

Національний Технічний Університет України
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

з дисципліни «Моделювання складних систем»

Тема: «Динаміка процесів, що описуються диференціальними рівняннями
першого та другого порядку»

Виконали:
студенти гр. КА-41
Мельничук Валентин
Лочман Ярослава
Снігірьова Валерія

Прийняв:
професор кафедри ММСА, д.т.н.
Степашко В.С.

Київ 2018

Опис математичних моделей

Модель Фергюльста

Описує динаміку росту популяції з урахуванням обмеженості ресурсів середовища:

$$N' = \mu N(k - N)$$

N – чисельність популяції,

μ – коефіцієнти народжуваності (приріст популяції за одиницю часу),

k – ємність середовища (гранична чисельність популяції),

N_0 – початкова чисельність популяції.

Модель Солоу

Односекторна модель економічної динаміки:

$$k' = sak^\alpha - (\mu + q)k$$

α – частка капіталу в продукції

m – норма витрат на амортизацію

a – рівень розвитку економіки

s – норма накопичення

q – темп приросту робочої сили

k_0 – початковий капітал

Рівняння вимушених коливань

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

δ - коефіцієнт згасання

ω_0 - власна частота коливань

ω – частота коливань зовнішньої сили

f_0 – амплітуда зовнішньої сили

Модель динаміки двох популяцій „хижак-жертва”. Найпростіша модель (Лотткі-) Вольтерра

$$\begin{cases} x' = (\alpha_x y - \beta_x)x \\ y' = (\alpha_y - \beta_y x)y \end{cases}$$

α_x - "Норма споживання" жертв

α_y - Природна народжуваність жертв

β_x - Природна смертність хижаків

β_y - "Норма споживаності" жертв

x_0 - Початкова кількість хижаків

y_0 - Початкова кількість жертв

Розв'язок задач Коші для диференціальних рівнянь здійснювався за допомогою вбудованих функцій мови програмування Python з бібліотеки Numpy.

Результати

Модель Фергюльста

Модель Фергюльста – це логістичне рівняння.

Стационарні значення чисельності популяції (коли $N=0$): $N_{l,cm} = 0$ – нестійка,, $N_{2,cm} = k$ – стійка, що можна простежити на (рис. 1 – 4).

Нагадаємо, що величина k відповідає чисельності популяції, за якої фактична швидкість відтворення в результаті конкуренції настільки знижена, що популяція в цілому може тільки відновлювати в кожному поколінні свою чисельність. У цей момент кількість народжених особин врівноважується кількістю померлих.

Тож, при малих N_0 ($N_0 < k/2$) чисельність швидко зростає, але по мірі зростання сповільнює темпи росту, при цьому прямуючи до границі k (рис.1).

При середніх N_0 ($k/2 < N_0 < k$) чисельність поволі зростає, при цьому прямуючи знизу до границі k (рис. 2). Точка перегину графіка розв'язку рівняння Фергюльста лежить в області від'ємних значень часу.

$$N' = \mu N(k - N)$$

Ємність середовища (гранична чисельність): $k =$

Швидкість росту популяції: $\mu =$

Початковий розмір популяції: $N_0 =$

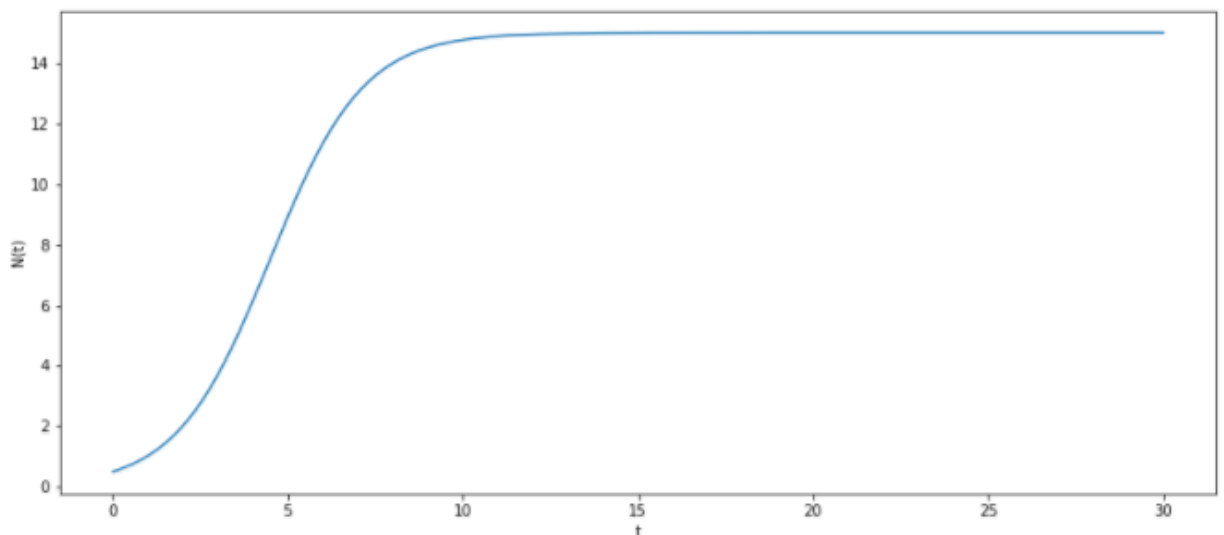


Рис. 1. Розв'язок рівняння Фергюльста ($N_0 < k/2$)

$$N' = \mu N(k - N)$$

Ємність середовища (гранична чисельність): $k =$

Швидкість росту популяції: $\mu =$

Початковий розмір популяції: $N_0 =$

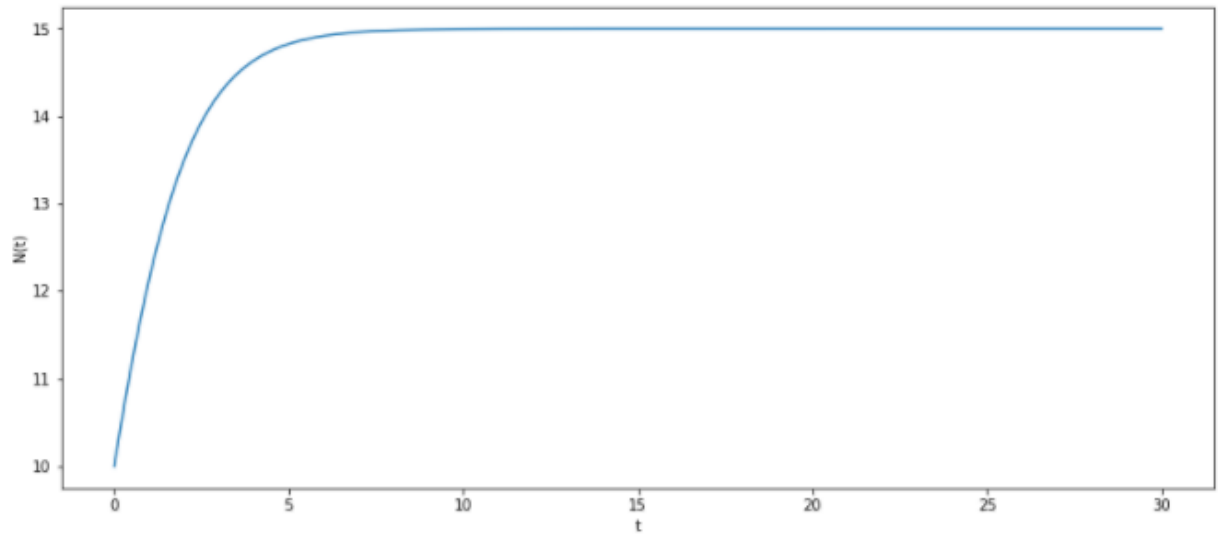


Рис. 2. Розв'язок рівняння Фергюльста ($k/2 < N_0 < k$)

$$N' = \mu N(k - N)$$

Ємність середовища (гранична чисельність): $k =$

Швидкість росту популяції: $\mu =$

Початковий розмір популяції: $N_0 =$

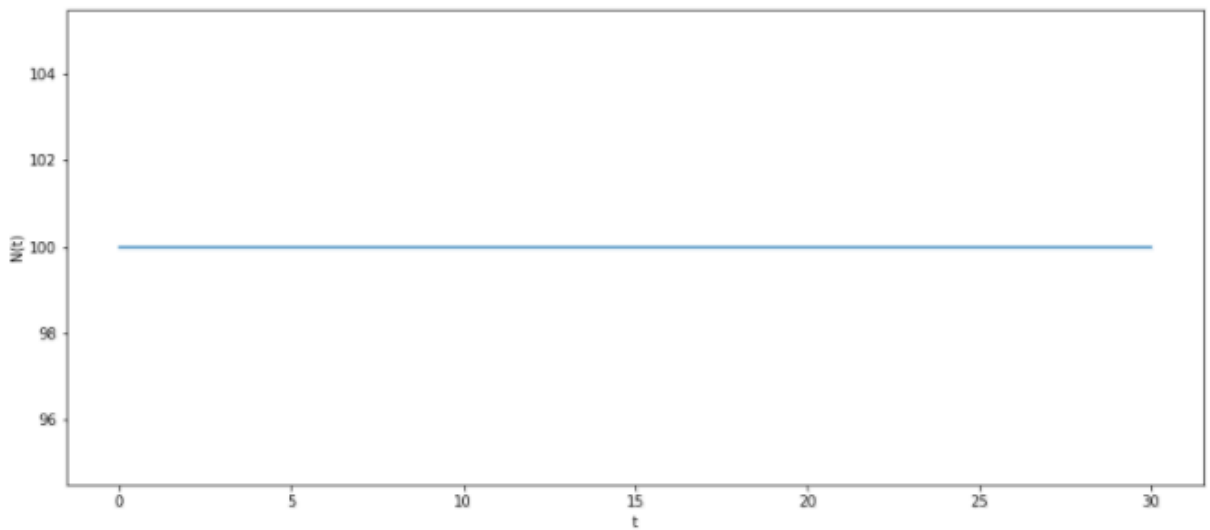


Рис. 3. Логістична крива у випадку, коли $N_0 = k$

$$N' = \mu N(k - N)$$

Ємність середовища (гранична чисельність): $k =$

Швидкість росту популяції: $\mu =$

Початковий розмір популяції: $N_0 =$

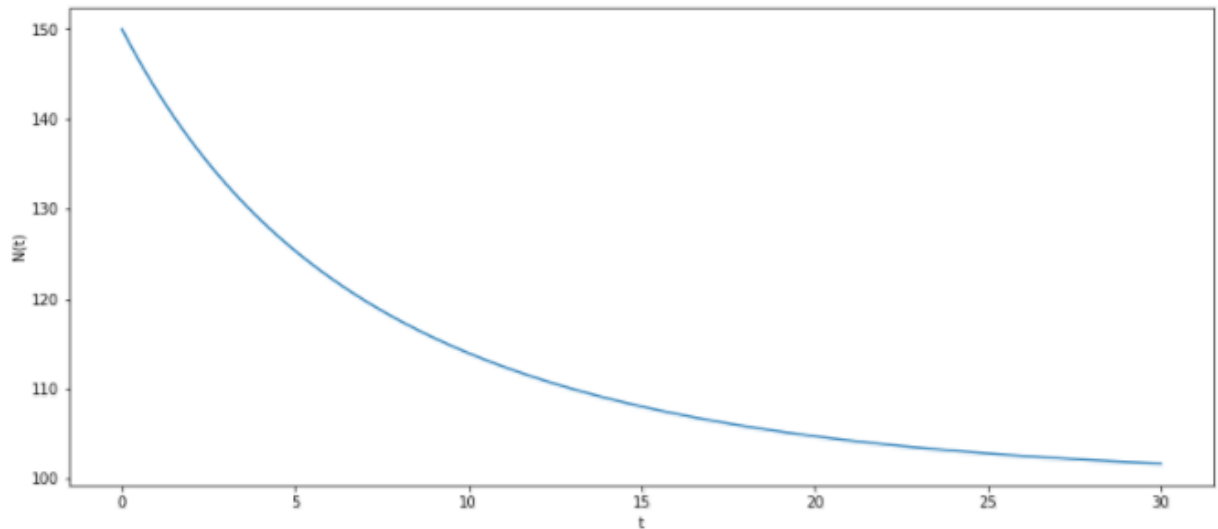


Рис. 4. Логістична крива у випадку, коли $N_0 > k$

Якщо $N_0 = k$, чисельність популяції залишається константною величиною (рис. 3). У випадку, коли $N_0 > k$, чисельність швидко зменшується до границі k (рис. 4).

Підсумуємо дослідження:

- Якщо початкова чисельність популяції менше величини екологічної ємності популяції, то з плином часу її розмір буде рости, наближаючись до свого граничного значення k .
- Якщо початкова чисельність становить менше половини ємності екологічної ніші, на початковому етапі швидкість росту популяції зростатиме, поки чисельність не досягне значення $k/2$, а потім почне знижуватися, прямуючи до нуля.
- Якщо початкова чисельність популяції становить більше половини ємності екологічної ніші, то розмір популяції буде збільшуватися, прагнучи до значення k , а швидкість її зростання буде неухильно знижуватися. Зміна характеру розвитку популяції (перехід від зростання швидкості росту до зниження в точці $x(t) = k/2$) відбудеться до того, як дослідник почне за нею спостерігати (тобто до моменту часу $t = 0$).
- Якщо ж розмір популяції у початковий момент часу більше гранично можливого значення, то чисельність популяції буде знижуватися.

Модель Солоу

— односекторна макроекономічна модель економічної динаміки. Економічна система при цьому виробляє один продукт, який як споживається, так і інвестується. Експорт і імпорт не враховуються. Стан економіки в моделі Солоу визначається за допомогою п'яти ендегенних змінних, що змінюються з часом.

$$k' = sak^{\alpha} - (\mu + q)k$$

α – частка капіталу в продукції

m – норма витрат на амортизацію

a – рівень розвитку економіки

s – норма накопичення

q – темп приросту робочої сили

k_0 – початковий капітал

Зрозуміло, що стаціонарний розв'язок моделі економічної динаміки залежить від параметрів рівняння, початкових умов, а також конкретного варіанта виробничої функції (в цій роботі використано виробничу функцію Кобба-Дугласа).

На рис. 5 – 8 наведені приклади розв'язання задачі Коші для наведеного вище диференціального рівняння за різних початкових умов і при різних значеннях вхідних параметрів.

$$k' = sak^{\alpha} - (\mu + q)k$$

Норма накопичення: $s =$

Рівень розвитку економіки: $\alpha =$

Частка капіталу у сукупній продукції: $\alpha =$

Норма витрат на амортизацію: $\mu =$

Темп приросту робочої сили: $q =$

Початковий капітал: $k_0 =$

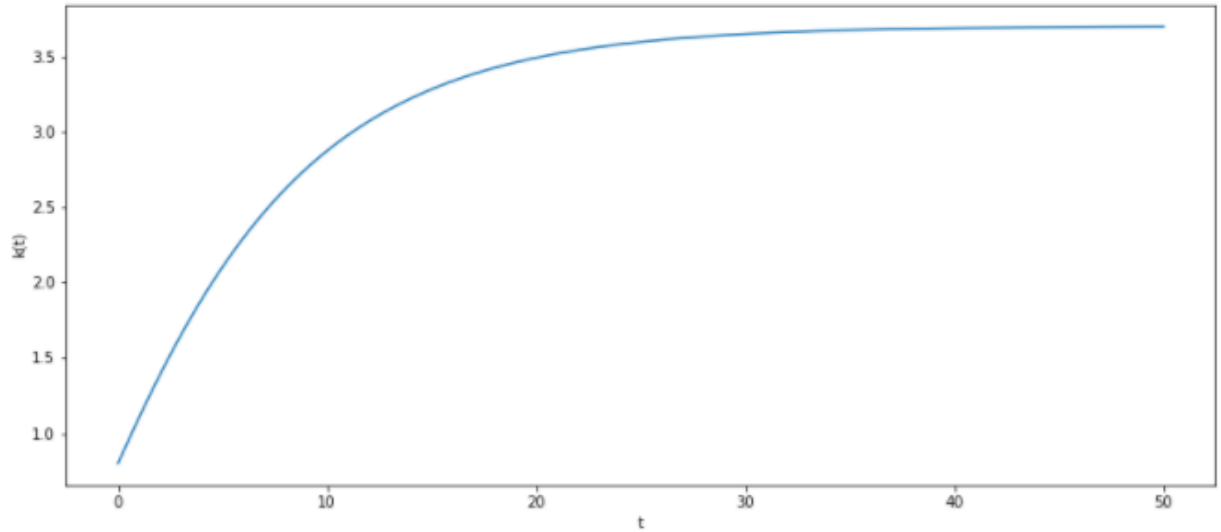


Рис. 5. Інтегральна крива в моделі Солоу при значеннях вхідних параметрів для України

$$k' = sak^{\alpha} - (\mu + q)k$$

Норма накопичення: $s =$

Рівень розвитку економіки: $\alpha =$

Частка капіталу у сукупній продукції: $\alpha =$

Норма витрат на амортизацію: $\mu =$

Темп приросту робочої сили: $q =$

Початковий капітал: $k_0 =$

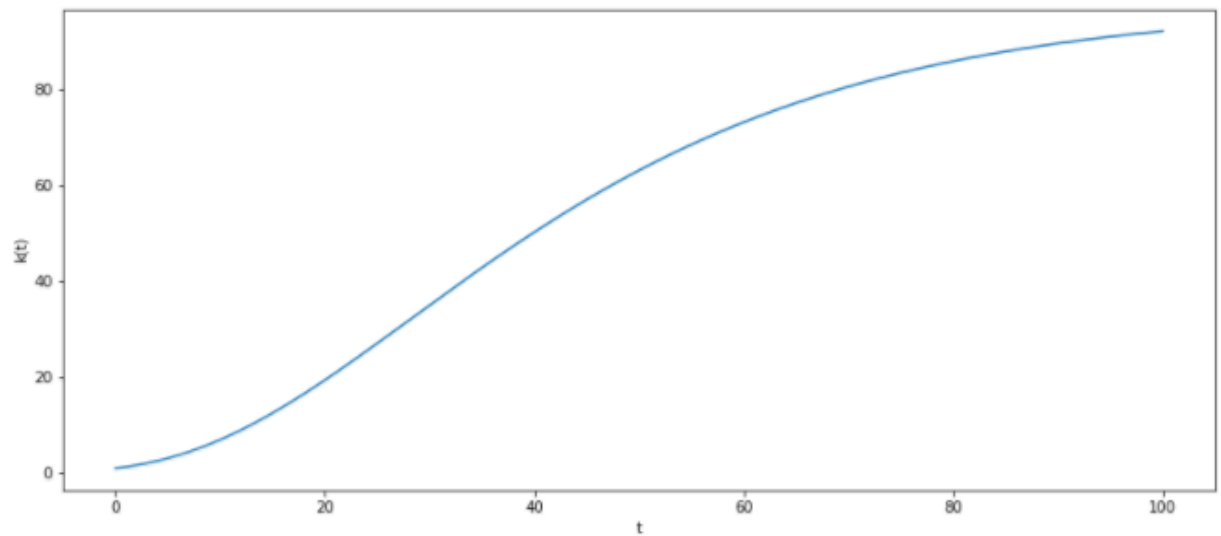


Рис. 6. Розв'язок моделі Солоу при значеннях вхідних параметрів, що забезпечують сигмоїдальну логістичну криву

$$k' = s\alpha k^\alpha - (\mu + q)k$$

Норма накопичення: $s =$

Рівень розвитку економіки: $\alpha =$

Частка капіталу у сукупній продукції: $\alpha =$

Норма витрат на амортизацію: $\mu =$

Темп приросту робочої сили: $q =$

Початковий капітал: $k_0 =$

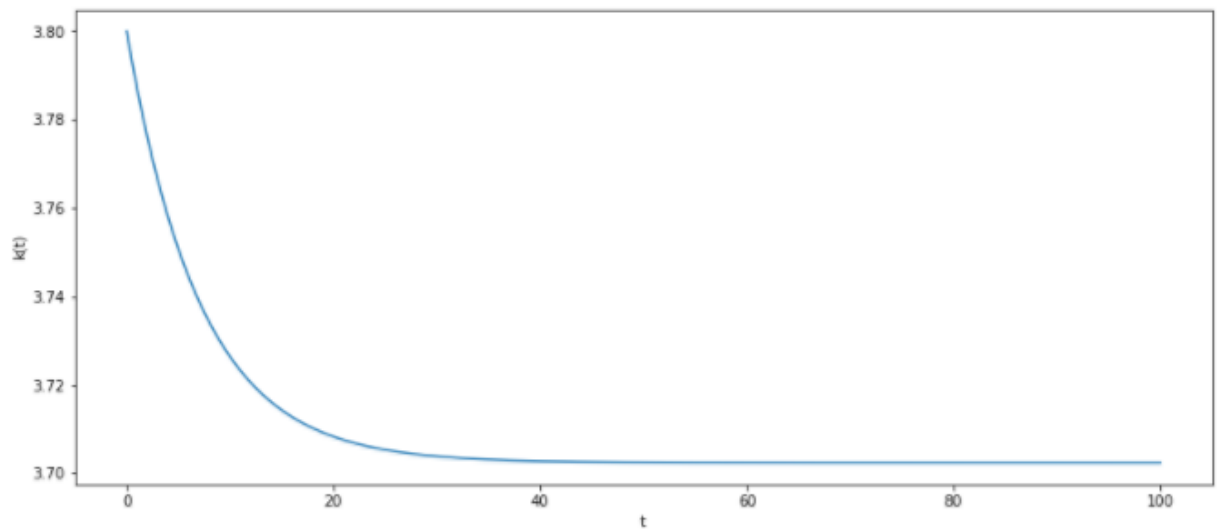


Рис. 7. Інтегральна крива в моделі Солоу при значеннях вхідних параметрів, що визначають спадний економічний процес

$$k' = sak^\alpha - (\mu + q)k$$

Норма накопичення: $s =$

Рівень розвитку економіки: $a =$

Частка капіталу у сукупній продукції: $\alpha =$

Норма витрат на амортизацію: $\mu =$

Темп приросту робочої сили: $q =$

Початковий капітал: $k_0 =$

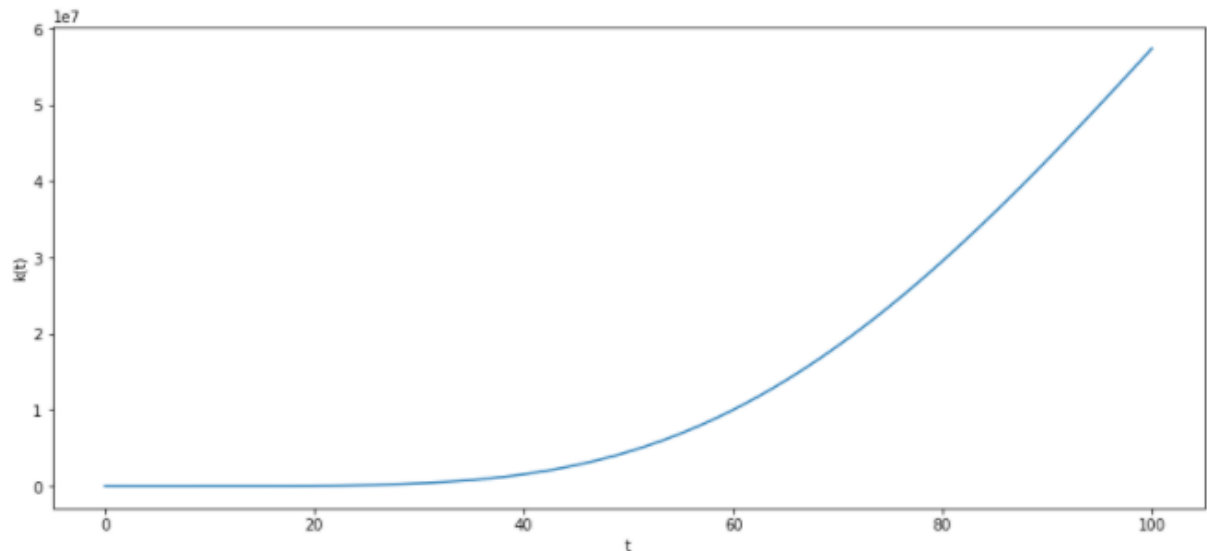


Рис. 8. Інтегральна крива в моделі Солоу при інших значеннях вхідних параметрів

На рис. 7 видно, що за відповідних вхідних параметрів має місце спад питомої капіталоозброєності, тобто «проїдання» фондів.

Залежно від значення початкової питомої капіталоозброєності мають місце три різновиду перехідного процесу:

- Якщо $k^* < k_0$, то має місце проїдання фондів;
- Якщо $k_0 < k^{**}$, k^{**} – капіталоозброєність за золотим правилом (це точка, в якій дотична до графіка виробничої функції паралельна до прямої вибуття капіталу $y = -(m+q)k$), то капіталоозброєність зростає прискореними темпами;
- Якщо $k^* > k_0 > k^{**}$, (де k^* – стійкий рівень капіталоозброєності), то має місце повільний спад капіталоозброєності.

Підсумуємо дослідження:

- За показниками для України ($k_0 = 0.8$, $s = 0.2$, $a = 2.5$, $\mu = q = 0.1$, $\alpha = 0.3$) капіталоозброєність поступово зростає до усталеного значення протягом певного часу, а тоді залишається сталою.
- Якщо частка капіталу у продукції збільшиться, показник капіталоозброєності сповільнить темпи зростання.
- При підвищенні витрат на амортизацію і при меншому темпі приросту робочої сили спостерігатимемо зниження рівня капіталоозброєності.
- При незначних темпах приросту робочої сили, невеликих витратах на амортизацію, але за підвищеної норми накопичення простежується стрімке зростання рівня капіталоозброєності.

Рівняння вимушених коливань

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Коефіцієнт згасання: $\delta =$

Власна частота: $\omega_0 =$

Частота зовнішньої сили: $\omega =$

Амплітуда зовнішньої сили: $f_0 =$

Початкове положення: $x_0 =$

Початкова швидкість: $x'_0 =$

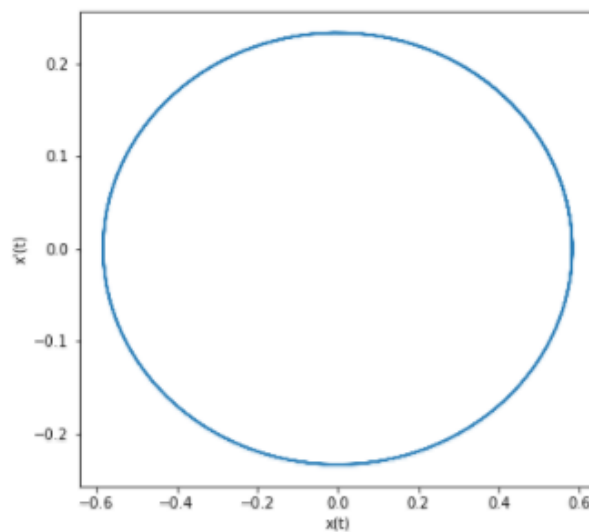
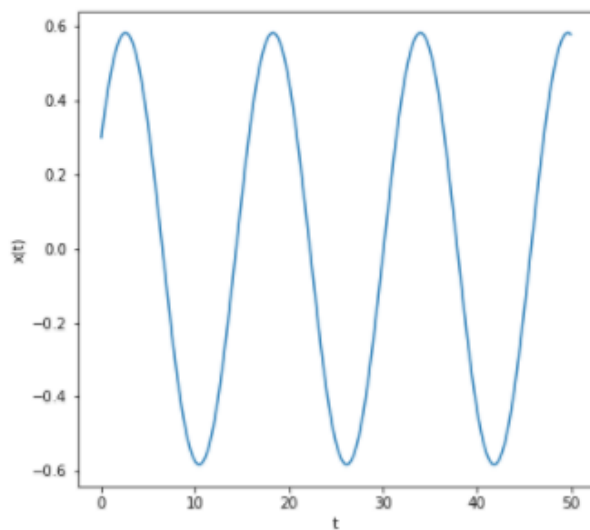


Рис. 9. Гармонічні коливання ($\delta = f_0 = 0$)

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Коефіцієнт згасання: $\delta =$

Власна частота: $\omega_0 =$

Частота зовнішньої сили: $\omega =$

Амплітуда зовнішньої сили: $f_0 =$

Початкове положення: $x_0 =$

Початкова швидкість: $x'_0 =$

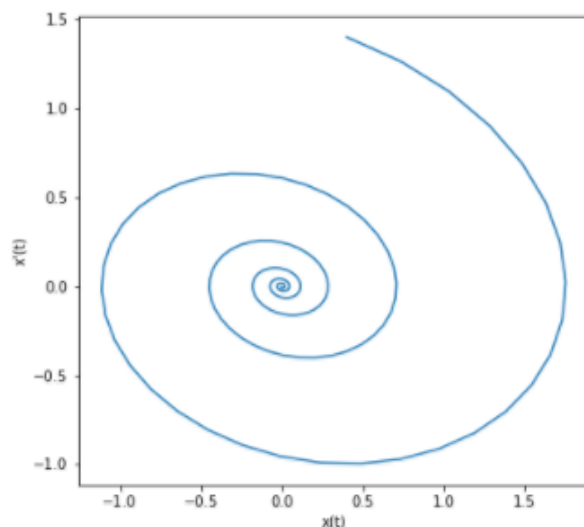
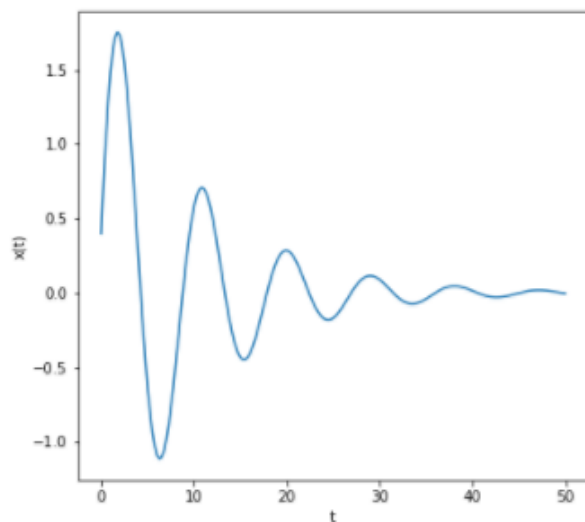



Рис. 10. Згасаючі коливання ($f_0 = 0$)

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Коефіцієнт згасання: $\delta =$ 

Власна частота: $\omega_0 =$

Частота зовнішньої сили: $\omega =$

Амплітуда зовнішньої сили: $f_0 =$

Початкове положення: $x_0 =$

Початкова швидкість: $x'_0 =$

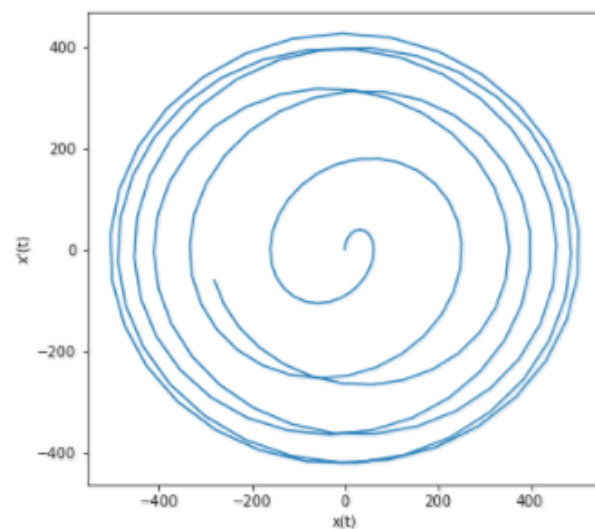
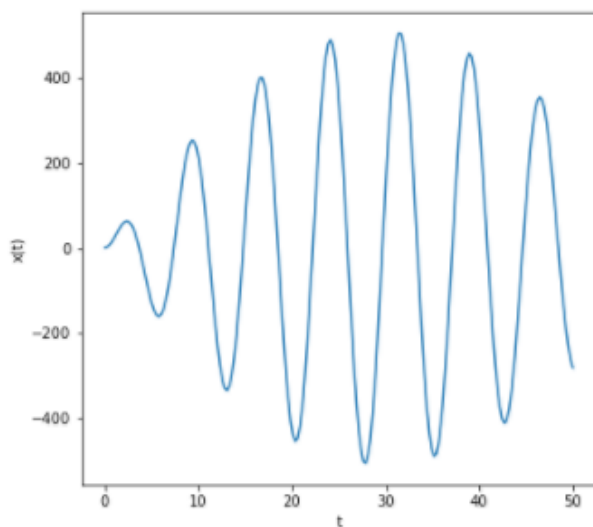


Рис. 11. Вимушені коливання ($f_0 = 50$, $\delta = 0,01$)

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Коефіцієнт згасання: $\delta = 0.01$

Власна частота: $\omega_0 = 0.8$

Частота зовнішньої сили: $\omega = 1.3$

Амплітуда зовнішньої сили: $f_0 = 50$

Початкове положення: $x_0 = 0.4$

Початкова швидкість: $x'_0 = 1.4$

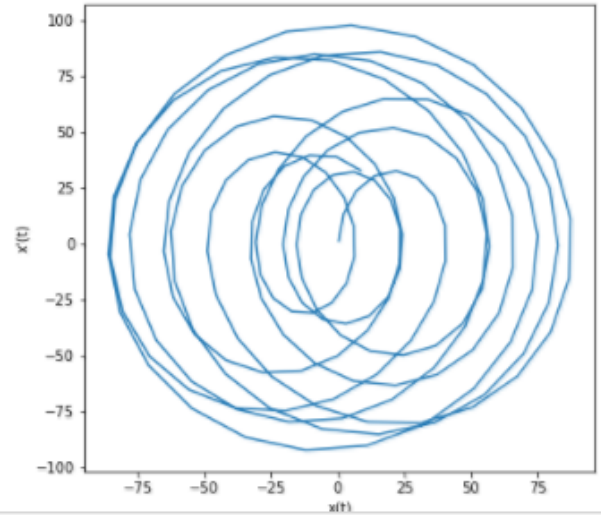
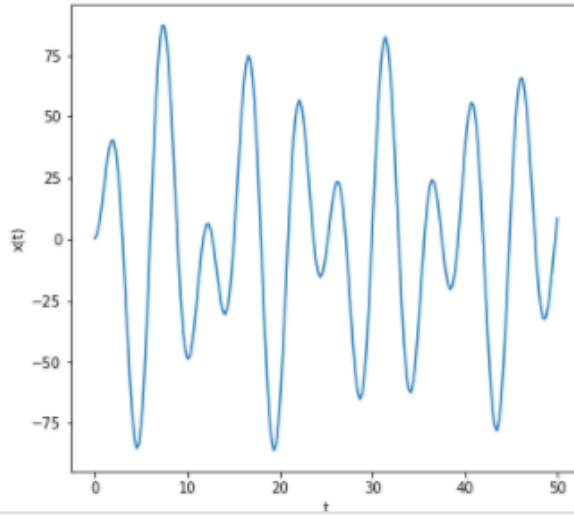


Рис. 12. Вимушені коливання ($\omega_0 \neq \omega$)

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Коефіцієнт згасання: $\delta = 0.01$

Власна частота: $\omega_0 = 0.7$

Частота зовнішньої сили: $\omega = 0.7$

Амплітуда зовнішньої сили: $f_0 = 50$

Початкове положення: $x_0 = 0.4$

Початкова швидкість: $x'_0 = 1.4$

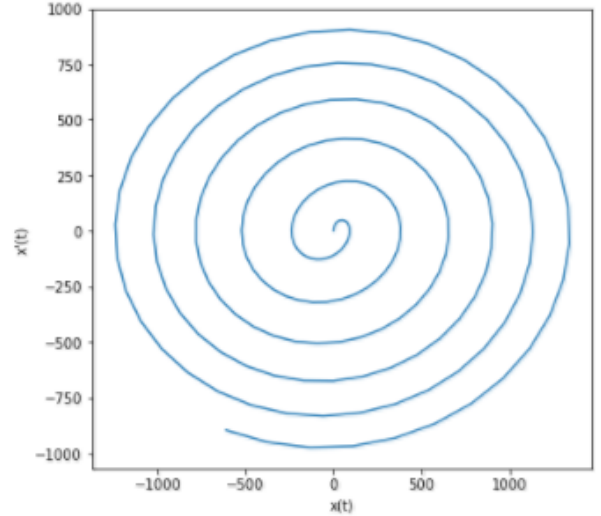
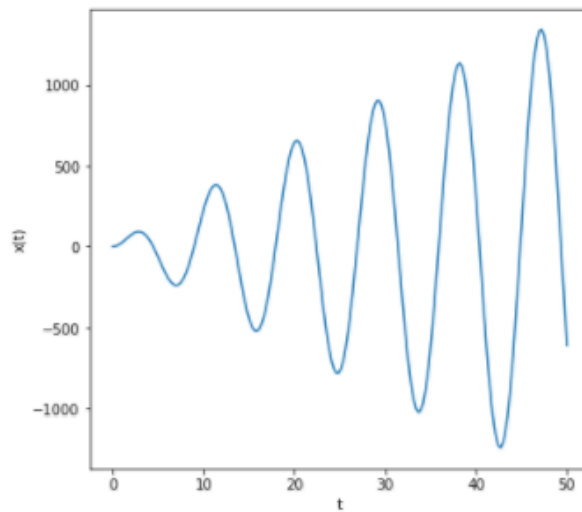


Рис. 13. Вимушені коливання ($f_0 = 50, \delta = 0$)

Вимушені коливання мають наступну поведінку: спочатку, в процесі встановлення вимушених коливань, відбувається накладення вільних згасаючих, а також вимушених коливань. Далі, після того як вільні коливання припиняться, залишаться тільки вимушені коливання.

Різке зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти зовнішньої сили до власної частоти коливань системи називається резонансом.

Дане явище яскраво проілюстровано у третьому і четвертому випадку.

Амплітуда вимушених коливань при резонансі визначається за формулою:

$$A_{\max} \approx \frac{w_0 \cdot f_0}{2\delta} = q \cdot f_0$$

Отже, амплітуда усталених коливань при резонансі в q разів більша за амплітуду при дуже низькій зовнішній частоті w .

У разі відсутності коефіцієнта згасання амплітуда вимушених коливань перевищує амплітуду зовнішньої сили при всіх частотах в інтервалі між $w = 0$ і $w = \sqrt{2} w_0$.

Найпростіша модель динаміки системи «Хижак - жертва»

Наведемо модель в тих позначеннях, які використовуються у розробленій програмі:

$$\begin{cases} x' = (\alpha_x y - \beta_x)x \\ y' = (\alpha_y - \beta_y x)y \end{cases}$$

α_x - "Норма споживання" жертв

α_y - Природна народжуваність жертв

β_x - Природна смертність хижаків

β_y - "Норма споживаності" жертв

x_0 - Початкова кількість хижаків

y_0 - Початкова кількість жертв

Кожне рівняння моделі Лотки-Вольтерра є логістичною залежністю.

Стационарний розв'язок:

$$\begin{cases} x^* = \frac{\alpha_y}{\beta_y} \\ y^* = \frac{\beta_x}{\alpha_x} \end{cases}$$

Тобто, точка рівноваги повністю визначається параметрами «протилежної» популяції.

- Якщо початкові умови такі, що $x_0 = x^*$; $y_0 = y^*$, то цей стан системи зберігається продовж всього періоду часу, на якому спостерігається система (рис. 14). Фазова крива вироджується в точку.
- Якщо початкові умови інші, то траєкторії $x(t)$, $y(t)$ є періодичними функціями, про що свідчать результати обчислювальних експериментів, наведених на рис. 15 – 17.

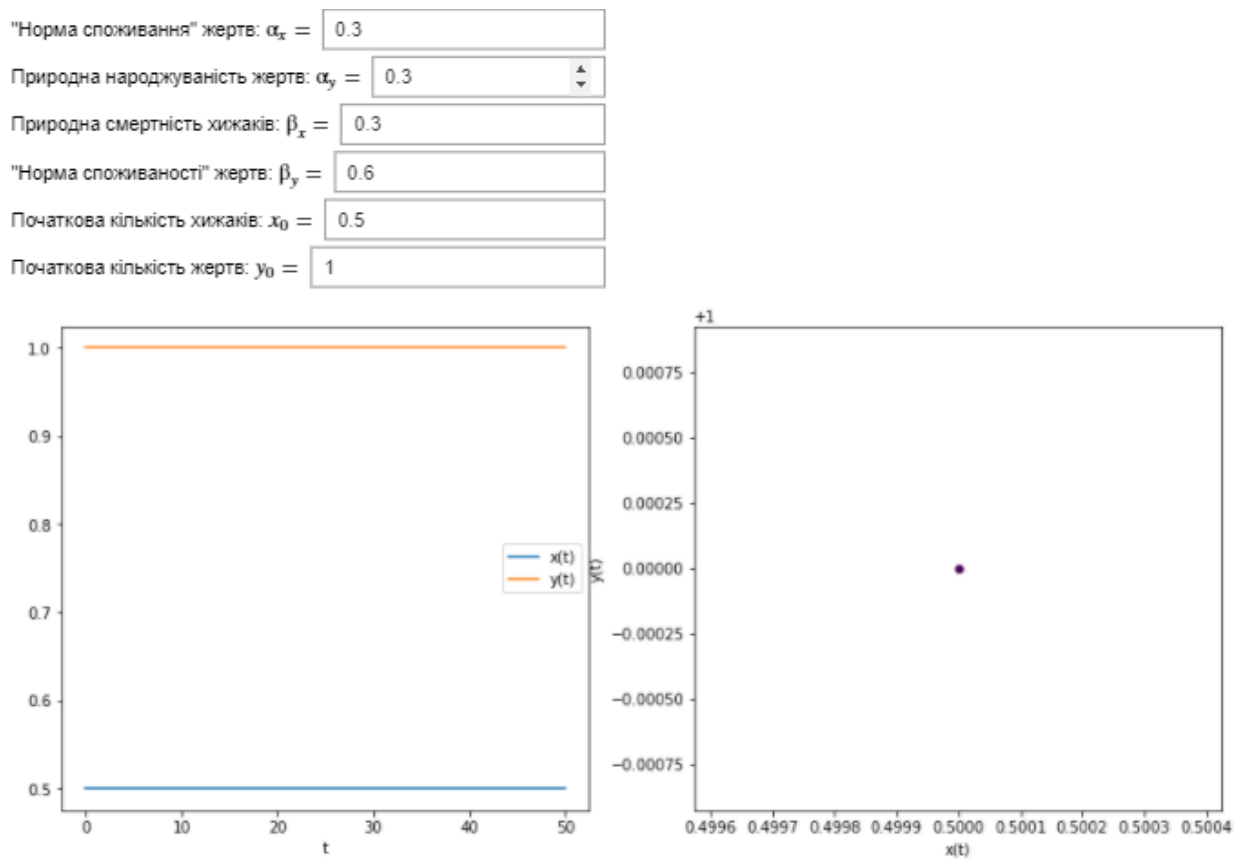


Рис. 14. Розв'язок системи диференціальних рівнянь моделі Лотки-Вольтерра за початкових умов $x_0 = x^*$; $y_0 = y^*$

З рисунків видно, що на фазовій площині фазові траєкторії створюють граничні цикли у вигляді еліпсів (рис. 15) або інших опуклих замкнених фігур в залежності від початкових умов. Для того, щоб простежити відхилення фазових траєкторій від положення рівноваги системи на фазових площинах на рис. 15 – 17, б зображена сама стаціонарна точка.

"Норма споживання" жертв: $\alpha_x = 0.6$

Природна народжуваність жертв: $\alpha_y = 0.2$

Природна смертність хижаків: $\beta_x = 0.5$

"Норма споживаності" жертв: $\beta_y = 0.6$

Початкова кількість хижаків: $x_0 = 0.9$

Початкова кількість жертв: $y_0 = 1.4$

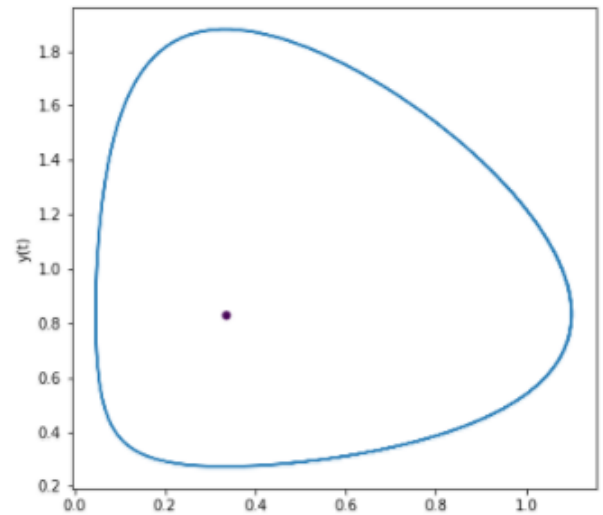
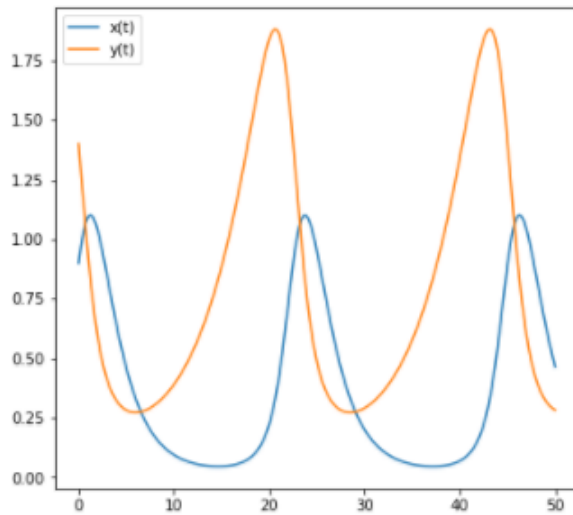


Рис. 15. Розв'язок системи диференціальних рівнянь моделі Лотки-Вольтерра за початкових умов $x_0 = 0.9$; $y_0 = 1.4$

"Норма споживання" жертв: $\alpha_x = 0.5$
 Природна народжуваність жертв: $\alpha_y = 0.3$
 Природна смертність хищників: $\beta_x = 0.5$
 "Норма споживаності" жертв: $\beta_y = 0.6$
 Початкова кількість хижаків: $x_0 = 0.5$
 Початкова кількість жертв: $y_0 = 1.1$

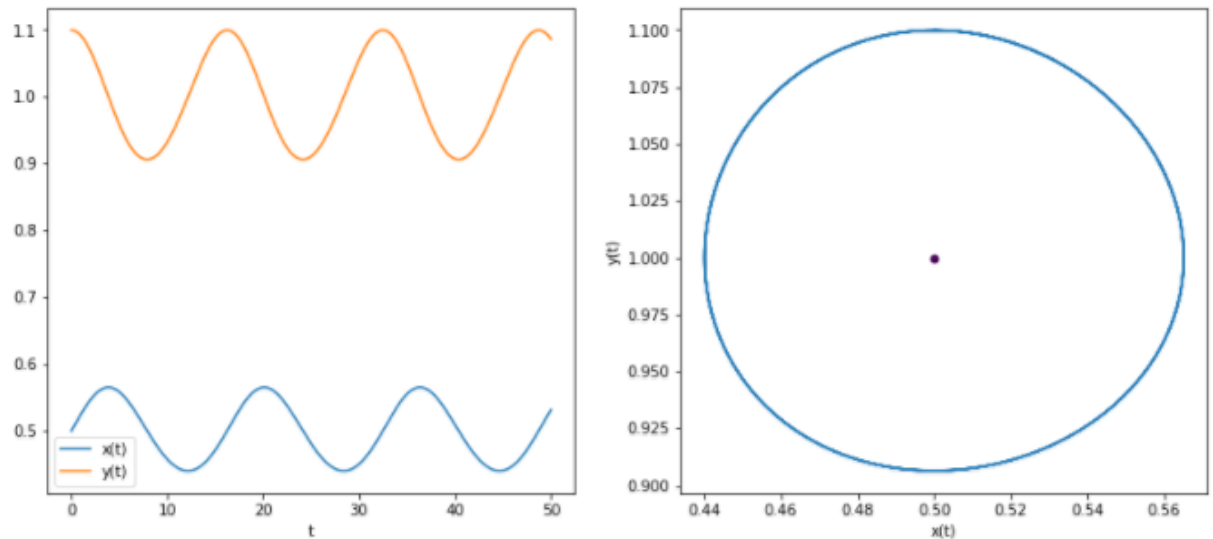


Рис. 16. Розв'язок системи диференціальних рівнянь моделі Лотки-Вольтерра за початкових умов $x_0 = 0.5$; $y_0 = 1.1$

"Норма споживання" жертв: $\alpha_x = 0.8$
 Природна народжуваність жертв: $\alpha_y = 0.5$
 Природна смертність хижаків: $\beta_x = 0.7$
 "Норма споживаності" жертв: $\beta_y = 0.1$
 Початкова кількість хижаків: $x_0 = 5.2$
 Початкова кількість жертв: $y_0 = 4.5$

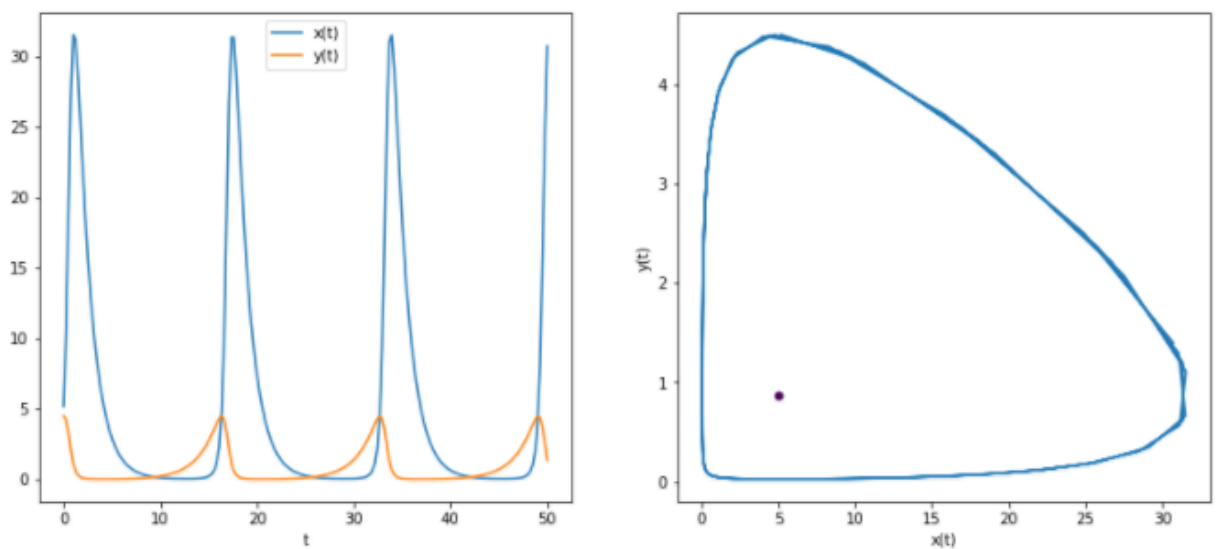


Рис. 17. Розв'язок системи диференціальних рівнянь моделі Лотки-Вольтерра за початкових умов $x_0 = 5.2$; $y_0 = 4.5$

Стаціонарна точка $x_0 = \frac{\alpha_y}{\beta_y}$, $y_0 = \frac{\beta_x}{\alpha_x}$ відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

В цьому випадку чисельність жертв і хижаків залишається сталою. З відхиленням від стаціонарної точки ми спостерігаємо коливальні процеси зміни популяції хижаків і жертв.

Частота коливань чисельності хижаків і жертв одна й та сама і визначається лише власними характеристиками популяції – природною народжуваністю жертв і природною смертністю хижаків, а саме:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha_y \beta_x}$$

Амплітуди і фази коливань різні і залежать від початкових умов.

Програмний код

```
from ipywidgets import *
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display
get_ipython().magic('matplotlib inline')

from pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = 14, 6
style = {'description_width': 'initial'}
layout = Layout(width = '400px')
models = [None] * 4

# ## 1. Динаміка росту популяції

# In[337]:

def modell(k, μ, N0):
    def modell_eq(N,t):
        return μ*N*(k-N)

    t = np.linspace(0, 30, num=200)

    # solve ODE
    N = odeint(modell_eq, N0, t)

    # plot results
    plt.plot(t,N)
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('N(t)')
    plt.show()

# In[338]:

description1 = Label(value="$N'=\mu N(k-N)$")
k_val = FloatText(value= 15, description = 'Ємність середовища (гранична чисельність): $k = $', step=0.1, style = style, layout = layout)
μ_val = FloatText(value= 0.05, description = 'Швидкість росту популяції: $μ = $', step=0.1, style = style, layout = layout)
N0_val = FloatText(value=0.5, description = 'Початковий розмір популяції: $N_0 = $', step=0.1, style = style, layout = layout)
models[0] = VBox([description1, interactive(modell, k=k_val, μ=μ_val, N0=N0_val, continuous_update=True)])

# In[339]:

display(models[0])

# ## 2. Односекторна модель економічної динаміки (модель Солоу)

# In[340]:

def model2(s, a, α, μ, q, k0):
    def model2_eq(k,t):
        return s*a*k**α-(μ+q)*k

    t = np.linspace(0, 100, num=200)

    # solve ODE
    k = odeint(model2_eq, k0, t)
```

```

# plot results
plt.plot(t, k)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('k(t)')
plt.show()

```

```
# In[341]:
```

```

description2 = Label(value="$k'=s\alpha^{\alpha}-(\mu+q)k$")
s_val = FloatText(value=0.2, description = 'Норма накопичення: $s = $', step=0.1,
style = style, layout = layout)
a_val = FloatText(value=2.5, description = 'Рівень розвитку економіки: $a = $',
step=0.1, style = style, layout = layout)
\alpha_val = FloatText(value=0.3, description = 'Частка капіталу у сукупній продукції: $\alpha = $',
step=0.1, style = style, layout = layout)
\mu_val = FloatText(value=0.1, description = 'Норма витрат на амортизацію: $\mu = $',
step=0.1, style = style, layout = layout)
q_val = FloatText(value=0.1, description = 'Темп приросту робочої сили: $q = $',
step=0.1, style = style, layout = layout)
k0_val = FloatText(value=0.8, description = 'Початковий капітал: $k_0 = $', step=0.1,
style = style, layout = layout)
models[1] = VBox([description2, interactive(model2, s=s_val, a=a_val, \alpha=\alpha_val,
\mu=\mu_val, q=q_val, k0=k0_val, continuous_update=True)])

```

```
# In[342]:
```

```
display(models[1])
```

```
# ## 3. Рівняння вимушених коливань
```

```
# In[343]:
```

```

def model3(\delta, \omega_0, \omega, f_0, x_0, x_00):

    #x_0' = x_1 = x'
    #x_1' = x'' = f_0 * np.cos(\omega * t) - 2 * \delta * x[1] - (\omega_0 ** 2) * x[0]
    def model3_eq(x,t):
        return [x[1], f_0 * np.cos(\omega * t) - 2 * \delta * x[1] - (\omega_0 ** 2) * x[0]]

    t = np.linspace(0, 50, num=200)

    # solve ODE
    x = odeint(model3_eq, np.array([x_0, x_00]), t)

    # plot results
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=2)
    ax[0].plot(t, x[:,0])
    ax[0].set_xlabel('t')
    ax[0].set_ylabel('x(t)')
    ax[1].plot(x[:,0], x[:,1])
    ax[1].set_xlabel('x(t)')
    ax[1].set_ylabel("x'(t)")
    plt.show()

```

```
# In[344]:
```

```

description3 = Label(value="$x''+2\delta x'+\omega_0^2 x=f_0 \cos(\omega t)$")
\delta_val = FloatText(value=0.1, description = 'Коефіцієнт згасання: $\delta = $', step=0.1,
style = style, layout = layout)
\omega_0_val = FloatText(value=0.3, description = 'Власна частота: $\omega_0 = $', step=0.1,
style = style, layout = layout)
\omega_val = FloatText(value=0.1, description = 'Частота зовнішньої сили: $\omega = $',
step=0.1, style = style, layout = layout)
f_0_val = FloatText(value=0.0, description = 'Амплітуда зовнішньої сили: $f_0 = $',
step=0.1, style = style, layout = layout)
x_0_val = FloatText(value=0.3, description = 'Початкове положення: $x_0 = $', step=0.1,
style = style, layout = layout)

```

```
x00_val = FloatText(value=0.2, description = "Початкова швидкість:  $x_0' =$ ",
step=0.1, style = style, layout = layout)
models[2] = VBox([description3, interactive(model3,  $\delta=\delta\_val$ ,  $\omega_0=\omega_0\_val$ ,  $\omega=\omega\_val$ ,
f0=f0_val, x0=x0_val, x00=x00_val, continuous_update=True)])
```

```
# In[345]:
```

```
display(models[2])
```

```
# ## 4. Рівняння коливань у системі «хижак-жертва»
```

```
# In[346]:
```

```
def model4( $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ , x0, y0):
    def model4_eq(x,t):
        return [( $\alpha_x$  * x[1] -  $\beta_x$ ) * x[0], ( $\alpha_y$  - x[0] *  $\beta_y$ ) * x[1]]

    t = np.linspace(0, 50, num=200)

    # solve ODE
    x = odeint(model4_eq, np.array([x0, y0]), t)

    # plot results
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=2)
    ax[0].plot(t, x[:,0], label = 'x(t)')
    ax[0].plot(t, x[:,1], label = 'y(t)')
    ax[0].legend()
    ax[0].set_xlabel('t')
    ax[1].plot(x[:,0], x[:,1])
    ax[1].set_xlabel('x(t)')
    ax[1].set_ylabel("y(t)")
    plt.show()
```

```
# In[347]:
```

```
description4 = Label(value=r"""\bigg\{ \matrix{x'=(\alpha_x y - \beta_x)x \cr y'=(\alpha_y - \beta_y x)y} """, layout = Layout(height = '50px'))
 $\alpha_x\_val$  = FloatText(value=0.3, description = '"Норма споживання" жертв:  $\alpha_x =$ ',
step=0.1, style = style, layout = layout)
 $\alpha_y\_val$  = FloatText(value=0.3, description = '"Природна народжуваність жертв:  $\alpha_y =$ ',
step=0.1, style = style, layout = layout)
 $\beta_x\_val$  = FloatText(value=0.3, description = '"Природна смертність хижаків:  $\beta_x =$ ',
step=0.1, style = style, layout = layout)
 $\beta_y\_val$  = FloatText(value=0.6, description = '"Норма споживаності" жертв:  $\beta_y =$ ',
step=0.1, style = style, layout = layout)
x0_val = FloatText(value=0.3, description = '"Початкова кількість хижаків:  $x_0 =$ ',
step=0.1, style = style, layout = layout)
y0_val = FloatText(value=0.2, description = '"Початкова кількість жертв:  $y_0 =$ ',
step=0.1, style = style, layout = layout)
models[3] = VBox([description4, interactive(model4,  $\alpha_x=\alpha_x\_val$ ,  $\alpha_y=\alpha_y\_val$ ,  $\beta_x=\beta_x\_val$ ,
 $\beta_y=\beta_y\_val$ , x0=x0_val, y0=y0_val, continuous_update=True)])
```

```
# In[348]:
```

```
display(models[3])
```