ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

Тема: Задачі з обмеженнями.

Мета: Навчитися розв’язувати задачі з обмеженнями.

Перелік питань, які студент повинен знати: задачі математичного програмування, методи оптимізації

Короткі теоретичні відомості

Розв’язання задач лінійного та квадратичного програмування, канонічного програмування другого порядку, теорії ігор, булевих задач, криптографічних головоломок є складним нетривіальним процесом. Відповідні задачі складають **клас задач з обмеженнями** і мають таку формалізовану постановку:

$$y = f(x) \to opt, \qquad x \in X^n$$

при обмеженнях

$$c = (r_c, s_c),\ c \in C^m,\ c = \bigcup\nolimits_{m=1}^{M} C_m,$$

де $x = (x_1, ..., x_n)$ – множина змінних, що належить простору X^n; $f(x)$ – цільова функція; $r_c \subseteq X^m$ – довільне m-арне відношення на x; $s_c : X^n \to X^m$ – функція для виконання проектування вектора $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ на деякі m його компоненти.

Класифікують задачі з обмеженнями за такими аспектами:

– за властивостями вхідної інформації (детерміновані; стохастичні);
– за характером описуваних явищ (динамічні; статичні);
– за типом змінних (залежні, незалежні; дискретні, неперервні; детерміновані, випадкові);
– за типом обмежень (унарні, бінарні, вищих порядків; лінійні, нелінійні; абсолютні, пріоритетні).

Для розв’язання задач подібного класу, окрім класичних методів, використовуються і технології «soft computing» («м’які обчислення»).

Перерахуємо деякі **групи класичних методів**:

– методи повного пошук у просторі розв’язків;
– методи поширення обмежень;
– методи локального пошуку;
– метод «waltz filtering»;
– метод інтелектуального пошуку;
– методи кількісного підходу;
– методи спеціальних апаратних архітектур.

Зазначимо, що методи повного пошук у просторі розв’язків, методи поширення обмежень та методи локального пошуку є методами пошуку з поверненням. **Алгоритми повного пошуку** досліджують простір часткових розв’язків у глибину (звичайний, з обмеженням глибини або з ітеративним збільшенням глибини). Покращують ефективність перебору з поверненням, як правило, скорочуючи розмір простору пошуку, для чого застосовують процедури двох типів: алгоритми попередньої обробки (статичні) та динамічні алгоритми – схеми випереджаючого та зворотного прорахунку.

До методів поширення обмежень належать метод попередньої перевірки та власне сам метод поширення обмежень.

Попередня перевірка. При кожному присвоєнні значень змінній X у процесі попередньої перевірки переглядається кожна змінна Y, якій ще не присвоєно значення і яка з'єднана з X деяким обмеження, та із області визначення змінної Y вилучається будь-яке значення, що не сумісне зі значеннями, обраними для X.

Метод поширення обмежень – це метод поширення на інші змінні наслідків застосування деякого обмеження до однієї змінної.

Метод інтелектуального пошуку передбачає виконання зворотного ходу до останньої змінної, котрій було присвоєно значення із конфліктної множини. Іншими словами повернення відбувається безпосередньо до джерела проблеми, що виникла у процесі пошуку.

Метод локального пошуку базується на використанні евристик з мінімальними конфліктами.

Приклад 13. Розглянемо адміністративну карту Черкаської області (рис. 12). Потрібно розфарбувати райони у червоний, жовтий або зелений кольори так, щоб жодна пара сусідніх районів не мала однакового кольору, або показати, що це неможливо.

Рис. 12 – Адміністративна карта Черкаської області

Приведемо дану задачу до формалізованої задачі із обмеженнями. Позначимо змінними назви районів Черкаської області: $Д$, $К$, $З$, $Чн$, $Ч$, $Чг$, $КШ$, $Г$, $С$, $Км$, $Л$, $Зв$, $Ш$, $Кт$, $Ж$, $Мн$, $Т$, $Мс$, $Х$, $У$. Областю визначення кожної змінної є множина $\{червоний, жовтий, зелений\}$. Обмеження вимагають, щоб усі пари відповідних районів мали різний колір; наприклад, можливими комбінаціями для пари $Д$ та $Чн$ є наступні:

$$\{(червоний, зелений), (червоний, жовтий), (зелений, червоний), (зелений, жовтий), (жовтий, червоний), (жовтий, зелений)\}.$$

Задачі з обмеженнями зручно подавати у вигляді графа обмежень, де вершини відповідають змінним задачі, а ребра – обмеженням.

Розв'язок задачі зобразимо на рис. 13.

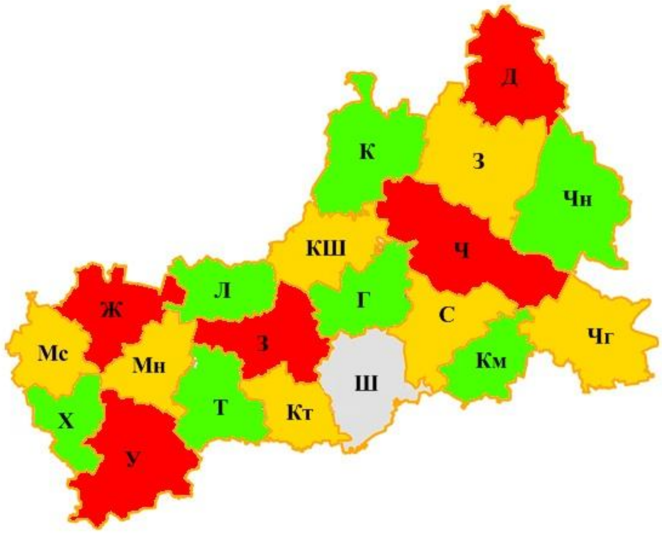

Рис. 13 – Розв'язок задачі розфарбовування адміністративної карти Черкаської області

Отже, дану карту не можливо розфарбувати трьома кольорами.

Завдання для роботи в аудиторії

Розфарбувати адміністративну карту Харківської області (рис. 14) у червоний, жовтий або зелений кольори так, щоб жодна пара сусідніх районів не мала однакового кольору, або показати, що це неможливо.

Рис. 14 – Адміністративна карта Харківської області

Завдання для самостійного опрацювання

1. Розфарбувати адміністративну карту України у червоний, жовтий або зелений кольори так, щоб жодна пара сусідніх областей не мала однакового кольору, або показати, що це неможливо.
2. Розв'язати задачу.

1) **Різнокольорові будинки.** У п'ятьох будинках, пофарбованих у різні кольори, мешкають чоловіки різних національностей. Вони тримають різних тварин, віддають перевагу різним напоям і курять сигарети різних марок. Відомо, що:

- англієць живе в червоному будинку;
- у іспанця є собака;
- каву п'ють в зеленому будинку;
- українець п'є чай;
- зелений будинок – перший праворуч від будинку кольору слонової кістки;
- курець «Вінстона» тримає равликів;.
- сигарети «Кул» курять у жовтому будинку;
- молоко п'ють у середньому будинку;
- норвежець живе у крайньому зліва будинку;
- чоловік, що курить «Честерфілд», живе в будинку, сусідньому з бу-
  динком чоловіка, у якого є лисиця;
- сигарети «Кул» курять у будинку, сусідньому з будинком, де є кінь;
- чоловік, що віддає перевагу «Лакі страйк», п'є апельсиновий сік;
- японець курить сигарети «Парламент»;
- норвежець живе в будинку поруч з блакитним будинком.

Треба відповісти на запитання: «У кого є зебра?», «Хто п'є воду?».

2) **Скільки синів було у фермера?** Один фермер з Далекого Заходу, який займався на своєму ранчо розведенням худоби, відчув, що життя його підходить до закінчення. Він покликав усіх своїх синів і сказав їм, що вирішив ще за життя розділити між ними спадщину.

–Джон, – сказав він старшому, – ти можеш взяти стільки корів, скільки, зумієш доглянути, а твоя дружина Ненсі може забрати дев'яту частину корів, що залишаться.

Другому синові він сказав:

–Сем, ти можеш взяти стільки ж корів, скільки і Джон, та ще одну, якщо вже Джон вибирає першим. Тобі ж, мила Селлі, я дам одну дев'яту того, що залишиться після твого Джона.

Третьому синові він сказав те ж саме. Він міг узяти на одну корову більше, ніж другий син, а його дружині належала дев'ята частина залишку. Так само фермер вчинив і з іншими синами. Кожен з них брав на одну корову більше, ніж його найближчий старший брат, а дружина кожного сина брала дев'яту частину залишку.

Після того як молодший син забрав своїх корів, його дружині не дісталося жодної корови. Тоді фермер сказав:

–Оскільки коні коштують удвічі дорожче корів, ми поділимо коней так, щоб кожна родина отримала худоби на однакову суму.

Завдання полягає в тому, щоб з'ясувати, скільки корів було у фермера і скільки у нього було синів?

3) **Поділ яблук.** Вісім дітей розділили між собою 32 яблука наступним чином. Енн отримала 1 яблуко, Мей – 2, Джейн – 3 і Кет – 4. Нед Сміт взяв стільки ж яблук, скільки і його сестра, Тому Брауну дісталося вдвічі більше яблук, ніж його сестрі, Біллу Джонсу – втричі більше, ніж його сестрі, і, нарешті, Джек Робінсон отримав яблук вчетверо більше, ніж його сестра. Назвіть прізвища чотирьох дівчаток.

4) **Три наречені.** Один старий «грошовий мішок» зробив надбанням гласності, що він дасть у придане кожній своїй доньці стільки золота, скільки важить вона сама. Тому вмить у кожної з дівчат з'явився відповідний шанувальник. Всі доньки вийшли заміж в один і той же день, а перш, ніж зважитися, скуштували дуже важкого весільного торта, від
чого радісно забились серця їх суджених.

Всі разом наречені важили 396 фунтів, проте Неллі важила на 10 фунтів більше, ніж Кітті, а Мінні важила на 10 фунтів більше, ніж Неллі. Один із наречених, Джон Браун, важив рівно стільки ж, скільки і його наречена, тоді як Вільям Джонс важив у півтора, а Чарльз Робінсон – у два рази більше своїх наречених. Разом наречені та їх суджені важили 1000 фунтів. Назвіть ім'я та прізвище кожної з дівчат, після того, як вони вийшли заміж.

5) **Дружини данців.** У Данії довгий час зберігалися старі звичаї. Так, рогату худобу і домашню птицю продавали непарним числом голів, яйця – двома десятками, одні предмети – дюжинами, інші – бушелями, цукор – трьома з половиною фунтами тощо. Одна цікава задача, опублікована більше двох століть тому, ілюструє цей заплутаний спосіб.

У ній говориться: «Прийшли до мене три знайомих данці: Хендрік, Клаас і Корнеліус зі своїми молодими дружинами. Дружин їх звали Геертрінг, Катрюн і Анна, але я забув, як саме звали дружину кожного. Молоді люди розповіли, що були на ринку, де купували свиней, причому кожен з них придбав стільки свиней, скільки крон платив за одну тварину. Хендрік придбав на 23 свині більше, ніж Катрюн, а Клаас придбав на 11 свиней більше, ніж

Геертрінг. Вони також сказали, що кожен із чоловіків виклав на 63 крони більше, ніж його дружина. А мені хотілося б з'ясувати, чи можливо, знаючи все це, сказати, як звали дружину кожного данця?»

6) **Датські рибалки.** Рибалки Адам, Бауер, Крістіансен і Дазе (скорочено A, B, C і D – за першими латинським буквах їхніх імен), зваживши свій улов, встановили наступне:

– D впіймав більше, ніж C;

– A і B разом зловили стільки ж, скільки C і D (разом);

– A і D разом зловили менше, ніж B і C (разом).

Розташуйте результати зважувань уловів a, b, c і d рибалок A, B, C і D у порядку спадання.

7) **Вчителі та предмети.** Вчителі Альтман (А), Брендель (В) і Клаузнер (С) викладають в одному класі математику (М), фізику (Ф), хімію (Х), біологію (Б), німецьку мову (Н) та історію (І). Кожен вчитель викладає по 2 предмети. Вчитель хімії мешкає в одному будинку з учителем математики. Альтман – наймолодший з трьох викладачів. Вчитель математики часто грає в шахи з Клаузнером. Вчитель фізики старше вчителя біології, але молодше Бренделя. Той з трьох вчителів, хто старше двох інших, живе далі всіх від школи. Які предмети викладає кожен з трьох вчителів?

8) **Суд Паріса.** В одному старовинному задачнику суд Паріса описаний таким чином. Богині Гера, Афродіта і Афіна прийшли до юного Паріса, щоб той вирішив, котра з них найвродливіша. Поставши перед Парісом, богині висловили наступні твердження:

– Афродіта: Я найвродливіша.

– Афіна: Афродіта не найвродливіша.

– Гера: Я найвродливіша.

– Афродіта: Гера не найвродливіша.

– Афіна: Я найвродливіша.

Паріс, прилігши відпочити на узбіччі дороги, не вважав за потрібне навіть зняти хустку, якою прикрив очі від яскравого сонця. Але богині були наполегливі, і йому, що б то не стало, потрібно було вирішити, котра з богинь найвродливіша. Паріс припустив, що всі твердження найвродливішої богині істинні, а всі твердження двох інших богинь помилкові. Чи міг Паріс, використовуючи таке припущення, прийняти рішення, якого очікували від нього богині, і якщо міг, то котра з богинь найвродливіша?

9) **Знавці на іподромі.** Перед початком перегонів на іподромі чотири знавці з числа глядачів обговорювали шанси фаворитів A, B і C.

- (1): «Заїзд виграє A або C».
- (2): «Якщо A буде другим, то виграє B».
- (3): «Якщо A прийде третім, то C не виграє».
- (4): «Другим прийде A або B».

Після прибуття з'ясувалося, що три фаворити A, B і C дійсно здобули перші три місця і що всі чотири твердження знавців виявилися істинними. Як фаворити поділили між собою три перші місця?

10) **Великий математик.** Прізвище великого математика містить п'ять літер. Якщо літери російського алфавіту *А*, *Б*, *В*, ..., *Ю*, *Я* (без *Ё*) перенумерувати по порядку послідовними числами від 1 до 32 і замість літер, що входять в прізвище математика, підставити їх «номери», то виявиться, що сума чисел, які відповідають:

- першій та другій літері, дорівнює 40;
- першій та третій літері, дорівнює 42;
- першій та четвертій літері, дорівнює 36;
- першій і п'ятій літері, дорівнює 47;
- всім п'яти літерам, дорівнює 75.

Назвіть прізвище великого математика.

11) **Задачка на перерві.** Три дівчинки задали на перерві своїй подрузі задачку на кмітливість. Ось що вони їй повідомили.

В Ути вдвічі більше кольорових олівців, ніж у Регіни, а у Сабіни на 13 олівців менше, ніж у Регіни.

Скільки кольорових олівців у кожної з нас, якщо, перерахувавши всі олівці, ми отримали просте число? Воно менше 50, а сума його цифр дорівнює 11.

Отже, скільки кольорових олівців у Ути, Регіни та Сабіни окремо і у всіх разом?

12) **Колекціонери.** Із 100 колекціонерів 70 збирають старовинні монети, 75 – значки, 80 – етикетки з-під сірникових коробок і 85 – марки.

Скільки з них захоплюються усіма чотирма видами колекціонування відразу?

13) **Африканські канікули.** Канікули Мбонго тривали f днів. За його спостереженнями:

– дощ йшов 7 разів або з ранку, або надвечір;
– якщо дощ йшов надвечір, то зранку було сонячно;
– 5 разів надвечір було сонячно;
– 6 разів з ранку було сонячно.
– Скільки днів тривали канікули Мбонго?

14) **Сімейний будинок.** В одному будинку жило кілька подружніх пар з дітьми. Відомо, що всіх дітей було більше, ніж дорослих, а дорослих – більше, ніж хлопчиків. У свою чергу, хлопчиків було більше, ніж дівчаток, а дівчаток –більше, ніж сімей. У кожній родині була принаймні одна дитина, а число дітей у всіх сім'ях було різним. У кожної дівчинки був принаймні один брат і не більше однієї сестри. В одній родині дітей було більше, ніж у всіх інших сім'ях разом.

Скільки сімей жило в домі? Скільки дівчаток було в кожній родині?

15) **Розбите вікно.** Під час перерви в класі залишалися Ангеліка, Бернд, Вольфганг і Мануела. Хтось з них розбив скло. Вчитель опитав учнів і отримав від кожного по три відповіді.

Ангеліка:
1. Вікно розбила не я.
2. Я сиділа в класі й читала.
3. Мануела знає, хто розбив вікно

Бернд:
1. Це зробив не я.
2. З Мануелою я вже давно не розмовляю.
3. Вікно розбив Вольфганг.

Вольфганг:
1. Я не винен.
2. Вікно розбила Мануела.
3. Бернд каже неправду, коли стверджує, нібито вікно розбив я.

Мануела:
1. Вікно розбила не я.
2. Ангеліка розбила вікно.
3. Бернд знає, що я не винна, адже на перерві ми з ним грали разом.

Крім того, кожен з них зізнався, що із трьох відповідей дві істинні і одна неправдива. Хто розбив вікно?

Контрольні питання

1. Дайте означення задачі з обмеженнями.
2. Яким чином класифікують задачі з обмеженнями?
3. Наведіть приклади задач з обмеженнями.
4. Які методи застосовують для розв'язання задач з обмеженнями? Назвіть їх переваги та недоліки
5. У чому полягає сутність пошуку з поверненням?
6. У чому полягає сутність локального пошуку?