Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"
Навчально-науковий комплекс
"Інститут прикладного системного аналізу"

Методичний посібник

до лабораторних занять

з курсу

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Для студентів спеціальності:

Системний аналіз і управління

Київ 2000

Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"
Навчально-науковий комплекс
"Інститут прикладного системного аналізу"

Методичний посібник

до лабораторних занять

з курсу

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Для студентів спеціальності:
Системний аналіз і управління

Затверджено
на засіданні Вченої Ради
Інституту прикладного
системного аналізу

Протокол №??? від ??? 2000 року

Київ 2000

Методичний посібник до лабораторних робіт з курсу "Методи оптимізації". Для студентів спеціальності: системний аналіз і управління / Укладачі: А.Яковлева, І.Спекторський. - К.: НТУУ "КПІ", ННК "ІПСА", 2000. - ??? с.

Навчальне видання

Методичний посібник
до лабораторних робіт з курсу "Методи оптимізації"

Для студентів спеціальності: системний аналіз і управління

Укладачі: Яковлева Алла Петрівна, Спекторський Ігор Якович

Відповідальний редактор: Романенко Віктор Демидович

Рецензент: ???

Зміст

Загальні теоретичні відомості

1. Загальна постановка оптимізаційної задачі

На теперішній час розроблено та досліджено велику кількість методів мінімізації функцій векторного аргументу. Зупинимось на деяких найбільш відомих методах мінімізації, що часто використовуються на практиці. Ми наведемо стислий опис кожного з методів, винесених на дослідження в циклі лабораторних робіт, а також розглянемо деякі обчислювальні аспекти цих методів. Ми обмежимось одним-двома різновидами кожного метода, що бачиться цілком достатнім для засвоєння його суті.

Розглядається загальна *оптимізаційна задача*

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{1}$$

де X — задана множина, $f(x)$ — функція, визначена на X; потрібно знайти точки мінімуму функції f на множині X. При цьому f називають *цільовою функцією* , X — *допустимою множиною* , кожний елемент $x \in X$ — *допустимою точкою* задачі (1). Надалі, якщо не вказано інше, ми розглядатимемо скінченновимірні задачі оптимізації, тобто вважатимемо $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ми розглядаємо лише задачу мінімізації, оскільки задача максимізації $f(x) \to \max$, $x \in X$ еквівалентна аналогічній задачі мінімізації: $-f(x) \to \min$, $x \in X$ (множини розв'язків цих задач співпадають).

Точка $x^* \in X$ називається точкою *глобального мінімуму* функції f на множині X, або *глобальним розв'язком задачі мінімізації* (1) , якщо

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in X. \tag{2}$$

Точка $x^* \in X$ називається точкою *локального мінімуму* функції f на множині X, або *локальним розв'язком задачі мінімізації* (1) , якщо існує $\varepsilon > 0$, таке що

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in U_\varepsilon(x^*), \tag{3}$$

де $U_\varepsilon(x^* = \{x \in X : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\})$ — куля радіусу ε з центром в x^*.

Якщо нерівності (2) або (3) виконуються в строгому сенсі, точку x^* називають точкою *строгого мінімуму* відповідно в глобальному чи локальному сенсі.

Іноді, опираючись на умови оптимальності або на геометричну інтерпретацію, ми маємо змогу отримати розв'язок задачі (1) в явному вигляді. Але, як правило, задачу оптимізації доводиться розв'язувати чисельними (найчастіше наближеними) методами, використовуючи обчислювальну техніку.

Будь-який чисельний метод розв'язку оптимізаційної задачі базується на точному чи наближеному обчисленні її характеристик — значень цільової функції, значень функцій, що задають обмеження (допустиму підмножину $\mathbb{R}^n$), а також значень похідних цих функцій. На основі одержаної інформації будується наближений розв'язок — наближення до шуканої точки мінімуму x^*, або, якщо точка мінімуму не єдина, наближення (в певному сенсі) до множини точок мінімуму. Інколи будується наближення до мінімального значення функції

$$f^* = \min_{x \in X} f(x).$$

Які саме характеристики потрібно вибрати для обчислень, залежить від властивостей цільової функції та обмежень, а також від можливостей обчислювальної техніки. Алгоритми, що використовують лише інформацію про значення цільової функції, називають *алгоритмами нульового порядку*; алгоритми, що використовують інформацію про значення перших похідних — *алгоритмами першого порядку*, других похідних — *алгоритмами другого порядку*, і т.д.

Робота алгоритму складається з двох основних етапів:

- Обчислюються характеристики задачі, необхідні для роботи алгоритма.
- На основі отриманій інформації будується наближення до розв'язку.

Якщо точки множини X, необхідні для обчислення характеристик, обираються один раз на початку роботи алгоритма і надалі не змінюються, алгоритм мінімізації називають *пасивним*. Як правило, при чисельному розв'язанні оптимізаційної задачі використовують *послідовні* ("ітераційні") алгоритми: точка x^{i+1} ($i+1$–й крок) обчислюється лише тоді, коли вже обчислені точки на попередніх кроках (ітераціях) — $x^1 \dots x^i$, та на кожному кроці $1 \dots i$ проведені обчислення згідно з даним алгоритмом.

Ітерацію будь-якого послідовного алгоритма розв'язання задачі (1) можна подати у вигляді:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k, \quad h_k \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Конкретний алгоритм визначається вибором початкової точки x^0, правилом вибору векторів h^k та чисел α_k на основі одержаної в результаті обчислень інформації, а також умовою закічення роботи алгоритму. Вектор h^k визначає *напрямок* $k+1$*–го кроку* алгоритма мінімізації, а коефіцієнт α_k — *довжину* цього кроку..

Методи мінімізації, що гарантують отримання розв'язку за скінчену кількість кроків, називають *скінченнокроковими*. Для *нескінченнокрокових* алгоритмів на кожному кроці отримується лише наближенне значення розв'язку задачі; точне значення розв'язку може бути отримане лише через граничний перехід по номеру ітерації.

Кажуть, що метод (4) збігається, якщо

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x^k, \tag{5}$$

де x^* — розв'язок задачі (1).

Якщо $f(x^k) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x^*)$, то кажуть, що метод (4) збігається за функцією.

У випадку, якщо точка мінімуму x^* не єдина, під збіжністю метода можна розуміти збіжність послідовності x^k ($k \geq 1$) до множини X^* точок мінімуму функції f (при стандартному визначенні відстані від точки до множини).

Ефективність метода мінімізації визначається *швидкістю збіжності*. Ми наведемо визначення лінійної, надлінійної та квадратичної швидкості.

Нехай $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$.

1. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *лінійно*, або зі швидкістю геометричної прогресії, якщо існують такі константи $q \in (0,1)$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q\|x^k - x^*\| \quad \text{для всіх } k \geq k_0,$$

або, що те ж саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_1 q^{k+1} \text{ для всіх } k \geq k_0 \quad (C_1 = \|x^1 - x^*\|).$$

2. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *надлінійно*, якщо

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q_k\|x^k - x^*\|, \quad q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

або, що те ж саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_2 q_1 q_2 \cdots q_{k+1},\ q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad (C_2 = \|x^1 - x^*\|).$$

3. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *квадратично*, якщо існують такі константи $C \geq 0$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C\|x^k - x^*\|^2 \quad \text{для всіх } k \geq k_0,$$

або, що те ж саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq A \cdot C^{2^k} \quad \text{для всіх } k \geq k_0 \quad (A = \|x^1 - x^*\|).$$

Нескінченнокрокові методи доповнюють *умовою зупинки*. На практиці найчастіше використовують наступні умови зупинки

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon_1;$$
$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon_2;$$
$$\|f'(x^{k+1})\| \leq \varepsilon_3$$

До початку обчислень обирають одну з умов, що наведені вище, та мале додатнє ε_i. Обчислення закінчують після $k+1$–го кроку, коли вперше виконується обрана умова.

Зауваження 0.1. Деякі оптимізаційні алгоритми для нормального закінчення потребують виконання двох або трьох наведених вище умов.

Вектор h задає *напрямок спадання* функції f у точці x, якщо

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

при всіх достатньо малих $\alpha > 0$.

Метод $x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ називається *методом спуску*, якщо при всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ вектор h^k задає напрямок спадання функції f в точці x^k та числа $\alpha_k > 0$ вибрані так, що $f(x^{k+1}) < f(x^k)$. Прикладом методу спуску є градієнтний метод, в якому $h^k = -f'(x^k)$ (довести самостійно).

2. Вибір довжини кроку

1. Коефіцієнт α_k можна визначати з умови

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h^k). \tag{6}$$

Метод (6) називають *методом найскорішого спуску*. Цей метод є оптимальним в тому сенсі, що він забезпечує досягнення найменшого значення функції f удовзж заданного напрямку h.

Приклад 0.1. Для квадратичної функції $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$ з симетричною додатньо визначеною матрицею A метод найскорішого спуску визачається рівністю

$$\alpha_k = -\frac{(Ax^k + b, h^k)}{(Ah^k, h^k)}.$$

2. Визначити точне значення $alpha_k$ з умови (6) не завжди можливо і не завжди доцільно (напрямок h^k забезпечує зпадання функції f лише в малому околі точки x^k). Зараз ми розглянемо два методи вибору α_k, які при відповідних припущеннях на функцію f забезпечують виконання нерівності

$$f(x^k + \alpha_k h^k) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha_k (f'(x^k), h^k), \tag{7}$$

де $\varepsilon \in (0,1)$.

1) Нехай функція f диференційовна на $\mathbb{R}^n$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшиця, тобто при деякому $M > 0$

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

Тоді умова (7) виконується при

$$0 < \alpha_k < -\frac{(1-\varepsilon)(f'(x^k), h^k)}{M\|h^k\|^2}.$$

2) Нехай функція f двічі диференційовна на $\mathbb{R}^n$, а її матриця других похідних при деякому $D > 0$ задовольняє умову

$$(f''(x)h, h) \leq D\|h\|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Тоді умова (7) виконується при

$$0 < \alpha_k < -\frac{2(1-\varepsilon)(f'(x^k), h^k)}{D\|h^k\|^2}.$$

Зауваження 0.2. У деяких методах спуску коефіцієнт α_k можна вибрати постійним: $\alpha_k = \alpha > 0$. Так, у випадку градієнтного метода спуску ($h^k = -f'(x^k)$) при $\alpha_k = \alpha$ наведені в пунктах 1 та 2 оцінки для α_k набувають вигляду:

$$\alpha \in \left(0, \frac{1-\varepsilon}{M}\right), \quad \alpha \in \left(0, \frac{2(1-\varepsilon)}{D}\right)$$

відповідно.

3. На практиці часто використовують *метод подрібнення кроку*:

- на початку роботи алгоритму обирають фіксовані константи $\beta > 0$ та $\lambda \in (0,1)$ (часто фіксують $\lambda = \frac{1}{2}$);
- на кожному кроці k рекурентно визначається послідовність $\alpha_{k,n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

  $$\alpha_{k,0} = \beta, \quad \alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n} \cdot h;$$

  довжину кроку α_k обирають як значення $\alpha_{k,n}$ при найменшому n ($n = 0, 1, 2, \dots$), що задовольняє умову

  $$f(x^k + \alpha_{k,n} h^k) < f(x^k),$$

  тобто $\alpha_k = \min\limits_{n>0}\{\alpha_{k,n} \colon f(x^k + \alpha_{k,n} h^k) < f(x^k)\}$.

Очевидно, що процес подрібнення кроку (процес множення довжини кроку на коефіцієнт λ) не може виявитись нескінченим, оскільки h^k — напрямок спадання функції f.

Розділ 1

Лабораторна робота №1. Чисельні методи безумовної оптимізації першого порядку. Градієнтний метод та його варіації

1. Теоретичні відомості

Градієнтний метод є одним з класичних методів мінімізації першого порядку. Він базується на заміні цільової функції f в околі точки чергової точки x^k лінійною частиною розкладу її в ряді Тейлора.

У методах спуску послідовність наближень x^0, x^1, x^2, $\ldots$, x^k, $\ldots$ до точки мінімуму вибирається за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

де h^k — напрямок спадання функції f у точці x^k. У градієнтному методі h^k береться рівним антиградієнту функції f у точці x^k, тобто $h^k = -f'(x^k)$. Отже, у градієнтному методі

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Якщо довжина кроку вибирається з умови (одномірної) мінімізації функції уздовж напрямку антиградієнта, то одержуємо варіант градієнтного методу, що називається *градієнтним методом найскорішого спуску*.

На практиці, як правило, доводиться задовольнятись наближеними методами пошуками оптимального значення довжини кроку — наприклад, методом роздрібнення.

Якщо цільова функція не є опуклою, градієнтний метод забезпечує лише збіжність до множини стаціонарних стаціонарних точок функції f. Наведемо дві теореми про збіжність градієнтного методу.

Теорема 1.1. *Нехай функція f є диференційовною та обмеженою знизу на $\mathbb{R}^n$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшиця (8). Тоді при довільній початковій точці $x^0 \in \mathbb{R}^n$ для методу (1.1)*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f'(x^k) \right\| = 0.$$

Теорема 1.2. *Нехай функція f двічі диференційовна та сильно опукла на $\mathbb{R}^n$, а її матриця других похідних задовольняє умову (9). Тоді при довільній початковій точці $x^0 \in \mathbb{R}^n$ послідовність x^k $(k \geq 1)$, що визначена формулою (1.1), збігається до точки мінімуму x^* із швидкістю геометричної прогресії:*

$$f(x^k) - f(x^*) \leq q^k (f(x^0) - f(x^*)),$$
$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq C(\sqrt{q})^k,$$

де $C > 0$, $q \in (0,1)$ — константи.

Якщо матриця других похідних цільової функції погано обумовлена ($\frac{d}{D} \ll 1$, де d та D — відповідно найменше та найбільше власні значення матриці $f''(x)$, f вважається сильно опуклою, $x \in \mathbb{R}^n$ — фіксоване), градієнтний метод збігається повільно. Геометрично це виражене в тому, що лінії рівня функції f мають "*ярну*" структуру, і напрямок вектора $-f'(x)$ може сильно відхилятись від напрямку точки мінімуму. Шлях послідовності x^k $(k \geq 1)$ до точки мінімуму буде носити явно виражений зигзагоподібний характер. Іноді кажуть, що відбувається "*нишпорення*" методу, що, очевидно, є недоліком.

При пошуці мінімуму "ярної" функції для прискорення збіжності методу застосовують так званий *ярний метод*:

- на початку роботи алгоритму задають дві точки v^0 та v^1, з яких роблять спуск по градієнтному методу і одержують відповідно точки x^0 та x^1 (ці точки будуть розташовані "на дні яру");

- одержують точку $v^2 = x^1 - \frac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|} \cdot t \cdot \mathrm{sign}(f(x^1) - f(x^0))$, де t — додатня константа (*ярний крок*);
- з точки v^2 (яка, в загальному випадку, може опинитись "на схилі яру") роблять спуск градієнтним методом, отримуючи точку x^2 на дні яру;
- при відомих x^0, x^1, ..., x^k $(k \geq 2)$ отримують точку

$$v^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{\|x^k - x^{k-1}\|} \cdot t \cdot \mathrm{sign}(f(x^k) - f(x^{k-1})),$$

  з якої роблять спуск градієнтним методом, отримуючи точку x^{k+1} на дні яру.

Це лише один з існуючих способів прискорення збіжності градієнтного методу.

Аналогом градієнтного методу для опуклих недиференційовних функцій є *субградієнтний метод*. В цьому методі послідовність x^k $(k \geq 1)$ визначається правилом:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де $h^k \in \partial f(x^k)$ — субградієнт функції f в точці x^k. Зазначимо, що h^k обирається з множини $\partial f(x^k)$ довільним чином.

Зауваження 1.1. Для чисельного обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

2. Завдання на лабораторну роботу

1. В таблиці 2.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з градієнтних методів. Конкретний тип градієнтного метода обрати самостійно,

враховуючи особливості функції f (ярність тощо). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C в версії, що є в наявності в дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, що не встановлена в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

При складанні програми необхідно:

- обчислення цільової функції реалізувати в окремій підпрограмі;
- часткові похідні цільової функції обчислювати чисельно.

3. Знайти мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета чисельної оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом вчених-математиків під керівництвом академіка НАН України Б.М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. В звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2-3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

3. Додаткові завдання на лабораторну роботу

1. Показати, що в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функція

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + \frac{1}{x_1 + x_2}$$

є випуклою та визначити її мінімальне значення. За початкову точку взяти $(x_1^0; x_2^0) = (0,6; 0,2)$. Ітерації завершувати на k–й ітерації при виконанні умови

$$\max_{i \in \{1;2\}} \left| \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_i^k} \right| < \varepsilon,$$

де ε задається користувачем.

2. Показати, що в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функція

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

є випуклою та визначити її мінімальне значення. За початкову точку взяти $(x_1^0; x_2^0) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10})$. Ітерації завершувати на k–й ітерації при виконанні умови

$$\max_{i\in\{1;2\}} \left| \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_i^k} \right| < \varepsilon,$$

де ε задається користувачем.

Розділ 2

Лабораторна робота №2. Чисельні методи безумовної оптимізації другого порядку. Метод Ньютона та його варіації

1. Теоретичні відомості

Метод Ньютона та його модифікації є найбільш ефективним засобом чисельного розв'язання задач безумовної оптимізації. Надалі припускається, що функція f строго опукла і двічі диференційовна на $\mathbb{R}^n$, причому матриця $f''(x)$ невироджена на $\mathbb{R}^n$. У методі Ньютона послідовність x^1, $x^2,\ldots,x^k,\ldots$ будується за правилом:

$$\begin{gathered} x^{k+1} = x^k + h^k, \\ h^k = -[f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{2.1}$$

Таким чином, метод Ньютона є методом мінімізації другого порядку. Як видно з (2.1), довжина кроку $\alpha_k = 1$; напрямок, що визначається вектором h^k, є напрямком спадання функції f.

Квадратична апроксимація заданої функції в малому околі деякої точки є значно точнішою за лінійну апроксимацію. Тому в методі Ньютона природно очікувати більш точне наближення до розв'язку, ніж у градієнтному методі. Наведемо теорему про збіжність метода Ньютона.

Теорема 2.1. *Нехай функція f двічі диференційовна, сильно опукла з константою $\Theta > 0$ на $\mathbb{R}^n$ та задовольняє умову:*

$$\|f''(x) - f''(\widetilde{x})\| \leq M\|x - \widetilde{x}\|,$$

де $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $M > 0$, а початкова точка x^0 є такою, що:

$$\left\|f'(x^0)\right\| \leq \frac{8\Theta^2}{M}, \text{ або } \left\|f'(x^0)\right\| \leq \frac{8\Theta^2}{M}q,, \text{ де } q \in (0; 1).$$

Тоді послідовність x^k ($k \geq 1$), що визначається формулами (2.1), збігається до точки мінімуму x^* функції f з квадратичною швидкістю:

$$\left\|x^k - x^*\right\| < \frac{4\Theta^2}{M}q^{2^k}.$$

Збіжність методу Ньютона доведена лише для достатньо гарного початкового наближення x^0. Недоліками методу є також складність пошуку потрібного початкового наближення та великий об'єм обчислень (на кожному кроці необхідно обчислювати і обертати матрицю других похідних цільової функції).

Модифікації методу Ньютона спрямовані на те, щоб, зберігши його основну перевагу — швидку збіжність, — зменшити об'єм обчислень і послабити вимоги до вибору початкового наближення. В *узагальненому методі Ньютона* (так званий *метод Ньютона з регулюванням кроку*) послідовність x^k ($k \geq 1$) будується за правилом:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \; h^k = -[f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k) \tag{2.2}$$

(при $\alpha_k = 1$ метод збігається з класичним методом Ньютона).

Метод (2.2) можна також представити у вигляді:

$$f''(x^k) \cdot h^k = -f'(x^k); x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k.$$

Отже, для визначення вектора h^k можна розв'язувати систему лінійних рівнянь замість того, щоб обертати матрицю $f''(x^k)$.

Ми розглянемо 2 варіанти узагальненого методу Ньютона, які розрізняються способом вибору параметра α.

Перший спосіб

1. Вважаємо $\alpha = 1$.

2. При обраному α обчислюємо точку $x = x^k + \alpha h^k$ та значення функції $f(x) = f(x^k + \alpha h^k)$.

3. Перевіряємо нерівність:

$$f(x) - f(x^k) \leq \varepsilon\alpha \left\langle f'(x^k), h^k \right\rangle, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

(ε — довільна константа, однакова для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$).

4. Якщо нерівність пункту 3 виконується, приймаємо $\alpha_k = \alpha = 1$ і закінчуємо роботу алгоритма; інакше виконуємо роздріблення α і повертаємось до пункту 2.

Другий спосіб

Значення α_k обираємо як точку мінімуму цільової функції в напрямку антиградієнту:

$$f\left(x^k - \alpha_k \cdot [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)\right) = \min_{\alpha>0} f\left(x^k - \alpha \cdot [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)\right).$$

Порівняння двох наведених способів регулювання довжини кроку демонструє перевагу першого способу, який, за оцінками, потребує в середньому меншої кількості обчислень цільової функції.

Для сильно опуклих двічі диференційовних функцій метод Ньютона збігається незалежно від вибору початкової точки x^0 із надлінійною або квадратичною швидкістю (при наявності додаткових умов на функцію f).

Зауваження 2.1. Для чисельного обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

2. Завдання на лабораторну роботу

1. В таблиці 2.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з методів другого порядку (типу Ньютона). Конкретний тип метода обрати самостійно, враховуючи особливості функції f (ярність тощо). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C в версії, що є в наявності в дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, що не

встановлена в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

При складанні програми необхідно:

- обчислення цільової функції реалізувати в окремій підпрограмі;
- часткові похідні цільової функції обчислювати чисельно.

3. Знайти мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета чисельної оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом вченихматематиків під керівництвом академіка НАН України Б.М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. В звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2-3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

Варіант	Цільова функція f
1	$x^2 + 18y^2 + 0.01xy + x - y$
2	$x^2 + 28y^2 + 0.02xy - x - y$
3	$x^2 + 8y^2 + 0.001xy - x - y$
4	$x^2 + 18y^2 + 0.01xy + x - y$
5	$2x^2 + 8y^2 - 0.01xy + x - y$
6	$x^2 + 4y^2 + 0.001xy - y$
7	$3x^2 + 8y^2 + 0.015xy - x - y$
8	$x^2 + 2y^2 + 0.012xy - 2x + y$
9	$11x^2 + 18y^2 + 0.01xy + x$
10	$3x^2 + 2y^2 - 0.01xy + x - y$
11	$16x^2 + 15y^2 + 2z^2 + +0.018xy + x - z$
12	$2x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 0.01xz - x - y$
13	$2x^2 + 4y^2 + z^2 + 0.0013xy + 0.001xz - y$
14	$13x^2 + 8y^2 + z^2 + 0.001xy + 0.02xz + y$
15	$12x^2 + 18y^2 + 3z^2 - 0.01xz + x - y$
16	$11x^2 + 14y^2 + z^2 + 0.01xy - 0.001yz - y$
17	$13x^2 + 18y^2 + 3z^2 + 0.015xz - y$
18	$15x^2 + 2y^2 + 0.012xy - x + y$
19	$12x^2 + 14y^2 + 0.01xy + 3x$
20	$15x^2 + 18y^2 - 0.03xy + x - y$
21	$(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
22	$(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$
23	$100(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
24	$10000(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
25	$100(y - x^3)^2 + 100(1 - x)^2$

Таблиця 2.1. **Варіанти завдань на лабораторні роботи №1, №2 та №4**

Розділ 3

Лабораторна робота №3. Чисельні методи нелінійної умовної оптимізації. Метод проекції градієнта

1. Теоретичні відомості

Розглядається метод проекції градієнта для розв'язання задачі

$$f(x) \to \min, \quad , x \in X, \tag{3.1}$$

де X — замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^n$, f — диференційовна функція на X. Цей метод є модифікацією градієнтного методу мезумовної оптимізації на випадок умовних задач.

Проекцією точки a на множину $X \in \mathbb{R}^n$ називається точка $\pi_X(a) \in X$, найближча до точки a серед всіх точок з множини X.

Число $\pi_X(a)$ є розв'язком задачі проектування:

$$\phi(x) = \|x - a\|^2 \to \min, \quad x \in X. \tag{3.2}$$

Поняття проеції точки a на множину X має сенс для довільної множини $X \in \mathbb{R}^n$, однак в загальному випадку проекція точки на множину може визначатись неоднозначно (задача мінімізації (3.2) може мати більше одного розв'язку). Існування та єдиність розв'язку задачі (3.2) гарантує умова опуклості та замкнености множини $X \in \mathbb{R}^n$ (див., зокрема, [1]).

Якщо X — замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^n$, мають місце наступні твердження (див. [1]).

1. Точка $\bar{x}$ є проекцією точки a на множину X ($\overline{x} = \pi_X(a)$) тоді і тільки тоді, коли

$$(\overline{x} - a, x - \overline{x}) \geq 0$$

при всіх $x \in X$.

2. Для будь-яких точок $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^n$ виконується оцінка:

$$\left\|\pi_X(a^1) - \pi_X(a^2)\right\| \leq \left\|a^1 - a^2\right\|.$$

В основі методу проекції градієнта лежить наступна теорема (див., наприклад, [1]).

Теорема 3.1. *Нехай множина $X \in \mathbb{R}^n$ є опуклою і замкненою, функція f — опуклою на X та диференційовною в точці $x^* \in X$. Тоді для того, щоб точка x^* була розв'язком задачі (3.1) , необхідно і достатьно виконання умови:*

$$x^* = \pi_X\left(x^* - \alpha f'(x^*)\right) \text{ при довільному } \alpha > 0.$$

У методі проеції градієнта за чергову точку наближення до розв'язку задачі (3.1) вибирають проекцію на множину X тієї точки, яку одержують при застосуванні градієнтного метода:

$$x^{k+1} = \pi_X\left(x^k - \alpha_k f'(x^k)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Коефіцієнти $\alpha_k \geq 0$ можна вибирати за методиками, описаними вище. Наприклад, існують різноманітні модифікації методу найшвидшого спуску з наближеним розв'язанням (на кожному кроці) задачі одномірної мінімізації по α, можливий вибір α подрібленням кроку тощо.

Наведемо теорему про збіжність методу (див., наприклад, [1]).

Теорема 3.2. *Нехай множина $X \in \mathbb{R}^n$ є опуклою і замкненою, функція f — сильно опуклою з константою $\theta > 0$ та диференційовною на X, причому градієнт f задовольняє умові Ліпшиця:*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq M\|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$

Тоді послідовність x^k ($k \geq 1$), що генерується з правилом (3.3) при довільних $x^0 \in X$ та $\alpha_k \in \left(0; \frac{4\theta}{M^2}\right)$, збігається до розв'язку x^* задачі (3.1) зі швидкістю геометричної прогресії:

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\| \leq q\left\|x^k - x^*\right\|, \qquad \text{де } q = \sqrt{1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 M^2} \in (0; 1).$$

В описаному методі на кожній k–й ітерації потрібно проводити операцію проектування точки на множину X, тобто розв'язувати задачу виду (3.2) при $a = x^k - \alpha_k f'(x^k)$. В деяких випадках вдається побудувати явну формулу для проекції, наприклад, коли X — куля, координатний паралелепіпед, невід'ємний ортант, гіперплощина, полупростір тощо (див. пункт 3).

Зауваження 3.1. Для чисельного обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

2. Завдання на лабораторну роботу

1. В таблиці 3.1 знайти цільову функцію f з відповідними обмеженнями згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Скласти програму для умовної мінімізації цільової функції f одним з методів проекції градієнту. Конкретний тип метода обрати самостійно, враховуючи особливості функції f та обмежень. Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C в версії, що є в наявності в дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, що не встановлена в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

При складанні програми необхідно:

- обчислення цільової функції та функцій обмежень реалізувати в окремій підпрограмі;
- часткові похідні обчислювати чисельно.

3. Знайти умовний мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета чисельної оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом вчених-математиків під керівництвом академіка НАН України Б.М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. В звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2-3 кроки обраного алгоритму умовної мінімізації.

3. Явні формули обчислення проекції $\pi_X a$ для деяких множин X

Нехай $a \in \mathbb{R}^n$. Розглянемо деякі конкретні випадки мноижини $X \in \mathbb{R}^n$.

1. Множина X — куля:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \left\|x - x^0\right\| \leq r\};$$
$$\pi_X a = x^0 + \frac{a - x^0}{\|a - x^0\|} \cdot r.$$

2. Множина X — координатний паралелепіпед:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon b_j \leq x_j \leq c_j,\ j = 1, \ldots, n\};$$
$$(\pi_X a)_j = \begin{cases} b_j, & \text{якщо } a_j < b_j; \\ a_j, & \text{якщо } b_j \leq a_j \leq c_j; \\ c_j, & \text{якщо } a_j > c_j. \end{cases}$$

3. Множина X — невід'ємний ортант:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\};$$
$$\pi_X a = (\max(0, a_1), \max(0, a_2), \ldots, \max(0, a_n)).$$

4. Множина X — гіперплощина:

$$X = H_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (p, x) = \beta\} \quad (p \neq 0);$$
$$\pi_X a = a + (\beta - (p, a)) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}.$$

Варіант	Цільова функція	Обмеження
1	$x^2 + y^2 + z^2$	$x + y + z = 1$
2	$2x^2 + 3y^2 + z^2$	$3x + 2y + z = 1$
3	$x^2 + 3y^2 + 2z^2$	$2x + y + 3z = 1$
4	$4x^2 + y^2 + z^2$	$x + 2y + 3z = 1$
5	$2x^2 + y^2 + 3z^2$	$4x + y + z = 1$
6	$x + y + z$	$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$
7	$2x + 3y + z$	$3x^2 + 2y^2 + z^2 \le 1$
8	$3x + y + 2z$	$2x^2 + y^2 + 3z^2 \le 1$
9	$x + 4y + z$	$x^2 + 3y^2 + 2z^2 \le 1$
10	$x + 2y + 3z$	$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$
11	y	$y - x^2 \ge 0$
12	$100(x^2 - y)^2 + (x - 1)^2$	$x(x - 4) - 2y + 12 = 0$
13	$-y$	$1 + x - 2y \ge 0;\ x^2 + y^2 - 1 = 0;$ $x \ge 0$
14	$-x$	$y - x^3 - z^2 = 0; x^2 - y - t^2 = 0$
15	x	$(x - 1)^3 - y = 0; x \ge 1; y \ge 0$
16	$-x$	$(1 - x)^3 - y \ge 0; x \ge 0; y \ge 0$
17	$-x$	$0.125 - y - (x - 1)^3 \ge 0;$ $x \ge 0;\ y \ge 0.$
18	$-x$	$e^{e^x} \ge 0; y - e^{e^x} \ge 0; y \le 10$
19	$x^2 + y^2$	$x + y - 1 \ge 0;\ x^2 + y^2 - 1 \ge 0;$ $9x^2 + y^2 - 9 \ge 0;\ x^2 - y \ge 0;$ $y^2 - x \ge 0.$
20	$-xy$	$x^2 + y^2 \ge 0;\ 1 - x^2 - y^2 \ge 0$ $x \ge 0;\ y \ge 0.$
21	$(x - 2)^2 + (y - 1)^2$	$-x^2 + y \ge 0; y - x^2 \ge 0$
22	$x^2 + y$	$-x - y + 1 \ge 0; -(x^2 + y^2) + 9 \ge 0$
23	y	$-2x^2 + x^3 + y \ge 0;$ $-2(1 - x)^2 + (1 - x)^3 + y \ge 0$
24	$100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$	$x + 3y + 0.3 \ge 0;$ $-x + 3y + 0.3 \ge 0$
25	$100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$	$x^2 + y^2 - 0.25 \ge 0$

***Таблиця 3.1.* Варіанти завдань на лабораторну роботу №3**

5. Множина X — полупростір:

$$X = H^+_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (p, x) \geq \beta\} \quad (p \neq 0);$$

$$\pi_X a = a + \max\left(0; \beta - (p, a)\right) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}.$$

Розділ 4

Лабораторна робота №4. Методи спряжених напрямків. Метод спряжених градієнтів

1. Теоретичні відомості. Методи спряжених напрямків для квадратичної функції

Методи спряжених напрямків, якщо говорити "неформально", базуються на ідеї мінімізувати квадратичну функцію за скінчене число кроків. Визначимо метод формально.

Мінімізується квадратична функція

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle ,$$

де A — симетрична додатньо визначена матриця розмірності $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Суть методу спряжених напрямків полягає в знаходженні таких напрямків h^0, h^1, $\ldots$, h^{n-1}, що послідовність одномірних мінімізацій уздовж h^j $(j = 1, 2 \ldots, n-1)$ мінімізує функцію f, а тобто:

$$f(x^n) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

де послідовність x^k, $0 \le k \le n$ визначається рекурентно:

- $x^0 \in \mathbb{R}$ — довільне число;
- $x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $f(x^k + \alpha_k h^k) = \min\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x^k + \alpha h^k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

Вказану властивість має система напрямків $h^0, \ldots, h^{n-1}$, *взаємно (попарно) спряжених* відносно матриці A, тобто:

$$\left\langle Ah^i, h^j \right\rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Конкретні алгоритми мінімізації базуються на способах побудови системи взаємно спряжених напрямків.

В методі *спряжених напрямків першого порядку* система взаємно спряжених напрямків будується по правилу:

$$\begin{aligned} &h^0 = -f'(x^0); \\ &h^k = -f'(x^k) + \beta_{k-a} h^{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\left\langle f'(x^k), Ah^{k-1} \right\rangle}{\left\langle h^{k-1}, Ah^{k-1} \right\rangle}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Відомо (див., наприклад, [1]), що побудовані за співвідношеннями (4.1) вектори h^0, ..., h^{n-1} є взаємно спряженими, а градієнти $f'(x^0)$, ..., $f'(x^{n-1})$ попарно ортогональні. Метод спряжених градієнтів (як частковий випадок методу спряжених напрямків) забезпечує відшукання точки мінімуму функції f не пізніше ніж на n–му кроці.

2. Завдання на лабораторну роботу

1. В таблиці 2.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з градієнтних методів. Конкретний тип градієнтного метода обрати самостійно, враховуючи особливості функції f (ярність тощо). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C в версії, що є в наявності в дисплейному класі, призначеному для проведення лабораторних робіт. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, що не встановлена в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

При складанні програми необхідно:

- обчислення цільової функції реалізувати в окремій підпрограмі;

- часткові похідні цільової функції обчислювати чисельно.

3. Знайти мінімум заданої цільової функції f за допомогою пакета чисельної оптимізації PACOPT (пакет розроблено колективом вченихматематиків під керівництвом академіка НАН України Б.М. Пшеничного).

4. За результатами досліджень скласти звіт. В звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2-3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

3. Додаткоі завдання на лабораторну роботу

1.

Застосувати метод найшвидшого спуску до двовимірної квадратичної функції $f(x)$ для різних початкових наближень.

1) $f(x) = x_1 + ax_2$;

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3$.

Параметр a задається користувачем з вимогою $a \gg 1$ (a набагато більше за одиницю).

2. Застосувати метод найшвидшого спуску до тривимірної квадратичної функції $f(x)$ $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Розділ 5

Лабораторна робота №5. Елементи теорії оптимального керування

1. Теоретичні відомості

1.1. Постановка задачі

Нехай рух керованого об'єкта описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{5.1}$$

де $x = (x_1, \dots x_n)$ — вектор координат об'єкта (або *вектор фазових координат*), $f = (f_1, \dots, f_n)$ — задана функція, $u = (u_1, \dots, u_r)$ — вектор керувань (або просто *керування*). В рівнянні (5.1) вектори x та u є функціями змінної t, яка означає час, причому $t \in [t_0, T]$; тут і надалі $[t_0, T]$ — відрізок часу, на якому відбувається керування. На керування, як правило, додатково накладається умова:

$$u(t) \in U(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{5.2}$$

де $U(t)$ при кожному $t \in [t_0, T]$ — задана множина в $\mathbb{R}^r$. Векторну (r–вимірну) функцію u називають *керуванням*, якшо вона кусково–неперервна на $[t_0, T]$ (тобто u має на $[t_0, T]$ скінченну кількість розривів першого роду, і не має розривів другого роду), неперервна справа у точках розриву та неперервна у точці T. Керування u називається *допустимим*, якщо воно додатково задовольняє обмеженню (5.2).

Нехай функція u має стрибки (розриви першого роду) в точках $\tau_1, \dots, \tau_k$, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < T$. Розглянемо задачу Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le T, \quad x(t_0) = x^0. \tag{5.3}$$

Припустимо, шо задача (5.3) має розв'язок x визначений на відрізку часу $[0, \tau_1]$, причому $x(\tau_1) = x^1$. Далі розглянемо задачу Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(\tau_1) = x^1.$$

Припускаючи, що ця задача має розв'язок на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$, причому $x(\tau_2) = x^2$, переходимо до задачі

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(\tau_2) = x^2, \quad \text{і т.д.}$$

Функцію x, яку вдається визначити вказаним способом на всьому відрізку $[t_0, T]$, будемо називати розв'язком задачі Коші (5.3) або *фазовою траєкторією*, що відповідає керуванню u. Функція x за побудовою неперервна на $[t_0, T]$ та задовольняє для всіх $t \in [t_0, T]$ рівність:

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau.$$

Теорема 5.1 (існування). *Нехай вектор-функція f визначена та неперервна по сукупності аргументів на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, T]$ і задовольняє умову Ліпшиця по x з деякою константою $M > 0$:*

$$\|f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)\| \le M\|x - \hat{x}\|, \quad x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r, \ t \in [t_0, T].$$

Тоді для довільного $x^0 \in \mathbb{R}^n$ та довільного кусково-неперервного керування u задача (5.3) має єдиний розв'язок, визначений на всьому відрізку $[t_0, T]$.

Загальна постановка задачі оптимального керування передбачає систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{5.4}$$

яка описує рух деякого керованого об'єкта, що підпорядкований наступним умовам:

$$x(t_0) \in S_0 \text{ — початкові умови;} \tag{5.5}$$

$$x(T) \in S_T \text{ — кінцеві умови;} \tag{5.6}$$

$$t_0 \in \Theta_0 \text{ — умови на початковий момент часу;} \tag{5.7}$$

$$T \in \Theta_1 \text{ — умови на кінцевий момент часу;} \tag{5.8}$$

$$x(t) \in X(t),\ t \in [t_0, T] \text{ — фазові обмеження;} \tag{5.9}$$

$$u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T] \text{ — обмеження на керування,} \tag{5.10}$$

де S_0, S_T, $X(t)$, $U(t)$ — задані множини при кожному $t \in [t_0, T]$.

За *цільовий фунціонал* (аналог цільової функції в задачах оптимізації) приймається

$$J(u, x_0, t_0, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(t_0, x_0, x(T), T), \tag{5.11}$$

який є сумою *інтегрального функціоналу* $\int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt$ та *термінального функціоналу* $\Phi(t_0, x_0, x(T), T)$. Ця задача у загальній формі називається *задачею Больца*. Задача керування, що містить лише інтегральний функціонал (термінальний функціонал є тотожним нулем) називається *задачею Лагранжа*; задача, що містить лише термінальний функціонал (інтегральний функціонал є тотожним нулем) називається *задачею Майера*. Задача з інтегральним функціоналом при $f_0 \equiv 1$ називається *задачею оптимальної швидкості*.

Таким чином, задача оптимального керування ставиться як задача мінімізації функціоналу (5.11) при обмеженнях (5.4)–(5.10). Під мінімізацією функціоналу вважається наступне:

- При фіксованих t_0, $x_0 = x(t_0)$ та допустимому керуванні u траєкторія x керованого об'єкта визначається однозначно; таким чином, однозначно визначається і значення цільового функціонала $J(u, x_0, t_0.T, x(T))$.
- Кожне допустиме керування u переводить точку x_0 в деяку іншу точку $x(T)$.

- Потрібно з усіх можливих t_0, T ($t_0 \le T$), x_0, $x(T)$ та з усіх допустимих керувань $u \in U$, що переводять точку x_0 в точку $x(T)$ при обмеженнях (5.4)–(5.10), вибрати такі моменти t_0 та T, такі координати x_0 та $x(T)$, і таке керування u, що надають функціоналу (5.11) найменшого можливого значення.

Керування $\tilde{u}(t)$, яке є розв'язком цієї задачі, називається *оптимальним керуванням*, а відповідна йому траєкторія $\tilde{x}(t)$ — *оптимальною траєкторією*.

1.2. Принцип максимуму Понтрягіна (основна теорема)

Основним результатом теорії оптимального керування є принцип максимуму Понтрягіна, який вказує необхідні умови оптимальності в задачах цього класу.

Розглянемо дещо спрощену задачу.

$$\begin{cases} J(u,T,x(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T),T) \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \\ x(t_0) = x_0 \\ g_k(x(T),T) = 0 \ (k = \overline{1,m}) \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T; \end{cases} \tag{5.12}$$

тут $g_k : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,m})$ — задані функції, $S_0 = \{x_0\}$, $x(T) \in S_T = \{\xi \in \mathbb{R}^n : g_k(\xi,T) = 0,\ k = \overline{1,m}\}$, множина U не залежить від часу, фазові обмеження відсутні.

Для формулювання принципа максимуму Понтрягіна вводиться наступна функція — *функція Гамільтона*:

$$H(x,u,t,a_0,\psi) = -a_0 f_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x,u,t),$$

де $a_0 = const$, $\psi(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))$. Система лінійних рівнянь відносно змінних $\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$

$$\dot{\psi} = -H'_x \tag{5.13}$$

називається *спряженою системою*, що відповідає траєкторії x і керуванню u (ми вживаємо зручне скорочення $H'_x = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)$). Система (5.13) в координатній формі має вигляд:

$$\dot{\psi}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), u(t), t) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 5.2. *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n, Φ, g_1, ..., g_m мають всі часткові похідні першого порядку і є неперервними разом з цими похідними по сукупності аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t_0 \le t \le T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{T})$ — розв'язок задачі оптимального керування (5.12). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \ge 0$, a_1, ... a_m такі, що $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_m| \ne 0$, причому виконуються наступні умови:*

- *(умова максимуму) при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t))$ досягає максимуму по u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t)); \tag{5.14}$$

- *(перша умова трансверсальності на правому кінці)*

$$\psi(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) - \sum_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \tag{5.15}$$

- *(друга умова трансверсальності на правому кінці)*

$$\max_{u \in U} H(\tilde{x}(\tilde{T}), u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) + \sum_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}). \tag{5.16}$$

1.3. Схема застосування принципа максимуму Понтрягіна

При застосуванні принципа максимуму Понтрягіна можна користуватись наступною схемою (ми маємо на увазі задачу (5.12)):

1. Використовуючи умову максимуму (5.14), знаходять "підозріле на оптимальність" керування $\tilde{u}(t)$ як функцію v, що залежить від додатко-

вих параметрів $x(t)$, a_0 та $\psi(t)$:

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{u}(t) = v(t, x(t), a_0, \psi(t)).$$

2. Виписують систему $2n$ диференціальних рівнянь, що включає n рівнянь вихідного об'єкту (5.4) та n рівнянь спряженої системи (5.13) (замість $\tilde{u}$ підставляють щойно знайдений вираз v):

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) & = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{\psi}_i(t) & = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ & \quad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5.17}$$

Загальним розв'язком системи (5.17) буде "підозріла на оптимальність" траекторія $\tilde{x}$ та відповідна вектор-функція ψ, які додатково залежать від $2n$ констант інтегрування та від параметру a_0.

3. Константи інтегрування, що виникають при розв'язанні системи (5.17) ($2n$ констант), знаходять сумісно із параметрами a_0, a_1, $\ldots a_m$ та кінцевим моментом $\tilde{T}$, використовуючи умови трансверсальності (5.15) та (5.16), умови на закріпленному за умовами задачі лівому кінці ($x(t_0) = x_0$), а також умови $g_k(x(\tilde{T}), \tilde{T}) = 0$ ($k = \overline{1, m}$) на правому кінці:

$$\begin{cases} \psi_i(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_{x_i}(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) - \sum\limits_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_{x_i}(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}), \quad i = \overline{1, n}, \\ H(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{u}(\tilde{T}), \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}), \\ x_k(t_0) = (x_0)_k \quad (k = \overline{1, n}), \\ g_k(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) = 0 \quad (k = \overline{1, m}). \end{cases} \tag{5.18}$$

Система (5.18) містить $2n+m+1$ алгебраїчне рівняння та $2n+m+2$ невідомих, тобто для повного розв'язання системи (5.18) не вистачає одного рівняння.

4. Додаткову умову для розв'язання (5.18) отримують, використовуючи так звану *однорідність* функції Гамільтона відносно a_0 та ψ:

$$H(x, u, t, \alpha a_0, \alpha\psi) = \alpha H(x, u, t, a_0, \psi), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Звідси отримуємо:

$$v(t, x(t), \alpha a_0, \alpha\psi(t)) = \alpha v(t, x(t), a_0, \psi(t)), \quad \forall\, \alpha > 0$$

де $v(t, x(t), a_0, \psi(t))$ є розв'язком умови максимуму (5.14). Умови трансверсальності (5.15) та (5.16) також є однорідними відносно $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та ψ. Таким чином, якщо деякий набір параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та вектор ψ задовольняють умови теореми 5.2, то ці умови також задовольняються набором $\alpha a_0, \alpha a_1, \ldots, \alpha a_m$ та вектором $\alpha\psi$ при будь-якому $\alpha > 0$. Отже, параметри $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та вектор ψ визначаються теоремою 5.2 лише з точністю до додатного множника, і цей множник ми можемо обирати довільно. Це дозволяє запровадити певне нормування, наприклад (враховуючи, що параметри $a_0, a_1, \ldots, a_m$ одночасно не дорівнюють нулю):

$$\sum_{k=0}^{m} a_k^2 = 1.$$

Досить часто вдається довести додатність a_0, і тоді можна застосувати більш зручне нормування:

$$a_0 = 1.$$

Отже, застосування принципа максимуму Понтрягіна фактично зводиться до розв'язання задачі Коші (5.17), (5.18), яку часто називають *крайовою задачею принципа максимуму*. Розглянемо крайову задачу принципа максимуму для найбільш поширених режимів обмежень для кінцевого момента часу та правого кінця траєкторії.

2. Деякі типи обмежень на правому кінці траєкторії

2.1. Фіксований кінцевий момент часу та закріплений правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T є фіксованим, тобто $T = T_0$, та правий кінець траєкторії $x(T)$ закріплений, тобто $x(T) = x_T$. Цей режим передбачає $n+1$ обмеження, які можна реалізувати наступними функціями g_k:

$$g_1(\xi, T) = \xi_1 - (x_T)_1,\ \ldots,\ g_n(\xi, T) = \xi_n - (x_T)_n, \quad g_{n+1}(\xi, T) = T - T_0. \tag{5.20}$$

Отже, ми розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u) = \int\limits_{t_0}^{T_0} f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(T_0) = x_T \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T_0 \end{cases} \tag{5.21}$$

(додаток $\Phi(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) = \Phi(x_T, T_0)$ в даному режимі є константою, і його можна не враховувати).

Умови трансверсальності при даному режимі набувають вигляду:

$$\psi(T_0) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$
$$\max_{u \in U} H(\tilde{x}(T_0), u, T_0, a_0, \psi(T_0)) = a_{n+1}.$$

Таким чином, параметри $a_1, \ldots, a_n$ визначаються з першої умови трансверсальності, а параметр a_{n+1} — з другої умови трансверсальності:

$$\begin{gathered} a_k = -\psi_k(T_0), \quad k = \overline{1, n}; \\ a_{n+1} = \max_{u \in U} H(x_T, u, T_0, a_0, \psi(T_0)). \end{gathered} \tag{5.22}$$

(нагадаємо, що a_0 можна зафіксувати нормуванням, наприклад $a_0 = 1$ при $a_0 > 0$).

Тепер, враховуючи той факт, що параметри $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ зустрічаються лише в умовах трансверсальності, можемо вилучити їх із крайової задачі максимуму разом з умовами трансверсальності. Отже, крайова задача принципа максимуму набуває досить простого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{\psi}_i(t) &= a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ & \quad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}. \\ x_k(t_0) &= (x_0)_k \quad (k = \overline{1, n}), \\ x_k(T_0) &= (x_{T_0})_k \quad (k = \overline{1, n}). \end{cases} \tag{5.23}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, можна обчислити параметри $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ з умов (5.22). Однак для розв'язання даної задачі оптимального керування параметри $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ не потрібні.

Тепер розглянемо можливі варіанти нормування параметрів. Розглянемо два випадки.

- $a_0 = 0$. В цьому випадку з (5.22) отримуємо:

$$|\psi_1(T_0)| + |\psi_2(T_0)| + \cdots + |\psi_n(T_0)| \neq 0$$

  (інакше $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| = 0$, що протирічить умові теореми 5.2). Крім того, із спряженої системи бачимо, що вектор ψ_k $(k = \overline{1,n})$ при $a_0 = 0$ задовольняє диференціальне рівняння:

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x} f_j(x(t), u(t), t).$$

  Але тоді рівність $\psi(T_0) = 0$ тягне тотожність $\psi \equiv 0$. Отже, при $a_0 = 0$ можемо гарантувати виконання умови:

$$|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0].$$

- $a_0 > 0$. В цьому випадку, як вже зазначалось, можемо вибрати зручне нормування $a_0 = 1$.

Таким чином, в обох розглянутих випадках (тобто для будь-якого $a_0 \geq 0$) виконується наступна умова:

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0] \tag{5.24}$$

(яка зараз еквівалентна умові $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| \neq 0$).

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для даного часткового випадку.

Наслідок 1 (фіксований T та закріплений $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, …, f_n мають всі часткові похідні першого порядку є неперервними разом з цими похідними по сукупності аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ — розв'язок задачі оптимального керування (5.21). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і число $a_0 \geq 0$, такі, що*

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконується умова максимуму:

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t)).$$

2.2. Фіксований кінцевий момент часу та вільний правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T є фіксованим, тобто $T = T_0$, а правий кінець траєкторії $x(T)$ вільний, тобто жодного обмеження на $x(T)$ не встановлено. Цей режим передбачає одне обмеження, яке можна реалізувати такою функцією g_1:

$$g_1(\xi, T) = T - T_0. \tag{5.25}$$

Отже, ми розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u, x(T_0)) = \int\limits_{t_0}^{T_0} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T_0)) \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T_0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Умови трансверсальності при даному режимі набувають вигляду:

$$\begin{gathered} \psi(T_0) = -a_0 \Phi'(\tilde{x}(T_0)); \\ H(\tilde{x}(T_0), \tilde{u}(T_0), T_0, a_0, \psi(T_0)) = a_1. \end{gathered}$$

Таким чином, параметр a_1 знаходимо з другої умови трансверсальності:

$$a_1 = H(\tilde{x}(T_0), \tilde{u}(T_0), T_0, a_0, \psi(T_0)). \tag{5.27}$$

Тепер, оскільки параметр a_1 зустрічається лише в другій умові трансверсальності, можемо вилучити його із крайової задачі максимуму разом з другою умовою трансверсальності. Отже, крайова задача принципа максимуму набуває досить простого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) & = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{\psi}_i(t) & = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ & \quad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}. \\ x_k(t_0) & = (x_0)_k \quad (k = \overline{1, n}), \\ \psi(T_0) & = -a_0 \Phi'(x(T_0)). \end{cases} \tag{5.28}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, параметр a_1 можна обчислити з умови (5.27). Однак для розв'язання даної задачі оптимального керування параметр a_1 не потрібен.

Аналогічно до попереднього випадку (фіксований T та закріплений $x(T)$) неважко довести, що в даному режимі також виконується умова (5.24), яку зручно використовувати при нормуванні параметрів:

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0]$$

(еквіваленто умові $a_0 + |a_1| \neq 0$). Більш того, в даному випадку ми можемо гарантувати, що $a_0 > 0$ — інакше з першої умови трансверсальності отримали б, що $\psi(T_0) = 0$. Таким чином, в даному випадку можемо прийняти $a_0 = 1$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для даного часткового випадку.

Наслідок 2 (фіксований T та вільний $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, $\ldots$, f_n, Φ мають всі часткові похідні першого порядку є неперервними разом з цими похідними по сукупності аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $t_0 \leq t \leq T_0$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ — розв'язок задачі оптимального керування (5.26). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і число $a_0 > 0$ (можна вибрати довільним додатним, наприклад $a_0 = 1$), такі, що виконуються наступні умови:*

- *(умова максимуму)*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), T, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, T, a_0, \psi(t));$$

- *(перша умова трансверсальності)*

$$\psi(T_0) = -a_0 \Phi'(\tilde{x}(T_0)).$$

2.3. Вільний кінцевий момент часу та закріплений правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T є вільним, тобто жодного обмеження на T не встановлено, а правий кінець траєкторії $x(T)$ закріплений, тобто $x(T) = x_T$. Цей режим передбачає n обмежень, які можна реалізувати наступними функціями g_k:

$$g_1(\xi, T) = \xi_1 - (x_T)_1, \ \ldots, \ g_n(\xi, T) = \xi_n - (x_T)_n. \tag{5.29}$$

Отже, ми розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u,T) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(T) \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5.30}$$

Умови трансверсальності при даному режимі набувають вигляду:

$$\begin{gathered} \psi(\tilde{T}) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n); \\ \max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'(\tilde{T}). \end{gathered}$$

Таким чином, параметри $a_1, \ldots, a_n$ визначаються з першої умови трансверсальності:

$$a_k = -\psi_k(\tilde{T}), \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.31}$$

(нагадаємо, що a_0 можна зафіксувати нормуванням, наприклад $a_0 = 1$ при $a_0 > 0$).

Тепер, оскільки параметри $a_1, \ldots, a_n$ зустрічаються лише в першій умові трансверсальності, можемо вилучити їх із крайової задачі максимуму разом з першою умовою трансверсальності. Отже, крайова задача принципа максимуму набуває досить простого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{\psi}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, \psi(t)), t) - \\ \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}, \\ x_k(t_0) = (x_0)_k \quad (k = \overline{1, n}), \\ x_k(T) = (x_T)_k \quad (k = \overline{1, n}), \\ \max\limits_{u \in U} H(x_T, u, T, a_0, \psi(T)) = a_0 \Phi'(T). \end{cases} \tag{5.32}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, параметри $a_1, \ldots, a_n$ можна обчислити з умов (5.31). Однак для розв'язання даної задачі оптимального керування параметри $a_1, \ldots, a_n$ не потрібні.

Легко перевірити, що в даному випадку також виконується умова (5.24), яку зручно застосовувати при нормуванні параметрів:

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0]$$

(еквівалентно умові $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| \neq 0$).

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для даного часткового випадку.

Наслідок 3 (вільний T та закріплений $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, $\ldots$, f_n, Φ мають всі часткові похідні першого порядку є неперервними разом з цими похідними по сукупності аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \le T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ — розв'язок задачі оптимального керування (5.30). Тоді існує розв'язок ψ спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \ge 0$, a_1, $\ldots a_n$ такі, що*

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \cdots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконуються наступні умови:

- *(умова максимуму) при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t))$ досягає максимуму по u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t));$$

- *(друга умова трансверсальності на правому кінці)*

$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'(\tilde{T}).$$

2.4. Вільний кінцевий момент часу та вільний правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T та правий кінець траєкторії $x(T)$ є вільними, тобто жодного обмеження на T та $x(T)$ не встановлено. Цей режим не передбачає обмежень, і функції g_k зараз відсутні ($m = 0$).

Отже, ми розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u,T,x(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T),T) \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5.33}$$

Умови трансверсальності при даному режимі набувають вигляду:

$$\psi(\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}),\tilde{T});$$
$$\max_{u\in U} H(x_T,u,\tilde{T},a_0,\psi(\tilde{T})) = a_0\Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}),\tilde{T}).$$

Отже, крайова задача принципа максимуму набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x(t),v(t,x(t),a_0,\psi(t)),t), \quad i = \overline{1,n}, \\ \dot{\psi}_i(t) = a_0\frac{\partial}{\partial x_i}f_0(x(t),v(t,x(t),a_0,\psi(t)),t) - \\ \qquad -\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j(t)\frac{\partial}{\partial x_i}f_j(x(t),u(t),t), \qquad i = \overline{1,n}. \\ x_k(t_0) = (x_0)_k \quad (k = \overline{1,n}), \\ \psi(\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}),\tilde{T}), \\ \max\limits_{u\in U} H(x_T,u,\tilde{T},a_0,\psi(\tilde{T})) = a_0\Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}),\tilde{T}). \end{cases} \tag{5.34}$$

При даному режимі існує лише один параметр $a_0 \ge 0$, і за умовою теореми 5.2 отримуємо: $a_0 > 0$. Отже, із міркувань нормування, можемо вибрати єдиний параметр a_0 довільним додатним числом, наприклад $a_0 = 1$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для даного часткового випадку.

Наслідок 4 (вільні T та $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, …, f_n, Φ мають всі часткові похідні першого порядку і є неперервними разом з цими* *похідними по сукупності аргументів* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. *Нехай* $(\tilde{u}, \tilde{x})$ *— розв'язок задачі оптимального керування* (5.33). *Тоді існує розв'язок* ψ *спряженої системи* (5.13), *який відповідає керуванню* $\tilde{u}$ *та траєкторії* $\tilde{x}$, *і числа* $a_0 \geq 0$, a_1, $\dots a_n$ *такі, що*

$$a_0 + |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)| + \dots + |\psi_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконуються наступні умови:

- *(умова максимуму) при кожному* $t \in [t_0, \tilde{T}]$ *функція Гамільтона* $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t))$ *досягає максимуму по* u *при* $u = \tilde{u}(t)$, *тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, \psi(t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, \psi(t));$$

- *(перша умова трансверсальності на правому кінці)*

$$\psi(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T});$$

- *(друга умова трансверсальності на правому кінці)*

$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, \psi(\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}).$$

2.5. Загальні зауваження

Ми розглянули два типу обмежень на правий кінець траєкторії — відсутність обмежень на $x(T)$ та жорстка фіксація ($x(T) = x_T$). Тут слід зробити два зауваженння.

Зауваження 5.1. Часто зустрічається комбінація розглянутих обмежень на $x(T)$, тобто деякі координати $x(T)$ закріплені, а інші є вільними:

$$x_i(T) = (x_T)_i, \quad i \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.$$

В цьому випадку до закріплених координат $x_i(T) = (x_T)_i$, $i = j_1, j_2, \dots, j_k$ можна застосувати схему, що запропонована для закріпленого кінця траєкторії, тобто відповідні умови транверсальності разом з відповідними параметрами виключаються із крайової задачі (5.17), (5.18) (див. приклад 5.3).

Зауваження 5.2. Очевидно, що випадками жорсткого закріплення та повної свободи не вичерпуються всі можливі обмеження на правому кінці траєкторії. Зокрема, в задачі може існувати нетривіальний функціональний зв'язок між кінцем траєкторії $x(T)$ і моментом часу T, тобто одна або декілька функцій обмеження $g_k(\xi, T)$ можуть суттєво залежати від обох змінних (див. приклад 5.4).

Зауваження 5.3. Схема застосування принципа максимуму, що запропонована в підрозділі 1.3, носить лише загально-рекомендаційний характер. Іноді (і досить часто) можна прискорити розв'язання задачі, якщо відступити від запропонованої схеми. Так, якщо спряжена система не містить векторів x та u (це можливо, якщо система (5.4), що описує об'єкт, є лінійною), доцільно спочатку знайти загальний розв'язок спряженої системи (5.13), а вже потім, використовуючи знайдений вираз для $\psi(t)$, переходити до загальної схеми.

3. Приклади розв'язання задач оптимального керування

Приклад 5.1. Нехай точка рухається по прямій за законом:

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T$$

при фіксованих $x(0)$ та $x'(0)$. Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початкового положення в початок координат за мінімальний час T. При цьому швидкість точки в кінці траєкторії повина бути нульовою, а керування має задовольняти умові:

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, T].$$

Застосуємо до задачі принцип максимуму Понтрягіна. Спочатку позбавимось другої похідної, ввівши двовимірний вектор фазових змінних: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тепер рух керованого об'єкта можна описати системою диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

Початкове положення $x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ при $t_0 = 0$ та кінцеве положення $x(T) = (0, 0)$ за умовою задачі фіксовані, а кінцевий момент часу T незакріплений, тобто маємо випадок, розібраний в підродділі 2.3. В даній задачі $U = [-1, 1]$, $f_0 \equiv 1$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона має вигляд:

$$H = -a_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Спряжена система має вигляд:

$$\dot{\psi}_1 = -H'_{x_1} = 0,$$
$$\dot{\psi}_2 = -H'_{x_2} = -\psi_1,$$

Як зазначалось в підрозділі 2.3, в даному випадку можна не використовувати першу умову трансверсальності (виключивши відповідні параметри). Друга умова трансверсальності для даної задачі має вигляд:

$$-a_0 + \psi_1(T)x_2(T) + \psi_2(T)u(T) = 0. \tag{5.35}$$

Отже, крайова задача принципа максимуму набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t), \\ \dot{\psi}_1(t) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1, \\ x_k(0) = (x_0)_k \quad (k = \overline{1,2}), \\ x_k(T) = 0 \quad (k = \overline{1,2}), \\ -a_0 + \psi_1(T)x_2(T) + \psi_2(T)\tilde{u}(T) = 0, \end{cases}$$

де оптимальне управління $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона:

$$-a_0 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u \in U}(-a_0 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u).$$

Оскільки спряжена система для даної задачі має дуже простий вигляд, не містить x та ψ і допускає явний запис загального розв'язку, має сенс дещо відступити від загальної схеми і спочатку виписати загальний розв'язок спряженої системи, а вже потім шукати оптимальне керування з умови максимізації функції Гамільтона (див. заув. 5.3). Загальний розв'язок спряженої системи можна записати в явному вигляді:

$$\psi_1(t) = C; \quad \psi_2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \text{ — константи.}$$

Беручі до уваги умову нормування (5.24), будемо розглядати випадок $|C|+|D|\neq 0$ (інакше, із (5.35) отримуємо $a_0=0$, що протирічить умові (5.24)). Максимум функції H по $u\in U$ досягається лише при такому керуванні $\tilde{u}$, яке задовольняє умові:

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases}1, & \psi_2(t)>0,\\ -1, & \psi_2(t)<0.\end{cases}$$

Очевидно, що при $\psi_2(t)=0$ керування $\tilde{u}(t)$ може набувати довільного значення. Проте, враховуючи вимогу неперервності u справа, а також умову $\psi_2(t)\not\equiv 0$ ($\psi_2(t)\equiv 0\Rightarrow C=D=0$), отримуємо, що $\tilde{u}(t)\in\{-1,1\}$ і при $\psi_2(t)=0$.

Таким чином, оптимальне керування може приймати лише два значення $u(t)\in\{-1,1\}$ для всіх $t\in[0,T]$. Далі, завдяки лінійності ψ_2, оптимальне керування $\tilde{u}$ може мати не більше однієї "точки перевмикання" — точки розриву, де функція $\tilde{u}$ міняє знак.

Далі, як приклад, розглянемо конкретну початкову умову: $x^0=(1,0)$.

Легко переконатись, що фунції керування $u(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<t_1,\\ -1, & t_1\le t\le T,\end{cases}$ $u(t)\equiv 1$ та $u(t)\equiv -1$ не можуть перевести точку $x(t)$ з положення $(1,0)$ в $(0,0)$, тобто оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ повинно мати точку перевмикання $t_1\in(0,T)$ із -1 в 1:

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<t_1,\\ 1, & t_1\le t\le T,\end{cases}$$

Такому керуванню та початковим умовам $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$ відповідає траєкторія:

$$x_1(t)=\begin{cases}1-\frac{t^2}{2}, & 0\le t<t_1,\\ \frac{t^2}{2}-2t_1t+t_1^2+1, & t_1\le t\le T,\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}-t, & 0\le t<t_1,\\ t-2t_1, & t_1\le t\le T.\end{cases}$$

Із умов $x_1(T)=x_2(T)=0$ знаходимо: $T=\widetilde{T}=2$, $t_1=\frac{\widetilde{T}}{2}=1$ (система має також розв'язок $t_1=-1$, $T=-2$, який ми відкидаємо, оскільки від'ємний час не відповідає вимогам нашої задачі).

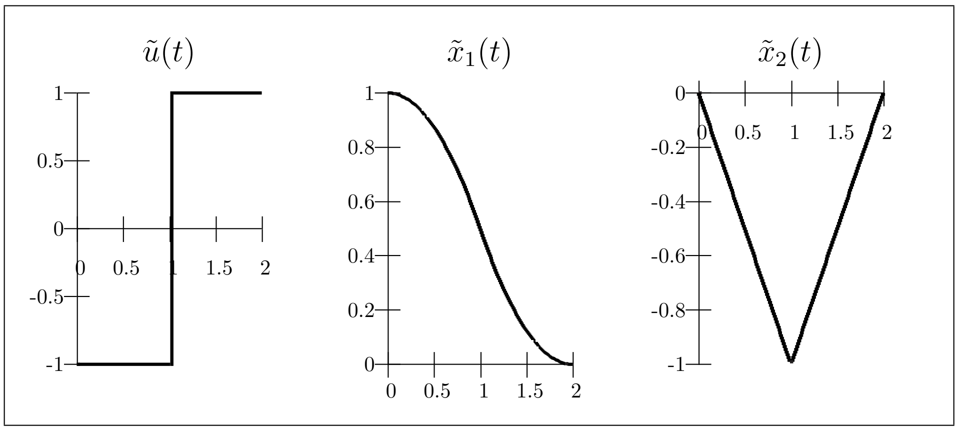
Таким чином, принцип максимуму дозволяє лише одне оптимальне керування:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Існування оптимального керування можна довести, розглянувши фізичну суть даної задачі (ми зараз не будемо цього робити). Отже, оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ існує і єдине, і йому відповідає така оптимальна траєкторія:

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1, \\ \frac{(t-2)^2}{2}, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t < 1, \\ t - 2, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$



Цікаво, що для розв'язку задачі, тобто для знаходження оптимального управління $\tilde{u}$ та відповідної траєкторії $\tilde{x}$, ми не обчислювали константи C та D — ми знайшли лише точку перевмикання $t_1 = T/2 = 1$, яка визначає зв'язок між C та D:

$$\psi_2(t_1) = 0 \Leftrightarrow -C + D = 0 \Leftrightarrow C = D.$$

Додаткове рівняння для обчислення C та D надається другою умовою трансверсальності (5.35):

$$-a_0 + \psi_1(\widetilde{T})x_2(\widetilde{T}) + \psi_2(\widetilde{T})\tilde{u}(\widetilde{T}) = 0 \Leftrightarrow -a_0 + (-C\widetilde{T} + D)\tilde{u}(\widetilde{T}) = 0 \Leftrightarrow a_0 = -C.$$

($\tilde{u}(\tilde{T}) = 1$, оскільки функція $\tilde{u}$ зростає від $\tilde{u}(0) = -1$ до $\tilde{u}(\widetilde{T}) = 1$ і має лише одну точку перевмикання $t_1 = \frac{\widetilde{T}}{2}$). Отже, як і слід було чекати, параметр $a_0 = -C$ та функції $\psi_1(t) = C$ і $\psi_2(t) = -C(t-1)$ визначені з точністю до додатнього множника $-C$ (зазначимо, що $C < 0$, оскільки $\psi_2(t) = -C(t-1)$ має зростати).

Приклад 5.2. Нехай, як і в попередньому прикладі, точка рухається по прямій за законом:

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T,$$

початкове положення та швідкість є фіксованими: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початку координат в положення $x(T) = 1$, $\dot{x}(T) = 0$, мінімізучи наступний функціонал:

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)dt.$$

Кінцевий момент T є фіксованим.

Як і в попередньому прикладі, позбавимось другої похідної, ввівши двовимірний вектор фазових змінних: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

Початкове положення $x(0) = (0, 0)$, правий кінець $x(T) = (1, 0)$ та кінцевий момент T за умовою задачі фіксовані, тобто маємо випадок, розібраний в підрозділі 2.1. В даній задачі $U = \mathbb{R}$, $f_0(x(t), u(t), t) = u(t)$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона та спряжена система мають вигляд:

$$H(x, u, T, a_0, \psi) = -a_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Отже, крайова задача принципа максимуму має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t), \\ \dot{\psi}_1(t) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t), \\ x_k(0) = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \\ x_1(T) = 1, \ x_2(T) = 0, \end{cases}$$

де оптимальне управління $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона:

$$-a_0\tilde{u}(t)^2 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u\in\mathbb{R}}(-a_0u^2 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u).$$

Запишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$$\psi_1(t) = C; \quad \psi_2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум по u лише при тих t, коли $\psi_2(t) = 0$, тобто $\psi_2 \equiv 0$, $\psi_1 = -\dot{\psi}_2 \equiv 0$, що протирічить умові (5.24). Таким чином, $a_0 > 0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при $\tilde{u}(t) = \frac{\psi_2(t)}{2} = \frac{-Ct+D}{2}$. Такому керуванню при початкових умовах $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ відповідає траєкторія:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{Ct^3}{12} + \frac{Dt^2}{4}; \\ x_2(t) = -\frac{Ct^2}{4} + \frac{Dt}{2}. \end{cases}$$

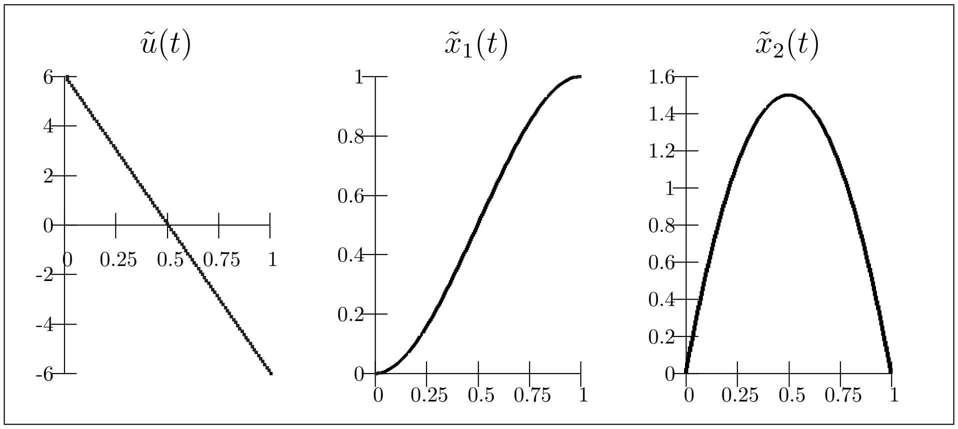
Константи C та D знаходимо з умов на правому кінці інтервала:

$$\begin{cases} x_1(T) = -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = 0; \\ x_2(T) = -\frac{CT^2}{4} + \frac{DT}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{24}{T^3}, \\ D = \frac{12}{T^2}. \end{cases}$$

Отже, отримуємо оптимальне керування та відповідну траєкторію:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= -\frac{12t}{T^3} + \frac{6}{T^2}, \\ \tilde{x}_1(t) &= -\frac{2t^3}{T^3} + \frac{3t^2}{T^2}, \\ \tilde{x}_2(t) &= -\frac{6t^2}{T^3} + \frac{6t}{T^2}. \end{aligned}$$

Наведемо відповідні графіки для випадку $T = 1$.



Приклад 5.3. Нехай, як і в попередньому прикладі, точка рухається по прямій за законом:

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T,$$

початкове положення та швидкість є фіксованими: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початку координат в положення $x(T) = 1$ з довільною кінцевою швидкістю ($\dot{x}(T) \in \mathbb{R}$), мінімізучи наступний функціонал:

$$J(u) = \int\limits_0^T u^2(t)dt.$$

Кінцевий момент T є фіксованим.

Як і в попередньому прикладі, позбавимось другої похідної, ввівши двовимірний вектор фазових змінних: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

Початкове положення та перша координата вектора $x(T)$ фіксовані: $x(0) = (0, 0)$, $x_1(T) = 1$; значення $x_2(T)$ є вільним. Отже, маємо одне обмеження на правому кінці траекторії:

$$g_1((x_1(T), x_2(T)), T) = 0, \text{ де } g_1(\xi, T) = \xi_1 - 1, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

Згідно із теоремою 5.2 ми вводимо до розгляду параметри $a_0 \ge 0$ та $a_1 \in \mathbb{R}$ (в нашому випадку $m = 1$). Випишемо першу умову трансверсальності:

$$\psi_1(T) = -a_1; \quad \psi_2(T) = 0.$$

В даній задачі $U = \mathbb{R}$, $f_0(x(t), u(t), t) = u^2(t)$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона та спряжена система мають вигляд:

$$H(x, u, T, a_0, \psi) = -a_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Отже, крайова задача принципа максимуму (5.17), (5.18) для даного випадку має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t), \\ \dot{\psi}_1(t) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \\ x_1(T) = 1, \\ \psi_1(T) = -a_1, \ \psi_2(T) = 0, \end{cases} \tag{5.36}$$

де оптимальне управління $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона:

$$-a_0 \tilde{u}(t)^2 + \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) \tilde{u}(t) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (-a_0 u^2 + \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) u).$$

Як і слід було чекати (див. зауваження 5.1), параметр a_1 зустрічається лише в першій умові трансверсальності, і його можна вилучити із розгляду разом з умовою $\psi_1(T) = -a_1$. Таким чином, система (5.36) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t), \\ \dot{\psi}_1(t) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \\ x_1(T) = 1, \\ \psi_2(T) = 0. \end{cases}$$

Випишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$$\psi_1(t) = C, \quad \psi_2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум по u лише при тих t, коли $\psi_2(t) = 0$, тобто $\psi_2 \equiv 0$, $\psi_1 = -\dot{\psi}_2 \equiv 0$, що протирічить умові $a_0 + |a_1| \neq 0$. Таким чином, $a_0 > 0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при $\tilde{u}(t) = \frac{\psi_2(t)}{2} = \frac{-Ct+D}{2}$. Такому керуванню при початкових умовах $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ відповідає траєкторія:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{Ct^3}{12} + \frac{Dt^2}{4}; \\ x_2(t) = -\frac{Ct^2}{4} + \frac{Dt}{2}. \end{cases}$$

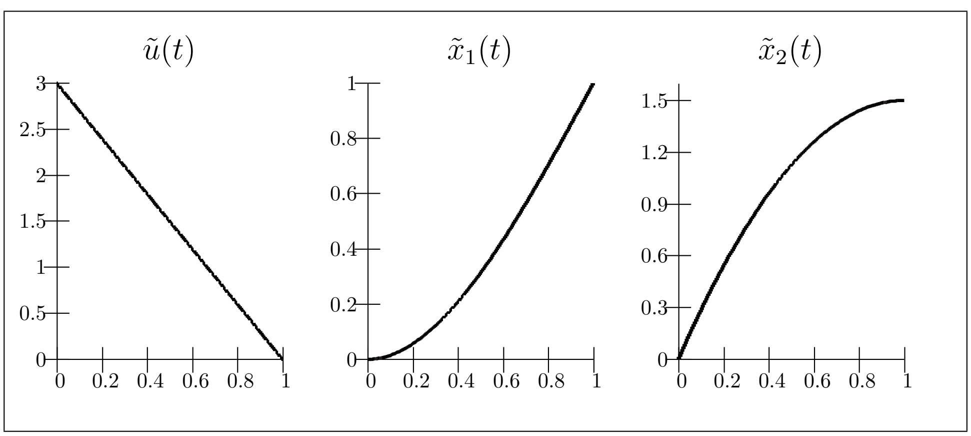
Константи C та D знаходимо з умови на правому кінці інтервала та з першої умови трансверсальності :

$$\begin{cases} x_1(T) = -\dfrac{CT^3}{12} + \dfrac{DT^2}{4} = 1; \\ \psi_2(T) = -CT + D = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{6}{T^3}, \\ D = \frac{6}{T^2}. \end{cases}$$

Отже, отримуємо оптимальне керування та відповідну траєкторію:

$$\tilde{u}(t) = \frac{3(T-t)}{T^3},$$
$$\tilde{x}_1(t) = -\frac{t^3}{2T^3} + \frac{3t^2}{2T^2},$$
$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{3t^2}{2T^3} + \frac{3t}{T^2}.$$

Наведемо відповідні графіки для випадку $T = 1$.



Приклад 5.4. Розглянемо двовимірний випадок. Нехай керований об'єкт $(x(t), y(t))$ рухається на площині за законом

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u_1(t), \\ \ddot{y}(t) = u_2(t), \end{cases}$$

$0 \le t \le T$, початкове положення та швідкість є фіксованими: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Потрібно в момент часу $t = T$ зустрітися з точкою $M = (r\cos wt, r\sin wt)$, мінімізуючи функціонал

$$J(u, T) = \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt + KT,$$

де $r > 0$, $w > 0$, $K > 0$ — фіксовані константи.

Швидкість об'єкта у момент зустрічі $t = T$ має дорівнювати швидкості точки M, тобто $(\dot{x}(T), \dot{y}(T)) = (-rw\sin wT,\ rw\cos wT)$. Кінцевий момент T вважаємо нефіксованим.

Як і в попередніх прикладах, позбавимось другої похідної, ввівши чотиривимірний вектор фазових змінних: $x_1 = x$, $\dot{x}_2 = x_1$, $y_1 = y$, $\dot{y}_2 = y_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = u_2(t). \end{cases}$$

Згідно з умовою задачі, маємо такі обмеження на правому кінці траєкторії (для зручності використовуємо двовимірну індексацію):

$$\begin{gathered} g_{i,j}((x_1(T), x_2(T), y_1(T), y_2(T)), T) = 0, \quad i, j \in \{1, 2\}, \\ \text{де } g_{1,1}(\xi, T) = \xi_{1,1} - r\cos(wT), \quad g_{1,2}(\xi, T) = \xi_{1,2} + rw\sin(wT), \\ g_{2,1}(\xi, T) = \xi_{2,1} - r\sin(wT), \quad g_{2,2}(\xi, T) = \xi_{2,2} - rw\cos(wT), \\ \xi = (\xi_{1,1},\ \xi_{1,2},\ \xi_{2,1},\ \xi_{2,2}). \end{gathered}$$

В даній задачі маємо: $U = \mathbb{R}^2$, $f_0(x(t), u(t), t) = u_1^2(t) + u_2^2(t)$, $\Phi((x_1(T), x_2(T), y_1(T), y_2(T)), T) = KT$.

Згідно із теоремою 5.2 вводимо до розгляду параметри $a_0 \ge 0$ та $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R}$. Функція Гамільтона для даної задачі має вигляд:

$$H(x, u, T, a_0, \psi) = -a_0(u_1^2 + u_2^2) + \psi_{1,1}x_2 + \psi_{1,2}u_1 + \psi_{2,1}y_2 + \psi_{2,2}u_2$$

(для координат вектор-функції $\psi(t) = (\psi_{1,1}(t), \psi_{1,2}(t), \psi_{2,1}(t), \psi_{2,2}(t))$ також застосовуємо двовимірну індексацію).

Випишемо спряжену систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{1,1}(t) = 0, \quad \dot{\psi}_{1,2}(t) = -\psi_{1,1}(t) \\ \dot{\psi}_{2,1}(t) = 0, \quad \dot{\psi}_{2,2}(t) = -\psi_{2,1}(t). \end{cases}$$

Випишемо першу та другу умови трансверсальності:

$$\psi_{1,1}(T) = -a_{1,1}, \quad \psi_{1,2}(T) = -a_{1,2}, \quad \psi_{2,1}(T) = -a_{2,1}, \quad \psi_{1,2}(T) = -a_{2,2};$$

$$\sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2} \big(-a_0(u_1^2+u_2^2) + \psi_{1,1}(T)x_2(T) + \psi_{1,2}(T)u_1 + \\ + \psi_{2,1}(T)y_2(T) + \psi_{2,2}(T)u_2 \big) = \\ = a_0K + a_{1,1}rw\sin wT + a_{1,2}rw^2\cos wT - a_{2,1}rw\cos wT + a_{2,2}rw^2\sin wT.$$

Отже, крайова задача принципа максимуму (5.17), (5.18) для даного випадку має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \tilde{u}_2(t), \\ \dot{\psi}_{1,1}(t) = 0, \quad \dot{\psi}_{1,2}(t) = -\psi_{1,1}(t), \\ \dot{\psi}_{2,1}(t) = 0, \quad \dot{\psi}_{2,2}(t) = -\psi_{2,1}(t), \\ x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \\ x_1(T) = r\cos wT, \quad y_1(T) = r\sin wT, \\ x_2(T) = -rw\sin wT, \quad y_2(T) = rw\cos wT), \\ \psi_{1,1}(T) = -a_{1,1}, \quad \psi_{1,2}(T) = -a_{1,2}, \\ \psi_{2,1}(T) = -a_{2,1}, \quad \psi_{1,2}(T) = -a_{2,2}, \\ -a_0(\tilde{u}_1(T)^2 + \tilde{u}_2(T)^2) + \psi_{1,1}(T)x_2(T) + \psi_{1,2}(T)\tilde{u}_1(T) + \\ \quad + \psi_{2,1}(T)y_2(T) + \psi_{2,2}(T)\tilde{u}_2(T) = \\ \quad = a_0K + a_{1,1}rw\sin wT + a_{1,2}rw^2\cos wT - \\ \quad - a_{2,1}rw\cos wT + a_{2,2}rw^2\sin wT. \end{cases} \tag{5.37}$$

де оптимальне управління $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона:

$$-a_0(\tilde{u}_1(t)^2+\tilde{u}_2(t)^2)+\psi_{1,1}(t)x_2(t)+\psi_{1,2}(t)\tilde{u}_1(t)+\psi_{2,1}(t)y_2(t)+\psi_{2,2}(t)\tilde{u}_2(t)=$$
$$=\sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2}\big(-a_0(u_1^2+u_2^2)+\psi_{1,1}(t)x_2(t)+\psi_{1,2}(t)u_1+\psi_{2,1}(t)y_2(t)+\psi_{2,2}(t)u_2\big).$$

Перша умова трансверсальності дозволяє виразити параметри $a_{i,j}$ через $\psi_{i,j}$ $(i,j\in\{1,2\})$. Підставивши в (5.37) замість $a_{i,j}$ вираз $-\psi_{i,j}(T)$ $(i,j\in\{1,2\})$, ми можемо вилучити параметри $a_{i,j}$ із розгляду разом з умовами $a_{i,j}=-\psi_{i,j}(T)$ $(i,j\in\{1,2\})$. Крім того, використовуючи явний вираз для $x_i(T)$, $y_i(T)$ $(i=1,2)$, можемо суттєво спростити другу умову трансверсальності. Після відповідних підстановок та спрощень система (5.37) набуває вигляду:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t), \quad \dot{y}_1(t)=y_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=\tilde{u}_1(t), \quad \dot{y}_2(t)=\tilde{u}_2(t),\\ \dot{\psi}_{1,1}(t)=0, \quad \dot{\psi}_{1,2}(t)=-\psi_{1,1}(t),\\ \dot{\psi}_{2,1}(t)=0, \quad \dot{\psi}_{2,2}(t)=-\psi_{2,1}(t),\\ x_1(0)=0, \quad y_1(0)=0,\\ x_2(0)=0, \quad y_2(0)=0,\\ x_1(T)=r\cos wT, \quad y_1(T)=r\sin wT,\\ x_2(T)=-rw\sin wT, \quad y_2(T)=rw\cos wT),\\ -a_0(\tilde{u}_1(T)^2+\tilde{u}_2(T)^2)+\psi_{1,2}(T)\tilde{u}_1(T)+\psi_{2,2}(T)\tilde{u}_2(T)=\\ \quad =a_0K-\psi_{1,2}rw^2\cos wT-\psi_{2,2}rw^2\sin wT.\end{cases} \tag{5.38}$$

Випишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$$\begin{cases}\psi_{1,1}(t)=A, \quad \psi_{1,2}(t)=-At+B,\\ \psi_{2,1}(t)=C, \quad \psi_{2,2}(t)=-Ct+D,\end{cases} \qquad A,B,C,D\in\mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0=0$. Тоді функція Гамільтона має максимум по (u_1,u_2) лише при тих t, коли $\psi_{1,2}(t)=\psi_{2,2}(t)=0$, тобто $\psi_{1,2}=\psi_{2,2}\equiv 0$. Але тоді $\psi_{1,1}=-\dot{\psi}_{1,2}\equiv 0$, $\psi_{2,1}=-\dot{\psi}_{2,2}\equiv 0$, що протирічить умові $a_0+|a_{1,1}|+|a_{1,2}|+|a_{2,1}|+|a_{2,2}|\neq 0$. Таким чином, $a_0>0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0=1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при

$$\tilde{u}_1(t)=\frac{\psi_{1,2}(t)}{2}=\frac{-At+B}{2}, \quad \tilde{u}_2(t)=\frac{\psi_{2,2}(t)}{2}=\frac{-Ct+D}{2}. \tag{5.39}$$

Такому керуванню при початкових умовах $x_1(0) = y_1(0) = 0$, $x_2(0) = y_2(0) = 0$ відповідає траєкторія:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{At^3}{12} + \dfrac{Bt^2}{4}, \quad x_2(t) = -\dfrac{At^2}{4} + \dfrac{Bt}{2}, \\ y_1(t) = -\dfrac{Ct^3}{12} + \dfrac{Dt^2}{4}, \quad y_2(t) = -\dfrac{Ct^2}{4} + \dfrac{Dt}{2}. \end{cases} \tag{5.40}$$

Константи інтегрування A, B, C, D знаходимо з умов на правому кінці траєкторії:

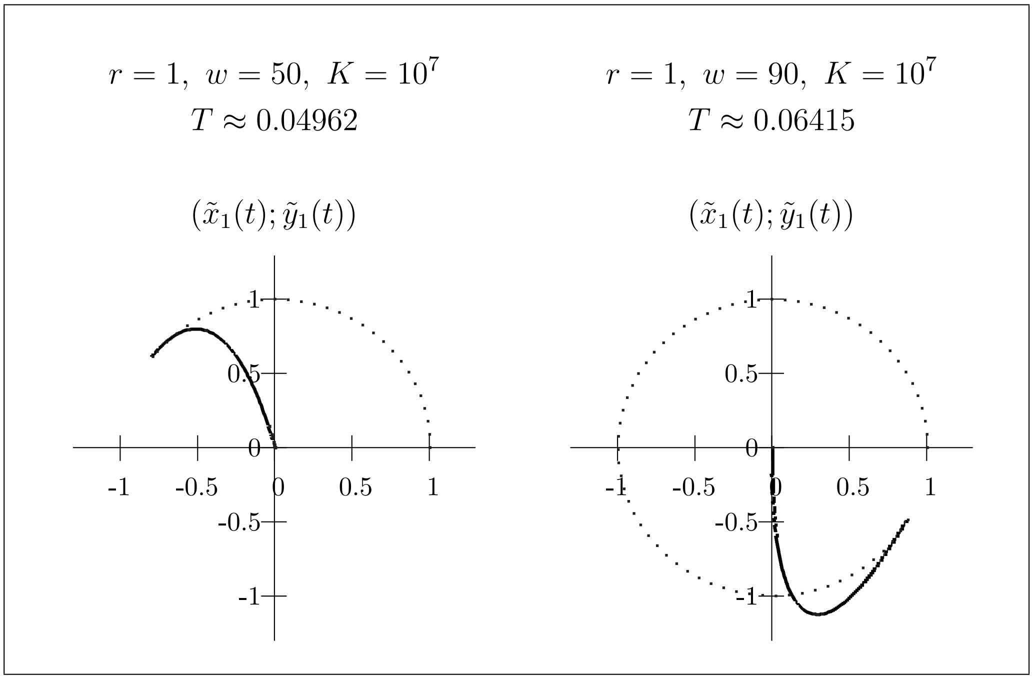
$$\begin{cases} -\frac{AT^3}{12} + \frac{BT^2}{4} = r\cos wT; \\ -\frac{AT^2}{4} + \frac{BT}{2} = -r\sin wT; \\ -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = r\sin wT; \\ -\frac{CT^2}{4} + \frac{DT}{2} = r\cos wT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{24}{T^3}\left(\frac{rwT}{2}\sin wT + r\cos wT\right), \\ B = \frac{12}{T^2}\left(\frac{rwT}{3}\sin wT + r\cos wT\right), \\ C = \frac{24}{T^3}\left(-\frac{rwT}{2}\cos wT + r\sin wT\right), \\ D = \frac{12}{T^2}\left(-\frac{rwT}{3}\cos wT + r\sin wT\right). \end{cases}$$

Нарешті, підставивши в другу умову трансверсальності знайдені вирази для оптимального управління і траєкторіі, отримуємо рівняння для знаходження кінцевого момента T (фізичний сенс мають лише дійсні невід'ємні значення часу):

$$(KT^4 - 4r^2w^2T^2 - 36r^2 = 0) \Rightarrow (T = \sqrt{\frac{2}{K}}\sqrt{r^2w^2 + r\sqrt{w^4r^2 + 9K}}).$$

Тепер, підставивши в (5.39) та (5.40) значення для констант A, B, C, D і кінцевого моменту T, можна виписати явний вигляд для оптимального керування $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ та відповідної траєкторії $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ (ми не будемо цього робити, враховуючи громіздкість остаточного виразу та ідейну очевидність даного кроку).

На завершення, наведемо графіки, які зображують координати керованого об'єкту $x_1(t), y_1(t)$ у площині $(x1, y_1)$ для двох різних наборів значень r, w та K.



4. Завдання на лабораторну роботу

1. В таблиці 5.1 знайти рівняння керованого об'єкту, обмеження на керування та цільовий функціонал згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Користуючись принципом максимуму Понтрягіна, знайти траєкторії оптмального керування $\tilde{u}(t)$ та відповідні траєкторії об'єкту $\tilde{x}(t)$.

Таблиця 5.1: Варіанти завдань на лабораторну роботу №5

Варіант	Об'єкт	Умови на лівому кінці	Умови на правому кінці	Обмеження	Цільовий функціонал
1	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2 + T$ $x_2(T) = 4T + 1$	$\|u(t)\| \leq 1$	T
2	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2 + 2T$ $x_2(T) = 6T + 2$	$\|u(t)\| \leq 1$	T

Продовження табл. 5.1

3	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2 + 3T$ $x_2(T) = 10T + 1$	$\|u(t)\| \le 1$	T
4	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2 + 4T$ $x_2(T) = 14T + 4$	$\|u(t)\| \le 1$	T
5	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2 + 5T$ $x_2(T) = 8T + 5$	$\|u(t)\| \le 1$	T
6	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2$	$\|u(t)\| \le 1$	$T + (x_2(T) - 4T)^2$
7	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2$	$\|u(t)\| \le 1$	$T + (x_2(T) - 6T)^2$
8	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2$	$\|u(t)\| \le 1$	$T + (x_2(T) - 10T)^2$
9	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2$	$\|u(t)\| \le 1$	$T + (x_2(T) - 14T)^2$
10	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2$	$\|u(t)\| \le 1$	$T + (x_2(T) - 8T)^2$
11	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2 + T$	$\|u(t)\| \le 1$	T
12	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2 + 2T$	$\|u(t)\| \le 1$	T
13	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2 + 3T$	$\|u(t)\| \le 1$	T
14	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2 + 4T$	$\|u(t)\| \le 1$	T
15	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2 + 5T$	$\|u(t)\| \le 1$	T
16	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T + 1$ $x_2(T) = 2$ T — фіксоване		$\int_0^T u^2(t)dt$
17	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T + 1$ $x_2(T) = 3$ T — фіксоване		$\int_0^T u^2(t)dt$

Продовження табл. 5.1

18	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 12T + 3$ $x_2(T) = 12$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
19	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 8T + 2$ $x_2(T) = 8$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
20	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T + 1$ $x_2(T) = 7$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
21	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T + 1$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
22	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T + 1$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
23	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 12T + 3$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
24	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 8T + 2$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
25	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T + 1$ T — фіксоване		$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
26	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 64$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 10$		$2\int\limits_0^T u^2(t)dt + 5T$
27	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 81$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 18$		$3\int\limits_0^T u^2(t)dt + 8T$
28	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 25$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 40$		$3\int\limits_0^T u^2(t)dt + 16T$

Продовження табл. 5.1

29	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 49$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 14$		$5\int\limits_0^T u^2(t)dt + 17T$
30	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 36$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 18$		$19\int\limits_0^T u^2(t)dt + 2T$

Розділ 6

Основні напрямки вибору теми курсової роботи

1. Метод лінеаризації як один з найбільш ефективних методів розв'язку задач математичного програмування.

2. Симплекс–метод — основний чисельний метод метод розв'язку задач лінійного програмування.

3. Програмна реалізація та дослідження методів безумовної оптимізації: метод Давидона–Флетера-Пауелла для функції Розенброка.

4. Чисельні методи мінімізації унімодальних функцій: порівняльний аналіз.

5. Методи штрафних функцій: порівняльний аналіз.

6. Квазіньютонівські методи безумовної оптимізації.

7. Задача про знаходження відрізка мінімальної довжини, який сполучає сторони даного кута і проходить через задану точку.

8. Методи безумовної оптимізації для дослідження функцій з погано обумовленою матрицею Гессе ("ярні" функції).

9. Знаходження точки у просторі, сума відстаней від якої до двох або більше заданих точок була б мінімальною.

10. Знаходження точки на одиничній кулі, сума відстаней від якої до двох або більше заданих точок була б мінімальною.

11. Прикладні задачі оптимізації (умовні та безумовні).

12. Оптимальне керування: застосування принципа максимуму Понтрягіна.

13. Потоки у мережах: знаходження оптимальних режимів.

14. Застосування методів оптимізації у диференційних іграх. Групове переслідування.

15. Багатокритеріальна оптимізація. Теорія подвійності в задачах оптимі-

зації: лінійна та квадратична задачі.

Список використаної літератури

1. Васильев Ф. *Численные методы решения экстремальных задач.* — М.: Наука, 1988. — 552 с.

2. Сухарев А., Тимохов А., Федоров В. *Курс методов оптимизации.* — М.: Наука, 1986. — 326 с.

3. Пшеничный Б. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* — М.: Наука, 1984. — 320 с.

4. Поляк Б. *Введение в оптимизацию.* — М.: Наука, 1983. — 384 с.