

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

**Тема:** Логічні моделі.

**Мета:** Навчитися представляти знання у вигляді логічних моделей.

**Перелік питань, які студент повинен знати:** логічна модель, логіка висловлювань, логіка предикатів, резолюція

### Короткі теоретичні відомості

Одним з основних засобів подання знань є логічні моделі. Вони дозволяють однозначно теоретично обґрунтовувати і реалізовувати формально точні логічні побудови. Недоліком логічних моделей є формальний процедурний стиль мислення, який відрізняється від логіки людини – інтелектуальної моделі з нечіткою структурою.

**Логічною моделлю**  $L$  називається формальна система, що задається четвіркою елементів  $L = \langle T, P, A, B \rangle$ , де  $T$  – алфавіт (множина базових елементів);  $P$  – множина синтаксичних правил, на основі яких конструюються правильно побудовані формули;  $A$  – множина всіх аксіом (формули, що приймаються за істинні);  $B$  – множина правил виведення.

У рамках логічної моделі істинному висловлюванню відповідає теорема, тобто правильно побудована формула, яка може бути виведена з аксіом шляхом скінченного числа застосувань правил виведення.

Прикладами такої формальної системи є логіка висловлювань і логіка предикатів.

У логіці висловлювань передбачається, що кожна правильно побудована формула є висловлюванням, що може бути істинним або хибним. Наприклад, Київ – столиця України.

Для позначення висловлювань використовують символи, що називаються атомарними формулами.

Для одержання складених висловлювань використовують логічні зв'язки – операції, що наведені у табл. 5.

Таблиця 5

### Логічні зв'язки

Логічна зв'язка	Значення
$\wedge$	Кон'юнкція (AND – єдальні висловлювання)
$\vee$	Диз'юнкція (OR – розділові висловлювання)
$\sim$	Заперечення (NOT)
$\rightarrow$	Умовна операція (якщо... то)
$\leftrightarrow$	Двостороння умовна операція (якщо і тільки якщо)

Значення бінарних логічних зв'язок наведені у таблиці 6. Операцію заперечення застосовують лише до одного операнда, який слідує за цим знаком (табл. 7).

Таблиця 6

### Таблиця істинності для бінарних логічних зв'язок

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Істина	Істина	Істина	Істина	Істина	Істина
Істина	Хиба	Хиба	Істина	Хиба	Хиба

Хиба	Істина	Хиба	Істина	Істина	Хиба
Хиба	Хиба	Хиба	Хиба	Істина	Істина

Таблиця 7

Таблиця істинності для логічної зв'язки заперечення

$p$	$\sim p$
Істина	Хиба
Хиба	Істина

Якщо формула є істинною в усіх можливих її інтерпретаціях, то вона є загальнозначущою формулою (тавтологією) і її позначають знаком  $\blacksquare$ . Якщо ж формула помилкова при всіх її інтерпретаціях, то кажуть, що вона є суперечливою. Її

позначають знаком  $\square$ . Суперечлива формула є нездійсненою.

**Приклад 16.** Визначимо, чи є вираз  $\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$  формулою логіки висловлювань. Побудуємо таблицю істинності даної формули:

Таблиця 8

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \vee \sim q)$	$\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
Істин а	Істин а	Істина	Хиба	Хиба	Хиба	Хиба	Істина
Істин а	Хиба	Хиба	Істина	Хиба	Істин а	Істина	Істина
Хиба	Істин а	Хиба	Істина	Істин а	Хиба	Істина	Істина
Хиба	Хиба	Хиба	Істина	Істин а	Істин а	Істина	Істина

Отже, наведений вираз є формулою логіки висловлювань.

**Приклад 17.** Формалізуємо висловлювання «Якщо у вечері буде дощ, то Олег або залишиться вдома, або візьме таксі» за допомогою мови логіки висловлювань.

Виокремимо всі прості висловлювання, які входять до даного складного висловлювання, та позначимо їх пропозиційними змінними:

- буде дощ –  $p$ ;
- Олег залишиться вдома –  $r$ ;
- Олег візьме таксі –  $z$ .

До складу даного досліджуваного висловлювання входять такі граматичні сполучники: «якщо... то...», «...або...». Їм відповідають логічні сполучники «імплікація» та «диз'юнкція».

Тоді формула наведеного висловлювання набуде вигляду:  $p \rightarrow (r \vee z)$ .

У логіці предикатів першого порядку до понять логіки висловлювань додають ще три логічних поняття: терми, предикати та квантори.

**Предикатом** називається деяка логічна функція від довільного числа аргументів, яка приймає одне з двох можливих значень – «істина» або «хиба».

**Приклад 18.** Розглянемо фразу « $X$  менше за  $(11 - 4)$ ». Цей предикат є функцією від аргументна  $X$  і набуває значення «істина» при  $X = 3$ , і «хиба» при  $X = 10$ .

В численні предикатів розрізняють такі складові:

- 1) константи (константні терми)  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ;
- 2) змінні (змінні терми)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
- 3) функціональні літери  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ;
- 4) предикатні літери  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ;
- 5) логічні символи  $\rightarrow, \leftrightarrow, \&, \vee, \sim, \forall, \exists$ ;
- 6) спеціальний символ  $\square$ .

У логіці предикатів елементарним об'єктом, який має значення «істина», є атомарна формула (літерал).

Атомарна формула записується як позначення предиката і має такий вигляд:  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , де  $P$  – позначення предиката,  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  – терми.

Число термів для кожного предиката фіксоване і називається його арністю.

З кожним предикатом може бути пов'язаний квантор – елемент, який визначає, за яких умов предикат перетворюється на істинне висловлювання. Розрізняють квантор узагальнення і квантор існування.

Основні тотожні перетворення наведені у табл. 9.

Таблиця 9

Таблиця деяких елементарних кванторів та їх значень

Формула	Значення
$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	Для усіх $x$ , усі $P \in Q$
$(\forall x)(P(x) \rightarrow \sim Q(x))$	Для усіх $x$ , жоден $P$ не $\in Q$
$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	Для деяких $x$ , $x \in P$ і $Q$
$(\exists x)(P(x) \wedge \sim Q(x))$	Для деяких $x$ , $x \in P$ і не $Q$
$(\forall x)P(x)$	Для усіх $x$ , $x \in P$
$(\exists x)P(x)$	Деякі $x \in P$ (або існує $P$ )
$\sim(\forall x)P(x)$	Не усі $x \in P$ (або деякі $x \in P$ )
$(\forall x)\sim P(x)$	Усі $x$ не $\in P$
$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$	Для усіх $x$ , існує $y$ , такий що $P$
$(\exists x)\sim P(x)$	Деякі $x \in$ не $P$

**Приклад 19.** Формалізуємо висловлювання «Деякі студенти мешкають у гуртожитку» за допомогою мови логіки предикатів.

До складу висловлювання входять два предикати: «бути студентом» та «мешкати в гуртожитку». Позначимо їх відповідно символами  $P$  та  $Q$ .

Наведене висловлювання також містить квантор існування («деякі»). Цей квантор при формалізації потребує застосування логічного сполучника «кон'юнкція».

Запишемо формулу наведеного висловлювання:  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ .

**Приклад 20.** Побудуємо базу знань предметної області на основі такого неформального опису «Усім людям подобаються цукерки. Дехто любить шоколадні цукерки. Олені не подобаються цукерки з мигдальними пластивками».

Введемо такі предикати та предметні константи:

- $L(x, y)$  –  $x$  подобається  $y$ ;
- $S(x)$  –  $x$  є людиною;
- $A$  – предметна константа, яка означає «цукерки»;
- $O$  – предметна константа, яка відповідає Олені;
- $Q$  – предметна константа, яка означає шоколадні цукерки.

Отримаємо базу знань:

$$\forall x : (\sim S(x) \vee L(x, A))$$

$$\exists x : (S(x) \vee L(x, Q))$$

$$S(I)$$

$$\sim L(I, Q)$$

Диз'юнктом (фразою теорії) називається диз'юнкція деякої кількості атомарних формул.

У теорії і практиці автоматичного доведення теорем найважливішими є фрази спеціального типу, які називаються фразами Хорна.

**Фразою Хорна** називається диз'юнкція довільної кількості атомарних формул, з яких позитивною є не більше ніж одна.

Найефективнішим з автоматизованих методів доведення на основі логіки предикатів є метод резолюції.

Правило резолюції формулюється так: якщо в будь-яких двох диз'юнктах  $A_1$  і  $A_2$  існує конкретна пара літер  $(L \text{ і } \sim L)$ , то видаливши ці літери можна побудувати диз'юнкцію з тих частин диз'юнктів  $A_1$  і  $A_2$ , які залишились.

**Приклад 21.** Розглянемо силогізми у вигляді формул і тверджень:

1.	$p \rightarrow q$	Якщо хижак, то вовк.
	$q \rightarrow z$	Якщо вовк, то їсть м'ясо.
<hr/>		
	Висновок $p \rightarrow z$	Якщо хижак, то їсть м'ясо.
2.	$p \rightarrow q$	Усі люди смертні.
	$p$	Людина – Сократ.
<hr/>		
	Висновок $q$	Сократ – смертний.
3.	$p \rightarrow q$	Якщо сік фруктовий, то солодкий.
	$\sim q$	Цей напій не солодкий.
<hr/>		
	Висновок $\sim p$	Цей напій – не сік.

### Завдання для роботи в аудиторії

- Визначити, чи є наведені вирази формулою логіки висловлювань:
  - $(p \wedge (p \vee q)) \rightarrow p$ ;
  - $p \vee ((\sim q \rightarrow p) \rightarrow (\sim p \vee \sim q))$ ;
  - $\sim (p \wedge (p \vee \sim q)) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ .

2. Формалізуйте висловлювання за допомогою мови логіки висловлювань:
  - за гроші здоров'я не купиш;
  - ні Північ, ні Південь не здобули перемогу у громадянській війні;
  - якщо я втомлений або голодний, то не можу працювати.
3. Формалізуйте висловлювання за допомогою мови логіки предикатів:
  - крадіжка – це злочин;
  - будь-який договір є угодою;
  - жоден кіт не товаришує з мишами;
  - кожний когось любить;
  - деякі програмісти не є інтелектуалами;
  - існують програмісти;
  - кожний є не програмістом;
4. Побудуйте базу знань предметної області на основі неформального опису:
  - 1) Усі птахи є тваринами. Деякі птахи вміють літати. Пінгвін – це птах, що не літає.
  - 2) Усі автомобілі є транспортними засобами. Деякі автомобілі не мають подушок безпеки. Автомобіль *A* має подушку безпеки.
5. Відновити міркування у повному вигляді та визначити логічну форму міркування:
  - 1) Студент отримує підвищену стипендію. Якщо студент отримує підвищену стипендію, то він усі іспити в сесію склав на «відмінно». Отже ...
  - 2) Людина п'є чай кожного дня. Якщо кожен день пити чай, то колись до голих прийде хороша ідея. Отже ...
  - 3) Квадрат – це паралелограм у якого всі сторони і кути рівні. Ця фігура – не паралелограм. Отже ...

#### Завдання для самостійного опрацювання

1. Формалізуйте висловлювання за допомогою мови логіки висловлювань:
  - 1) «Людина родиться для щастя й для радості» (О. Довженко);
  - 2) «Хто вмер, але не забутий, той безсмертний» (Лао-Цзи);
  - 3) «Сонце заходить, гори чорніють, пташечка тихне, поле німіє» (Т. Шевченко);
  - 4) хто думає, той і розум має;
  - 5) поганий вчинок – поганий кінець;
  - 6) лихої жінки, вогню та води не побороти;

- 7) не є злочином дія, вчинена у стані необхідної оборони;
- 8) Оксана залишиться, і вона або Вікторія будуть чекати;
- 9) Ірина буде щасливою, якщо Олександр і Андрій танцюватимуть;
- 10) Якщо він розумна людина, то він побачить свою помилку, якщо він щира людина, то він її визнає;
- 11) якщо він хворий або у відрядженні, то не може відвідувати пари;
- 12) під лежачий камінь вода не тече;
- 13) якщо «Динамо» або «Шахтар» виграє, то «Ворскла» посіде останнє місце і моя ставка зіграє;
- 14) маючи борошно, вершки, цукор, фрукти, можна приготувати торт;
- 15) я переглядаючи цей фільм та читаючи цю книгу, забув написати листа.

**2. Формалізуйте висловлювання за допомогою мови логіки предикатів:**

- 1) жодна собака не товаришує з котами;
- 2) ніхто не без гріха;
- 3) всі люди грішні;
- 4) більшість рік не зміліла;
- 5) Шевченко народився у селі Моринці;
- 6) ніколи не говори «ніколи»;
- 7) не всі його відповіді правильні;
- 8) усі пішли за ним;
- 9) жодна демократична країна не підтримує тероризм;
- 10) ніхто не любить бути переможеним;
- 11) більшість вулканів не згасли;
- 12) все має якусь причину;
- 13) всі християни вірять у Христа;
- 14) деякі істини не можна спростувати;
- 15) Шекспір народився у Стратфорді.

**3. Побудуйте базу знань предметної області на основі неформального опису:**

- 1) Усі люди мають мобільні телефони. Деякі люди віддають перевагу мобільним телефонам, які виготовляє фірма «Захід». Іванов є людиною, але йому не подобаються телефони фірми «Захід».
- 2) Усі собаки є тваринами. Деякі собаки мають господарів. Дружок – собака, але не має господаря.
- 3) Деякі банки є комерційними. Усі вони надають кредити. Банк А є комерційним, але кредити не надає.

- 4) Деякі кораблі знаходяться у бухті. Усі кораблі є транспортними засобами. Корабель *A* є транспортним засобом, але перетворений на музей.
- 5) Усім людям подобаються свята. Деякі люди святкують надто довго. Іванов є людиною, але не полюбляє святкувати.
- 6) Усі тварини є живими істотами. Деякі тварини є хижаками. Дружок є твариною, але не хижаком.
- 7) Деякі мультиплікаційні герої є кумедними. Усі кумедні герої подобаються дітям. Вінні-Пух є найкумеднішим мультиплікаційним героєм.
- 8) Усі діти полюбляють кондитерські вироби. Деякі діти віддають перевагу морозиву. Олена – дитина, але не їсть морозиво.
- 9) Усі люди відвідують театри. Деяким людям подобаються драматичні постановки. Людина *A* віддає перевагу іншим постановкам.
- 10) Усі соковмісні напої є смачними. Деякі соковмісні напої є солодкими. Соковмісний напій *A* не солодкий.
- 11) У деяких країнах взимку випадає багато снігу. Ці країни вміють швидко реагувати на зміну погоди. У країні *A* взимку випадає багато снігу, але вона не вміє швидко реагувати на її зміну.
- 12) Усі професори опублікували декілька монографій. Деякі професори викладають в університеті. *A* не є професором, але викладає в університеті.
- 13) Усі молочні продукти є корисними. Деякі молочні продукти швидко псуються. Сирна маса *A* ще не зіпсувалася.
- 14) Деякі студенти п'ють каву. Усі вони додають у каву цукор. Іванов є студентом, але п'є каву без цукру.
- 15) Усі листи знаходять свої адресатів. Деякі листи надсилають на замовлення. Лист *A* є звичайним.

4. Відновити міркування у повному вигляді та визначити логічну форму міркування:

- 1) Усі політки – люди. Деякі люди не є добропорядними. Отже ...
- 2) Усяка наука має свій предмет дослідження. Логіка – наука. Отже ...
- 3) Якщо студент спить на лекціях, то він не знає логіки. Якщо студент не знає логіки, то він не складе іспит. Отже ...
- 4) Якщо у людини є совість, то вона визнає свої помилки. Це людина не визнає своїх помилок. Отже ...

- 5) Будь-який студент – людина. Будь-яка людина відповідає сама за себе. Отже ...
- 6) Якщо лекція складна, студенти її погано засвоять. Цю лекцію погано засвоїли. Отже ...
- 7) Будь-яка комета – небесні тіла. Деякі небесні тіла – планети. Отже ...
- 8) Якщо бувають сильні морози, то квіти гинуть. Квіти загинули. Отже ...
- 9) Якщо обвинувачуваний займався шахрайством, він має бути притягнений до кримінальної відповідальності. Обвинувачуваний А займався шахрайством.
- 10) Київ – столиця. Усі столиці – міста. Отже ...
- 11) Усі студенти складають іспити. Олег не склав іспит. Отже ...
- 12) Якщо дія обов'язкова, то вона не заборонена. Те, що не заборонено – дозволено. Отже ...
- 13) Деякі метали тверді. Метал – залізо. Отже ...
- 14) Усі злочини – суспільно небезпечні діяння. Суспільно небезпечне діяння – підпал. Отже ...
- 15) Жодний відпочинок не є роботою. Відпочинок – гра в нарди. Отже ...

#### **Контрольні питання**

- 1. Дайте визначення логічної моделі.
- 2. Дайте визначення предиката.
- 3. Назвіть основні складові у численні предикатів.
- 4. Дайте визначення кванторів узагальнення та існування.
- 5. Дайте визначення атомарної формули.
- 6. Сформулюйте правило резолюції. Наведіть приклади застосування даного правила.