

МатАнал.
Теория на дебиљник

ИИТ

21 декабря 2025 г.

Оглавление

1	Отображение (область определения, множество значений).	6
2	Сюръекция.	7
3	Инъекция.	8
4	Биекция	9
5	Обратное отображение.	11
6	Композиция двух отображений.	12
7	Принцип математической индукции.	14
8	Определения множества натуральных чисел	15
9	Счётное и несчётное множество.	16
10	Интервал, отрезок, промежуток.	17
11	Определения окрестности.	18
12	Определение проколотой окрестности.	19
13	Определение внутренней точки множества.	20
14	Определение предельной точки множества.	21
15	Определение открытого множества.	22
16	Определение замкнутого множества.	23
17	Верхняя\нижняя грань множества.	24

18 Ограниченное снизу\сверху множество. Ограниченное множество.	25
19 Определение последовательности вложенных отрезков.	26
20 Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора (формулировка)	27
21 Определения покрытия и подпокрытия множества.	28
22 Определение предела числовой последовательности.	29
23 Определение ограниченной последовательности.	30
24 Определение фундаментальной последовательности.	31
25 Критерий Коши для последовательностей.	32
26 Определения монотонных последовательностей.	33
27 Число e (определение).	34
28 Числовой ряд, частичная сумма, сумма сходящегося ряда.	35
29 Необходимый признак сходимости числового ряда.	36
30 Признаки сравнения (формулировка).	37
31 Признак Даламбера (формулировка).	38
32 Радикальный признак Коши (формулировка).	39
33 Признак Лейбница (формулировка).	40
34 Определения абсолютно и условно сходящихся рядов.	41
35 Определение предела функции в точке по Гейне.	42
36 Определение предела функции в точке по Коши	43

37 Первый замечательный предел	44
38 Второй замечательный предел	45
39 Определение эквивалентных функций.	46
40 Примеры эквивалентных функций (таблица)	47
41 Определение непрерывной функции в точке.	48
42 Определение непрерывной функции в точке через односторонние пределы.	49
43 Определения точек устранимого и неустранимого разрыва.	50
44 Определения точек разрыва первого и второго рода.	51
45 Определение производной функции в точке.	52
46 Определение дифференцируемой функции в точке.	53
47 Критерий дифференцируемости функции.	54
48 Уравнение касательной к графику функции.	55
49 Теорема о производной композиции (формулировка).	56
50 Таблица производных основных элементарных функций.	57
51 Определение точки локального экстремума.	58
52 Определение локального экстремума.	59
53 Определение точки внутреннего локального экстремума.	60
54 Теорема Ферма о локальном экстремуме (формулировка).	61

55 Теорема Ролля (формулировка).	62
56 Формула конечных приращений Лагранжа.	63
57 Формула Тейлора.	64
58 Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.	65
59 Теорема об экстремумах дифференцируемой функции (формулировка).	66
60 Теорема об экстремумах n раз дифференцируемой функции (формулировка).	67
61 Определение выпуклой (строго) функций.	68
62 Определение вогнутой (строго) функций.	69
63 Определение точки перегиба.	70
64 Теорема о связи выпуклой и строго выпуклой функции с первой производной	71
65 Следствие о связи выпуклой и строго выпуклой функции со второй производной	72
66 Формулировка теоремы о достаточном условии	73
67 Примеры на все случаи	74
68 Определение первообразной.	75
69 Определение неопределенного интеграла.	76
70 Таблица неопределенных интегралов.	77
71 Теорема о методе замены переменной в неопределенном интеграле (формулировка).	79

72 Разбиение отрезка, диаметр разбиения.	80
73 Интегральная сумма Римана.	81
74 Определение интеграла Римана по Коши.	82
75 Аддитивность интеграла Римана по множеству (формулировка).	83
76 Формула Ньютона-Лейбница.	84
77 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	85
78 Замена переменных в определенном интеграле.	86
79 Определение несобственного интеграла Римана по неограниченному множеству.	87
80 Определение несобственного интеграла Римана по отрезку.	88

1. Отображение (область определения, множество значений).

Отображением $f : x \rightarrow y$ называется правило по которому элементы x сопоставляются с элементами y .

Множество значений: $f(x) = \{y \in Y | \exists x \in X, y = f(x)\}$

Область определений: $D(f) = \{x \in X | \exists y \in Y, y = f(x)\}$

Отображения равны при условии равенства их области определений и области значений при любых x

$$f_1 = f_2, \quad D(f_1) = D(f_2) \wedge \forall x \in D(f) \quad f_1(x) = f_2(x)$$

2. Сюръекция.

Сюръекция - это такое отображение, что каждый элемент области значений имеет хотя бы один прообраз.

Definition 2.0.1 – Сюръекция Отображение называется сюръективным (или сюръекцией, или отображением на), если

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

Например:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], f(x) = \sin x$ — сюръективно.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ — сюръективно.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ — не является сюръективным.

3. Инъекция.

Инъекция — это функция, которая переводит разные элементы в разные образы.

Definition 3.0.1 – Инъекция Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **инъекцией** (также **вложением** или **отображением в Y**), если разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y :

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Замечания:

- Эквивалентно, отображение является инъекцией, если:
 $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$
- Отображение f инъективно тогда и только тогда, когда для него существует левое обратное:
 $\exists g : Y \rightarrow X \quad g \circ f = id_X$, где “ \circ ” обозначает композицию, а “ id_X ” — тождественное отображение на X

Примеры:

1. $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ — инъективно.
2. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ — биективно.
3. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ — не является инъективным, так как

$$f(-2) = f(2) = 4.$$

4. Биекция

Definition 4.0.1 – Биекция Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **биективным** (или **биекцией**), если оно инъективно и сюръективно.

Замечание:

Два множества, между которыми существует биекция, называются **равномощными**.

Свойства:

- Отображение $f : X \rightarrow Y$ является биективным тогда и только тогда, когда существует обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ такое, что

$$f \circ f^{-1} = id_Y, f^{-1} \circ f = id_X,$$

где “id” обозначает тождественное отображение, а “o” композицию функций.

- Пусть даны два отображения:
 $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$, а $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ — их композиция. Тогда h биективно тогда и только тогда, когда f инъективно, а g сюръективно.
- В частности, композиция двух биективных отображений сама биективна. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры:

1. $id : X \rightarrow X$ — функция, сохраняющая все элементы множества X , биективна на этом множестве
2. $f(x) = x, f(x) = x^3$ — биективные функции из \mathbb{R} в себя. Вообще, любой одночлен одной переменной нечётной степени является биекцией.

3. $f(x) = e^x$ — биективная функция \mathbb{R} в $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Но если её рассматривать как функцию в \mathbb{R} , то она уже не будет биективной (у отрицательных чисел не будет прообразов).
4. $f(x) = \sin x$ не является биективной функцией, если считать её определённой на всём \mathbb{R} .

5. Обратное отображение.

Прямое отображение $f : A \rightarrow B$ обратимо $f^{-1} : B \rightarrow A$ тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно. Откуда следует, что f — это биективная функция.

На уровне обывательского понимания обратимость означает возможность “всё вернуть в исходное состояние”, причём, идеально и однозначно.

Так, если мы умножаем число “икс” на два: $y = f(x) = 2x$, то всегда можно взять “игрек”, разделить его пополам и получить исходное число: $x = f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$.

6. Композиция двух отображений.

Композицией отображений $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ называется отображение $gf : A \rightarrow C$, которое каждому элементу множества x множества A ставит в соответствие элемент (либо элементы) $g(f(x))$ множества C .

Обратите внимание, что отображения f и g не обязаны быть однозначно определёнными функциями, тем более взаимно однозначными.

Пример:

- $f : S \rightarrow T$, которая каждому студенту из множества S ставит в соответствие свою тему реферата из множества T . Это функция, и она биективна. Преподаватель проверил работы и поставил в соответствие каждому реферату $g : T \rightarrow Z$ оценку из множества Z . Это тоже функция, но уже не взаимно однозначная, поскольку одной и той же оценке может соответствовать несколько рефератов.

Композиционное преобразование $gf : S \rightarrow Z$ ставит в соответствие каждому студенту оценку за реферат. В функциональном “школьном” стиле это запишется так:

$$t = f(s) \text{ и } z = g(t) = g(f(s))$$

Если же обе функции f и g биективны, то их композиция gf — тоже биекция.

К примеру, увеличим “икс” на три $f(x) = x + 3$, а затем возведём число “ e ” в эту степень: $y = g(f(x)) = e^{x+3}$ — в результате получена взаимно однозначная функция, поскольку функции f

и g , очевидно, биективны. Более того, композиция биективных функций обратима: всегда и однозначно можно выяснить исходное значение “<икс>”: $x = f^{-1}(g^{-1}(y)) = \ln y - 3$.

И другой важный факт: в общем случае композиция не перестановочна $gf \neq fg$. Так, если “<икс>” сначала возвести в квадрат, а затем найти синус, то получится функция $y = \sin x^2$. Если же сначала найти синус икс, а затем возвести результат в квадрат, то получится другая функция: $y = \sin^2 x$.

Композиционные функции называются **сложными**. Образно говоря, в композициях одна функция вложена в другую.

7. Принцип математической индукции.

Theorem 7.0.1 – Принцип математической индукции

Если $\mathbb{E} \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in \mathbb{E} \wedge (x \in \mathbb{E} \Rightarrow (x + 1) \in \mathbb{E}), \Rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{N}$

Пусть имеется семейство утверждений $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Пусть известно, что

1. (база индукции) $P(1)$ справедливо;
2. (индукционный переход) из справедливости $P(1), \dots, P(n)$ вытекает справедливость $P(n + 1)$.

Тогда все утверждения $\{P(n)\}$ справедливы.

8. Определения множества натуральных чисел

Множество X для которого выполнено $\forall x \in X : (x + 1) \in X$ будем называть **индуктивным**

Множество \mathbb{N} - **наименьшее индуктивное множество**, содержащее единицу Счётное и несчётное множество.

9. Счётное и несчётное множество.

\mathbb{Q} — множество рациональных чисел. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus 0$

Счётное множество — это бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать всеми натуральными числами. Или более формально:

Множество X является счётным, если существует биекция со множеством натуральных чисел: $X \leftrightarrow \mathbb{N}$ или множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Множество X равномощно множеству Y , если \exists биективное отображение: $f : x \rightarrow y$

10. Интервал, отрезок, промежуток.

$(a; b)$ - интервал

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$[a; b]$ - отрезок

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$(a; b]$ — левый полуинтервал

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Аналогично определяется правый

$[a, +\infty)$ - бесконечный промежуток

$$[a, +\infty = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\})$$

Аналогично определяются другие бесконечные промежутки

11. Определения окрестности.

Интервал $(a; b)$, где $x_0 \in (a; b)$ называется окрестностью точки x_0 обозначается $O(x_0)$

12. Определение проколотой окрестности.

Интервал $(a; x_0) \cup (x_0; b)$ называется проколотой окрестностью точки x_0 . Обозначается $\mathbb{O}(x_0)$

13. Определение внутренней точки множества.

Точка x_0 называется **внутренней точкой** множества X , если $\exists \delta > 0, x_0 \in X \implies O_\delta(x_0) \subset X$

14. Определение предельной точки множества.

Точка x_0 называется **предельной точкой** множества X , если
 $\forall \delta > 0 \exists x \in X, x \in O_\delta(x_0)$

В любой окрестности x_0 есть хотя бы одна точка из X

15. Определение открытого множества.

Множество X называется **открытым**, если $x \in X \implies (\exists \delta > 0, O_\delta(x) \subset X)$

Другими словами, нет чёткого конца и начала

16. Определение замкнутого множества.

X называется **замкнутым**, если $\mathbb{R} \setminus X$ открыто

17. Верхняя\нижняя грань множества.

Точная **верхняя** и **нижняя грань** — обобщение понятий максимума и минимума множества.

Пусть дано частично упорядоченное множество (X, \leq) и его подмножество $M \subset X$. Тогда элемент $s \in X$ называется точной верхней гранью или **супремумом** M , если он является наименьшей верхней гранью M , то есть

- $\forall x \in M \quad x \leq s$
- $\forall s' \in X \quad (\forall x \in M \quad x \leq s') \Rightarrow (s \leq s')$

Аналогично элемент $i \in X$ называется точной нижней гранью или **инфимумом** M , если он является наибольшей нижней гранью M , то есть

- $\forall x \in M \quad i \leq x$
- $\forall i' \in X \quad (\forall x \in M \quad i' \leq x) \Rightarrow (i' \leq i)$

Пишут:

- $s = \sup M$;
- $i = \inf M$;

18. Ограниченное снизу\сверху множество. Ограниченное множество.

X называется **ограниченным сверху(снизу)**, если:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X, x \leq M \ (x \geq M)$$

X называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху или снизу

19. Определение последовательности вложенных отрезков.

Пусть a и b — два действительных числа ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$). И пусть $a < b$. Множество чисел X , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, называется отрезком с концами a и b . Отрезок обозначается так: $[a, b]$.

Последовательность числовых отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots; a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$$

называется последовательностью **вложенных отрезков**, если каждый последующий отрезок содержится в предыдущем:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

. То есть концы отрезков связаны неравенствами:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

.

20. Принцип вложенных отрезков Коши-Кантора (формулировка)

Для любой последовательности вложенных отрезков существует точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если длины отрезков стремятся к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

то такая точка единственная.

21. Определения покрытия и подпокрытия множества.

Покрытием множества A называется такое семейство непустых его подмножеств A_1, \dots, A_k , что

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A.$$

Другими словами, если A_1, \dots, A_k — покрытие множества A , то любой элемент $a \in A$ лежит **хотя бы в одном из множеств** A_1, \dots, A_k .

В отличие от разбиения в покрытии **не требуется**, чтобы множества A_1, \dots, A_k не пересекались

Определение подпокрытия

Если C — покрытие множества Y , то любое подмножество $D \subset C$, также являющееся покрытием Y , называется **подпокрытием**.

22. Определение предела числовой последовательности.

Число A будем называть пределом числовой последовательности a_n , если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, n > N(\epsilon) |a_n - A| < \epsilon$$

Обозн. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

23. Определение ограниченной последовательности.

a_n - называется ограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < M$

24. Определение фундаментальной последовательности.

a_n - фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$

25. Критерий Коши для последовательностей.

a_n сходящаяся $\iff a_n$ фундаментальная

26. Определения монотонных последовательностей.

a_n называется монотонно - возрастающей (убывающей), если $\forall n, a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$)

27. Число e (определение).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

28. Числовой ряд, частичная сумма, сумма сходящегося ряда.

Пусть a_n - числовая последовательность $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, S_k = a_1 + \dots + a_k$ S_k - последовательность частичных сумм Числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n - общий член ряда

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S, S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

29. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > k > N \left| \sum_{n=k}^m a_n \right| < \varepsilon$$

30. Признаки сравнения (формулировка).

Первый признак сравнения Пусть

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \leq b_n$$

Тогда если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится

Интегральный признак

$$\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 0, \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_1^{+\infty} a_n dn$$

Второй признак сравнения Пусть $a_n \sim b_n, \ n \rightarrow \infty$ То есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и расходится одновременно

31. Признак Даламбера (формулировка).

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ Если $q < 1$ ряд сходится Если $q > 1$ ряд расходится Если $q = 1$ признак не работает

32. Радикальный признак Коши (формулировка).

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ Если $q < 1$ ряд сходится Если $q > 1$ ряд расходится Если $q = 1$ признак не работает, но если последовательность стремится к своему пределу q сверху, то ряд сходится.

33. Признак Лейбница (формулировка).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n, \quad a_n \geq 0$$

А также для него выполняются условия: 1) a_n - монотонна 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n -$$

34. Определения абсолютно и условно сходящихся рядов.

Если числовой ряд сходится абсолютно, то он сходится

35. Определение предела функции в точке по Гейне.

$$\forall \{x_n\} \in \mathbb{X} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

36. Определение предела функции в точке по Коши

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{X} \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

37. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

В качестве числителя и знаменателя могут быть любые эквивалентные функции:

$$x \sim \sin(x) \sim \operatorname{tg}(x) \sim \arcsin(x) \sim \operatorname{arctg}(x) \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln(a)}$$

А также

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

38. Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

39. Определение эквивалентных функций.

1. $f(x) \sim f(x)$ при базе β
2. $f(x) \sim g(x) \iff g(x) \sim f(x)$ при базе β
3. $(f(x) \sim g(x)) \wedge (g(x) \sim h(x)) \implies f(x) \sim h(x)$

40. Примеры эквивалентных функций (таблица)

$$x \sim \sin(x) \sim \operatorname{tg}(x) \sim \arcsin(x) \sim \operatorname{arctg}(x) \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln(a)}$$

А также

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

41. Определение непрерывной функции в точке.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если она определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ этой точки, если существует предел при X стремящемся к X_0 , и если этот предел равен значению функции в X_0 :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

42. Определение непрерывной функции в точке через односторонние пределы.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа (слева) в точке** X_0 , если она определена на некоторой правосторонней (левосторонней) окрестности $U(X_0 + 0)$ ($U(X_0 - 0)$) этой точки, и если правый (левый) предел в точке X_0 равен значению функции в X_0 :

$$f(X_0 + 0) \equiv \lim_{X \rightarrow X_0 + 0} f(X) = f(X_0)$$

$$f(X_0 - 0) \equiv \lim_{X \rightarrow X_0 - 0} f(X) = f(X_0)$$

43. Определения точек устранимого и неустранимого разрыва.

Definition 43.0.1 – Точка разрыва функции Конечная точка X_0 называется **точкой разрыва функции** $f(X)$, если функция определена на некоторой проколотой окрестности $U(X_0)$ точки X_0 , но не является непрерывной в этой точке

Definition 43.0.2 – Точка устранимого разрыва Точка X_0 называется **точкой устранимого разрыва**, если существует предел $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a$, но функция в точке X_0 или не определена, или не равна предельному значению: $f(X_0) \neq a$.

Таким образом, точка устранимого разрыва — это точка разрыва первого рода, в которой скачек функции равен нулю.

Definition 43.0.3 – Точка неустранимого разрыва **Точка неустранимого разрыва** это такая точка x_0 , в которой предел функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует.

44. Определения точек разрыва первого и второго рода.

Definition 44.0.1 – Точка разрыва 1-го рода Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если x_0 является точкой разрыва и существуют конечные односторонние пределы слева $f(x_0 - 0)$ и справа $f(x_0 + 0)$:

$$f(x_0 + 0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x), \quad f(x_0 - 0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

45. Определение производной функции в точке.

Величину $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ называют производной $f(x)$ в точке x

46. Определение дифференцируемой функции в точке.

Функция $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $x_0 \in \mathbb{E}$, если $\exists A : f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$, если $x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{E}$.
При этом

$$f(x) - f(x_0) = o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

А также

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

47. Критерий дифференцируемости функции.

Функция f дифференцируема в точке $x_0 \iff$ когда существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x_0) = f'(x_0)$

48. Уравнение касательной к графику функции.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

49. Теорема о производной композиции (формулировка).

Пусть $f(u)$ и $\phi(x)$ — такие числовые функции, что определена их композиция $g(x) = (f \circ \phi)(x) = f(\phi(x))$. Предположим, что функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , а функция $f(u)$ — в некоторой окрестности точки $u_0 = \phi(x_0)$. Тогда имеет место следующее утверждение:

Theorem 49.0.1 – Производная композиции Если функция $\phi(x)$ имеет производную $\phi'(x_0)$, а функция $f(u)$ — производную $f'(u_0)$, то композиция $g(x) = f(\phi(x))$ имеет производную

$$g'(x_0) = f'(u_0)\phi'(x_0).$$

50. Таблица производных основных элементарных функций.

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

51. Определение точки локального экстремума.

Точка локального экстремума называется точкой локального максимума или минимума

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(x_0), f(x) \leq f(x_0) [f(x) \geq f(x_0)]$

Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума [], если в определении выше заменить \leq на $<$ и \geq на $>$.

$f(x_0)$ также называется точкой локального максимума (минимума)

52. Определение локального экстремума.

TODO

53. Определение точки внутреннего локального экстремума.

Если x_0 предельная точка из множества локальных минимумов и локальных максимумов, тогда x_0 называется точкой внутреннего локального множества

54. Теорема Ферма о локальном экстремуме (формулировка).

x_0 - точка внутреннего локального экстремума функции $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x)$ непрерывна на \mathbb{E} и дифференцируема в точке x_0 Тогда

$$f'(x_0) = 0, \quad f(x_0)$$

55. Теорема Ролля (формулировка).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет трем условиям: 1. **Непрерывна** на отрезке $[a, b]$ 2. **Дифференцируема** на интервале (a, b) 3. **Принимает равные значения** на концах отрезка: $f(a) = f(b)$ Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$f'(c) = 0$$

56. Формула конечных приращений Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: 1. **Непрерывна** на отрезке $[a, b]$ 2. **Дифференцируема** на интервале (a, b)

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

57. Формула Тейлора.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

58. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.

Для e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Для $\sin(x)$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Для $\cos(x)$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Для $\frac{1}{1-x}$ Геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + O_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Для $(1+x)^\alpha$ Биномиальный ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + O_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

59. Теорема об экстремумах дифференцируемой функции (формулировка).

Если точка $x = x_0$ является точкой строгого или нестрогого локального экстремума функции $f(x)$ и она дифференцируема в этой точке, то её производная в x_0 равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

60. Теорема об экстремумах n раз дифференцируемой функции (формулиров- ка).

TODO

61. Определение выпуклой (строго) функций.

Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) Тогда $f(x)$ выпукла на (a, b) и $[a, b] \iff \forall x \in (a, b) f''(x) < 0$

62. Определение вогнутой (строго) функций.

Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) Тогда $f(x)$ выпукла на (a, b) и $[a, b] \iff \forall x \in (a, b) f''(x) > 0$

63. Определение точки перегиба.

Точка $x = a$ называется точкой перегиба функции $f(x)$ если существует такое $\delta > 0$, что в интервалах $(a - \delta, a)$ и $(a; a + \delta)$ эта функция выпукла в разные стороны.

64. Теорема о связи выпуклой и строго выпуклой функции с первой производной

Theorem 64.0.1 Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда:

1. $f(x)$ является **выпуклой вниз** на (a, b) тогда и только тогда, когда её производная $f'(x)$ является неубывающей на этом интервале.
2. $f(x)$ является **строго выпуклой вниз** на (a, b) тогда и только тогда, когда её производная $f'(x)$ является строго возрастающей на этом интервале.

65. Следствие о связи выпуклой и строго выпуклой функции со второй производной

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда:

1. Если $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на этом интервале.
2. Если $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$ (за исключением, возможно, конечного числа точек), то функция $f(x)$ является строго выпуклой вниз на этом интервале.

66. Формулировка теоремы о достаточном условии

Theorem 66.0.1 – Достаточное условие выпуклости Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и внутри него имеет вторую производную, которая сохраняет знак, то:

- При $f''(x) > 0$ график функции направлен выпуклостью вниз (функция выпукла).
- При $f''(x) < 0$ график функции направлен выпуклостью вверх (функция вогнута).

67. Примеры на все случаи

Строгая выпуклость вниз Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Производные: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$. Так как $e^x > 0$ для любого x , функция строго возрастает и строго выпукла вниз на всей числовой прямой.

Выпуклость, но не строгая Рассмотрим линейную функцию $f(x) = kx + b$. Производные: $f'(x) = k$, $f''(x) = 0$. Так как $f''(x) \geq 0$ выполняется, функция является выпуклой (и одновременно вогнутой), но не строго.

Смена характера выпуклости Рассмотрим $f(x) = x^3$. Вторая производная: $f''(x) = 6x$.

- При $x > 0 \implies f''(x) > 0$ (выпукла вниз).
- При $x < 0 \implies f''(x) < 0$ (выпукла вверх/вогнута).
- Точка $x = 0$ является точкой перегиба.

68. Определение первообразной.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если

$$dF(x) = f(x)dx, \quad f(x) = F'(x)$$

69. Определение неопределенного интеграла.

Неопределенный интеграл для функции $f(x)$ — это совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ — её первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

70. Таблица неопределенных интегралов.

На след.странице.

№	Интеграл
1	$\int 0 \cdot dx = C$
2	$\int 1 \cdot dx = x + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
8	$\int \cos x dx = \sin x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$
13	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm k} + C$

71. Теорема о методе замены переменной в неопределенном интеграле (формулировка).

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$

Пусть $x = \phi(t)$, $\phi'(t)$ непрерывна

Тогда

$$\int f(\phi(t)) * d(\phi(t)) = \int f \circ \phi(t) * \phi'(t)dt = F \circ \phi(t) + C$$

72. Разбиение отрезка, диаметр разбиения.

Набор $P = \{x_i\}_{i=0}^n \in [a, b]$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ называется разбиением отрезка $[a, b]$

73. Интегральная сумма Римана.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow R$ Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\sigma(f; P; \xi) \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ - называется интегральной суммой

74. Определение интеграла Римана по Коши.

Число I называется интегралом Римана функции f по отрезку $[a; b]$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \lambda < \delta \Rightarrow |I - \sigma(f; p; \xi)| < \epsilon$

обозначение:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

75. Аддитивность интеграла Римана по множеству (формулировка).

$f \in R[a; b]$, $c \in (a; b)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

76. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть $f \in R[a; b]$ и $F(x)$ - её первообразная, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

77. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

78. Замена переменных в определенном интеграле.

Пусть $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ Причём ϕ - непрерывно дифференцируема, $\phi'(t)$ - непрерывна на $[a; b]$, $\phi(\alpha) = a$; $\phi(\beta) = b$, Тогда \forall непрерывной на $[a; b]$ функции:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) * \phi'(t)dt$$

79. Определение несобственного интеграла Римана по неограниченному множеству.

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, +\infty]$ и $\forall A > a \exists \int_a^A f(x)dx$ Тогда:

Если $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то используется обозначение

$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ и интеграл называется несобственным интегралом

Римана первого рода. В этом случае $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования, определяющийся формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

, где c — произвольное число

80. Определение несобственного интеграла Римана по отрезку.

Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$, терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$ и $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists \int_{a+\delta}^b f(x)dx = I(\delta)$. Тогда:

Если $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0+0} L(\delta) = I \in \mathbb{R}$, то используется обозначение $I = \int_a^b f(x)dx$ и интеграл называется несобственным интегралом Римана второго рода. В этом случае интеграл называется сходящимся.