1

Модульна контрольна робота №2
з дискретної математики
група УПС-11
Кірієнко Карини Дмитрівни
Варіант №37

1. За принципом Діріхле:

11 чорних + 11 білих + 11 червоних + 11 зелених =

= 11 + 11 + 11 + 11 = 44 (найгірший вар.)

І щоб взяти 12 одного кольору, треба взяти ще одну. Отже, треба взяти 45 куль.

Відп.: 45.

2. Розподіл a_1 троянд:

$$C_{a_1+k-1}^{k-1} = \frac{(a_1+k-1)!}{a_1!\cdot(k-1)!}$$

Розподіл a_2 гвоздик:

$$C_{a_2+k-1}^{k-1} = \frac{(a_2+k-1)}{a_2!\cdot(k-1)!}$$

Розподіл a_3 волошок:

$$C_{a_3+k-1}^{k-1} = \frac{(a_3+k-1)!}{a_3!\cdot(k-1)!}$$

Загальна к-ть: $\frac{(a_1+k-1)!}{a_1!\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(a_2+k-1)!}{a_2!\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(a_3+k-1)!}{a_3!\cdot(k-1)!} =$

(розподіли є незалежними, отже множимо)

2

$$= \frac{(a_1+k-1)!\cdot(a_2+k-1)!\cdot(a_3+k-1)!}{a_1!\cdot a_2!\cdot a_3!\cdot((k-1)!)^3}$$

3 Чоловіків можна розбити на пари:

$\frac{10!}{(2!)^5\cdot 5!}$ способами (враховуючи перестановки всередині пар та самих пар).

Жінки розбиваються ~~так~~:

$\frac{10!}{(2!)^5}$ способами (тут роль грає порядок).

Всього: $\frac{(10!)^2}{2^{10}\cdot 5!}$ способів

4 кіл-ть перестановок $n = 4! = 24$

У кожній позиції кожна цифра з'являється $\frac{n}{4} = \frac{24}{4} = 6$ разів.

Сума цифр $1+2+3+4 = 10$

Оскільки кожна цифра з'являється 6 разів, то сума для кожної позиції $6\cdot 10 = 60$

Внесок позиції в заг. суму:

$60\cdot 1000 = 60000$ (тисячі)

$60\cdot 100 = 6000$ (сотні)

$60\cdot 10 = 600$ (десятки)

$60\cdot 1 = 60$ (одиниці)

Заг. сума: $60+600+6000+60000 = 66660$

Відп.: 66660.

(5) а) $\underset{9}{\sqcup}\ \underset{9}{\sqcup}$ (0 не врах.), решта від 0 до 9 $n-2$ разів. Отже: $9 \cdot 10^{n-2}$

б) $\underset{9}{\overset{I}{\sqcup}}$ (від 1 до 9), далі цифри різні, отже 9 вар. $n-1$ разів. Відп.: $9 \cdot 9^{n-1} = 9^n$

в) непарні: 1, 3, 5, 7, 9 (5 вар.).

5^n

г) парних 5 вар., без 0 − 4 вар. $n-1$ разів

$\underset{4}{\overset{I}{\sqcup}}$, далі 5^{n-1}. Отже: $9 \cdot 10^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1}$ (аналог. до в)

д) I цифра − $\underset{8}{\overset{I}{\sqcup}}$ (без 0 та 1), далі 9 вар. $n-1$ разів

Отже: $8 \cdot 9^{n-1}$

е) Числа в яких є цифра 2 (аналогічно до д):

$8 \cdot 9^{n-1}$. Всі числа: $9 \cdot 10^{n-1}$

Отже: $\underset{[1;9]}{9} \cdot 10^{n-1} - \underset{[1;9]+\{0\}\text{ без якогось}}{8 \cdot 9^{n-1}}$

є) Перша − 9 вар., 2 − 9, 3 − 8 і т.д.

$\underset{9}{\sqcup}\ \underset{9}{\sqcup}\ \underset{8}{\sqcup}\ \underset{7}{\sqcup} \ldots$

Отже: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (10-n+1) = 9 \cdot P_9^{n-1}$

$P(9, n-1)$ − число перестановок $n-1$ елементів із 9

4

(6) $q = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$

Кіл-ть дільників: $(e_1+1)\cdot(e_2+1)\cdot\ldots(e_k+1)$

$e_1 = 101$, $e_2 = 415$, $e_3 = 202$

Отже, кіл-ть дільників:

$(101+1)\cdot(415+1)\cdot(202+1) = \overline{101\cdot 415\cdot 203}$

(7) кіл-ть перестановок: $\frac{(6+7+8)!}{6!\cdot 7!\cdot 8!} = \frac{21!}{6!\cdot 7!\cdot 8!}$

Якщо браслет можна повертати та перевертати то це зменшує кіл-ть на $21\cdot 2$. Тоді буде $\frac{21!}{6!\cdot 7!\cdot 8!\cdot 21\cdot 2}$

(8) A містить s, B – t ел.

а) t^s (просто кіл-ть функцій що можна поб.)

б) t^s (аналогічно) (кожному ел. з мн. A належить 1 ел. з мн. B)

в) t^s (аналогічно)

(9) M містить k елементів.

а) Кіл-ть = числу елементів булеана множини $M\times M$ яка містить k^2 елементів. Нехай $m = k^2$. Тоді відп.: 2^m

б) Будь-яке рефлексивне відн. R на мн. M можна подати як $R = i_M \cup R'$, R' – мн. недіагонал. елементів $M\times M$.

Кіл-ть обрати R' = кіл-ть елементів булеана множини $(M \times M) \setminus$ і ~~елем~~ що містить $k^2 - k$ елементів. Нехай $n = k^2 - k$.
тоді відп.: 2^n.

(10) $|A| = 16$ (відв. сем. A)

$|B| = 12$ (відв. сем. B)

$|A \cup B|$ (відв. хоча-б 1 семінар)

$|A \cap B|$ (відв. обидва семінари)

а) $|A \cup B| = 28 - 7 = 21$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$21 = 16 + 12 - |A \cap B|$

$|A \cap B| = 16 + 12 - 21 = \underline{7}$

б) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 16 - 7 = \underline{9}$

(11) $P(A) = 65\%$ – част. ж. A

$P(B) = 45\%$ – част. ж. B

$P(C) = 50\%$ – част. ж. C

$P(A \cap B) = 30\%$ – част. ж. A і B

$P(B \cap C) = 20\%$ – част. ж. B і C

$P(A \cap C) = 40\%$ – част. ж. A і C

$P(A \cap B \cap C) = 10\%$ – част. усі ж.

6

а) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 65 + 45 + 50 - 30 - 20 - 40 + 10 = \underline{80\%}$

б) З а – $\underline{20\%}$ $(100 - 80)$

в) $P(\text{точно 2 ж.}) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C) - 3 \cdot P(A \cap B \cap C) = 30 + 20 + 40 - 3 \cdot 10 = \underline{80\%}$

г) $P(\text{не мен. 2 ж.}) = P(\text{точно 2 ж.}) + P(A \cap B \cap C) = 60 + 10 = \underline{70\%}$

(13) $C_m^3 = \frac{m!}{3!(m-3)!}$ – кіл-ть обр. з рядка

$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ – кіл-ть обр. з стовпці

Є 3! способів розмістити різнокольорові тури (порядок важливий)

Отже кіл-ть $= C_m^3 \cdot C_n^3 \cdot 3! = \frac{m!}{3!(m-3)!} \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot 3!$

(14) Елемент може належати: першій підмножині, другій та жодній.

Маємо 3 вар: 3^m

Але виключаємо 1 випадок (коли всі елементи не належать жодній підмножині)

Тоді, відп.: $3^m - 1$

(15) 1) Одна т. з I прямої та 2 т. з II прямої:

$n \cdot C_k^2 = n \cdot \frac{k!}{2!(k-2)!}$

2) 2 т. з I прямої та 1 т. з II прямої:

$k \cdot C_n^2 = k \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!}$

Тоді: $k \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot n \cdot \frac{k!}{2!(k-2)!}$

(16) Маємо 50 парних чисел, 50 непарних

Всі числа парні: $C_{50}^3 = \frac{50!}{3! \cdot 47!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{6}$

Два числа непарні, 1 парне: $C_{50}^2 = \frac{49 \cdot 50}{2}$ (2 неп.)

$C_{50}^1 = 50$ (1 парне)

Тоді: $\frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{6} \cdot \frac{48 \cdot 50}{2} \cdot 50$

(17) $\square \; \square \; \underset{3}{\overset{\text{III}}{\square}} \; \square \; \underset{5}{\overset{\text{IV}}{\square}} \; \ldots$

Заг кіл-ть цифр – 10, ~~р~~викл. 3 і 5, зал. 8

Тоді: $P_8 = 8!$

(18) $n - a$, $m - b$, $k - c$

1) Перест. a і b $= \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$

2) Встав. c, буде $n+m+1$, $k \leq n+m+1$

Тоді: $C_{n+m+1}^k = \frac{(n+m+1)!}{k!(n+m+1-k)!}$

Якщо $k > n+m+1$ – розв не існує

8 Отже: кіл-ть слів = $\frac{(n+m)!}{n!\cdot m!}\cdot\frac{(n+m+1)!}{k!(n+m+1-k)!}$

(якщо $k \le n+m+1$)

Якщо $k > n+m+1$, то кіл-ть слів $=0$.

19 1) 3 інж. із 7: $C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

2) 6 роб із 15: $C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\cdot 9!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5005$

кіл-ть способів $= C_7^3\cdot C_{15}^6 = 35\cdot 5005$

20 кіл-ть вибрати 4 осіб з k: $C_k^4 = \frac{k!}{4!(k-4)!}$

Загальна кіл-ть = сума всіх можливих варіантів для 4 від p до k

Відп.: $\sum_{4=p}^{k} C_k^4$

21 голосні – а, о, а, а – 4

приголосні – к, в, в, р, к – 5

1) приг. $= \frac{5!}{2!\cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30$

2) гол. $= \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$

Чергув: $30\cdot 4 = \underline{120}$

(приг. – 1, 3, 5, 7, 9, голос. – 2, 4, 6, 8)

22 голосні – 5, приг – 6

У приголосних фіксований порядок (

(б, б, д, к, р, р)

голосні: $C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21$

(можна вставити 5 голосних в 7 проміжків)

Відп.: 21

31 Фікс. сорт – X. Зап. 12 сортів.

Якщо вибр. 2 т. сорт. X – то решту 6 з 12

Якщо вибр. 3 т. сорт. X – то решт. 5 з 12

і т. д.

Для кожного випадку: C_{12+8-k}^{8-k}

k – кіл-ть тістечок сорту X ($k \in [2; 8]$)

Далі обч. для кожного випадку і додати.

39 а) $A_5^2 = A_5^3$ ⊖ $A_5^2 = \frac{5!}{3!} \neq A_5^3 = \frac{5!}{2!}$

б) $C_6^1 = C_6^6$ ⊖ $C_6^1 = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 6 \neq C_6^6 = \frac{6!}{6!} = 1$

в) $A_5^6 = A_5^5$ ⊖ $A_5^0 = \frac{5!}{5!} = 1 \neq A_5^5 = \frac{5!}{0!} = 120$

г) $C_6^1 = C_6^5$ ⊕ $C_6^1 = \frac{6!}{5! \cdot 1} = C_6^5 = \frac{6!}{1! \cdot 5!}$

д) $A_5^1 = A_5^3$ ⊖ $A_5^1 = \frac{5!}{4!} \neq A_5^3 = \frac{5!}{2!}$

е) $C_6^0 = C_6^6$ ⊕ $C_6^0 = \frac{6!}{6!} = 1 = C_6^6 = \frac{6!}{6!} = 1$

Відп.: г і е.

32 Заг. кіл-ть перестановок – 10!

Викл. верблюдів – 9!, 8! і т.д.

10

Отже, кіл-ть перестановок з хоча б одним незмінним місцем:

$$\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \cdot C_{10}^{k} \cdot (10-k)!$$

Без незмінних місць

$$10! - \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \cdot C_{10}^{k} \cdot (10-k)!$$

37 $a_{n+2} = 10 \cdot a_{n+1} - 25 \cdot a_n + 32n, a_0 = -1, a_1 = -12$

$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 32n$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$x_1 = x_2$ - кратність 2

$\overline{a_n} = (C_1 + C_2 n) \cdot x^n = (C_1 + C_2 n) \cdot 5^n$

$f(n) = R_m(n) \cdot \lambda^n = 32n \cdot 1^n$

$a_n^* = Q_m(n) \cdot \lambda^n = an + b$

$an + 2a + b - 10an - 10a - 10b + 25an + 25b = 32n$

$16an - 8a + 16b = 32n$

$\begin{cases} 16a = 32 \\ -8a + 16b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$a_n^* = 2n + 1$

$a_n = \overline{a_n} + a_n^*$

$a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 5^n + 2n + 1$

$a_0 = -1 = C_1 + 1 \quad C_1 = -2$

$a_1 = -12 = (C_1 + C_2) \cdot 5 + 3 \;;\; -10 + 5C_2 + 3 = -12$

$C_2 = -1$

$\underline{a_n = (-2 - n) \cdot 5^n + 2n + 1}$

38 $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3^n \quad n > 0 \quad a_0 = 1$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

-12 Домн. на $2x$

$2x\, f(x) = 2a_0 x + 2a_1 x^3 + \ldots + 2a_{n-1} x^n + 2a_n x^{n+1} + \ldots$

Степеневий ряд із загальним членом $3^n x^n$ (розг. вигляд)

$3^0 x^0 + 3x + 9x^2 + \ldots + 3^{n-1} x^{n-1} + 3^n x^n + \ldots = \frac{1}{1-3x}$

$f(x) - 2x f(x) - \frac{1}{1-3x} = a_0 - 1 + a_1 x - 2a_0 x - 3x +$

$+ a_2 x^2 - 2a_1 x^2 - 9x^2 + \ldots + a_n x^n - 2a_{n-1} x^n - 3^n x^n =$

$= a_0 - 1 + (a - 2a_0 - 3)x + (a_n - 2a_1 - 9)x^2 + \ldots +$

n $+ (a_n - 2a_{n-1} - 3^n)x^n$

~~$f(x) = (1-2x)(1-3x)$~~

$f(x)(1-2x) = 1 - 1 + \frac{1}{1-3x} = \frac{1}{1-3x}$

$f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}$

$1 = (1-3x)A + (1-2x)B$

$1 = (-3A - 2B)x + (A + B$

12

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{-2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x}$$

$$-\frac{2}{1-3x} = -2(1+2x+4x^2+\ldots+2^n x^n+\ldots)$$

$$\frac{3}{1-3x} = 3(1+3x+9x^2+\ldots+3^n x^n+\ldots)$$

Формула для загального члена:

$a_n = -2^{n+1} + 3^{n+1}$ (відп.)

42 Вони нех можуть вийти з ліфту на 1 поверсі, отже мають 10 вар. вибору. Тому: 10^8

45 9 пасажирів. 10 пов. групи – 2, 3, 4

$9 \to N$, $10 \to D$, $2 \to m$, $3 \to n$, $4 \to p$

3 - кіл-ть груп

Кіл-ть способів:

$$C_N^m \cdot C_{N-m}^n \cdot \underbrace{C_{N-m-p}^k}_{=1} \cdot A_D^3$$

$$C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot 1 \cdot A_{10}^3 = \frac{9!}{2!\cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{10!}{7!} =$$

$$= \frac{{}^4\cancel{8}\cdot 9}{\cancel{2}} \cdot \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} \cdot (8\cdot 9\cdot 10) = 36\cdot 35\cdot 720 =$$

$$= 1260 \cdot 720$$