, 1)$ і відрізку $[0, 1]$.

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \rightarrow \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)|<|\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) {∅} ∩ {∅};
(б) {∅, {∅}} \ ∅;
(в) ∅ ∩ {∅};
(г) {∅, {∅}} \ {{∅}};
(д) ∅∪{∅};
(е) {∅, {∅}} \ {∅}.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Якою є потужність множини усіх монотонних відображень типу R→R? (Відповідь обґрунтувати).

32) Показати, що всюди визначеність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

33) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

34) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

35) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

36) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

37) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

38) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

39) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

40) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

41) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

42) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

43) Довести, що композиція R1○R2 транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо R1○R2 = R2○R1. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

44) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

45) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли R∩R-1 = iA.

46) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
≤○≥ = N2.

47) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

48) Довести, що об'єднання f1∪f2 двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

49) За яких умов виконуються рівності
(д) A \ B = A; (е) A \ B = B?

50) Довести, що скінченна множина не рівнопотужна (не еквівалентна) жодній своїй власній підмножині.

51) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

Варіант №5

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
{2}⊆{1, {2}};
1∈{1, {2}};
{∅}⊆{∅, 1, {2}};

$|\varnothing| = 0$;
$\{\{2\}\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{i, j\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай A={2, 4, 5, 6}, B={4, 6, 7}. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \triangledown B$, де $\triangledown$ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині M = {1, 2, 3, 4} задані відношення:
R1 = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)};
R2={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)};
R3 = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)};
R4 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)};
R5 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення R+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR+b, де a, b $\in$ M, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів a1, a2, ..., ak, що a1 = a, ak = b і a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak. Довести, що $R+ = R(1) \cup R(2) \cup ... \cup R(k) \cup ...$, де $R(k) = R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - всюди визначені відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ - всюди визначене.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $iB \subseteq f$-$1 \circ f$.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)},
C2 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C3 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C4 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C5 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \to \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;

(e) {∅, {∅}} \ {∅}.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення K = {(2, 1), (3, 2)}.

32) Довести, що композиція R1○R2 транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо R1○R2 = R2○R1. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

33) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
≤○≥ = N2.

34) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

35) Довести, що об’єднання f1∪f2 двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

36) За яких умов виконуються рівності: (а) (A \ B)∪B = A; (б) A \ B = B \ A?

37) Довести, що скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли кількість їх елементів співпадає.

38) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

39) Якою є потужність множини усіх функцій типу N→{0, 1}? (Відповідь обґрунтувати).

40) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

41) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

42) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

43) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

44) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

45) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

46) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b]\times[a, b]$ та площини.

47) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)-1 = R2-1 \circ R1-1$.

48) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

49) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

50) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

51) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R-1 = iA$.

Варіант №6

1) Які з наведених співвідношень є неправильними?

$\varnothing \in \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

$1 \in \{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{\{2\}\} \in \{1, \{2\}\}$;

$1 \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;

$\{\varnothing\} \in \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

$\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\varnothing = \{\ \}$;

$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{k, l\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 3, 6, 7\}$, $B=\{3, 7, 8\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $A \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $\beta(A) \subseteq \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:

(а) $A \cap (A \cup B) = A$;

(б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$, де $\overline{X}$ — операція доповнення множини X.

6) Довести, що не можна виразити операцію \ через операції $\cup$ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:

$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

$R2=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;

$R3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;

$R4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

$R5 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;

(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення R+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR+b, де a, b $\in$M, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів a1, a2, ..., ak, що a1 = a, ak = b і a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли R+ = R.

12) Довести, якщо f$\subseteq$A×B і g$\subseteq$B×C - функціональні відношення, то f$\circ$g$\subseteq$A×C також функціональне.

13) Довести, що відношення f$\subseteq$A×B є ін’єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли f$\circ$f-1$\subseteq$iA.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)},
C2 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C3 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C4 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C5 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр’єктивні; (г) ін’єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) (x, y)$\in$R; (б) [x]R $\cap$ [y]R $\neq \oslash$; (в) [x]R = [y]R.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з одним мінімальним і двома максимальними елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що R$\cap$Q - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, f: A$\rightarrow\beta$(A) - відображення. Довести, що f(A)$\neq\beta$(A) і |f(A)|<|β(A)|.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання зліченної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Довести, що композиція R1○R2 транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо R1○R2 = R2○R1. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

32) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли R∩R-1 = iA.

33) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
≤○< = <.

34) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

35) Довести, що перетин f1∩f2 двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

36) За яких умов виконуються рівності: (а) A∪B = A ∩ B; (б) A \ B = ∅?

37) Довести, що скінченна множина не рівнопотужна (не еквівалентна) жодній своїй власній підмножині.

38) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кіл, жодні два з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

39) Якою є потужність множини усіх монотонних відображень типу $N \to N$? (Відповідь обґрунтувати).

40) Показати, що сюр'єктивність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

41) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

42) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

43) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

44) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

45) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

46) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b]\times[a, b]$ та площини.

47) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)\text{-}1 = R2\text{-}1 \circ R1\text{-}1$.

48) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

49) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

50) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

51) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

Варіант №7

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$|\{\{\varnothing\}\}| = 2$;
$\{\varnothing\}\in\{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$1\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{2\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{\varnothing\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{1\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1, \{2\}\}=\{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$\varnothing\subseteq\{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{m, n\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{2, 3, 4, 7\}$, $B=\{3, 4, 8\}$. Знайти $A\cap B$, $A\cup B$, $B\setminus A$, $A\setminus B$, $A\nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A\cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
$R4 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1\subseteq R2$ довести, що $R1\circ Q \subseteq R2\circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1\circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1\circ R2 = R2\circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak\text{-}1Rak$. Довести, що $R+ = R(1)\cup R(2)\cup ...\cup R(k)\cup ...$, де $R(k)= R\circ ...\circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ і $g\subseteq B\times C$ - ін'єктивні відношення, то $f\circ g\subseteq A\times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, що відношення $f\subseteq A\times B$ є функціональним відношенням тоді й тільки тоді, коли
$\varphi\text{-}1\circ\varphi\subseteq iB$.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C2 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C3 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C4 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)},
C5 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y)\in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R\cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A\to\beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A)\neq\beta(A)$ і $|f(A)|<|\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай $A = \{a1, a2, ..., an\}$ — скінченна множина, що складається з n елементів ($|A| = n$). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює $2|A|$, тобто $|β(A)|=2|A|$.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо $A = B$, то $A \sim B$;
(б) якщо $A \sim B$, то $A = B$.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то $A \times B$ — зліченна множина.

31) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

32) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3\}$, що включає задане відношення $K = \{(2, 1), (3, 2)\}$.

33) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R\text{-}1 = iA$.

34) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$< \circ < \neq <$.

35) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

36) Довести, що об’єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

37) За яких умов виконуються рівності: (а) $A \setminus B = \varnothing$; (б) $A \setminus B = B$?

38) Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

39) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кругів, жодні два з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

40) Якою є потужність множини усіх відображень типу N→N? (Відповідь обґрунтувати).

41) Показати, що всюди визначеність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

42) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

43) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

44) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

45) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

46) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

47) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

48) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

49) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

50) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

51) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

Варіант №9

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$\varnothing = \{ \}$;
$\{2\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;
$\{1\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{1\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$1\in\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\in\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{b, d\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 3, 5, 6\}$, $B=\{3, 6, 7\}$. Знайти $A\cap B$, $A\cup B$, $B\setminus A$, $A\setminus B$, $A\triangledown B$, де $\triangledown$ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A\cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
$R4=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1\subseteq R2$ довести, що $R1\circ Q \subseteq R2\circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1\circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1\circ R2 = R2\circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak\text{-}1Rak$. Довести, що $R+ = R(1)\cup R(2)\cup ...\cup R(k)\cup ...$, де $R(k)= R\circ ...\circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ і $g\subseteq B\times C$ - ін'єктивні відношення, то $f\circ g\subseteq A\times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ є всюди визначеним відношенням тоді й тільки тоді, коли $iA\subseteq \varphi\circ\varphi\text{-}1$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C3 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C4 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y)\in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R\cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу $(0, 1)$ і відрізку $[0, 1]$.

23) Нехай A – довільна множина, $f: A\to\beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A)\neq\beta(A)$ і $|f(A)|<|\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — злічення множина.

31) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

32) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

33) Довести, що композиція R1○R2 транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо R1○R2 = R2○R1. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

34) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

35) R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли R∩R-1 = iA.

36) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

37) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$<\circ< \;\neq\; <$.

38) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

39) Довести, що об’єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

40) За яких умов виконуються рівності: (а) $(A \setminus B) \cup B = A$; (б) $A \setminus B = A$?

41) Довести, що скінченна множина не рівнопотужна (не еквівалентна) жодній своїй власній підмножині.

42) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

43) Якою є потужність множини усіх відображень типу $N \to R$? (Відповідь обґрунтувати).

44) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

45) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — злічення.

46) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

47) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

48) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

49) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

50) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b] \times [a, b]$ та площини.

51) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

Варіант №10

1). Які з наведених співвідношень є неправильними?
$|\{\{\varnothing\}\}| = 2$;
$1 \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2). Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{e, g\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3). Нехай $A=\{1, 3, 4, 7\}$, $B=\{1, 4, 8\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \triangledown B$, де $\triangledown$ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5). Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cap (A \cup B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$, де $\overline{X}$ — операція доповнення множини X.

6). Довести, що не можна виразити операцію \ через операції $\cup$ та $\cap$.

7). Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
R1 = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)};
R2 = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)};
R3={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)};
R4 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)};
R5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8). Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9). Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10). Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11). Відношення R+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR+b, де a, b $\in$M, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів a1, a2, ..., ak, що a1 = a, ak = b і a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли R+ = R.

12). Довести, якщо f$\subseteq$A×B і g$\subseteq$B×C - всюди визначені відношення, то f$\circ$g$\subseteq$A×C - всюди визначене.

13). Довести, що відношення f$\subseteq$A×B є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли iB$\subseteq$f-1$\circ$f.

14). Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C2 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C3 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C4 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)},
C5 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15). Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) (x, y)$\in$R; (б) [x]R $\cap$ [y]R $\neq \varnothing$; (в) [x]R = [y]R.

16). На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з одним мінімальним і двома максимальними елементами.

17). Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18). Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що R$\cap$Q - частковий порядок на A.

19). Побудувати відношення лінійного порядку на множині N2, де N – множина натуральних чисел.

20). Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21). Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22). Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23). Нехай A – довільна множина, f: A$\rightarrow\beta$(A) - відображення. Довести, що f(A)$\neq\beta$(A) і |f(A)|<|β(A)|.

24). Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25). Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26). Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27). Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28). Довести, об'єднання зліченної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29). Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30). Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

32) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

33) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

34) Довести, що композиція R1○R2 транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо R1○R2 = R2○R1. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

35) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

36) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

37) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли R∩R-1 = iA.

38) Нехай $\leq$ і $<$ — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\leq \circ \geq = N^2$.

39) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

40) Довести, що перетин $f_1 \cap f_2$ двох відображень f_1 і f_2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f_1 = f_2$.

41) За яких умов виконуються рівності: (а) $(A \setminus B) \cup B = A$; (б) $A \setminus B = B$?

42) Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

43) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кіл, жодні два з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

44) Якою є потужність множини усіх монотонних відображень типу $R \to R$? (Відповідь обґрунтувати).

45) Показати, що сюр'єктивність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

46) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — злічена.

47) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

48) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

49) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

50) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

51) Довести, що для довільних відношень R_1 і R_2 виконується $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

Варіант №11

1) Які з наведених співвідношень є правильними?

$\varnothing \in \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;

$|\{\varnothing\}| = 1$;

$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;

$1 \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;

$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;

$\{\{2\}\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{f, h\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 5, 6, 8\}$, $B=\{5, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:

(а) $A \cup (A \cap B) = A$;

(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:

R1={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)};

R2 = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)};

R3 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)};

R4 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)};

R5 = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)}.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;

(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak\text{-}1Rak$. Довести, що $R+ = R(1) \cup R(2) \cup ... \cup R(k) \cup ...$, де $R(k) = R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - функціональні відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ також функціональне.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є ін'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $f \circ f\text{-}1 \subseteq iA$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C3 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C4 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$,
$C5 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу $(0, 1)$ і відрізку $[0, 1]$.

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \to \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — злічення множина.

31) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

32) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

33) Довести, що об’єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

34) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

35) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

36) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення K = {(2, 1), (3, 2)}.

37) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли R∩R-1 = iA.

38) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$< \circ < \neq <$.

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

40) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

41) Довести, що об’єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

42) За яких умов виконуються рівності: (а) $A \cup B = A \cap B$; (б) $A \setminus B = \varnothing$?

43) Довести, що скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли кількість їх елементів співпадає.

44) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кругів, жодні два з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

45) Якою є потужність множини усіх відображень типу $N \to \{0, 1\}$? (Відповідь обґрунтувати).

46) Показати, що всюди визначеність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

47) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

48) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

49) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

50) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

51) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

Варіант №12

1) Які з наведених співвідношень є неправильними?

$|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$;

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, 1, \{2\}\}$

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;

$\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;

$\{\{2\}\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{g, i\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{2, 5, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $A \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $\beta(A) \subseteq \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:

(а) $A \cap (A \cup B) = A$;

(б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$, де $\overline{X}$ — операція доповнення множини X.

6) Довести, що не можна виразити операцію \ через операції $\cup$ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:

$R1=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;

$R2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;

$R3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;

$R4 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;

(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak\text{-}1Rak$. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R+ = R$.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - сюр'єктивні відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ також сюр'єктивне.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є функціональним відношенням тоді й тільки тоді, коли
$\varphi\text{-}1 \circ \varphi \subseteq iB$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C3 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C4 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з одним мінімальним і двома максимальними елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу $(0, 1)$ і відрізку $[0, 1]$.

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \to \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об'єднання зліченної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

32) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

33) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

34) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

35) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

36) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

37) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

38) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

40) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

41) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R^{-1} = i_A$.

42) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\leq \circ < \; = \; <$.

43) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

44) Довести, що перетин $f1 \cap f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

45) За яких умов виконуються рівності: (а) $A \cup B = A \cap B$; (б) $A \setminus B = B$?

46) Довести, що скінченна множина не рівнопотужна (не еквівалентна) жодній своїй власній підмножині.

47) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер A, жодні дві з яких не мають спільних точок? (Відповідь обґрунтувати).

48) Якою є потужність множини усіх неперервних відображень типу $R \to R$? (Відповідь обґрунтувати).

49) Показати, що ін'єктивність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

50) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

51) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b] \times [a, b]$ та площини.

Варіант №13

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$|\{\varnothing\}| = 0$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, \{2\}\} = \{\varnothing, 1, \{2\}\}$.
$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{h, j\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині M = {1, 2, 3, 4} задані відношення:
R1={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)};
R2 = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)};
R3 = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)};
R4 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)};
R5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak$. Довести, що $R+ = R(1) \cup R(2) \cup ... \cup R(k) \cup ...$, де $R(k)= R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - ін'єктивні відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $iB \subseteq f-1 \circ f$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C3 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C4 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \emptyset$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати.)

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \to \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об'єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — зліченна множина.

31) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

32) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

33) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

34) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

35) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

36) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

37) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

38) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

40) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

41) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R{-}1 = iA$.

42) За яких умов виконуються рівності: (а) A \ B = B \ A; (б) A \ B = A?

43) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

44) Довести, що об'єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

45) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\leq \circ \geq = N2$.

46) Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

47) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

48) Якою є потужність множини усіх функцій типу $N \to \{0, 1\}$? (Відповідь обґрунтувати).

49) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

50) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

51) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

Варіант №14

1) Які з наведених співвідношень є неправильними?

$|\varnothing| = 0$;

$\{2\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;

$1\in\{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\}\in\{1, \{2\}\}$;

$\varnothing\in\{1, \{2\}\}$;

$\{\{2\}\}\in\{1, \{2\}\}$;

$\{1\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;

$\varnothing\subseteq\{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;

$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{i, k\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{2, 3, 4, 8\}$, $B=\{2, 4, 7\}$. Знайти $A\cap B$, $A\cup B$, $B\setminus A$, $A\setminus B$, $A\nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $A\subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $\beta(A) \subseteq \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:

(а) $A \cap (A \cup B) = A$;

(б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cap B$, де $\overline{X}$ — операція доповнення множини X.

6) Довести, що не можна виразити операцію \ через операції $\cup$ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:

$R1=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;

$R2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

$R3 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;

$R4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;

$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;

(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1\subseteq R2$ довести, що $R1\circ Q \subseteq R2\circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1\circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1\circ R2 = R2\circ R1$.

11) Відношення R+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR+b, де a, b ∈M, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів a1, a2, ..., ak, що a1 = a, ak = b і a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли R+ = R.

12) Довести, якщо f⊆A×B і g⊆B×C - всюди визначені відношення, то f○g⊆A×C - всюди визначене.

13) Довести, що відношення f⊆A×B є ін'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли f○f-1⊆iA.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C2 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C3 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C4 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)},
C5 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) (x, y)∈R; (б) [x]R ∩ [y]R ≠ ⊘; (в) [x]R = [y]R.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з одним мінімальним і двома максимальними елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що R∩Q - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, f: A→β(A) - відображення. Довести, що f(A)≠β(A) і |f(A)|<|β(A)|.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай $A = \{a1, a2, ..., an\}$ — скінченна множина, що складається з n елементів ($|A| = n$). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан $\beta(A)$) дорівнює $2|A|$, тобто $|\beta(A)|=2|A|$.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об'єднання зліченної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо $A = B$, то $A \sim B$;
(б) якщо $A \sim B$, то $A = B$.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то $A \times B$ — зліченна множина.

31) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

32) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

33) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

34) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b] \times [a, b]$ та площини.

35) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)-1 = R2-1 \circ R1-1$.

36) Довести, що об'єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

37) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

38) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень $R1$ і $R2$ є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

40) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3\}$, що включає задане відношення $К = \{(2, 1), (3, 2)\}$.

41) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R-1 = iA$.

42) Чи можна накреслити на площині континуальну множину кіл, жодні два з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

43) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

44) Довести, що перетин $f1 \cap f2$ двох відображень $f1$ і $f2$ з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

45) За яких умов виконуються рівності: (а) $A \setminus B = B \setminus A$; (б) $A \setminus B = B$?

46) Довести, що скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли кількість їх елементів співпадає.

47) Нехай $\leq$ і $<$ — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$< \circ < \neq <$.

48) Якою є потужність множини усіх монотонних відображень типу $N \to N$? (Відповідь обґрунтувати).

49) Показати, що сюр'єктивність відповідності не є інваріантною відносно перетину.

50) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

51) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

Варіант №18

1) Які з наведених співвідношень є правильними?

$\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$1 \in \{1, \{2\}\}$;

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, 1, \{2\}\}$;

$|\varnothing| = 0$;

$\{\{2\}\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;

$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;

$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;

$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;

$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;

$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{i, j\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{2, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:

(а) $A \cup (A \cap B) = A$;

(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:

$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

$R2=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;

$R3 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;

$R4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

$R5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;

(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення R^+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR^+b, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_k$, що $a_1 = a$, $a_k = b$ і $a_1Ra_2, a_2Ra_3, ..., a_{k-1}Ra_k$. Довести, що $R^+ = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup ... \cup R^{(k)} \cup ...$, де $R^{(k)} = R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - всюди визначені відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ - всюди визначене.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $i_B \subseteq f^{-1} \circ f$.

14) Нехай задані множини A = {a, b, c, d, e} і B = {1, 2, 3, 4, 5} та відношення між ними:
C1 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)},
C2 = {(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)},
C3 = {(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)},
C4 = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)},
C5 = {(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$; (в) $[x]_R = [y]_R$.

16) На множині A = {a, b, c, d} визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N^2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \rightarrow \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай $A = \{a1, a2, ..., an\}$ — скінченна множина, що складається з n елементів ($|A| = n$). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан $\beta(A)$) дорівнює $2|A|$, тобто $|\beta(A)|=2|A|$.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо $A = B$, то $A \sim B$;
(б) якщо $A \sim B$, то $A = B$.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то $A \times B$ — злічення множина.

31) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3\}$, що включає задане відношення $K = \{(2, 1), (3, 2)\}$.

32) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

33) Нехай $\leq$ і $<$ — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\leq \circ \geq = N2$.

34) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

35) Довести, що об’єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

36) За яких умов виконуються рівності: (а) $(A \setminus B) \cup B = A$; (б) $A \setminus B = B \setminus A$?

37) Довести, що скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли кількість їх елементів співпадає.

38) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

39) Якою є потужність множини усіх функцій типу $N \to \{0, 1\}$? (Відповідь обґрунтувати).

40) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

41) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

42) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

43) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

44) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

45) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

46) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b]\times[a, b]$ та площини.

47) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)-1 = R2-1 \circ R1-1$.

48) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

49) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

50) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

51) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R-1 = iA$.

Варіант №26

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$|\{\varnothing\}| = 0$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{2\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{2\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{1, \{2\}\}=\{\varnothing, 1, \{2\}\}$.
$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{h, j\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 6, 7\}$. Знайти $A\cap B$, $A\cup B$, $B\setminus A$, $A\setminus B$, $A\nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A\cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1\subseteq R2$ довести, що $R1\circ Q \subseteq R2\circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1\circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1\circ R2 = R2\circ R1$.

11) Відношення R^+ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо aR^+b, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_k$, що $a_1 = a$, $a_k = b$ і a_1Ra_2, a_2Ra_3, ..., $a_{k-1}Ra_k$. Довести, що $R^+ = R^{(1)}\cup R^{(2)}\cup...\cup R^{(k)}\cup...$, де $R^{(k)}= R\circ...\circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ і $g\subseteq B\times C$ - ін'єктивні відношення, то $f\circ g\subseteq A\times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, що відношення $f\subseteq A\times B$ є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $i_B\subseteq f^{-1}\circ f$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C_1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C_2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C_3 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C_4 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C_5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y)\in R$; (б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$; (в) $[x]_R = [y]_R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R\cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині N^2, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати.)

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу $(0, 1)$ і відрізку $[0, 1]$.

23) Нехай A – довільна множина, $f: A\to\beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A)\neq\beta(A)$ і $|f(A)|<|\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) {⊘} ∩ {⊘};
(б) {⊘, {⊘}} \ ⊘;
(в) ⊘ ∩ {⊘};
(г) {⊘, {⊘}} \ {{⊘}};
(д) ⊘∪{⊘};
(е) {⊘, {⊘}} \ {⊘}.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об'єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — злічення множина.

31) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

32) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — злічення.

33) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

34) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

35) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

36) Довести, що об'єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

37) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

38) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

40) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

41) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R-1 = iA$.

42) За яких умов виконуються рівності: (а) A \ B = B \ A; (б) A \ B = A?

43) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

44) Довести, що об'єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

45) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\leq \circ \geq = N2$.

46) Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

47) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

48) Якою є потужність множини усіх функцій типу $N \rightarrow \{0, 1\}$? (Відповідь обґрунтувати).

49) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

50) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

51) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].

Варіант №36

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$\varnothing = \{\ \}$;
$\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, \varnothing\} = \{1\}$;
$\{1\} \in \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$1 \in \{1, \{2\}\}$;
$\varnothing \in \{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\} \subseteq \{1, \{2\}\}$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{b, d\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 3, 5, 6\}$, $B=\{3, 6, 7\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $B \backslash A$, $A \backslash B$, $A \nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
$R1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;
$R2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$;
$R4=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)\}$;
$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1 \subseteq R2$ довести, що $R1 \circ Q \subseteq R2 \circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2, a2Ra3, ..., ak-1Rak$. Довести, що $R+ = R(1)\cup R(2)\cup ...\cup R(k)\cup ...$, де $R(k)= R\circ ...\circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ і $g\subseteq B\times C$ - ін'єктивні відношення, то $f\circ g\subseteq A\times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, якщо $f\subseteq A\times B$ є всюди визначеним відношенням тоді й тільки тоді, коли $iA\subseteq \varphi\circ\varphi-1$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C3 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C4 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y)\in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R\cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати).

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A\rightarrow \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A)\neq \beta(A)$ і $|f(A)|<|\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$;
(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
(в) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$;
(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$;
(д) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$;
(е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

26) Нехай $A = \{a1, a2, ..., an\}$ — скінченна множина, що складається з n елементів ($|A| = n$). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан $\beta(A)$) дорівнює $2|A|$, тобто $|\beta(A)|=2|A|$.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об'єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо $A = B$, то $A \sim B$;
(б) якщо $A \sim B$, то $A = B$.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то $A \times B$ — зліченна множина.

31) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

32) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо $R1 \circ R2 = R1 \cup R2$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

33) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

34) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3\}$, що включає задане відношення $K = \{(2, 1), (3, 2)\}$.

35) R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R-1 = iA$.

36) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується $(R1 \circ R2)-1 = R2-1 \circ R1-1$.

37) Нехай $\leq$ і $<$ — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$< \circ < \neq <$.

38) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

39) Довести, що об’єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли $f1 = f2$.

40) За яких умов виконуються рівності: (а) $(A \setminus B) \cup B = A$; (б) $A \setminus B = A$?

41) Довести, що скінченна множина не рівнопотужна (не еквівалентна) жодній своїй власній підмножині.

42) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

43) Якою є потужність множини усіх відображень типу $N \to R$? (Відповідь обґрунтувати).

44) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

45) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — зліченна.

46) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

47) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

48) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків $[a, b]$ і $[c, d]$.

49) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

50) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата $[a, b]\times[a, b]$ та площини.

51) Довести, що об’єднання $R1 \cup R2$ двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R1 \cup R2 = R1 \circ R2$.

Варіант №40

1) Які з наведених співвідношень є правильними?
$|\{\varnothing\}| = 0$;
$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$;
$\{2\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{2\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1\}\in\{1, \{2\}\}$;
$\{1\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\varnothing\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{\varnothing\}\subseteq\{1, \{2\}\}$;
$\{1, \{2\}\}=\{\varnothing, 1, \{2\}\}$.
$\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$;

2) Для заданої множини $A = \{\varnothing, \{h, j\}\}$ побудувати булеан $\beta(A)$ множини A.

3) Нехай $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 6, 7\}$. Знайти $A\cap B$, $A\cup B$, $B\setminus A$, $A\setminus B$, $A\nabla B$, де ∇ - симетрична різниця.

4) Довести, що $\beta(A\cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ - булеан множини X.

5) Довести наведені нижче рівності шляхом тотожних перетворень:
(а) $A \cup (A \cap B) = A$;
(б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$.

6) Довести, що не можна виразити операцію $\cup$ через операції \ та $\cap$.

7) Нехай на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задані відношення:
R1={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1)};
R2 = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3, 3), (4, 1)};
R3 = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)};
R4 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)};
R5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}.
Визначити, які з цих відношень:
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) не рефлексивні;
(г) симетричні; (д) антисиметричні; (е) не симетричні; (є) транзитивні.

8) Довести, що $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

9) Для відношень R1 і R2 таких, що $R1\subseteq R2$ довести, що $R1\circ Q \subseteq R2\circ Q$, де Q – довільне відношення.

10) Довести, що композиція $R1\circ R2$ симетричних відношень R1 і R2 буде симетричним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R1\circ R2 = R2\circ R1$.

11) Відношення $R+$ називається транзитивним замиканням відношення R на M, якщо $aR+b$, де $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли у множині M існує така послідовність елементів $a1, a2, ..., ak$, що $a1 = a$, $ak = b$ і $a1Ra2$, $a2Ra3$, ..., $ak\text{-}1Rak$. Довести, що $R+ = R(1) \cup R(2) \cup ... \cup R(k) \cup ...$, де $R(k)= R \circ ... \circ R$ k разів.

12) Довести, якщо $f \subseteq A \times B$ і $g \subseteq B \times C$ - ін'єктивні відношення, то $f \circ g \subseteq A \times C$ також ін'єктивне.

13) Довести, що відношення $f \subseteq A \times B$ є сюр'єктивним відношенням тоді й тільки тоді, коли $iB \subseteq f\text{-}1 \circ f$.

14) Нехай задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відношення між ними:
$C1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,
$C2 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,
$C3 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,
$C4 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$,
$C5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$.
Визначити, які з цих відношень:
(а) функціональні; (б) всюди визначені; (в) сюр'єктивні; (г) ін'єктивні; (д) бієктивні.

15) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R наведені твердження рівносильні:
(а) $(x, y) \in R$; (б) $[x]R \cap [y]R \neq \varnothing$; (в) $[x]R = [y]R$.

16) На множині $A = \{a, b, c, d\}$ визначити частковий порядок з двома мінімальними і одним максимальним елементами.

17) Побудувати частково впорядковану множину з 1 мінімальним, але без найменшого елемента.

18) Нехай R і Q – часткові порядки на множині A. Довести, що $R \cap Q$ - частковий порядок на A.

19) Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N2$, де N – множина натуральних чисел.

20) Яка потужність множини ірраціональних чисел? (Відповідь обґрунтувати.)

21) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільного відрізку і прямої.

22) Побудувати бієкцію між множиною точок інтервалу (0, 1) і відрізку [0, 1].

23) Нехай A – довільна множина, $f: A \rightarrow \beta(A)$ - відображення. Довести, що $f(A) \neq \beta(A)$ і $|f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум.

25) Знайти множини:
(а) {⊘} ∩ {⊘};
(б) {⊘, {⊘}} \ ⊘;
(в) ⊘ ∩ {⊘};
(г) {⊘, {⊘}} \ {{⊘}};
(д) ⊘∪{⊘};
(е) {⊘, {⊘}} \ {⊘}.

26) Нехай A = {a1, a2, ..., an} — скінченна множина, що складається з n елементів (|A| = n). Довести, що кількість усіх підмножин множини A (її булеан β(A)) дорівнює 2|A|, тобто |β(A)|=2|A|.

27) Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z.

28) Довести, об’єднання континуальної сукупності континуальних множин має потужність континуум.

29) Чи правильні такі твердження (відповідь обґрунтувати):
(а) якщо A = B, то A ~ B;
(б) якщо A ~ B, то A = B.

30) Довести, що якщо A та B — зліченні, то A×B — злічення множина.

31) Довести, що множина всіх підмножин зліченної множини A має потужність континуум.

32) Довести, що множина всіх скінченних підмножин зліченної множини — злічення.

33) Довести, що множина всіх зліченних послідовностей натуральних чисел має потужність континуум.

34) Встановити взаємно-однозначну відповідність між точками квадрата [a, b]×[a, b] та площини.

35) Довести, що для довільних відношень R1 і R2 виконується (R1○R2)-1 = R2-1○R1-1.

36) Довести, що об’єднання R1∪R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли R1∪R2 = R1○R2.

37) Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність R○R = R.

38) Довести, що композиція R1○R2 двох еквівалентностей R1 і R2 є еквівалентністю, якщо R1○R2 = R1∪R2. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

39) Довести, що композиція $R1 \circ R2$ транзитивних відношень R1 і R2 є транзитивним відношенням, якщо $R1 \circ R2 = R2 \circ R1$. Чи вірне обернене твердження? (Відповідь обґрунтувати).

40) Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині M = {1, 2, 3}, що включає задане відношення К = {(2, 1), (3, 2)}.

41) Нехай R — транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли $R \cap R\text{-}1 = iA$.

42) За яких умов виконуються рівності: (а) A \ B = B \ A; (б) A \ B = A?

43) Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

44) Довести, що об'єднання $f1 \cup f2$ двох відображень f1 і f2 з A в B буде відображенням з A в B тоді й тільки тоді, коли f1 = f2.

45) Нехай ≤ і < — традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що
$\leq \circ \geq = N2$.

46) Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині.

47) Чи можна накреслити на площині континуальну множину літер Г, жодні дві з яких не перетинаються? (Відповідь обґрунтувати).

48) Якою є потужність множини усіх функцій типу $N \rightarrow \{0, 1\}$? (Відповідь обґрунтувати).

49) Показати, що функціональність відповідності не є інваріантною відносно об'єднання.

50) Число, яке не є коренем жодного многочлена з раціональними коефіцієнтами, називається трансцендентним. Довести, що множина всіх трансцендентних чисел континуальна.

51) Побудувати взаємно-однозначну відповідність між точками довільних двох відрізків [a, b] і [c, d].