МатАнал.
Теория на дебильник

ИИТ

24 декабря 2025 г.

Оглавление

1. Отображение (область определения, множество значений).

Отображением $f : x \to y$ называется правило по которому элементы x сопоставляются с элементами y.

$$\text{Множество значений: } f(x) = \{y \in Y | \exists x \in X, y = f(x)\}$$

$$\text{Область определений: } D(f) = \{x \in X | \exists y \in Y, y = f(x)\}$$

Отображения равны при условии равенства их области определений и области значений при любых x

$$f_1 = f_2, \quad D(f_1) = D(f_2) \wedge \forall x \in D(f) \ f_1(x) = f_2(x)$$

2. Сюръекция.

Сюръекция - это такое отображение, что каждый элемент области значений имеет хотя бы один прообраз.

Definition 2.0.1 – Сюръекция Отображение называется сюръективным (или сюръекцией, или отображением на), если

$$\forall y \in Y \;\; \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

Например:

- $f : \mathbb{R} \to [-1; 1], f(x) = \sin x$ — сюръективно.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ — сюръективно.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ — не является сюръективным.

3. Инъекция.

Инъекция — это функция, которая переводит разные элементы в разные образы.

Definition 3.0.1 – Инъекция Отображение $f : X \to Y$ называется **инъекцией** (также **вложением** или **отображением в** Y), если разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Замечания:

- Эквивалентно, отображение является инъекций, если:
  $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$
- Отображение f инъективно тогда и только тогда, когда для него существует левое обратное:
  $\exists g : Y \to X \quad g \circ f = id_X$, где "$\circ$" обозначает композицию, а "id_X" — тождественное отображение на X

Примеры:

1. $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ — инъективно.
2. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ — биективно.
3. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ — не является инъективным, так как

$$f(-2) = f(2) = 4.$$

4. Биекция

Definition 4.0.1 – Биъекция Отображение $f : X \to Y$ называется **биективным** (или **биекцией**), если оно инъективно и сюръективно.

Замечание:
Два множества, между которыми существует биекция, называются **равномощными**.

Свойства:

- Отображение $f : X \to Y$ является биективным тогда и только тогда, когда существует обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ такое, что

$$f \circ f^{-1} = id_Y, f^{-1} \circ f = id_X,$$

  где "id" обозначает тождественное отображение, а "$\circ''$ композицию функций.

- Пусть даны два отображения:
  $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, а $h = g \circ f : X \to Z$ — их композиция. Тогда h биективно тогда и только тогда, когда f инъективно, а g сюръективно.

- В частности, композиция двух биективных отображений сама биективна. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры:

1. $id : X \to X$ — функция, сохраняющая все элементы множества X, биективна на этом множестве
2. $f(x) = x, f(x) = x^3$ — биективные функции из $\mathbb{R}$ в себя. Вообще, любой одночлен одной переменной нечётной степени является биекцией.

3. $f(x) = e^x$ —биективная функциия $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Но если её рассматривать как функцию в $\mathbb{R}$, то она уже не будет биективной (у отрицательных чисел не будет прообразов).

4. $f(x) = \sin x$ не является биективной функцией, если считать её определённой на всём $\mathbb{R}$.

5. Обратное отображение.

Прямое отображение $f : A \to B$ обратимо $f^{-1} : B \to A$ тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно. Откуда следует, что f — это биективная функция.

На уровне обывательского понимания обратимость означает возможность “всё вернуть в исходное состояние”, причём, идеально и однозначно.

Так, если мы умножаем число “икс” на два: $y = f(x) = 2x$, то всегда можно взять “игрек”, разделить его пополам и получить исходное число: $x = f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$.

6. Композиция двух отображений.

Композицией отображений $f : A \to B$ и $g : B \to C$ называется отображение $gf : A \to C$, которое каждому элементу множества x множества A ставит в соответствие элемент (либо элементы) $g(f(x))$ множества C.

Обратите внимание, что отображения f и g не обязаны быть однозначно определёнными функциями, тем более взаимно однозначными.

Пример:

- $f : S \to T$, которая каждому студенту из множества S ставит в соответствие свою тему реферата из множества T. Это функция, и она биективна. Препод проверил работы и поставил в соответствие каждому реферату $g : T \to Z$ оценку из множества Z. Это тоже функция, но уже не взаимно однозначная, поскольку одной и той же оценке может соответствовать несколько рефератов.

  Композиционное преобразование $gf : S \to Z$ ставит в соответствие каждому студенту оценку за реферат. В функциональном “школьном” стиле это запишется так:

$$t = f(s) \text{ и } z = g(t) = g(f(s))$$

Если же обе функции f и g биективны, то их композиция gf — тоже биекция.

К примеру, увеличим “икс” на три $f(x) = x + 3$, а затем возведём число “<e”> в эту степень: $y = g(f(x)) = e^{x+3}$ — в результате получена взаимно однозначная функция, поскольку функции f и g, очевидно, биективны. Более того, композиция биективных функций обратима: всегда и однозначно можно выяснить исходное значение “<икс”>: $x = f^{-1}(g^{-1}(y)) = \ln y - 3$.

И другой важный факт: в общем случае композиция не перестановочна $gf \neq fg$. Так, если “<икс”> сначала возвести в квадрат, а затем найти синус, то получится функция $y = sinx^2$. Если же сначала найти синус икс, а затем возвести результат в квадрат, то получится другая функция: $y = \sin^2 x$.

Композиционные функции называются **сложными**. Образно говоря, в композициях одна функция вложена в другую.

7. Принцип математической индукции.

Theorem 7.0.1 – Принцип математической индукции Если $\mathbb{E} \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in \mathbb{E} \wedge (x \in \mathbb{E} \Rightarrow (x+1) \in \mathbb{E}), \Rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{N}$

Пусть имеется семейство утверждений $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть известно, что

1. (база индукции) $P(1)$ справедливо;
2. (индукционный переход) из справедливости $P(1), ..., P(n)$ вытекает справедливость $P(n+1)$.

Тогда все утверждения {P(n)} справедливы.

8. Определения множества натуральных чисел

Множество X для которого выполнено $\forall x \in X : (x+1) \in X$ будем называть **индуктивным**

Множество $\mathbb{N}$ - **наименьшее индуктивное множество**, содержащее единицу Счётное и несчётное множество.

9. Счётное и несчётное множество.

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus 0$

Счётное множество — это бексонечное множество, элементы которого возможно пронумеровать всеми натуральными числами. Или более формально:

Множество X является счётным, если существует биекция со множеством натуральных чисел: $X \leftrightarrow N$ или множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Множество X равномощно множеству Y, если $\exists$ биективное отображение: $f : x \to y$

10. Интервал, отрезок, промежуток.

$(a; b)$ - интервал

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$[a; b]$ - отрезок

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$(a; b]$ — левый полуинтервал

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Аналогично определяется правый

$[a, +\infty)$ - бесконечный промежуток

$$[a, +\infty = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\})$$

Аналогично определяются другие бесконечные промежутки

11. Определения окрестности.

Интервал $(a; b)$, где $x_0 \in (a; b)$ называется окрестностью точки x_0 обозначается $O(x_0)$

12. Определение проколотой окрестности.

Интервал $(a; x_0) \wedge (x_0; b)$ называется проколотой окрестностью точки x_0. Обозначается $\mathbb{O}(x_0)$

13. Определение внутренней точки множества.

Точка x_0 называется **внутренней точкой множества** X, если $\exists \delta > 0, x_0 \in X \implies O_\delta(x_0) \subset \mathbb{X}$

14. Определение предельной точки множества.

Точка x_0 называется **предельной точкой множества** X, если $\forall\ \delta > 0\ \exists\ x \in X,\ \in O_\delta(x_0)$

В любой окрестности x_0 есть хотя бы одна точка из X

15. Определение открытого множества.

Множество X называется **открытым**, если $x \in X \implies (\exists\, \delta > 0, O_\delta(x) < X$

Другими словами, нет чёткого конца и начала

16. Определение замкнутого множества.

X называется **замкнутым**, если $\mathbb{R}\backslash X$ открыто

17. Верхняя\нижняя грань множества.

Точная **верхняя** и **нижняя грань** — обобщение понятий максимума и минимума множества.

Пусть дано частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ и его подмножество $M \subset X$. Тогда элемент $s \in X$ называется точной верхней гранью или **супремумом** M, если он является наименьшей верхней гранью M, то есть

- $\forall x \in M \;\; x \leq s$
- $\forall s' \in X \;\; (\forall x \in M \;\; x \leq s') \Rightarrow (s \leq s')$

Аналогично элемент $i \in X$ называется точной нижней гранью или **инфимумом** M, если он является наибольшей нижней гранью M, то есть

- $\forall x \in M \;\; i \leq x$
- $\forall i' \in X \;\; (\forall x \in M \; i' \leq x) \Rightarrow (i' \leq i)$

Пишут:

- $s = \sup M$;
- $i = \inf M$;

18. Ограниченное снизу\сверху множество. Ограниченное множество.

$\mathbb{X}$ называется **ограниченным сверху(снизу)**, если:

$$\exists\ M \in \mathbb{R} : \forall\ x \in X,\ x \leq \mathbb{M}\ (x \geq \mathbb{M})$$

$\mathbb{X}$ называется **ограниченным**, если оно ограниченно сверху или снизу

19. Определение последовательности вложенных отрезков.

Пусть a и b — два действительных числа ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$). И пусть $a < b$. Множество чисел X, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, называется отрезком с концами a и b. Отрезок обозначается так: $[a, b]$.

Последовательность числовых отрезков

$$[a_1,\ b_1], [a_2,\ b_2], ..., [a_n,\ b_n], ...;\ a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3, ...$$

называется последовательностью **вложенных отрезков**, если каждый последующий отрезок содержится в предыдущем:

$$[a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset\ ...\ \supset [a_n,\ b_n] \supset ...$$

. То есть концы отрезков связаны неравенствами:

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ... \le b_n le ... \le b_2 \le b_1$$

.

20. Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора (формулировка)

Для любой последовательности вложенных отрезков существует точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если длины отрезков стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

то такая точка единственная.

21. Определения покрытия и подпокрытия множества.

Покрытием множества A называется такое семейство непустых его подмножеств $A_1, ..., A_k$, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Другими словами, если $A_1, ..., A_k$ — покрытие множества A, то любой элемент $a \in A$ лежит **хотя бы в одном из множеств** $A_1, ..., A_k$.

В отличие от разбиения в покрытии **не требуется**, чтобы множества $A_1, ..., A_k$ не пересекались

Определение подпокрытия

Если C — покрытие множества Y, то любое подмножество $D \subset C$, также являющееся покрытием Y, называется **подпокрытием**.

22. Определение предела числовой последовательности.

Число A будем называть пределом числовой последовательности a_n , если

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon) \in \mathbb{N}, n > N(\epsilon)\ |a_n - A| < \epsilon$$

Обозн. $lim_{n \to \infty} a_n = A$

23. Определение ограниченной последовательности.

a_n - называется ограниченной, если $\exists\ M \in \mathbb{R} : \forall\ n \in \mathbb{N},\ |a_n| < M$

24. Определение фундаментальной последовательности.

a_n - фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} : \forall \ n, m > N, \ |a_n - a_m| < \varepsilon$

25. Критерий Коши для последовательностей.

a_n сходящаяся $\iff$ a_n фундаментальная

26. Определения монотонных последовательностей.

a_n называется монотонно - возрастающей (убывающей), если $\forall\ n,\ a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$

27. Число e (определение).

$$lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

28. Числовой ряд, частичная сумма, сумма сходящегося ряда.

Пусть a_n - числовая последовательность $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $S_k = a_1 + ... + a_k$ S_k - последовательность частичных сумм Числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n - общий член ряда

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если $\exists$ $lim_{k\to\infty} S_k = S,\ \ S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

29. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, m > k > N |\sum_{n=k}^{m} a_n| < \varepsilon$$

30. Признаки сравнения (формулировка).

Первый признак сравнения Пусть

$$\exists\ N \in \mathbb{N} : \forall\ n > N : a_n \leq b_n$$

Тогда если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится

Интегральный признак

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0,\ lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \int_1^{+\infty} a_n dn$$

Второй признак сравнения Пусть $a_n \sim b_n,\ n \to \infty$ То есть $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1,\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и расходится одновременно

31. Признак Даламбера (формулировка).

Пусть $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ Если $q < 1$ ряд сходится Если $q > 1$ ряд расходится Если $q = 1$ признак не работает

32. Радикальный признак Коши (формулировка).

Пусть $lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ Если $q < 1$ ряд сходится Если $q > 1$ ряд расходится Если $q = 1$ признак не работает, но если последовательность стремится к своему пределу q сверху, то ряд сходится.

33. Признак Лейбница (формулировка).

Признак Лейбница — признак сходимости знакочередующегося ряда, установлен Готфридом Лейбницем.

Формулировка теоремы

Пусть дан знакочередующийся ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n, b_n \geq 0,$$

для которого выполняются следующие условия:

1. $b_n \geq b_{n+1}$, начиная с некоторого номера $(n \geq N)$,
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда такой ряд сходится

34. Определения абсолютно и условно сходящихся рядов.

Если числовой ряд сходится абсолютно, то он сходится

35. Определение предела функции в точке по Гейне.

$$\forall \ \{x_n\} \in \mathbb{X} \ lim_{n\to\infty} x_n = a \implies lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

36. Определение предела функции в точке по Коши

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathbb{X}\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

37. Первый замечательный предел

$$lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

В качестве числителя и знаменателя могут быть любые эквивалентные функции:

$$x \sim sin(x) \sim tg(x) \sim arcsin(x) \sim arctg(x) \sim ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{ln(a)}$$

А также

$$1 - cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

38. Второй замечательный предел

$$lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$$

39. Определение эквивалентных функций.

1. $f(x) \sim f(x)$ при базе β
2. $f(x) \sim g(x) \iff g(x) \sim f(x)$ при базе β
3. $(f(x) \sim g(x)) \wedge (g(x) \sim h(x)) \implies f(x) \sim h(x)$

40. Примеры эквивалентных функций (таблица)

$$x \sim sin(x) \sim tg(x) \sim arcsin(x) \sim arctg(x) \sim ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{ln(a)}$$

А также

$$1 - cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

41. Определение непрерывной функции в точке.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена не некоторой окресности $U(x_0)$ этой точки, если существует предел при X стремящемся к X_0, и если этот предел равен значению функции в X_0:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle f = 0.$$

42. Определение непрерывной функции в точке через односторонние пределы.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа (слева) в точке** X_0, если она определена на некоторой правосторонней (левосторонней) окрестности $U(X_0+0)$ $(U(X_0-0))$ этой точки, и если правый (левый) предел в точке X_0 равен значению функции в X_0:

$$f(X_0+0) \equiv lim_{X \to X_0+0} f(X) = f(X_0)$$

$$f(X_0-0) \equiv lim_{X \to X_0-0} f(X) = f(X_0)$$

43. Определения точек устранимого и неустранимого разрыва.

Definition 43.0.1 – Точка разрыва функции Конечная точка X_0 называется **точкой разрыва функции** $f(X)$, если функция определена на некоторой проколотой окрестности $U(X_0)$ точки X_0, но не является непрерывной в этой точке

Definition 43.0.2 – Точка устранимого разрыва Точка X_0 называется **точкой устранимого разрыва**, если существует предел $\lim_{X \to X_0} f(x) = a$, но функция в точке X_0 или не определена, или не равна предельному значению: $f(X_0) \neq a$.

Таким образом, точка устранимого разрыва — это точка разрыва первого рода, в которой скачек функции равен нулю.

Definition 43.0.3 – Точка неустранимого разрыва Точка неустранимого разрыва это такая точка x_0, в которой предел функции $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

44. Определения точек разрыва первого и второго рода.

Definition 44.0.1 – Точка разрыва 1-го рода Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если x_0 является точкой разрыва и существуют конечные односторонние пределы слева $f(x_0-0)$ и справа $f(x_0+0)$:

$$f(X_0+0) \equiv lim_{X \to X_0+0} f(X), \quad f(X_0-0) \equiv lim_{X \to X_0-0} f(X)$$

45. Определение производной функции в точке.

Величину $f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ называют производной $f(x)$ в точке x

46. Определение дифференцируемой функции в точке.

Функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $x_0 \in \mathbb{E}$, если $\exists\ A : f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o * (x - x_0)$, если $x \to x_0,\ x \in \mathbb{E}$ При этом

$$f(x) = o(x - x_0), x \to 0$$

А также

$$lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 0$$

47. Критерий дифференцируемости функции.

Функция f дифференцируема в точке x_0 $\iff$ когда существует конечный $lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x_0) = f(x_0)$

48. Уравнение касательной к графику функции.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

49. Теорема о производной композиции (формулировка).

Пусть $f(u)$ и $\phi(x)$ — такие числовые функции, что определена их композиция $g(x) = (f \circ \phi)(x) = f(\phi(x))$. Предположим, что функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а функция $f(u)$ — в некоторой окрестности точки $u_0 = \phi(x_0)$. Тогда имеет место следующее утверждение:

Theorem 49.0.1 – Производная композиции Если функция $\phi(x)$ имеет производную $\phi'(x_0)$, а функция $f(u)$ — проивзодную $f'(u_0)$, то композиция $g(x) = f(\phi(x))$ имеет производную

$$g'(x_0) = f'(u_0)\phi'(x_0).$$

50. Таблица производных основных элементарных функций.

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

51. Определение точки локального экстремума.

Точка локального экстремума называется точкой локального максимума или минимума

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если $\exists\ \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(x_0),\ f(x) \leq f(x_0) [f(x) \geq f(x_0)]$

Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума [], если в определении выше заменить $\leq$ на $<$ и $\geq$ на $>$.

$f(x_0)$ также называется точкой локального максимума (минимума)

52. Определение локального экстремума.

TODO

53. Определение точки внутреннего локального экстремума.

Если x_0 предельная точка из множества локальных минимумов и локальных максимумов, тогда x_0 называется точкой внутреннего локального множества

54. Теорема Ферма о локальном экстремуме (формулировка).

x_0 - точка внутреннего локального экстремума функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{E}$ и дифференцируема в точке x_0 Тогда

$$f'(x_0) = 0, \quad f(x_0)$$

55. Теорема Ролля (формулировка).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет трем условиям: 1. **Непрерывна** на отрезке $[a, b]$ 2. **Дифференцируема** на интервале (a, b) 3. **Принимает равные значения** на концах отрезка: $f(a) = f(b)$ Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$f'(c) = 0$$

56. Формула конечных приращений Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: 1. **Непрерывна** на отрезке $[a, b]$ 2. **Дифференцируема** на интервале (a, b)

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

57. Формула Тейлора.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

58. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.

Для e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O_{x \to 0}(x^n)$$

Для $sin(x)$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O_{x \to 0}(x^n)$$

Для $cos(x)$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O_{x \to 0}(x^n)$$

Для $\frac{1}{1-x}$ **Геометрическая прогрессия**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + O_{x \to 0}(x^n)$$

Для $(1+x)^\alpha$ **Биномиальный ряд**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + O_{x \to 0}(x^n)$$

59. Теорема об экстремумах дифференцируемой функции (формулировка).

Если точка $x = x_0$ является точкой строгого или нестрогого локального экстремума функции $f(x)$ и она дифференцируема в этой точке, то её производная в x_0 равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

60. Теорема об экстремумах n раз дифференцируемой функции (формулировка).

TODO

61. Определение выпуклой (строго) функций.

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) Тогда $f(x)$ выпукла на (a, b) и $[a, b] \iff \forall\ x \in (a, b) f"(x) < 0$

62. Определение вогнутой (строго) функций.

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) Тогда $f(x)$ выпукла на (a, b) и $[a, b] \iff \forall\ x \in (a, b) f"(x) > 0$

63. Определение точки перегиба.

Точка $x = a$ называется точкой перегиба функции $f(x)$ если существует такое $\delta > 0$, что в интервалах $(a - \delta,\ a)$ и $(a;\ a + \delta)$ эта функция выпукла в разные стороны.

64. Теорема о связи выпуклой и строго выпуклой функции с первой производной

Theorem 64.0.1 Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда:

1. $f(x)$ является **выпуклой вниз** на (a, b) тогда и только тогда, когда её производная $f'(x)$ является неубывающей на этом интервале.

2. $f(x)$ является **строго выпуклой вниз** на (a, b) тогда и только тогда, когда её производная $f'(x)$ является строго возрастающей на этом интервале.

65. Следствие о связи выпуклой и строго выпуклой функции со второй производной

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда:

1. Если $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на этом интервале.

2. Если $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$ (за исключением, возможно, конечного числа точек), то функция $f(x)$ является строго выпуклой вниз на этом интервале.

66. Формулировка теоремы о достаточном условии

Theorem 66.0.1 – Достаточное условие выпуклости Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и внутри него имеет вторую производную, которая сохраняет знак, то:

- При $f''(x) > 0$ график функции направлен выпуклостью вниз (функция выпукла).
- При $f''(x) < 0$ график функции направлен выпуклостью вверх (функция вогнута).

67. Примеры на все случаи

Строгая выпуклость вниз Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Производные: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$. Так как $e^x > 0$ для любого x, функция строго возрастает и строго выпукла вниз на всей числовой прямой.

Выпуклость, но не строгая Рассмотрим линейную функцию $f(x) = kx + b$. Производные: $f'(x) = k$, $f''(x) = 0$. Так как $f''(x) \geq 0$ выполняется, функция является выпуклой (и одновременно вогнутой), но не строго.

Смена характера выпуклости Рассмотрим $f(x) = x^3$. Вторая производная: $f''(x) = 6x$.

- При $x > 0 \implies f''(x) > 0$ (выпукла вниз).
- При $x < 0 \implies f''(x) < 0$ (выпукла вверх/вогнута).
- Точка $x = 0$ является точкой перегиба.

68. Определение первообразной.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если

$$dF(x) = f(x)dx, \quad f(x) = F'(x)$$

69. Определение неопределенного интеграла.

Неопределенный интеграл для функции $f(x)$ — это совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция f(x) определена и непрерывна на промежутке $(a,\ b)$ и $F(x)$ — её первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

70. Таблица неопределенных интегралов.

На след.странице.

№	**Интеграл**
1	$\int 0 \cdot dx = C$
2	$\int 1 \cdot dx = x + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
8	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
13	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm k}\rvert + C$

71. Теорема о методе замены переменной в неопределенном интеграле (формулировка).

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$

Пусть $x = \phi(t), \quad \phi'(t)$ непрерывна

Тогда

$$\int f(\phi(t)) * d(\phi(t)) = \int f \circ \phi(t) * \phi'(t)dt = F \circ \phi(t) + C$$

72. Разбиение отрезка, диаметр разбиения.

Набор $P = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in [a, b]$, где $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < n = b$ называется разбиением отрезка $[a, b]$

73. Интегральная сумма Римана.

Пусть $f : [a, b] \to R$ Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$\sigma(f; P; \xi) \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ - называется интегральной суммой}$$

74. Определение интеграла Римана по Коши.

Число I называется интегралом Римана функции f по отрезку $[a;b]$, если $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\lambda < \delta \Rightarrow |I - \sigma(f;p;\xi)| < \epsilon$

обозначение:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

75. Аддитивность интеграла Римана по множеству (формулировка).

$f \in R[a;b],\ c \in (a;b)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

76. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть $f \in R[a;b]$ и $F(x)$ - её первообразная, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

77. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

78. Замена переменных в определенном интеграле.

Пусть $\phi : [\alpha; \beta] \to [a; b]$ Причём ϕ - непрерывно дифференцируема, $\phi'(t)$ - непрерывна на $[a; b]$, $\phi(\alpha) = a;\ \phi(\beta) = b$, Тогда $\forall$ непрерывной на $[a; b]$ функции:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) * \phi'(t)dt$$

79. Определение несобственного интеграла Римана по неограниченному множеству.

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, +\infty]$ и $\forall A > a \exists \int\limits_a^A f(x)dx$ Тогда:

Если $\exists \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то используется обозначение $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и интеграл называется несобственным интегралом Римана первого рода. В этом случае $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования, определяющийся формулой:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

, где с — проивзольное число

80. Определение несобственного интеграла Римана по отрезку.

Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$, терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$ и $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx = I(\delta)$. Тогда:

Если $\exists \lim_{\delta \to 0+0} L(\delta) = I \in \mathbb{R}$, то используется обозначение $I = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ и интеграл называется несобственным интегралом Римана второго рода. В этом случае интеграл называется сходящимся.