<u>Лаб. 1</u>

<u>Ч. 1</u> ДИНАМІКА ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Завдання для цієї частини:

1. Написати програми розв’язування 2-х нелінійних дифрівнянь (виділені жовтим), що описують процеси різної природи (слід вивчити виведення 2-ї моделі).

Увага: програмувати *не формули* аналітичних розв’язків, а власне *рівняння*!

2. Дослідити характер розв’язків при різних значеннях параметрів.
3. Забезпечити графічне відображення отриманих результатів.
4. Оформити звіт, що містить найбільш цікаві результати (структуру типового звіту подано в кінці файлу). Текст виведення 2-ї моделі <u>*не має бути*</u> у звіті!

<u>Лінійні рівняння динаміки</u>

1. ***Динаміка росту популяції***

Модель Фергюльста враховує обмеженість ресурсів середовища:

$\dot{N} = \mu\, N\,(k - N) \quad | \quad N_0$ – початкова чисельність,

де k – ємність середовища (гранична чисельність).

Це логістичне рівняння, його стаціонарна точка (при $\dot{N} = 0$): $N_{ст} = k$

2. ***Односекторна модель економічної динаміки*** **(модель *Солоу*)**

5 змінних стану окремого сектора економіки:
Y – обсяг кінцевого продукту, що використовується повністю;
C – обсяг фонду споживання (валові невиробничі витрати);
S – обсяг фонду накопичення (валові витрати на розвиток);
L – обсяг трудових ресурсів (праця);
K – обсяг основних фондів (капітал).

Ресурси K і L витрачаються повністю, тоді
$\text{Y} = F(K, L)$ – виробнича функція

Продукт іде на споживання і накопичення (інвестиції):

$$Y = C + S$$

Ці складові фіксовані:

$$S = s\text{Y}, \quad 0 < s < 1, \quad s = const \text{ – норма накопичення}$$

або $S = s\,F(K, L)$; тоді $C = (1 - s)\text{Y}$

Валове накопичення S витрачається на чистий приріст капіталу $\dot{K}$ і на фонд відновлення μK вибулих основних фондів, тобто

$$S = \dot{K} + \mu K, \quad 0 < \mu < 1, \quad \mu = const$$

μ – норма відрахувань на амортизацію.

Динаміка трудових ресурсів (модель Мальтуса):

$\dot{L} = g\,L, \quad g = const$ – темп приросту.

Все, що вище – це і є <u>*модель Солоу*</u>. В ній усе визначається динамікою обсягу основних фондів (капіталу) $\dot{K}$, крім трудових ресурсів. Тому слід побудувати *рівняння для динаміки приросту капіталу* на одиницю трудових ресурсів.

Перейдемо до нормованих величин на одиницю робочої сили.

Виробнича функція має властивість адитивності:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

Тому введемо

$k = \dfrac{K}{L}$ – фондоозброєність (капіталоозброєність);

$y = \dfrac{Y}{L}$ – обсяг продукції на душу населення (продуктивність праці),

тоді виробнича функція

$$y = F(\frac{K}{L}, 1) \overset{\Delta}{=} f(k),$$

тобто це залежність продуктивності праці від фондоозброєності.

Функція $f(k)$ – *строго монотонна зростаюча і увігнута* (при збільшенні капіталу темп приросту обсягу продукту сповільнюється).

Тепер знайдемо рівняння для $\dot{k}$:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}(\frac{K}{L}) = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L};$$

Оскільки $\dfrac{K}{L} = k$, $\dfrac{\dot{L}}{L} = g$, причому

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{S - \mu K}{L} = \frac{S}{L} - \mu\frac{K}{L} = s\frac{Y}{L} - \mu\frac{K}{L} = sy - \mu k = sf(k) - \mu k,$$

то отримуємо модель економічної динаміки у вигляді:

$$\dot{k} = sf(k) - (\mu + g)k$$

Це нелінійна модель. Чи має вона стаціонарний режим, коли $\dot{k} = 0$?

Розглянемо праву частину як функцію k:

$$\varphi(k) = sf(k) - (\mu + g)k$$

Оскільки $sf(k)$ – строго монотонна зростаюча і увігнута, а $(\mu + q)k$ – лінійна функції k, вони перетинаються в деякій точці k^*, де $\varphi(k^*) = 0$, тобто $\dot{k} = 0$, і це є стаціонарна точка.

Очевидно, що стаціонарний розв'язок моделі економічної динаміки залежить від параметрів рівняння, початкових умов, а також конкретного варіанта виробничої функції.

Розглянемо виробничу функцію *Кобба-Дугласа*:

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

α – частка капіталу в продукті,

$1-\alpha$ – частка праці,

a – коефіцієнт, що характеризує рівень розвитку економіки.

Тоді $f(k) = ak^{\alpha}$,

тобто модель економічної динаміки має вигляд дифрівняння

$$\dot{k} = sak^{\alpha} - (\mu + q)k \quad \Big| \quad k_0 \quad (\sim 0.5 \div 1.5)$$

Звідси можна визначити стац. точку k^* (аналітично, графічно, ітераційно, ...)

Значення коефіцієнтів, наприклад, для України:

$k_0 \approx 0.8$, $s = 0.2$, $a = 2.5$, $\mu = q = 0.1$, $\alpha = 0.3$.

Але необхідно *дослідити* розв'язки й з *іншими варіантами* цих параметрів!

<u>Ч. 2</u> ДИНАМІКА ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3. Рівняння вимушених коливань

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \;\; | \, x_0, \dot{x}_0,$

$\delta = const$ – коефіцієнт згасання,
ω_0 – циклічна частота вільних коливань, або *власна* частота,
f_0 , ω – амплітуда і частота зовнішньої сили.

Слід зробити:
- запрограмувати чисельний розв'язок вказаного рівняння
- дослідити гармонічні коливання ($\delta = f_0 = 0$)
- дослідити згасаючі коливання ($f_0 = 0$)
- дослідити вимушені коливання
- дати графіки типових результатів (у часі та на фазовій площині)

4. Рівняння коливань у системі «хижак-жертва»

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha_x y - \beta_x) x & | \, x_0 \\ \dot{y} = (\alpha_y - \beta_y x) y & | \, y_0 \end{cases}$$

де x – кількість «хижаків»; y – кількість «жертв»;
$\beta_x > 0$ – природна смертність хижаків; $\alpha_x > 0$ – „норма споживання" жертв;
$\alpha_y > 0$ – природна народжуваність жертв; $\beta_y > 0$ – „норма споживаності" жертв.

Слід зробити:
- запрограмувати вказану систему
- знайти стаціонарну точку системи x^*, y^*
- дослідити коливання за незначного відхилення поч. умов від рівноваги
- дослідити коливання за значного відхилення від рівноваги
- дати графіки типових результатів у часі (дві криві на одному графіку) та на фазовій площині (x, y)

СТРУКТУРА ТИПОВОГО ЗВІТУ

1. Назва роботи
2. Мета
3. Опис мат. моделі та її параметрів
4. Застосована різницева схема (не описувати, а лише вказати!)
5. Вхідні-вихідні параметри програми
6. Найбільш типові отримані варіанти розв'язків (за яких значень параметрів) з графіками (зміна модельованих показників у часі та на фазовій площині)
7. Програмний код