1. Первісна. Інтеграл Ньютона-Лейбніца.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***первісною функції*** $f(x)$, якщо $D_f = D_F$ і $\forall x \in D_f$ виконується: $F'(x) = f(x)$. Оскільки $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$, $dF = f(x)\,dx$, то $F(x) = \int f(x)\,dx$ називається ***невизначеним інтегралом***.

Теорема (про структуру первісної). Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — первісна для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тоді $\forall x \in D_f = D_F$: $F'(x) = f(x)$. Для того, щоб довільна функція $\Phi(x)$ була первісною для $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\Phi(x) - F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Сукупність всіх первісних функцій для $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \,|\, x \in D_f, C \in \mathbb{R}\}$, де $F'(x) = f(x)$. Як правило, позначення множини опускають і пишуть $F(x) + C$.

Інтеграл Ньютона–Лейбніца

Інтеграл Ньютона–Лейбніца, який запроваджується до розгляду, заміняє собою невизначений інтеграл, який традиційно вивчають лише з точки зору правил та техніки його обчислення, не займаючись застосуваннями [1, с. 196].

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною в сенсі Ньютона–Лейбніца*** на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall x \in X$ вона має первісну, тобто

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \overset{def}{\Leftrightarrow} \{F(a) = 0 \wedge \forall x \in X : F'(x) = f(x)\}.$$

Функція $F(x)$ називається ***інтегралом Ньютона–Лейбніца*** з фіксованою нижньою межею a і змінною верхньою x. Її значення $F(b)$ в точці $b \in X$ називається ***визначеним інтегралом Ньютона–Лейбніца*** і позначається $\int_a^b f(t)\,dt$, де t — змінна інтегрування, від вибору якої величина інтегралу не залежить. Якщо f інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на множині X і множина точок її розриву — не більш ніж злічення, то $F(x)$ — це первісна у широкому розумінні.

Теорема (формула Ньютона–Лейбніца). Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на D_f і F — її первісна, то $\forall a \in D_f$ і $\forall b \in D_f$ існує $\int_a^b f(x)\,dx$, однозначно визначений, і має місце рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

2. Первісна в широкому розумінні.

Внаслідок зв'язку між похідною та первісною (інтегралом Ньютона-Лейбніца) можна стверджувати, що первісна неперервної функції на проміжку повинна бути неперервною і навіть диференційованою. Якщо $[a,b]\xrightarrow{F}R$ є первісною функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$,то $\forall x\in[a,b]\ \ F'(x)=f(x)$. Але за теоремою Дарбу, $F'(x)$ приймає всі проміжні значення між $F'(a)=f(a)$ та $F'(b)=f(b)$ (хоча може бути розривною). Тому, навіть

найпростіші кусково-неперервні функції $(\operatorname{sgn} x,[x])$ можуть не мати первісної, бо не приймають усіх проміжних значень.

Узагальнимо це поняття.

Нехай $[a,b]$ – деякий проміжок, функція $[a,b]\xrightarrow{F}R$ називається ***первісною в широкому розумінні*** (***ПШР***) функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$, якщо F – неперервна і має похідну F', яка дорівнює f в усіх точках множини $[a,b]$, за виключенням , можливо, не більш як зліченої множини $X\subset[a,b]$.

Теорема 1. *(Зв'язок між первісними в широкому розумінні)*

Нехай F_1,F_2 – первісні в широкому розумінні функції $[a,b]\xrightarrow{F}R$, тоді $\exists C\in R:\forall x\in[a,b]\ F_2(x)=F_1(x)+C$.

Доведення теореми. F_1 та F_2 – неперервні та диференційовані в усіх точках множини $X_1\cup X_2$. Тоді для функції $\Phi=F_1-F_2$ ми маємо $\forall x\in[a,b]\setminus(X_1\cup X_2)$ $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0\Rightarrow$ з наслідку з теореми Лагранжа $\Phi(x)=Const$.

Теорему доведено.

3. Означення інтеграла Рімана як границі інтегральних сум.

ІНТЕГРАЛ РІМАНА

Нехай на $[a,b]$, $a<b$ задана неперервна функція $f(x)$. Позначимо $P_{[a,b]}$ розбиття $[a,b]$ точками, що задовольняють умову $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$: $P_{[a,b]}=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$. Число $\|P\|=\max\limits_{i=0,n-1}\{\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\}$ називається *нормою розбиття.*

Нехай ξ_i – довільна точка сегменту $[x_i,x_{i+1}]$, $\xi_p=\{\xi_0,\xi_1,\ldots\xi_i,\ldots,\xi_{n-1}\}$ – сукупність проміжних точок.

Означення 1.

Інтегральною сумою для функції $f:[a,b]\xrightarrow{f}R$ називається число $S_p(f,\xi_p)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$. Інтегральна сума залежить від розбиття $P_{[a,b]}$ і точок ξ_p.

Означення2.

Для $f:[a,b]\to R$ число $I\in R$ називається інтегралом Рімана, якщо $\forall\ \varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0:\|P\|<\delta\Rightarrow|S_p(f,\xi_p)-I|<\varepsilon$, або число $I\in R$ називається інтегралом Рімана функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$, якщо $\exists\ \lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(f(\xi_i)\Delta x_i)$, яка не залежить від способу розбиття і вибору точок ξ_p.

4. Верхні та нижні суми Дарбу.

Інтегральні суми Дарбу

Для розбиття $P_{[a,b]}$ визначимо числа

$m_i=\inf\{f(x)\,|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\}$;

$M_i=\sup\{f(x)\,|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\}$

$\omega_i=M_i-m_i$ – коливання функції на $[x_i,x_{i+1}]$, I = (0, n-1)

Суми $\overline{S_p}(f)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$ і $\underline{S_p}(f)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$ називаються відповідно *верхньою* та *нижньою* інтегральними сумами Дарбу. Ми розглядаємо лише обмежені функції.Тому множина усіх нижніх сум Дарбу має верхню межу, а множина усіх верхніх сум сум Дарбу має нижню межу.

Отже,

$$\overline{S_p}(f)=\sup_p S_p(f,\xi_p)\,;\ \underline{S_p}(f)=\inf_p S_p(f,\xi_p)\,;\ \underline{S_p}(f)\le\overline{S_p}(f).$$

Означення 3. Верхнім та нижнім інтегралом Дарбу обмеженої функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$ називаються відповідно числа $\overline{\int}fdx=\inf\limits_p\overline{S_p}$, $\underline{\int}fdx=\sup\limits_p\underline{S_p}$. $\overline{\int}$ – це знак інтеграла з рискою зверху.

Означення4. Функція f називається інтегрованою в сенсі Дарбу на $[a,b]$, якщо $\underline{\int} fdx = \overline{\int} fdx$, а спільне значення називається інтегралом Дарбу. Для існування визначеного інтеграла (Рімана) необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{\|p\|\to 0} \underline{S_p}(f) = \lim\limits_{\|p\|\to 0} \overline{S_p}(f)$.

Інтегровними на $[a,b]$ функціями є: неперервні на $[a,b]$ функції, обмежені на $[a,b]$, які мають скінченне число точок розриву (кусково-неперервні), монотонні обмежені функції.

5. Теореми про середнє.

Перша теорема про середнє значення

Нехай $f \in R_{[a,b]}$, $g \in R_{[a,b]}$, $g \ge 0$, ($g \le 0$), тобто $g(x)$ не змінює знак $\forall x \in [a,b]$, m і M точні межі $f(x)$ на $[a,b]$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Тоді знайдеться таке число μ, $m \le \mu \le M$, що $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

Наслідком цієї теореми є наступне твердження:

Якщо функція $f \in C_{[a,b]}$, то існує точка $\forall \xi \in [a,b]$, що $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. Якщо функція $f \in R_{[a,b]}$ і існують точки x_1 та x_2 з $[a,b]$, в яких вона приймає найбільше та найменше значення, то існує точка $\xi \in [a,b]$, що $f(\xi) = \mu$ і $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ - це оцінка інтегралу від неперервної функції.

Друга теорема про середнє значення

Якщо на $[a,b]$ функція $g(x)$ монотонна, а $f(x) \in R_{[a,b]}$, то існує $\xi \in (a,b)$, що $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$ – ця формула називається *формулою Бонне*.

Якщо g невід'ємна, $g \ge 0$ і монотонно спадна (монотонно зростаюча), то мають місце формули Бонне:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx,\ \ \xi \in (a,b)\,,\ \ \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

6. Основна формула інтегрального числення.

Основна формула інтегрального числення

Якщо $f \in R_{[a,b]}$ має не більше, ніж зчисленну множину точок розриву і довільну первісну F в широкому розумінні, то $\int_a^b F(x)dx = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбніца.

7. Інтеграл Рімана як функція меж інтегрування.

Нехай $f:[a,b] \to R$, $f \in C_{[a,b]}$, $\varphi:[\alpha,\beta] \to R$, $\varphi \in C_{[a,b]}$, $E_\varphi \subset [a,b]$, існує похідна функції φ' $\forall\ x \in [\alpha,\beta]$. Розглянемо $\Phi(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)dy$, де $\varphi(x_0) = t_0 \in [a,b]$. Можемо розглядати цей інтеграл як композицію $F \circ \varphi$: $F = \int_{t_0}^{t} f(y)dy,\ t \in [a,b],\ \ F'(t) = f(t)$ $\forall\ \ t \in [a,b]$. За правилом знаходження похідної складної функції будемо мати $\Phi = F \circ \varphi,\ \Phi'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ і отримали

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{d}{dx}\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)dy = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Якщо розглянути інтеграл Рімана як складну функцію нижньої межі інтегрування і об‘єднати обидва випадки, то отримаємо рівність:

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

Якщо послабити вимоги на неперервність φ $i\,\psi$, і вимагати не більше як зліченої множини точок то рівність справджується скрізь, крім цієї зліченої множини точок.

8. Обчислення площ плоских фігур.

1.***Площа плоскої фігури в декартових прямокутних координатах.***
Нехай f(x) неперервна невід”ємна на [a ,b] функція .
Площа S множини $\{(x;y)\ a\le x\le b\ 0\le y\ \le f(x)\}$(криволінійної трапеції) дорівнює

$$S \overset{def}{=} S([a,b])=\int_a^b f(x)dx$$

Якщо f(x) ≤ 0 на [a, b], то $\int_a^b f(x)dx \le 0$ і за абсолютною величиною він дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції

$$-S=\int_a^b f(x)dx$$

Площа, обмежена кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$, ординатами x=a ,x=b при умові $f_2(x) \ge f_1(x)$ обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b (f_2-f_1)(x)dx$$

Пр. Обчислити площу, обмежену y=sin(x) і віссю OX при $0\le x\le 2\pi$

S= $\int_0^{\pi}\sin(x)dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)dx\right|=\int_0^{2\pi}|\sin(x)dx|=4$.

2. ***Площа плоскої фігури в полярних координатах*** .
<u>Криволінійним сектором</u> називається плоска фігура, що обмежена неперервною кривою і променями, які виходять з полюса O і утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2 .

$E_f=\{(\rho,\varphi)\in R^2 | \rho=f(\varphi), \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\}$.

$$S \overset{def}{=} S([\varphi_1,\varphi_2])=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi$$

9. Обчислення довжини дуги кривої.

3. ***Довжина дуги кривої*.**

Нехай крива задана рівнянням L=f(x) в прямокутних координатах Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої що міститься між вертикальними прямими x=a y=b.

Під довжиною дуги AB розуміємо границю, до якої прямує довжина вписаної ламаної

$$M_k M_{k+1} = \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2} = \sqrt{1+(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k})^2}\Delta x_k$$

Якщо f(x) $\in C_{[a,b]}$, $f'(x) \in C[a, b]$, то довжина дуги задається формулою

$$L_{AB} = \lim_{\|p\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'(\xi_k)}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx .$$

Якщо крива задана в полярних координатах ,то

$$L_{AB} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta)+(\rho'(\vartheta))^2}d\vartheta .$$

Якщо крива задана параметрично,

$x=\vartheta(t)$ $y=\psi(t)$ $\vartheta,\psi \in C_{[t1,t2]}$ $t_1 \le t \le t_2$ $\vartheta',\psi' \in C_{[t_1,t_2]}$

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+[\frac{\psi'(t)}{\vartheta'(t)}]^2}\vartheta'(t)dt$$

10. Обчислення об'ємів за допомогою інтеграла Рімана.

В загальному випадку

$$V = \int_a^b (S(x))\ dx ,$$

$S(x)$ -площа перерізу, перпендикулярного вісі Ox.

Об'єм тіла обертання навколо вісі Ox

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx .$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі Oy криволінійної трапеції $a \le x \le b$, $0 \le y \le y(x)$, де $y(x)$-однозначна неперервна функція дорівнює

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx .$$

11. Лінійний нормований простір. Приклади норм в Rn.

Означення.1 Відображення $\|\cdot\|: E \to R$ називається нормою (довжиною) у просторі , якщо $\forall(x \in E, y \in E, \lambda \in K)$ виконуються такі аксіоми норми:

1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = o$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника);

Норма у векторному просторі має той же зміст, що і модуль для дійсних чисел- відстань до нуля, а норма різниці між x та y –відстань між ними.

Означення.2 Упорядкований набір $(E, +, \bullet, \|\cdot\|)$ називається нормованим простором. З аксіом 2) і 3)$\Rightarrow \|0\| = 0, \|x\| \ge 0, \forall x \in E$.

Означення.3 Вектор x називається границею послідовності векторів (x_n), якщо $\|x_n - x\| = o(1), \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Якщо послідовність (x_n) векторів нормованого простору E збігається до вектора x, то $\|x_n\| \to \|x\|$, це властивість неперервності норми .

Приклади норм:

Для $\forall x \in R$ введемо норму $\|x\| = |x|$

$\|\cdot\|: R^m \to R$, $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}$ (Евклідова норма)

$\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$ (октаедрична норма)

$\|x\| = \max |x_i|$ (кубічна норма) $1 \le i \le m$

Всі запроваджені в R^m норми – еквівалентні.

12. Метрика та метричний простір.

Однією із фундаментальних характеристик взаємного розміщення точок множини є відстань між ними.

Означення.4 Нехай E – довільна множина. Відображення $E^2 \xrightarrow{\rho} R$ називається метрикою, якщо $\forall x, y, z \in E$ виконуються аксіоми:

1) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симетрія);

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Упорядкована пара (E, ρ) називається метричним простором.

Норма в R^m грає ту ж роль, що і абсолютна величина для точок числової прямої. Відстань від x до нуля визначається як $d(x,0) = \|x\|$.

Наприклад: $\rho(x, y) = |x - y|$, виконуються аксіоми метрики , аксіома 3):

$|x - y| \le |x - z| + |z - y|$.

Тоді всякий нормований векторний простір є метричним, якщо визначити в ньому метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Означення.5 Нехай (E, ρ) – метричний простір, $x \in E, x_n \in E, \forall n \in N$. Точка x називається границею векторної послідовності (x_n), якщо $\rho(x_n, x) = o(1)$ і записується $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Послідовність точок метричного простору, яка має границю, називається збіжною.

13. Поняття функції багатьох змінних (ФБЗ).

<u>**Відображення множин**</u>

Нехай X та У- довільні метричні простори , $E \subset X$, *тоді* $E \xrightarrow{f} Y$ означає , що кожному елементу $x \in E$ ставиться у відповідність $y \in Y$, який називається образом цього елемента і множина $f^{-1}(y) = \{x \in E | f(x) = y\}$ називається повним прообразом простору.

Якщо $X = R^n, Y = R^1, E \xrightarrow{f} Y$, $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $E \subset R^n$.

Якщо $X = R^2$, $E \xrightarrow{f} R$, $U = f(x, y)$-функція двох змінних.

Якщо $X = R^3$, *то* $E \xrightarrow{f} R, E \subset R^3$, $U = f(x, y, z)$ - функція 3-х змінних , фізичний зміст якої є густина або кількість речовини.

14. Границя та неперервність функцій багатьох змінних.

Означення(за Коші) .Число $A \in R$ - границя функції $f(x)$ при $x \to a$ ($A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, a – гранична точка $E \subset X$), якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon, a) > 0:\ \begin{cases} 0<|x_1-a_1|<\delta, \\ 0<|x_n-a_n|<\delta \end{cases} \Rightarrow |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$, або цей факт записують так: $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$, і називають A n – кратною границею.

Якщо $X = R^2$, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$, A – подвійна границя.

Приклади:

1) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} > \dfrac{x+y}{(x\ \ +y)^2} = \dfrac{1}{x+y}$

$$\lim_{\substack{x \to 0_+ \\ y \to 0_+}} f(x,y) > \lim_{\substack{x \to 0_+ \\ y \to 0_+}} \frac{x+y}{(x+y)^2} = \lim_{\substack{x \to 0_+ \\ y \to 0_+}} \frac{1}{x+y} = +\infty.$$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = |y = kx| = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k^2}{1+k^2}.$$ Результат залежить від k,

отже подвійної границі в точці не існує.

Крім одночасного прямування аргументів до границі, маємо границі, що отримуємо при послідовних граничних переходах по кожному аргументу окремо, в тому, чи іншому порядку.

Означення. Нехай $\exists \lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$\lim_{x_2 \to a2} \varphi(x_2, \dots, x_n) = \psi(x_3, x_4, \dots, x_n)$$

. . . . . .

$\lim\limits_{x_n \to a_n} \lim\limits_{x_{n-1} \to a_{n-1}} \cdots \lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - називається повторною границею, якщо існує границя при $x_n \to a_n$ при всіх фіксованих попередніх границях.

Неперервне відображення.

X, У – метричні простори, $E \subset X$, точка x_0- гранична точка E, $x_0 \in E$.

Означення. $E \xrightarrow{f} Y$, f –неперервна в точці $x_0 \in E$, якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Означення (за Коші). $E \xrightarrow{f} Y$, $E \subset X$, f – неперервна в точці $x_0 \in E$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \ \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$

Означення (за Гейне). $E \xrightarrow{f} Y$, f – неперервна в точці $x_0 \in E$, якщо для $\forall \ x_n \in E, x_n \to x_0$ відповідає послідовність $f(x_n) \to f(x_0)$.

Мають місце теореми про арифметичні дії над дійсними неперервними функціями, аналогічні теоремам для функції однієї змінної.

Неперервність в R^n.

$X = R^n$, $Y = R^1$, точка $x_0 \in E, E \subset X$, точка x_0- гранична точка Е.

Означення 1. f – неперервна в точці $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in E$ $(E \xrightarrow{f} R^1)$, якщо

$$\exists \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$$

Означення 2. $E \xrightarrow{f} R$, $E \subset R^n$, точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in E$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$:

$$|x_1 - x_1^0| < \delta, ..., |x_n - x_n^0| < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

15. Частинні похідні. Диференційовність функцій багатьох змінних.

Диференційне числення функцій багатьох змінних.
Частинні похідні, частинний диференціал.

Маємо $E \xrightarrow{f} R^1$, $E \subset R^3$, $U = f(x, y, z)$. Візьмемо точку $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E$; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – довільні прирости.

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \Delta f(P_0)$ – приріст функції.

$f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x f(P_0)$ – частинний приріст по змінній x.

$f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = \Delta_y f(P_0)$ – частинний приріст по змінній y.

$f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \Delta_z f(P_0)$ – частинний приріст по змінній z.

Означення. Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції до відповідного приросту аргументу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}$, то вона називається частинною похідною по відповідній змінній. Можливі інші позначення: $U_x'(P_0)$, $f_x'(P_0)$.

Означення диференційовності. $E \xrightarrow{f} R^1$, $E \subset R^3$ називається диференційовною в точці $P_0 \in E$, якщо повний приріст функції в цій точці можна подати у вигляді $\Delta f(P_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, де $A, B, C - const$, що не залежать від $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, а ρ залежить від метрики простору: $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ - віддаль між точками $P_0(x_0, y_0, z_0)$ та $P\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$.

Якщо функція диференційовна, то лінійна частина повного приросту функції називається повним диференціалом.

$$df(P_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z.$$

Теорема(про існування частинних похідних). Якщо функція $E \xrightarrow{f} R^1$, $E \subset R^3$, диференційовна в точці $P_0 \in E$, то існують частинні похідні: $f'_x(P_0) = A, \quad f'_y(P_0) = B, \quad f'_z(P_0) = C.$

Доведення. Дійсно, якщо функція диференційовна в точці P_0, то $\Delta f(P_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z,\ \alpha, \beta, \gamma \to 0 \quad \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} \to 0.$

Нехай $\Delta y = \Delta z = 0, \quad \Delta x \neq 0$, тоді $\Delta f(P_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \quad \dfrac{\Delta f\,(P_0)}{\Delta x} = A + \alpha, \quad \Delta x \to 0$ і існує $\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x} = A \Rightarrow f'(P_0) = A.$ Аналогічно для $f'_y(P_0), \ f'_z(P_0)$.

Отже f – диференційовна в точці P_0, якщо

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} \frac{f(P) - f(P_0) - f'_x(P_0)\Delta x - f'_y(P_0)\Delta y - f'_z(P_0)\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = 0.$$

Достатні умови диференційовності функції.

Теорема. Для того, щоб функція була диференційовною в точці $P_0 \in D_f$ достатньо існування неперервних частинних похідних по всім змінним у цій точці.

Головна лінійна частина повного приросту функції називається повним диференціалом і записується : $df(P_0) = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial z}dz$. Повний диференціал є сумою частинних диференціалів.

16. Похідна за напрямом, градієнт.

Похідна за напрямком, градієнт.

З'ясуємо поняття "швидкості зміни" або похідної за довільним заданим напрямком.

Нехай $E \xrightarrow{f} R^1$, $M(x, y, z) \subset E, E \subset R^3$.

Проведемо із точки M вектор S з напрямними косинусами ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$). На векторі S на віддалі ΔS від його початку, розглянемо точку M_1 ($x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$), $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $u = f(x, y, z)$ – неперервна і має неперервні частинні похідні

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha \, , \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta \, , \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Отже, похідна від u в точці M(x,y,z) в напрямку вектора s це $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Зокрема, при $\alpha=0$, $\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ отримаємо $\frac{\partial u}{\partial x}$. Частинні похідні по x,y,z виражають "швидкість" зміни функції в напрямку координатних вісей.

Виникає питання: за яким напрямком функція в заданій точці буде швидше зростати?

В кожній точці E, де задана $u = u(x, y, z)$ визначимо вектор, проекції якого на вісі координат є значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Позначимо цей вектор $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

Таким чином, в E визначено векторне поле градієнтів. Можна довести, що похідна за напрямком S дорівнює проекції вектора $grad\ u$ на S : $|grad\ u| \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial S}$.

17. Означення диференціала ФБЗ та його застосування.

18. Частинні похідні та диференціали вищих порядків ФБЗ.

Похідні вищих порядків

Нехай $f: E \to R', E \subset R^3, f$ - диференційовна в точці $P(x, y, z) \in E$, а, отже, $\exists$частинні похідні $f_x'(P), f_y'(P), f_z'(P)$, які є функціями змінних x, y, z і від них можна брати похідні. Позначають другу похідну, наприклад, по x: $f_{xx}''(P), \dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}$. Частинні похідні по різним змінним називають мішаними похідними: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$, $f_{xy}''(P)$ і т. д.

$\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_x'(x, y_0, z_0) - f_x'(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$ - похідна за означенням.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$, маємо 2 частинні похідні I порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x} i \dfrac{\partial z}{\partial y}$ і чотири частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Частинних похідних третього порядку буде вже вісім.

Приклад: $f(x, y, z) = 2^{xy^2z^3}$. Знайдемо мішану похідну:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (2^{xy^2z^3} \ln 2 \cdot 2yxz^3)_z' = 2^{xy^2z^3} \ln^2 2 \cdot 3z^2xy^2 2yxz^3 + 2^{xy^2z^3} \ln 2 \cdot 2yx3z^2.$$

Природно ставити питання чи залежить результат диференціювання функцій багатьох змінних від послідовності диференціювання по різним змінним, тобто чи тотожні, наприклад, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} i \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Справедлива **теорема** (про мішані похідні, Шварца)

$f: E \to R', E \subset R^2, \exists$ в деякому околі точки P_0 $f_x', f_y', f_{xy}'', f_{yx}''$ і неперервні в точці P_0, тоді в цій точці похідна не залежить від порядку її обчислення і $f_{xy}''(P_0) = f_{yx}''(P_0)$.

Якщо мішані похідні не будуть неперервні в точці P_0 , то теорема може не виконуватись.

Означення. $f: E \to R', E \subset R^m$ називається n раз диференційовною в точці P_0 $(x_1^0, \dots, x_m^0)$, якщо $\forall P \in O_\delta(P_0) \exists$частинні похідні по всім змінним до (n-1) порядку, і кожна з них як функція диференційовна в точці P_0.

Теорема. Якщо $f: E \to R', E \subset R^m$ двічі диференційовна в точці P_0 є E, то справедлива рівність: $\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_j \partial x_i}$.

Має місце загальна теорема про мішані похідні.

Якщо $f: E \to R', E \subset R^m$, n-раз диференційовна в точці P_0 , то похідна n-того порядку не залежить від послідовності її обчислення.

Диференціали вищих порядків

$f: E \to R^1, E \subset R^2$, $x_0 = x_0(x_1, x_2) \in \mathrm{E}$.

Нехай існує такий окіл $\mathrm{O}_\delta(x_0)$, що f диференційована $\forall x \in \mathrm{O}_\delta(x_0)$:

$df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} dx_2$,

$$\mathrm{O}_\delta(x_0) \xrightarrow{df(x_0)} R^1.$$

Якщо $df(x_0)$визначений в околі x_0 і диференційовний в точці x_0, то його диференціал називається другим диференціалом в точці x_0:

$d(df(x_0)) = d^2 f(x_0)$

$d(d^{n-1} f(x_0)) = d^n f(x_0)$

Визначимо диференціали для функції двох змінних:

$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$d(df(x,y)) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy)dx + (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy)dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 =$$

$= (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^2 f(x,y)$. Останній вираз є символічним записом.

$$d^3 f(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^3 f(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3),\ldots,$$

$$d^n f(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^n f(x,y)$$

$$d^n u(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_{x^k}^{(k)} u_{y^{n-k}}^{(n-k)} dx^k dy^{n-k}$$

Диференціал n-го порядку для $f(x_1,\ldots,x_m)$:

$$du = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m$$

$$d^n u = (\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m)^n u(x_1,\ldots,x_m)$$

19. Формула Тейлора для ФБЗ.

Якщо $R^1 \xrightarrow{\varphi} R^1, \varphi \in C^{n+1}(O_\delta(t_0)) \forall t \in O_\delta(t_0)$, то

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{\varphi^n(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_0+\Theta\Delta t)}{(n+1)!}(t-t_0)^{(n+1)},$$

$0 < \Theta < 1$,

або

$$\Delta\varphi(t_0) = d\varphi(t_0) + \frac{1}{2}d^2\varphi(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n(\varphi(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(t_0+\Theta\Delta t),$$

де $(t-t_0) = \Delta t = dt$, $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \Delta\varphi(t_0)$.

В цій формі формула Тейлора розповсюджується на випадок функції багатьох змінних.

Теорема Тейлора. Нехай $E \xrightarrow{f} R^1, E \subset R^2$ має неперервні частинні похідні до n+1 порядку в околі точки P_0. Тоді для $\forall$ точки P із околу точки P_0 справедливо

$$\Delta\varphi(P_0) = d\varphi(P_0) + \frac{1}{2!}d^2\varphi(P_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n(\varphi(P_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Theta_2\Delta y),$$

$0 < \Theta_i < 1$, $i = 1,2$.

20. Екстремум функції Rn-> R (означення, необхідні й достатні умови).

Точка $x_0 \in D_f$ називається точкою ***локального максимуму*** (***мінімуму***) функції $f: R^m \to R$, якщо існує $S(x_0,\delta) \subset D_f$ така, що $\forall x \in S(x_0,\delta)$ виконується нерівність: $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$. Максимуми та мінімуми функції називаються її ***екстремумами***. Якщо $\forall x \ne x_0$ виконується строга нерівність, то відповідний ***екстремум*** називається ***строгим***.

Таким чином для локального екстремуму функції в деякому околі екстремальної точки приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ є знакосталим, недодатним для максимуму, невід'ємним – для мінімуму.

Теорема 1. *(Необхідна умова екстремуму)*
Якщо в точці x_0 функція $f: R^m \to R$ диференційовна і має в цій точці локальний екстремум, то $df(x_0) = 0$, або, що теж саме

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0,\ j = \overline{1,m}.$$

Теорема 2. *(Критерій Сільвестра)*
Для того, щоб КФ з симетричною матрицею $A = (a_{ij})$ була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно й достатньо, щоб для її кутових мінорів виконувались умови: $\forall i = \overline{1,m} \quad \operatorname{sgn} A_i = 1$ $\left(\operatorname{sgn} A_i = (-1)^i\right)$.

Без доведення.

Теорема 3. *(Достатня умова локального екстремуму)*
Для того, щоб двічі диференційовна в точці x_0 функція, в якій $df(x_0) = 0$, мала в цій точці екстремум, достатньо, щоб її другий диференціал був знаковизначеною КФ в точці x_0. Якщо $d^2 f(x_0)$ буде додатно (від'ємно) визначеною КФ, то в точці x_0 має локальний мінімум (максимум). Якщо $d^2 f(x_0)$ є незнаковизначеною КФ, то в точці x_0 локального екстремуму немає.

21. Локальний умовний екстремум ФБЗ. Метод множників Лагранжа.

Розглянемо задачу пошуку екстремумів функції, аргументи якої задовольняють додатковим умовам зв'язку. Екстремуми такого роду будемо називати умовними, щоб відрізняти їх від безумовних екстремумів функції, аргументи якої не пов'язані жодними додатковим умовами.

Постановка задачі. Знайти екстремум функції f, визначеної на області $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, якщо

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m), \tag{16}$$

за умов зв'язку

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ &\quad \ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \quad m < n. \end{aligned} \tag{17}$$

Рівняння (17) також називають ***рівняннями зв'язку***.

Функція $f = f(P)$ має в точці $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ ***умовний максимум (мінімум)***, якщо $\exists$ такий окіл точки P_0, в межах якого значення функції $f = f(P)$ є найбільшим (найменшим) серед всіх її значень у всіх точках, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку (17).

Досі ми розглядали екстремуми функції f, вважаючи, що змінні, від яких вона залежить, незалежні між собою. Це *абсолютні екстремуми*. Перейдемо до розгляду випадку, коли змінні, від яких залежить функція f, пов'язані деякими співвідношеннями. Дослідити функцію (16) на умовний екстремум можна так: знайти розв'язок системи (17), підставити цей розв'язок у рівняння (16) і одержану функцію дослідити на безумовний екстремум.

Для розв'язку системи (17) повинні виконуватись теореми про існування і диференційовність неявних функцій [?], а саме диференційовність в деякому околі точки P_0 функцій $F_i(P)$, неперервність в точці P_0 частинних похідних цих функцій по $y_1, y_2, \ldots, y_m$ і умова на якобіан системи:

$$\left.\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(P_0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

Тоді система (17) визначає однозначні неявні функції

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ y_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{19}$$

Після підстановки (19) в (16) отримаємо функцію від n змінних:

$$f(P) = f\big(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)\big) = \Phi(x_1, \dots, x_n).$$

Такий спосіб знаходження екстремума досить складний, оскільки потрібно розв'язати систему (17). Тому на практиці користуються іншим методом знаходження умовних екстремумів — **методом множників Лагранжа**.

Для дослідження функції на умовний екстремум складемо *функцію Лагранжа*

$$L = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m,$$

де λ_i, $i = \overline{1, m}$, — *множники Лагранжа.*

Необхідні умови умовного екстремума. Нехай P_0 — точка умовного екстремума функції (16) за умов зв'язку (17). За умови, що f та F_i, $i = \overline{1, m}$ — диференційовні в деякому околі P_0 функції, а також виконується умова (18), можна вибрати такі числа λ_i, $i = \overline{1, m}$, що

$$P_0\big(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\big)$$

становить критичну точку функції Лагранжа L, тобто задовольняє систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n}; \qquad \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0,\ j = \overline{1, m}; \qquad F_j = 0,\ j = \overline{1, m}.$$

Достатні умови. Припустимо, що

1. P_0 — критична точка функції L для деякого набору λ_i, $i = \overline{1, m}$;

2. функції f і F_i, $i = \overline{1, m}$, двічі неперервно-диференційовні в точці P_0 та

$$d^2 L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ \dots\ + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \ \dots\ + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m\right)^2 L,$$

де dx_i, dy_j задовольняють рівняння зв'язку (17). Якщо при цьому $d^2 L(P_0) > 0$, то функція f має в точці P_0 умовний мінімум; якщо $d^2 L(P_0) < 0$, то в точці P_0 функція має умовний максимум.

22. Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності. Дії з рядами. Критерій Коші.

Поняття числового ряду

Розглянемо нескінченну числову послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Складений з її елементів вираз

$$x_1 + x + ... + x_n + ... \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \qquad (1)$$

називається числовим рядом, де x_n - загальний член ряду, виражений як функція номера n ($x_n = \frac{1}{n}, x_n = aq^{n-1}$). Складемо з елементів ряду такі суми, які називаються частковими: $S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, ..., S_n = x_1 + ... + x_n$.

Означення. ***Числовий ряд називається збіжним***, якщо $\exists$ скінченна границя послідовності його часткових сум – ця границя називається сумою ряду ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$), в протилежному випадку ряд називається розбіжним ($\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Необхідна ознака збіжності ряду.

Якщо ряд (1) збіжний, то його n-тий член x_n при необмеженому зростанні n прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Розглянемо часткові суми $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, S_{n-1} = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}$.

Звідси маємо $x_n = S_n - S_{n-1}$.

Оскільки ряд збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Наслідок. Якщо n-тий член ряду при $n \to \infty$, не прямує до 0, то ряд розбіжний.

Критерій Коші збіжності числового ряду

Для того, щоб ряд ($\sum_{n=1}^{\infty} x_n$) збігався $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N і \forall p \in \mathrm{N}$ $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon, \text{або} \left| \mathrm{x}_{n+1} + \mathrm{x}_{n+2} + \ldots + \mathrm{x}_{n+p} \right| < \varepsilon$

Доведення аналогічне доведенню критерія Коші для послідовностей. Для гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ маємо: $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| > \left.\frac{p}{n+p}\right|_{n=p} = \frac{1}{2} > \varepsilon$, для $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ і, отже, ряд розбіжний.

23. Ряди з невід‘ємними членами. Основні ознаки збіжності (порівняння, Д’Аламбера, Коші, Раабе, порівняння зі степенем).

Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, всі члени яких невід’ємні $a_n \geq 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, S_{n+1} \geq S_n$.

Критерій збіжності додатного числового ряду.

Для того, щоб ряд з додатними членами був збіжним необхідно і достатньо, щоб S_n була обмежена зверху

Ознаки збіжності додатних рядів

Ознака порівняння рядів

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) додатні (невід’ємні) і не перевищують відповідних членів збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (2)$, тобто $a_n \leq b_n, \forall n > N$, то ряд (1) збіжний, розбіжність (1) викликає розбіжність (2).

Доведення. Нехай $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k, S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_k$ Оскільки ряд (2) збіжний, то $\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^2, 0 \le a_1 \le b_1, 0 \le a_2 \le b_2, ..., 0 \le a_n \le b_n \Rightarrow S_n^{(1)} \le S_n^{(2)} \le S^2$, оскільки $a_n \ge 0$, то S_n зростає при збільшенні n, але не більше S^2, а $\forall$ зростаюча обмежена послідовність має границю. Необмеженість $S_n^{(1)}$ викликає необмеженість $S_n^{(2)}$ і ряд (2) – розбіжний

Ознака збіжності Даламбера (1717-1783).

Нехай всі члени ряду $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ додатні і $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ тоді при умові

1) $l < 1$ - ряд збіжний

2) $l > 1$ - розбіжний

3) $l = 1$ - ознака відповіді не дає.

Доведення: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$ при достатньо великому $n \ge N$,

$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$ при $n \ge N$.

Розглянемо 3 випадки: 1) $l<1$ і візьмемо ε, що $l+\varepsilon<1$.

Покладемо $l+\varepsilon=q$, тоді $0<q<1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q, a_{n+1}<qa_n, \forall n\geq N.$ При $n=N, N+1, N+2,...$ будемо мати низку нерівностей $a_{N+1}<a_N q, a_{N+2}<a_N q^2, a_{N+3}<a_N q^3...$ і члени ряду будуть менше членів геометричної прогресії $a_{N+1}+a_{N+2}+...<a_N q+a_N q^2...$

При $|q|<1$ ряд збігається, а за ознакою порівняння збігається ряд $a_{N+1}+a_{N+2}+...$, отже, і вихідний ряд.

2) $l>1, \varepsilon>0$ таке, що $l-\varepsilon>1$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1; a_{n+1}>a_n$ при $n=N, N+1, N+2,...; a_N<a_{N+1}<a_{N+2}<...$ члени зростають і не прямують до 0, а прямують до ∞.

3)при $l=1$ на прикладах показується, що ряд як збігається, так і розбігається.

Ознака Коші

Якщо ряд строго додатній: $a_n>0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд збіжний, $q>1$ ряд розбіжний, при $q=1$ - невідомо.

(Узагальнена радикальна ознака Коші)

Для ряду $\sum a_n$ позначимо $q=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, тоді: якщо $q<1$, то ряд $\sum a_n$ - збіжний; якщо $q>1$, то ряд $\sum a_n$ - розбіжний.

Ознака порівняння із степенем.

Якщо при $n\to\infty$ $a_n=O(\frac{1}{n^p})$, то при $p>1$ ряд (1) збігається, при $p\leq 1$ - розбігається.

Приклад. $a_n=\ln\cos\frac{e}{n}=\ln(1-\frac{1e^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=-\frac{e^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})=O(\frac{1}{n^2})$ - ряд збігається, $p=2>1$.

<u>Ознака Раабе.</u>

Якщо ряд (1) додатній строго і $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p,$ то при $p > 1$ ряд - збіжний,

при $p < 1$ - розбіжний, $p = 1$ - ? $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ - послідовність Раабе.

24. Знакозмінні ряди. Ряд Лейбніца. Абсолютно та умовно збіжні ряди.

Ряди з довільними членами. Ознака Лейбніца.

Ряди з довільними членами-ряди, частина членів яких додатна, частина – від'ємна, частина дорівнює нулю

Ряд Лейбніца – це ряд вигляду: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...$, або $a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + a_5 + (-a_6) + ..., a_n \geq 0, при \quad n = 1,2,...$

Теорема Лейбніца. ***Якщо модулі членів ряду (1) монотонно спадають:*** $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq ...$ ***при зростанні n, і n-тий член ряду прямує до 0,*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ***, то ряд збігається і*** $0 < S \leq a_1$ ***.***

Доведення: Візьмемо суму S_{2m} членів.

$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m})$, то $S_{2m} \geq 0$

Якщо 2m зростає, то S_{2m} не спадає (додаються невід'ємні доданки)

Представимо S_{2m} в іншому вигляді:

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) + ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$

Звідси $S_{2m} \leq a_1$ і є монотонно зростаючою і обмеженою послідовністю і $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S, S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, а $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ і $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$, тобто при парному n=2m та непарному n=2m+1 існує одна границя і ряд збіжний.

Абсолютна й умовна збіжності

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. При дослідженні рядів на абсолютну збіжність використовуємо ознаки збіжності для рядів з невід'ємними членами.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ називається ***умовно збіжним***, якщо цей ряд збіжний, а ряд із модулів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ - розбіжний.

25. Функціональні ряди.

1.Функціональні послідовності та ряди

Раніше при розгляді послідовності:

$\left(1+\frac{x}{1}\right),\left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ..., яка має границю e^x, або ряду

$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$ який має суму $\ln(1+x)$, х було постійне число.

Функціональна природа елементів послідовності і її границі або членів ряду і його суми нами не враховувалась. Розглянемо послідовність

$$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots \quad , \qquad (1)$$

елементами якої є функції від змінної х і $\forall x \in X$, $X \subset R$ послідовність має границю $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, яку будемо називати **граничною функцією**.

Відображення $N \xrightarrow{\Phi} F$, де F - множина всіх функцій називається ***функціональною послідовністю*** ***(ФП)***. Значення відображення $\Phi(n)=f_n$ називається $n-$***м членом***, та будемо її позначати (f_n).

26. Поняття степеневого ряду. Теорема Коші-Адамара. Радіус збіжності.

Поняття степеневого ряду

ФР вигляду $\sum a_n (x - x_0)^n$, де $n \in Z^+$ називається ***степеневим рядом*** (***СР***).
$\sum a_n x^n$

Степеневий ряд – це функціональний ряд, а саме нескінченний многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Множина значень x, при яких ряд збігається називається ***областю збіжності степеневого ряду.***

Радіус збіжності

Нехай для (1) $\exists$ точки $x = x_{0,}$ $x_0 \neq 0$, при яких (1) – збіжний. Розглянемо множину $D = \{|x_0|\}$, яку назвемо області збіжності (1). Множина D може бути або обмеженою зверху, або ні.

Якщо D – необмежена зверху , то область збіжності нескінченна: $\forall x \; \exists x_0 : |x| < |x_0|$ і ряд абсолютно збіжний.

Якщо D – обмежена зверху , то $\exists$ $\sup\{|x_0|\} = R$, якщо $|x| > R$, то (1) – розбіжний.

Візьмемо $\forall x : |x| < R$. За означенням точної верхньої межі $\exists$ точка x_0, що $|x| < |x_0| \leq R \Rightarrow$ абсолютна збіжність (1). Отже, в (-R, R) ряд (1) – абсолютно збіжний, для $x > R$ і $x < -R$ – ряд розбіжний. В точці $x = \pm R$ - загального твердження немає.

Інтервал (-R, R) називається проміжком збіжності , а число R $(0 < R \leq +\infty)$ - радіусом збіжності ряду.

При R=0 ряд всюди розбіжний , область його збіжності складається з однієї точки $x = 0$.

Теорема Коші-Адамара

Теорема 3. *(Коші-Адамара)*

Нехай $R \geq 0$ - радіус збіжності СР і $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Тоді $R = 1/l$. При цьому, якщо $l = 0$, то $R = +\infty$, і при $l = +\infty$ $R = 0$.

Доведення. З умов теореми ми маємо, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x|. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо $l = 0$, то з радикальної ознаки Коші $\forall x \in R$ числовий ряд $\sum |a_n x^n|$ збіжний, а тому $R = +\infty$.

Якщо $l = +\infty$, то $\forall x \neq 0$ $a_n x^n \neq O(1)$, а тому $R = 0$.

Нехай тепер $0 < l < +\infty$. З радикальної ознаки Коші та рівності **(1)** маємо:

$$R = \frac{1}{l}.$$

Теорема доведена.

27. Поняття ряду Тейлора. Умови розвинення функції у степеневий ряд.

Теорема 4. (про єдність розвинення функції в степеневий ряд)

Якщо функція f(x) може бути розвинена в степеневий ряд на (-R, R) , то це розвинення єдине і a_n - коефіцієнти Тейлора, а ряд називається рядом Тейлора для функції f(x)

Дійсно, нехай f(x) може бути розвинена в степеневий ряд на (-R, R) ,тоді його суму f(x) можна диференціювати. Диференцюємо ряд n раз:

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + (n+1)! a_{n+1} x + \ldots \quad , \ n - 0,1,2 \ldots \ .$$

При x=0 маємо $f^{(1)}(0) = a_1$, $f^{(2)}(0) = 2a_2$, ..., $f^{(n)}(0) = n! a_n \Rightarrow a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ – це коефіцієнти Тейлора, які визначені однозначно.

Критерій розвинення функції в степеневий ряд

Для того, щоб функція f(x) могла бути розвинена в ряд Тейлора на (-R, R) , $\Leftrightarrow$ щоб залишковий член в формулі Тейлора прямував до 0 на вказаному інтервалі:

Необхідність: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ - збіжний ряд на (-R, R) ,

$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k$ - залишок збіжного ряду в кожній точці $x\in$(-R, R) є збіжним,

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=f(x)-\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

Достатність: нехай $R_n(x)\to 0$ в точці $x\in$(-R, R) при $n\to\infty$.

$$|R_n(x)|=f(x)-S_n(x).$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-R_n(x)\right]=\lim_{n\to\infty}f(x)-0=f(x).$$

Зауважимо, що відрізками степеневих рядів є многочлени і тому степеневі ряди – зручний спосіб для наближених обчислень.

Теорема 5. (достатні умови розвинення в степеневий ряд)

Якщо функція $f(x)\in C^{\infty}(-R;R)$ і всі похідні обмежені одним і тим самим числом $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M, k=1,2,\ldots n\ldots$, то має місце розвинення $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$.

Візьмемо залишковий член $r_n(x)$ у формі Лагранжа

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1$$

$|r_n(x)|=\dfrac{\left|f^{n+1}(\theta x)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\dfrac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$. При необмеженому зростанні n вираз $\dfrac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$ прямує до 0, це також випливає із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$:

$\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{R^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!R^{n+1}}=\dfrac{R}{n+2}\to 0<1\right)$ і $\lim_{n\to\infty}\dfrac{MR^{n+1}}{(n+1)!}=0$ та $r_n(x)\to 0\,\forall x\in(-R;R)$

28. Степеневі ряди для основних елементарних функцій.

Степеневі ряди для елементарних функцій

1) $f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$;

Використаємо достатні умови для розвинення в ряд.

$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $|f^{(n)}(x)| \le 1$

Коефіцієнти Тейлора для цих функцій:

$f(0) = 0; f^{(2m)}(0) = \sin \pi m = 0; f^{(2m-1)}(0) = \sin(m\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1,2,3...)$ і

$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$;

$f(0) = 1$; $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$; $f^{(2m-1)}(0) = 0$; $m = 1,2,3...$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$

2) $f(x) = e^x$. Покажемо, що $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Дійсно, $f^{(k)}(x) = e^x$ при $\forall k = 1,2,3...$. $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 1$,

Використаємо критерій розвинення функції в степеневий ряд, покажемо, що залишок ряду $r_n(x) \to 0$ на $(-R; R)$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$

Знайдемо радіус збіжності $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$. Оцінимо

$|r_n(x)| = |x^{n+1}| \frac{e^{\varsigma}}{(n+1)!} < |x|^{n+1} \frac{\exp|x|}{(n+1)!}$; бо $\varsigma = \Theta x < |x|, \Theta \in (0,1)$.

$|r_n(x)| \to 0$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + ...$

3) $f(z)=\ln(1+z), z>-1$

Розглянемо ряд $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ - це нескінченно спадна геометрична прогресія, ряд збігається при $|z|<1$, його можна інтегрувати в $[0,x]$, де $|x|<R$.

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{x^n}{n}$$

Інтервал збіжності такого ряду (-1,1); при x=1 маємо знакозмінний числовий ряд, що збігається за ознакою Лейбніца, при $x=-1$ маємо гармонічний ряд з оберненим знаком і ряд розбіжний. Тобто, розвинення справедливе для $(-1;1]$.

4) $f(x)=arctgx$. Застосуємо почленне інтегрування степеневого ряду, замінивши z на z^2 в прикладі 3)

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z^2}=arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ряд збігається на $[-1,1]$. При $x=1$ ряд дає розвинення $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-...(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}+...$