Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації
до компьютерного практикуму

Для студентів напрямів підготовки:
6.040302 – «Інформатика»
6.040303 – «Системний аналіз»

Київ 2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації
до компьютерного практикуму

Для студентів напрямів підготовки:
6.040302 – «Інформатика»
6.040303 – «Системний аналіз»

Затверджено
на засіданні Вченої Ради
Навчально-наукового комплексу
«Інститут прикладного системного
аналізу»

Протокол №?? від ??? 2011 року

Київ 2011

Методичний посібник до компьютерного практикуму з курсу «Методи оптимізації» [Електронний ресурс]. Для студентів напрямів підготовки: 6.040302 – «Інформатика», 6.040303 – «Системний аналіз» / Укладачі: А.Яковлева, І.Спекторський. - К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2011. - 82 с.

Навчальне видання

Методичні рекомендації
до компьютерного практикуму з курсу « Методи оптимізації»

Для студентів напрямів підготовки:
6.040302 – «Інформатика»
6.040303 – «Системний аналіз»

Укладачі: Яковлева Алла Петрівна, Спекторський Ігор Якович

Відповідальний редактор: Романенко Віктор Демидович

Рецензент: Діденко Дмитро Георгійович

Зміст

Загальні теоретичні відомості

1. Постановка оптимізаційної задачі

На сьогодні розроблено та досліджено велику кількість методів мінімізації функцій векторного аргументу. Зупинимось на деяких найвідоміших методах мінімізації, часто використовуваних на практиці. Наведемо стислий опис кожного з методів, винесених на дослідження в циклі компьютерного практикуму, а також розглянемо їх деякі обчислювальні аспекти. Обмежимось одним-двома різновидами кожного методу, що вважається цілком достатнім для засвоєння його суті.

Розглянемо загальну *оптимізаційну задачу*

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{1}$$

де X – задана множина; $f(x)$ – функція, визначена на X. Потрібно знайти точки мінімуму функції f на множині X. При цьому f називають *цільовою функцією*, X – *допустимою множиною*, кожний елемент $x \in X$ – *допустимою точкою* задачі (1). Надалі, якщо не вказано інше, розглядатимемо скінченновимірні задачі оптимізації, тобто вважатимемо $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Розглянемо лише задачу мінімізації, оскільки задача максимізації $f(x) \to \max$, $x \in X$ еквівалентна аналогічній задачі мінімізації: $-f(x) \to \min$, $x \in X$ (множини розв'язків цих задач збігаються).

Точка $x^* \in X$ називається точкою *глобального мінімуму* функції f на множині X, або *глобальним розв'язком задачі мінімізації* (1), якщо

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in X. \tag{2}$$

Точка $x^* \in X$ називається точкою *локального мінімуму* функції f на множині X, або *локальним розв'язком задачі мінімізації* (1), якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in U_\varepsilon(x^*), \tag{3}$$

де $U_\varepsilon(x^* = \{x \in X \colon \|x - x^*\| \leq \varepsilon\})$ – куля радіуса ε з центром у x^*.

Якщо нерівності (2) або (3) виконуються в строгому сенсі, точку x^* називають точкою *строгого мінімуму* відповідно в глобальному чи локальному сенсі.

Іноді, спираючись на умови оптимальності або на геометричну інтерпретацію, можемо отримати розв'язок задачі (1) в явному вигляді. Але, зазвичай, задачу оптимізації доводиться розв'язувати числовими (найчастіше наближеними) методами, використовуючи обчислювальну техніку.

Будь-який числовий метод розв'язання оптимізаційної задачі базується на точному чи наближеному обчисленні її характеристик – значень цільової функції, значень функцій, що задають обмеження (допустиму підмножину $\mathbb{R}^n$), а також значень похідних цих функцій. На основі одержаної інформації будується наближений розв'язок – наближення до шуканої точки мінімуму x^*, або, якщо точка мінімуму не єдина, наближення (у певному сенсі) до множини точок мінімуму. Інколи будується наближення до мінімального значення функції

$$f^* = \min_{x \in X} f(x).$$

Які саме характеристики потрібно вибрати для обчислень, залежить від властивостей цільової функції та обмежень, а також від можливостей обчислювальної техніки. Алгоритми, що використовують лише інформацію про значення цільової функції, називають *алгоритмами нульового порядку*; алгоритми, що використовують інформацію про значення перших похідних – *алгоритмами першого порядку*, других похідних – *алгоритмами другого порядку* тощо.

Робота алгоритму складається з двох основних етапів:

– обчислення характеристик задачі, потрібних для роботи алгоритму.
– побудова на основі отриманої інформації наближення до розв'язку.

Якщо точки множини X, потрібні для обчислення характеристик, обираються один раз на початку роботи алгоритму і надалі не змінюються, алгоритм мінімізації називають *пасивним*. Зазвичай у разі числового розв'язання оптимізаційної задачі використовують *послідовні* («ітераційні») алгоритми: точка x^{i+1} ($(i+1)$-й крок) обчислюється лише тоді, коли вже обчислені точки на попередніх кроках (ітераціях) – $x^1, \ldots, x^i$ та на кожному кроці $1, \ldots, i$ проведені обчислення згідно із цим алгоритмом.

Ітерацію будь-якого послідовного алгоритму розв'язання задачі (1) можна подати у вигляді:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k, \quad h_k \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Конкретний алгоритм визначається вибором початкової точки x^0, правилом вибору векторів h^k та чисел α_k на основі одержаної в результаті обчислень інформації, а також умовою закінчення роботи. Вектор h^k визначає *напрям* $(k+1)$*-го кроку* алгоритму мінімізації, а коефіцієнт α_k – *довжину* цього кроку.

Методи мінімізації, що гарантують отримання розв'язку за скінченну кількість кроків, називають *скінченнокроковими*. Для *нескінченнокрокових* алгоритмів на кожному кроці отримується лише наближене значення розв'язку задачі; точне значення розв'язку може бути отримане лише через граничний перехід за номером ітерації.

Кажуть, що метод (4) збігається, якщо

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^k,$$

де x^* – розв'язок задачі (1).

Якщо $f(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x^*)$, то кажуть, що метод (4) збігається за функцією.

У разі, якщо точка мінімуму x^* не єдина, під збіжністю методу можна розуміти збіжність послідовності x^k $(k \geq 1)$ до множини X^* точок мінімуму функції f (за стандартного визначення відстані від точки до множини).

Ефективність методу мінімізації визначається *швидкістю збіжності*. Наведемо визначення лінійної, надлінійної та квадратичної швидкості.

Нехай $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$.

1. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *лінійно* або зі швидкістю геометричної прогресії, якщо існують такі константи $q \in (0,1)$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q\|x^k - x^*\| \quad \text{для всіх } k \geq k_0,$$

або, що те саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_1 q^{k+1} \text{ для всіх } k \geq k_0 \quad (C_1 = \|x^1 - x^*\|).$$

2. Кажуть, що послідовність x^k $(k \geq 1)$ збігається до x^* *надлінійно*, якщо

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q_k\|x^k - x^*\|, \quad q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

або, що те саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le C_2 q_1 q_2 \cdots q_{k+1},\ q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad (C_2 = \|x^1 - x^*\|).$$

3. Кажуть, що послідовність x^k $(k \ge 1)$ збігається до x^* *квадратично*, якщо існують такі константи $C \ge 0$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le C\|x^k - x^*\|^2 \quad \text{для всіх } k \ge k_0,$$

або, що те саме,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le A \cdot C^{2^k} \quad \text{для всіх } k \ge k_0 \quad (A = \|x^1 - x^*\|).$$

Нескінченнокрокові методи доповнюють *умовою зупинки*. На практиці найчастіше використовують такі умови зупинки:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \le \varepsilon_1;$$
$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \le \varepsilon_2;$$
$$\|f'(x^{k+1})\| \le \varepsilon_3.$$

До початку обчислень обирають одну з наведених умов зупинки та мале додатне ε_i. Обчислення закінчують після $(k+1)$-го кроку, коли вперше виконується обрана умова.

Зауваження 1. Деякі оптимізаційні алгоритми для нормального закінчення потребують виконання двох або трьох наведених вище умов.

Вектор h задає *напрям спадання* функції f у точці x, якщо

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

при всіх достатньо малих $\alpha > 0$.

Метод $x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ називають *методом спуску*, якщо при всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ вектор h^k задає напрям спадання функції f у точці x^k та числа $\alpha_k > 0$ вибрані так, що $f(x^{k+1}) < f(x^k)$. Прикладом методу спуску є градієнтний метод, у якому $h^k = -f'(x^k)$ (довести самостійно).

2. Вибір довжини кроку

1. Коефіцієнт α_k можна визначати з умови

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h^k). \tag{5}$$

Метод (5) називають *методом найшвидшого спуску*. Цей метод – оптимальний у тому сенсі, що він забезпечує досягнення найменшого значення функції f уздовж заданного напряму h.

Приклад. Для квадратичної функції $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$ із симетричною додатно визначеною матрицею A метод найшвидшого спуску визначається рівністю

$$\alpha_k = -\frac{(Ax^k + b, h^k)}{(Ah^k, h^k)}.$$

2. Визначити точне значення α_k з умови (5) не завжди можливо і не завжди доцільно (напрям h^k забезпечує спадання функції f лише в малому околі точки x^k). Розглянемо два методи вибору α_k, які в разі відповідних припущень на функцію f забезпечують виконання нерівності

$$f(x^k + \alpha_k h^k) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha_k (f'(x^k), h^k), \tag{6}$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$:

1) нехай функція f диференційовна на $\mathbb{R}^n$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшіца, тобто за деякого $M > 0$

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Тоді умова (6) виконується при

$$0 < \alpha_k < -\frac{(1 - \varepsilon)(f'(x^k), h^k)}{M\|h^k\|^2};$$

2) нехай функція f двічі диференційовна на $\mathbb{R}^n$, а її матриця других похідних за деякого $D > 0$ задовольняє умову

$$(f''(x)h, h) \leq D\|h\|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Тоді умова (6) виконується при

$$0 < \alpha_k < -\frac{2(1 - \varepsilon)(f'(x^k), h^k)}{D\|h^k\|^2}.$$

Зауваження 2. У деяких методах спуску коефіцієнт α_k можна вибрати постійним: $\alpha_k = \alpha > 0$. Так, у випадку градієнтного методу спуску ($h^k = -f'(x^k)$) при $\alpha_k = \alpha$ наведені в пунктах 1) та 2) оцінки для α_k набувають вигляду

$$\alpha \in \left(0, \frac{1-\varepsilon}{M}\right), \quad \alpha \in \left(0, \frac{2(1-\varepsilon)}{D}\right)$$

відповідно.

3. На практиці часто використовують *метод дроблення кроку*:

– на початку роботи алгоритму обирають фіксовані константи $\beta > 0$ та $\in (0, 1)$ (часто фіксують $= \frac{1}{2}$);
– на кожному кроці k рекурентно визначають послідовність $\alpha_{k,n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$):
$$\alpha_{k,0} = \beta, \quad \alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n}h;$$
– довжину кроку α_k обирають як значення $\alpha_{k,n}$ за найменшим n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), що задовольняє умову
$$f(x^k + \alpha_{k,n}h^k) < f(x^k),$$
тобто $\alpha_k = \min\limits_{n>0}\{\alpha_{k,n} \colon f(x^k + \alpha_{k,n}h^k) < f(x^k)\}$.

Очевидно, що процес дроблення кроку (процес множення довжини кроку на коефіцієнт) не може виявитись нескінченним, оскільки h^k – напрям спадання функції f.

Для детального вивчення числових методів оптимізації можна рекомендувати роботи [1–10].

Компьютерний практикум 1

Числові методи безумовної оптимізації першого порядку. Градієнтний метод та його варіації

1.1. Теоретичні відомості

Градієнтний метод – один з класичних методів мінімізації першого порядку. Він базується на заміні цільової функції f в околі точки чергової точки x^k лінійною частиною розкладу її в ряді Тейлора.

У методах спуску послідовність наближень $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ до точки мінімуму вибирається за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де h^k – напрям спадання функції f у точці x^k. У градієнтному методі h^k беруть рівним антиградієнту функції f у точці x^k, тобто $h^k = -f'(x^k)$. Отже, у градієнтному методі

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Якщо довжину кроку вибирати з умови (одновимірної) мінімізації функції уздовж напряму антиградієнта, одержуємо варіант градієнтного методу, що називається *градієнтним методом найшвидшого спуску*. На практиці, зазвичай, доводиться задовольнятись наближеними методами пошуку оптимального значення довжини кроку, наприклад, методом дроблення.

Якщо цільова функція не опукла, градієнтний метод забезпечує лише збіжність до множини стаціонарних точок функції f. Наведемо дві теореми про збіжність градієнтного методу.

Теорема 1.1. *Нехай функція f диференційовна та обмежена знизу на $\mathbb{R}^n$, а її градієнт задовольняє умову Ліпшіца (7). Тоді за довільної* *початкової точки* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *для методу* (1.1)

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f'(x^k) \right\| = 0.$$

Теорема 1.2. *Нехай функція* f *двічі диференційовна та сильно опукла на* $\mathbb{R}^n$*, а її матриця других похідних задовольняє умову* (8)*. Тоді за довільної початкової точки* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *послідовність* x^k $(k \geq 1)$*, визначена формулою* (1.1)*, збігається до точки мінімуму* x^* *із швидкістю геометричної прогресії:*

$$f(x^k) - f(x^*) \leq q^k (f(x^0) - f(x^*));$$
$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq C(\sqrt{q})^k,$$

де $C > 0$, $q \in (0, 1)$ *– константи.*

Якщо матриця других похідних цільової функції погано обумовлена ($\frac{d}{D} \ll 1$, де d та D – відповідно найменше та найбільше власні значення матриці $f''(x)$, f вважається сильно опуклою, $x \in \mathbb{R}^n$ – фіксоване), градієнтний метод збігається повільно. Геометрично це виражене в тому, що лінії рівня функції f мають «*ярну*» структуру, і напрям вектора $-f'(x)$ може сильно відхилятись від напрямку точки мінімуму. Шлях послідовності x^k $(k \geq 1)$ до точки мінімумуноситиме явно виражений зигзагоподібний характер. Іноді кажуть, що відбувається «*нишпорення*» методу, що, очевидно, є його недоліком.

Під час пошуку мінімуму «ярної» функції для прискорення збіжності методу застосовують так званий *ярний метод*:

– на початку роботи алгоритму задають дві точки v^0 та v^1, з яких роблять спуск за градієнтним методом й одержують відповідно точки x^0 та x^1 (ці точки будуть розміщені «на дні яру»);
– одержують точку $v^2 = x^1 - \frac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|} \cdot t \cdot \operatorname{sign}(f(x^1) - f(x^0))$, де t – додатна константа (*ярний крок*);
– з точки v^2 (яка, у загальному випадку, може опинитись «на схилі яру») роблять спуск градієнтним методом, отримуючи точку x^2 «на дні яру»;
– за відомих x^0, x^1, $\ldots$, x^k $(k \geq 2)$ отримують точку

$$v^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{\|x^k - x^{k-1}\|} \cdot t \cdot \operatorname{sign}(f(x^k) - f(x^{k-1})),$$

  з якої роблять спуск градієнтним методом, отримуючи точку x^{k+1} «на дні яру».

Це лише один з існуючих способів прискорення збіжності градієнтного методу.

Аналогом градієнтного методу для опуклих недиференційовних функцій є *субградієнтний метод*. У цьому методі послідовність x^k $(k \geq 1)$ визначається правилом

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де $h^k \in \partial f(x^k)$ – субградієнт функції f у точці x^k. Зазначимо, що h^k обирають з множини $\partial f(x^k)$ довільно.

Зауваження 1.1. Для числового обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

1.2. Завдання до компьютерного практикуму

1. У табл. 1.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з градієнтних методів. Конкретний тип градієнтного методу обрати самостійно, враховуючи особливості функції f (наприклад, ярність). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення компьютерного практикуму. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

Під час складання програми треба:

– обчислити цільову функцію в окремій підпрограмі;
– частинні похідні цільової функції обчислити числово.

3. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

1.3. Додаткові завдання до компьютерного практикуму

1. Показати, що в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функція

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 + x_2}$$

опукла, та визначити її мінімальне значення. За початкову точку взяти $(x_1^0; x_2^0) = (0{,}6; 0{,}2)$. Ітерації завершувати на k-й ітерації за виконання умови

$$\max_{i\in\{1;2\}} \left| \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_i^k} \right| < \varepsilon,$$

де ε задає користувач.

2. Показати, що в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функція

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

опукла, та визначити її мінімальне значення. За початкову точку взяти $(x_1^0; x_2^0) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10})$. Ітерації завершувати на k-й ітерації за виконання умови

$$\max_{i\in\{1;2\}} \left| \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_i^k} \right| < \varepsilon,$$

де ε задає користувач.

***Таблиця 1.1*. Варіанти завдань до компьютерного практикуму 1, 2 та 4**

Варіант	Цільова функція f
1	$x^2 + 18y^2 + 0,01xy + x - y$
2	$x^2 + 28y^2 + 0,02xy - x - y$
3	$x^2 + 8y^2 + 0,001xy - x - y$
4	$x^2 + 18y^2 + 0,01xy + x - y$
5	$2x^2 + 8y^2 - 0,01xy + x - y$
6	$x^2 + 4y^2 + 0,001xy - y$
7	$3x^2 + 8y^2 + 0,015xy - x - y$
8	$x^2 + 2y^2 + 0,012xy - 2x + y$
9	$11x^2 + 18y^2 + 0,01xy + x$
10	$3x^2 + 2y^2 - 0,01xy + x - y$
11	$16x^2 + 15y^2 + 2z^2 + 0,018xy + x - z$
12	$2x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 0,01xz - x - y$
13	$2x^2 + 4y^2 + z^2 + 0,0013xy + 0,001xz - y$
14	$13x^2 + 8y^2 + z^2 + 0,001xy + 0,02xz + y$
15	$12x^2 + 18y^2 + 3z^2 - 0,01xz + x - y$
16	$11x^2 + 14y^2 + z^2 + 0,01xy - 0,001yz - y$
17	$13x^2 + 18y^2 + 3z^2 + 0,015xz - y$
18	$15x^2 + 2y^2 + 0,012xy - x + y$
19	$12x^2 + 14y^2 + 0,01xy + 3x$
20	$15x^2 + 18y^2 - 0,03xy + x - y$
21	$(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
22	$(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$
23	$100(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
24	$10\,000(y - x^2)^2 + 100(1 - x)^2$
25	$100(y - x^3)^2 + 100(1 - x)^2$

Компьютерний практикум 2

Числові методи безумовної оптимізації другого порядку. Метод Ньютона та його варіації

2.1. Теоретичні відомості

Метод Ньютона та його модифікації – один з найефективніших засобів числового розв'язання задач безумовної оптимізації. Надалі припускається, що функція f строго опукла і двічі диференційовна на $\mathbb{R}^n$, причому матриця $f''(x)$ невироджена на $\mathbb{R}^n$. У методі Ньютона послідовність $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ будують за правилом

$$x^{k+1} = x^k + h^k, \tag{2.1}$$
$$h^k = -[f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Отже, метод Ньютона – це метод мінімізації другого порядку. Як видно з (2.1), довжина кроку $\alpha_k = 1$; напрям, що визначається вектором h^k, є напрямом спадання функції f.

Квадратична апроксимація заданої функції в малому околі деякої точки значно точніша за лінійну апроксимацію. Тому в методі Ньютона природно сподіватися на більш точне наближення до розв'язку, ніж у градієнтному методі. Наведемо теорему про збіжність методу Ньютона.

Теорема 2.1. *Нехай функція f двічі диференційовна, сильно опукла з константою $\Theta > 0$ на $\mathbb{R}^n$ та задовольняє умову*

$$\|f''(x) - f''(\widetilde{x})\| \leq M\|x - \widetilde{x}\|,$$

де $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $M > 0$, а початкова точка x^0 така, що:

$$\left\|f'(x^0)\right\| \leq \frac{8\Theta^2}{M} \text{ або } \left\|f'(x^0)\right\| \leq \frac{8\Theta^2}{M}q, \text{ де } q \in (0;1).$$

Тоді послідовність x^k $(k \geq 1)$, що визначається формулами (2.1), збігається до точки мінімуму x^* функції f з квадратичною швидкістю:

$$\left\|x^k - x^*\right\| < \frac{4\Theta^2}{M} q^{2^k}.$$

Збіжність методу Ньютона доведена лише для достатньо хорошого початкового наближення x^0. Недоліками методу є також складність пошуку потрібного початкового наближення та великий обсяг обчислень (на кожному кроці потрібно обчислювати й обертати матрицю других похідних цільової функції).

Модифікації методу Ньютона спрямовані на те, щоб, зберігши його основну перевагу – швидку збіжність, зменшити обсяг обчислень і послабити вимоги до вибору початкового наближення. В *узагальненому методі Ньютона* (так званий *метод Ньютона з регулюванням кроку*) послідовність x^k $(k \geq 1)$ будується за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad \alpha_k > 0, \; h^k = -[f''(x^k)]^{-1} f'(x^k) \tag{2.2}$$

(якщо $\alpha_k = 1$, метод збігається з класичним методом Ньютона).

Метод (2.2) можна також подати у вигляді

$$f''(x^k) \cdot h^k = -f'(x^k); \; x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k.$$

Отже, для визначення вектора h^k можна розв'язувати систему лінійних рівнянь замість того, щоб обертати матрицю $f''(x^k)$.

Розглянемо два варіанти узагальненого методу Ньютона, які розрізняються способом вибору параметра α.

Перший спосіб. 1. Вважаємо, що $\alpha = 1$.

2. За обраного α обчислюємо точку $x = x^k + \alpha h^k$ та значення функції $f(x) = f(x^k + \alpha h^k)$.

3. Перевіряємо нерівність:

$$f(x) - f(x^k) \leq \varepsilon\alpha \left\langle f'(x^k), h^k \right\rangle, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

(ε – довільна константа, однакова для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$).

4. Якщо нерівність п. 3 виконується, беремо $\alpha_k = \alpha = 1$ і закінчуємо роботу алгоритму; інакше, виконуємо дроблення α і повертаємось до п. 2.

Другий спосіб. Значення α_k обираємо як точку мінімуму цільової функції в напрямі антиградієнта:

$$f\left(x^k - \alpha_k [f''(x^k)]^{-1} f'(x^k)\right) = \min_{\alpha>0} f\left(x^k - \alpha [f''(x^k)]^{-1} f'(x^k)\right).$$

Порівняння двох наведених способів регулювання довжини кроку демонструє перевагу першого способу, який у середньому потребує меншої кількості обчислень цільової функції.

Для сильно опуклих двічі диференційовних функцій метод Ньютона збігається незалежно від вибору початкової точки x^0 із надлінійною або квадратичною швидкістю (за наявності додаткових умов на функцію f).

Зауваження 2.1. Для числового обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

2.2. Завдання до компьютерного практикуму

1. У табл. 1.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з методів другого порядку (типу Ньютона). Конкретний тип методу обрати самостійно, враховуючи особливості функції f (наприклад, ярність). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення компьютерного практикуму. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

У процесі складання програми потрібно:

– обчислити цільову функцію в окремій підпрограмі;

– частинні похідні цільової функції обчислити числово.

3. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

Компьютерний практикум 3

Числові методи нелінійної умовної оптимізації. Метод проекції градієнта

3.1. Теоретичні відомості

Розглянемо метод проекції градієнта для розв'язання задачі

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{3.1}$$

де X – замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^n$; f – диференційовна функція на X. Цей метод є модифікацією градієнтного методу безумовної оптимізації на випадок умовних задач.

Проекцією точки a на множину $X \in \mathbb{R}^n$ називається точка $_X(a) \in X$, найближча до точки a серед усіх точок з множини X.

Число $_X(a)$ – розв'язок задачі проектування

$$(x) = \|x - a\|^2 \to \min, \quad x \in X. \tag{3.2}$$

Поняття проекції точки a на множину X має сенс для довільної множини $X \in \mathbb{R}^n$, однак у загальному випадку проекція точки на множину може визначатись неоднозначно (задача мінімізації (3.2) може мати більше одного розв'язку). Існування та єдиність розв'язку задачі (3.2) гарантує умова опуклості та замкнености множини $X \in \mathbb{R}^n$ (див., зокрема, [3]).

Якщо X – замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^n$, мають місце такі твердження (наприклад, [3]).

1. Точка $\bar{x}$ – проекція точки a на множину X ($\overline{x} = {}_X(a)$) тоді і тільки тоді, коли

$$(\overline{x} - a, x - \overline{x}) \geq 0$$

при всіх $x \in X$.

2. Для будь-яких точок $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^n$ виконується оцінка:

$$\left\| {}_X(a^1) - {}_X(a^2) \right\| \leq \left\| a^1 - a^2 \right\|.$$

В основу методу проекції градієнта покладено теорему 3.1 (див., наприклад, [3]).

Теорема 3.1. *Нехай множина $X \in \mathbb{R}^n$ – опукла і замкнена, функція f – опукла на X та диференційовна в точці $x^* \in X$. Тоді для того щоб точка x^* була розв'язком задачі (3.1), необхідно і достатньо виконання умови*

$$x^* = {}_X\left(x^* - \alpha f'(x^*)\right) \text{ за довільного } \alpha > 0.$$

У методі проекції градієнта за чергову точку наближення до розв'язку задачі (3.1) вибирають проекцію на множину X тієї точки, яку одержують застосуванням градієнтного методу:

$$x^{k+1} = {}_X\left(x^k - \alpha_k f'(x^k)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Коефіцієнти $\alpha_k \geq 0$ можна вибирати за методиками, описаними вище. Наприклад, існують різноманітні модифікації методу найшвидшого спуску з наближеним розв'язанням (на кожному кроці) задачі одновимірної мінімізації по α, можливий вибір α дробленням кроку тощо.

Наведемо теорему про збіжність методу (див., наприклад, [3]).

Теорема 3.2. *Нехай множина $X \in \mathbb{R}^n$ – опукла і замкнена, функція f – сильно опукла з константою $\theta > 0$ та диференційовна на X, причому градієнт f задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq M\|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$

Тоді послідовність x^k $(k \geq 1)$, що генерується за правилом (3.3) за довільних $x^0 \in X$ та $\alpha_k \in \left(0; \frac{4\theta}{M^2}\right)$, збігається до розв'язку x^* задачі (3.1) зі швидкістю геометричної прогресії

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\| \leq q\left\|x^k - x^*\right\|, \text{де } q = \sqrt{1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 M^2} \in (0; 1).$$

В описаному методі на кожній k-й ітерації потрібно проводити операцію проектування точки на множину X, тобто розв'язувати задачу виду (3.2) при $a = x^k - \alpha_k f'(x^k)$. У деяких випадках вдається побудувати явну формулу для проекції, наприклад, коли X – куля, координатний паралелепіпед, невід'ємний ортант, гіперплощина, півпростір тощо (див. підрозд. 3.2).

Зауваження 3.1. Для числового обчислення першої та другої похідної слід використовувати різницеві формули, що забезпечують порядок помилки не нижче за h^2, наприклад:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2);$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

3.2. Завдання до компьютерного практикуму

1. У табл. 3.1 знайти цільову функцію f з відповідними обмеженнями згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Скласти програму для умовної мінімізації цільової функції f одним з методів проекції градієнта. Конкретний тип методу обрати самостійно, враховуючи особливості функції f та обмежень. Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення компьютерного практикуму. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

Під час складання програми потрібно:

– обчислити цільову функцію та функції обмежень в окремій підпрограмі;
– частинні похідні обчислити числово.

3. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму умовної мінімізації.

Таблиця 3.1. **Варіанти завдань до компьютерного практикуму 3**

Варіант	Цільова функція	Обмеження
1	$x^2 + y^2 + z^2$	$x + y + z = 1$
2	$2x^2 + 3y^2 + z^2$	$3x + 2y + z = 1$
3	$x^2 + 3y^2 + 2z^2$	$2x + y + 3z = 1$
4	$4x^2 + y^2 + z^2$	$x + 2y + 3z = 1$
5	$2x^2 + y^2 + 3z^2$	$4x + y + z = 1$
6	$x + y + z$	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
7	$2x + 3y + z$	$3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$
8	$3x + y + 2z$	$2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1$
9	$x + 4y + z$	$x^2 + 3y^2 + 2z^2 \leq 1$
10	$x + 2y + 3z$	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
11	y	$y - x^2 \geq 0$
12	$100(x^2 - y)^2 + (x - 1)^2$	$x(x - 4) - 2y + 12 = 0$
13	$-y$	$1 + x - 2y \geq 0;\ x^2 + y^2 - 1 = 0;$ $x \geq 0$
14	$-x$	$y - x^3 - z^2 = 0;\ x^2 - y - t^2 = 0$
15	x	$(x - 1)^3 - y = 0;\ x \geq 1;\ y \geq 0$
16	$-x$	$(1 - x)^3 - y \geq 0;\ x \geq 0;\ y \geq 0$
17	$-x$	$0,125 - y - (x - 1)^3 \geq 0;$ $x \geq 0;\ y \geq 0$

Закінчення табл. 3.1

18	$-x$	$e^{e^x} \geq 0;\ y - e^{e^x} \geq 0;\ y \leq 10$
19	$x^2 + y^2$	$x + y - 1 \geq 0;\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0;$ $9x^2 + y^2 - 9 \geq 0;\ x^2 - y \geq 0;$ $y^2 - x \geq 0$
20	$-xy$	$x^2 + y^2 \geq 0;\ 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ $x \geq 0;\ y \geq 0$
21	$(x-2)^2 + (y-1)^2$	$-x^2 + y \geq 0;\ y - x^2 \geq 0$
22	$x^2 + y$	$-x - y + 1 \geq 0;\ -(x^2 + y^2) + 9 \geq 0$
23	y	$-2x^2 + x^3 + y \geq 0;$ $-2(1-x)^2 + (1-x)^3 + y \geq 0$
24	$100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$	$x + 3y + 0,3 \geq 0;$ $-x + 3y + 0,3 \geq 0$
25	$100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$	$x^2 + y^2 - 0,25 \geq 0$

3.3. Явні формули обчислення проекції ${}_X a$ для деяких множин X

Нехай $a \in \mathbb{R}^n$. Розглянемо деякі конкретні випадки множини $X \in \mathbb{R}^n$.
1. Множина X – куля:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \left\|x - x^0\right\| \leq r\};$$

$${}_X a = x^0 + \frac{a - x^0}{\|a - x^0\|} \cdot r.$$

2. Множина X – координатний паралелепіпед:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon b_j \leq x_j \leq c_j,\ j = 1, \ldots, n\};$$

$$({}_X a)_j = \begin{cases} b_j, & \text{якщо } a_j < b_j; \\ a_j, & \text{якщо } b_j \leq a_j \leq c_j; \\ c_j, & \text{якщо } a_j > c_j. \end{cases}$$

3. Множина X – невід'ємний ортант:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\};$$
$${}_X a = (\max(0, a_1), \max(0, a_2), \ldots, \max(0, a_n))\,.$$

4. Множина X – гіперплощина:

$$X = H_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (p, x) = \beta\} \quad (p \neq 0);$$
$${}_X a = a + (\beta - (p, a)) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}.$$

5. Множина X – півпростір:

$$X = H^+_{p\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (p, x) \geq \beta\} \quad (p \neq 0);$$
$${}_X a = a + \max\left(0; \beta - (p, a)\right) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}.$$

Компьютерний практикум 4

Методи спряжених напрямів. Метод спряжених градієнтів

4.1. Теоретичні відомості. Методи спряжених напрямів для квадратичної функції

Методи спряжених напрямів, якщо говорити «неформально», базуються на ідеї мінімізації квадратичної функції за скінченну кількість кроків. Визначимо метод формально.

Мінімізуємо квадратичну функцію

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\langle Ax, x\right\rangle + \left\langle b, x\right\rangle,$$

де A – симетрична додатно визначена матриця розміру $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Суть методу спряжених напрямів полягає в знаходженні таких напрямів h^0, h^1, $\ldots$, h^{n-1}, що послідовність одновимірних мінімізацій уздовж h^j $(j = 1, 2 \ldots, n-1)$ мінімізує функцію f, тобто

$$f(x^n) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

де послідовність x^k, $0 \le k \le n$ визначають рекурентно:

$x^0 \in \mathbb{R}$ – довільне число;
$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $f(x^k + \alpha_k h^k) = \min\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x^k + \alpha h^k)$ $(0 \le k \le n)$.

Указану властивість має система напрямів $h^0, \ldots, h^{n-1}$, *взаємно (попарно) спряжених* відносно матриці A, тобто:

$$\left\langle Ah^i, h^j\right\rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Конкретні алгоритми мінімізації базуються на способах побудови системи взаємно спряжених напрямів.

У методі *спряжених напрямів першого порядку* система взаємно спряжених напрямів будується за правилом:

$$h^0 = -f'(x^0);$$
$$h^k = -f'(x^k) + \beta_{k-a} h^{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\langle f'(x^k), Ah^{k-1} \rangle}{\langle h^{k-1}, Ah^{k-1} \rangle}. \tag{4.1}$$

Відомо (див., наприклад, [3]), що побудовані за співвідношеннями (4.1) вектори $h^0, \ldots, h^{n-1}$ взаємно спряжені, а градієнти $f'(x^0), \ldots, f'(x^{n-1})$ попарно ортогональні. Метод спряжених градієнтів (як окремий випадок методу спряжених напрямів) забезпечує відшукання точки мінімуму функції f не пізніше ніж на n-му кроці.

4.2. Завдання до компьютерного практикуму

1. У табл. 1.1 знайти цільову функцію f згідно з номером варіанта, вказаного викладачем.

2. Скласти програму для мінімізації цільової функції f одним з градієнтних методів. Конкретний тип градієнтного методу обрати самостійно, враховуючи особливості функції f (наприклад, ярність). Для складання програми використовувати систему програмування типу Pascal або C у версії, наявній у дисплейному класі, призначеному для проведення компьютерного практикуму. Використання системи програмування, відмінної від Pascal або C, або використання версії компілятора, не встановленої в дисплейному класі, потребує попереднього узгодження з викладачем.

Під час складання програми треба:

– обчислити цільову функцію в окремій підпрограмі;
– частинні похідні цільової функції обчислити числово.

3. За результатами досліджень скласти звіт. У звіті обов'язково відобразити в явному вигляді 2–3 кроки обраного алгоритму мінімізації цільової функції.

4.3. Додаткові завдання до компьютерного практикуму

1. Застосувати метод найшвидшого спуску до двовимірної квадратичної функції $f(x)$ для різних початкових наближень:

1) $f(x) = x_1 + ax_2$;

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3$.

Параметр a задає користувач з вимогою $a \gg 1$ (a набагато більше за одиницю).

2. Застосувати метод найшвидшого спуску до тривимірної квадратичної функції $f(x)$ $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Компьютерний практикум 5

Елементи теорії оптимального керування

5.1. Теоретичні відомості

5.1.1. Постановка задачі

Нехай рух керованого об'єкта описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{5.1}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор координат об'єкта (або *вектор фазових координат*); $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – задана функція; $u = (u_1, \ldots, u_r)$ – вектор керувань (або просто *керування*). У рівнянні (5.1) вектори x та u – функції змінної t, яка означає час, причому $t \in [t_0, T]$; тут і надалі $[t_0, T]$ – відрізок часу, на якому відбувається керування. На керування, зазвичай, додатково накладається умова

$$u(t) \in U(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{5.2}$$

де $U(t)$ при кожному $t \in [t_0, T]$ – задана множина в $\mathbb{R}^r$.

Векторну (r-вимірну) функцію u називають *керуванням*, якщо вона кусково-неперервна на $[t_0, T]$ (тобто u має на $[t_0, T]$ скінченну кількість розривів першого роду і не має розривів другого роду), неперервна справа у точках розриву та неперервна в точці T. Керування u називають *допустимим*, якщо воно додатково задовольняє обмеження (5.2).

Нехай функція u має стрибки (розриви першого роду) в точках ${}_1, \ldots, {}_k$, $t_0 < {}_1 < {}_2 < \cdots < {}_k < T$. Розглянемо задачу Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le T, \quad x(t_0) = x^0. \tag{5.3}$$

Припустимо, що задача (5.3) має розв'язок x, визначений на відрізку часу $[0, {}_1]$, причому $x({}_1) = x^1$. Далі розглянемо задачу Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x({}_1) = x^1.$$

Припускаючи, що ця задача має розв'язок на відрізку $[{}_1, {}_2]$, причому $x({}_2) = x^2$, переходимо до задачі

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x({}_2) = x^2 \quad \text{і т. д.}$$

Функцію x, яку вдається визначити вказаним способом на всьому відрізку $[t_0, T]$, називатимемо розв'язком задачі Коші (5.3) або *фазовою траєкторією*, що відповідає керуванню u. Функція x за побудовою неперервна на $[t_0, T]$ та задовольняє для всіх $t \in [t_0, T]$ рівність:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(x(), u(),)d.$$

Теорема 5.1 (існування). *Нехай вектор-функція f визначена та неперервна за сукупністю аргументів на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, T]$ і задовольняє умову Ліпшіца за x з деякою константою $M > 0$:*

$$\|f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)\| \leq M\|x - \hat{x}\|, \quad x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r,\ t \in [t_0, T].$$

Тоді для довільного $x^0 \in \mathbb{R}^n$ та довільного кусково-неперервного керування u задача (5.3) має єдиний розв'язок, визначений на всьому відрізку $[t_0, T]$.

Загальна постановка задачі оптимального керування передбачає систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{5.4}$$

яка описує рух деякого керованого об'єкта, що підпорядкований таким умовам:

$$x(t_0) \in S_0 \text{ – початкові умови;} \tag{5.5}$$
$$x(T) \in S_T \text{ – кінцеві умови;} \tag{5.6}$$
$$t_0 \in \Theta_0 \text{ – умови на початковий момент часу;} \tag{5.7}$$
$$T \in \Theta_1 \text{ – умови на кінцевий момент часу;} \tag{5.8}$$
$$x(t) \in X(t),\ t \in [t_0, T] \text{ – фазові обмеження;} \tag{5.9}$$
$$u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T] \text{ – обмеження на керування,} \tag{5.10}$$

де S_0, S_T, $X(t)$, $U(t)$ – задані множини при кожному $t \in [t_0, T]$.

За *цільовий функціонал* (аналог цільової функції в задачах оптимізації) береться

$$J(u, x_0, t_0, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(t_0, x_0, x(T), T), \qquad (5.11)$$

який є сумою *інтегрального функціонала* $\int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt$ і *термінального функціонала* $\Phi(t_0, x_0, x(T), T)$. Ця задача в загальній формі називається *задачею Больца*. Задача керування, що містить лише інтегральний функціонал (термінальний функціонал є тотожним нулем) називається *задачею Лагранжа*; задача, що містить лише термінальний функціонал (інтегральний функціонал є тотожним нулем) називається *задачею Майєра*. Задача з інтегральним функціоналом при $f_0 \equiv 1$ називається *задачею оптимальної швидкодії*.

Отже, задача оптимального керування формулюється як задача мінімізації функціонала (5.11) за обмежень (5.4)–(5.10). Під мінімізацією функціонала розуміють таке:

– за фіксованих t_0, $x_0 = x(t_0)$ та допустимого керування u траєкторія x керованого об'єкта визначається однозначно; таким чином, однозначно визначається і значення цільового функціонала $J(u, x_0, t_0, T, x(T))$;
– кожне допустиме керування u переводить точку x_0 у деяку іншу точку $x(T)$;
– потрібно з усіх можливих t_0, T ($t_0 \le T$), x_0, $x(T)$ та з усіх допустимих керувань $u \in U$, що переводять точку x_0 у точку $x(T)$ за обмежень (5.4)–(5.10), вибрати такі моменти t_0 та T, такі координати x_0 та $x(T)$ і таке керування u, що надають функціоналу (5.11) найменшого можливого значення.

Керування $\tilde{u}(t)$, яке є розв'язком цієї задачі, називають *оптимальним керуванням*, а відповідну йому траєкторію $\tilde{x}(t)$ – *оптимальною траєкторією*.

5.1.2. Принцип максимуму Понтрягіна (основна теорема)

Основний результат теорії оптимального керування – принцип максимуму Понтрягіна, який указує необхідні умови оптимальності в задачах цього класу.

Розглянемо дещо спрощену задачу:

$$\begin{cases} J(u,T,x(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T),T) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t); \\ x(t_0) = x_0; \\ g_k(x(T),T) = 0 \ (k = \overline{1,m}); \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{5.12}$$

де $g_k : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,m})$ – задані функції, $S_0 = \{x_0\}$, $x(T) \in S_T = \{ \in \mathbb{R}^n : g_k(,T) = 0, \ k = \overline{1,m}\}$, множина U не залежить від часу, фазових обмежень немає.

Для формулювання принципу максимуму Понтрягіна вводиться так звана *функція Гамільтона*:

$$H(x,u,t,a_0,) = -a_0 f_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} {}_i f_i(x,u,t),$$

де $a_0 = \mathrm{const}$, $(t) = ({}_1(t),\ldots,{}_n(t))$. Система лінійних рівнянь відносно змінних ${}_1(t),\ldots,{}_n(t)$

$$\dot{} = -H'_x \tag{5.13}$$

називається *спряженою системою*, що відповідає траєкторії x і керуванню u (використовуємо зручне скорочення $H'_x = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right)$). Система (5.13) в координатній формі має вигляд

$$\dot{}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t),u(t),t) - \sum_{j=1}^{n} {}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t),u(t),t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 5.2 (Принцип максимуму Понтрягіна). *Нехай функції f_0, f_1, …, f_n, Φ, g_1, …, g_m мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t_0 \le t \le T$. Нехай $(\tilde{u},\tilde{x},\tilde{T})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.12). Тоді існує розв'язок спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \ge 0$, a_1, …a_m такі, що $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_m| \ne 0$, причому виконуються такі умови:*

– *умова максимуму: при кожному* $t \in [t_0, \tilde{T}]$ *функція Гамільтона* $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t))$ *досягає максимуму за* u *при* $u = \tilde{u}(t)$*, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, (t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t)); \tag{5.14}$$

– *перша умова трансверсальності на правому кінці*

$$(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) - \sum_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \tag{5.15}$$

– *друга умова трансверсальності на правому кінці*

$$\begin{gathered} \max_{u \in U} H(\tilde{x}(\tilde{T}), u, \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = \\ = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) + \sum_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}). \end{gathered} \tag{5.16}$$

5.1.3. Схема застосування принципу максимуму Понтрягіна

Застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна, можна користуватись такою схемою (задача (5.12)).

1. Використовуючи умову максимуму (5.14), знаходять «підозріле на оптимальність» керування $\tilde{u}(t)$ як функцію v, що залежить від додаткових параметрів $x(t)$, a_0 та (t):

$$\begin{gathered} H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, (t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{u}(t) = v(t, x(t), a_0, (t)). \end{gathered}$$

2. Виписують систему $2n$ диференціальних рівнянь, що включає n рівнянь вихідного об'єкта (5.4) та n рівнянь спряженої системи (5.13) (замість $\tilde{u}$ підставляють вираз v):

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) & = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t), \quad i = \overline{1, n}; \\ \dot{}_i(t) & = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t) - \\ & \quad - \sum\limits_{j=1}^{n} {}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5.17}$$

Загальним розв'язком системи (5.17) буде «підозріла на оптимальність» траєкторія $\tilde{x}$ та відповідна вектор-функція , які додатково залежать від $2n$ констант інтегрування та від параметра a_0.

3. Константи інтегрування, що виникають під час розв'язання системи (5.17) ($2n$ констант), знаходять спільно із параметрами a_0, a_1, …, a_m та кінцевим моментом $\tilde{T}$, використовуючи умови трансверсальності (5.15) та (5.16), умови на закріпленому за умовами задачі лівому кінці ($x(t_0) = x_0$), а також умови $g_k(x(\tilde{T}), \tilde{T}) = 0$ ($k = \overline{1, m}$) на правому кінці:

$$\begin{cases} {}_i(\tilde{T}) = -a_0 \Phi'_{x_i}(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) - \sum\limits_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_{x_i}(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}), \quad i = \overline{1, n}; \\ H(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{u}(\tilde{T}), \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) + \\ \qquad\qquad\qquad + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j (g_j)'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1, n}; \\ g_k(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{5.18}$$

Система (5.18) містить $2n + m + 1$ алгебричних рівнянь та $2n + m + 2$ невідомих, тобто для повного розв'язання системи (5.18) не вистачає одного рівняння.

4. Додаткову умову для розв'язання (5.18) отримують, використовуючи так звану *однорідність* функції Гамільтона відносно a_0 та :

$$H(x, u, t, \alpha a_0, \alpha) = \alpha H(x, u, t, a_0,), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо:

$$v(t, x(t), \alpha a_0, \alpha(t)) = \alpha v(t, x(t), a_0, (t)), \quad \forall \alpha > 0,$$

де $v(t, x(t), a_0, (t))$ – розв'язок умови максимуму (5.14). Умови трансверсальності (5.15) та (5.16) також однорідні щодо $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та . Отже, якщо деякий набір параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та вектор задовольняють умови теореми 5.2, то ці умови також задовольняються набором $\alpha a_0, \alpha a_1, \ldots, \alpha a_m$ та вектором α за будь-якого $\alpha > 0$. Тому параметри $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та вектор визначають теоремою 5.2 лише з точністю до додатного множника, і цей множник можна обирати довільно. Це дозволяє запровадити певне нормування, наприклад (ураховуючи, що параметри

$a_0, a_1, \ldots, a_m$ одночасно не дорівнюють нулю):

$$\sum_{k=0}^{m} a_k^2 = 1.$$

Досить часто вдається довести додатність a_0 і тоді можна застосувати більш зручне нормування:

$$a_0 = 1.$$

Отже, застосування принципу максимуму Понтрягіна фактично зводиться до розв'язання задачі Коші (5.17), (5.18), яку часто називають *крайовою задачею принципу максимуму*. Розглянемо крайову задачу принципу максимуму для найпоширеніших режимів обмежень для кінцевого моменту часу та правого кінця траєкторії.

5.2. Деякі типи обмежень на правому кінці траєкторії

5.2.1. Фіксований кінцевий момент часу та закріплений правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T фіксований, тобто $T = T_0$, та правий кінець траєкторії $x(T)$ закріплений, тобто $x(T) = x_T$. Цей режим передбачає $n+1$ обмеження, які можна реалізувати такими функціями g_k:

$$g_1(,T) = {}_1 - (x_T)_1, \ \ldots, \ g_n(,T) = {}_n - (x_T)_n, \quad g_{n+1}(,T) = T - T_0.$$

Отже, розглядаємо таку задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u) = \int\limits_{t_0}^{T_0} f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \\ x(t_0) = x_0; \\ x(T_0) = x_T; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T_0 \end{cases} \tag{5.19}$$

(додаток $\Phi(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}) = \Phi(x_T, T_0)$ у цьому режимі є константою, і його можна не враховувати).

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$
\begin{gathered}
(T_0) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n); \\
\max_{u \in U} H(\tilde{x}(T_0), u, T_0, a_0, (T_0)) = a_{n+1}.
\end{gathered}
$$

Отже, параметри $a_1, \ldots, a_n$ визначають з першої умови трансверсальності, а параметр a_{n+1} – з другої умови трансверсальності:

$$
\begin{gathered}
a_k = -_k(T_0), \quad k = \overline{1, n}; \\
a_{n+1} = \max_{u \in U} H(x_T, u, T_0, a_0, (T_0))
\end{gathered}
\tag{5.20}
$$

(нагадаємо, що a_0 можна зафіксувати нормуванням, наприклад, $a_0 = 1$ при $a_0 > 0$).

Тепер, ураховуючи той факт, що параметри $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ трапляються лише в умовах трансверсальності, можемо вилучити їх із крайової задачі максимуму разом з умовами трансверсальності. Отже, крайова задача принципу максимуму набуває досить простого вигляду

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i(t) & = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t), \quad i = \overline{1, n}; \\
\dot{}_i(t) & = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t) - \\
& \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} {}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}; \\
x_k(t_0) & = (x_0)_k, \quad k = \overline{1, n}; \\
x_k(T_0) & = (x_{T_0})_k, \quad k = \overline{1, n}.
\end{cases}
$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, можна обчислити параметри $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ з умов (5.20). Однак для розв'язання цієї задачі оптимального керування параметри $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ не потрібні.

Тепер розглянемо можливі варіанти нормування параметрів, для чого виділимо два випадки.

1. $a_0 = 0$. У цьому випадку з (5.20) отримуємо

$$
|_1(T_0)| + |_2(T_0)| + \cdots + |_n(T_0)| \neq 0
$$

(інакше $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| = 0$, що суперечить умові теореми 5.2). Крім того, із спряженої системи бачимо, що вектор $_k$ $(k = \overline{1, n})$ при

$a_0 = 0$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{}(t) = -\sum_{j=1}^{n} {}_j(t)\frac{\partial}{\partial x} f_j(x(t), u(t), t).$$

Але тоді рівність $(T_0) = 0$ тягне тотожність $\equiv 0$. Отже, при $a_0 = 0$ можна гарантувати виконання умови

$$|{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0].$$

2. $a_0 > 0$. У цьому випадку, як уже зазначалось, можна вибрати зручне нормування $a_0 = 1$.

Отже, в обох розглянутих випадках (тобто для будь-якого $a_0 \geq 0$) виконується така умова:

$$a_0 + |{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0], \tag{5.21}$$

яка зараз еквівалентна умові $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| \neq 0$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для цього часткового випадку.

Наслідок 1 (фіксований T та закріплений $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом з цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.19). Тоді існує розв'язок спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і число $a_0 \geq 0$ такі, що*

$$a_0 + |{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконується умова максимуму

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, (t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t)).$$

5.2.2. Фіксований кінцевий момент часу та вільний правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T фіксований, тобто $T = T_0$, а правий кінець траєкторії $x(T)$ вільний, тобто жодного обмеження на $x(T)$ не встановлено. Цей режим передбачає одне обмеження, яке можна реалізувати такою функцією g_1:

$$g_1(,T) = T - T_0.$$

Отже, розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u, x(T_0)) = \int\limits_{t_0}^{T_0} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T_0)) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \\ x(t_0) = x_0; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T_0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$(T_0) = -a_0 \Phi'(\tilde{x}(T_0));$$
$$H(\tilde{x}(T_0), \tilde{u}(T_0), T_0, a_0, (T_0)) = a_1.$$

Отже, параметр a_1 знаходимо з другої умови трансверсальності

$$a_1 = H(\tilde{x}(T_0), \tilde{u}(T_0), T_0, a_0, (T_0)). \tag{5.23}$$

Тепер, оскільки параметр a_1 міститься лише в другій умові трансверсальності, можемо вилучити його із крайової задачі максимуму разом з другою умовою трансверсальності. Отже, крайова задача принципу максимуму набуває досить простого вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) & = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t), \quad i = \overline{1,n}; \\ \dot{}_i(t) & = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t) - \\ & \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} {}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1,n}; \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ (T_0) & = -a_0 \Phi'(x(T_0)). \end{cases}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, параметр a_1 можна обчислити з умови (5.23). Однак для розв'язання такої задачі оптимального керування параметр a_1 не потрібен.

Аналогічно попередньому випадку (фіксований T та закріплений $x(T)$) неважко довести, що в цьому режимі також виконується умова (5.21), яку зручно використовувати під час нормування параметрів:

$$a_0 + |{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0]$$

(еквівалентно умові $a_0 + |a_1| \neq 0$). Більш того, у цьому випадку гарантовано $a_0 > 0$, інакше з першої умови трансверсальності отримали б $(T_0) = 0$. Таким чином, можемо прийняти $a_0 = 1$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для цього окремого випадку.

Наслідок 2 (фіксований T та вільний $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, …, f_n, Φ мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $t_0 \leq t \leq T_0$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.22). Тоді існує розв'язок спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і число $a_0 > 0$ (можна вибрати довільним додатним, наприклад, $a_0 = 1$) такі, що виконуються умови:*

– *умова максимуму:*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), T, a_0, (t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, T, a_0, (t));$$

– *перша умова трансверсальності:*

$$(T_0) = -a_0 \Phi'(\tilde{x}(T_0)).$$

5.2.3. Вільний кінцевий момент часу та закріплений правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T вільний, тобто жодного обмеження на T не встановлено, а правий кінець траєкторії $x(T)$ закріплений, тобто $x(T) = x_T$. Цей режим передбачає n обмежень, які можна реалізувати такими функціями g_k:

$$g_1(, T) = {}_1 - (x_T)_1, \ \ldots, \ g_n(, T) = {}_n - (x_T)_n.$$

Отже, розглядаємо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} J(u,T) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(T) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t); \\ x(t_0) = x_0; \\ x(T) = x_T; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5.24}$$

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$(\tilde{T}) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$
$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = a_0 \Phi'(\tilde{T}).$$

Отже, параметри $a_1, \ldots, a_n$ визначають з першої умови трансверсальності:

$$a_k = -_k(\tilde{T}), \quad k = \overline{1,n} \tag{5.25}$$

(нагадаємо, що a_0 можна зафіксувати нормуванням, наприклад, $a_0 = 1$ при $a_0 > 0$). Тепер, оскільки параметри $a_1, \ldots, a_n$ трапляються лише в першій умові трансверсальності, можемо вилучити їх із крайової задачі максимуму разом з першою умовою трансверсальності. Отже, крайова задача принципу максимуму набуває досить простого вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), v(t,x(t),a_0,(t)),t), \quad i = \overline{1,n}; \\ \dot{}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t,x(t),a_0,(t)),t) - \\ \qquad\qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} {}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t),u(t),t), \qquad i = \overline{1,n}; \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ x_k(T) = (x_T)_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ \max\limits_{u \in U} H(x_T, u, T, a_0, (T)) = a_0 \Phi'(T). \end{cases}$$

Звичайно, розв'язавши сформульовану крайову задачу максимуму, параметри $a_1, \ldots, a_n$ можна обчислити з умов (5.25). Однак для розв'язання цієї задачі оптимального керування параметри $a_1, \ldots, a_n$ не потрібні.

Легко перевірити, що цього разу також виконується умова (5.21), яку зручно застосовувати під час нормування параметрів:

$$a_0 + |{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0]$$

(еквівалентно умові $a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| \neq 0$).

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для наведеного випадку.

Наслідок 3 (вільний T та закріплений $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, …, f_n, Φ мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.24). Тоді існує розв'язок спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \geq 0$, a_1, $\ldots a_n$ такі, що*

$$a_0 + |{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконуються:

– *умова максимуму: при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t))$ досягає максимуму за u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, (t)) = \sup_{u \in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t));$$

– *друга умова трансверсальності на правому кінці:*

$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = a_0 \Phi'(\tilde{T}).$$

5.2.4. Вільний кінцевий момент часу та вільний правий кінець траєкторії

Нехай кінцевий момент часу T та правий кінець траєкторії $x(T)$ вільні, тобто жодного обмеження на T та $x(T)$ не встановлено. Цей режим не передбачає обмежень, і функцій g_k зараз немає ($m = 0$).

Отже, розглядаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u, T, x(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T), T) \to \min; \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \\ x(t_0) = x_0; \\ u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{5.26}$$

Умови трансверсальності за цього режиму набувають вигляду:

$$(\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T});$$
$$\max_{u\in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = a_0\Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}).$$

Отже, крайова задача принципу максимуму набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t), \quad i = \overline{1, n}; \\ \dot{}_i(t) = a_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t), v(t, x(t), a_0, (t)), t) - \\ \qquad - \sum\limits_{j=1}^{n} {}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x(t), u(t), t), \qquad i = \overline{1, n}; \\ x_k(t_0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1, n}; \\ (\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}); \\ \max\limits_{u\in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = a_0\Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}). \end{cases}$$

За цього режиму існує лише один параметр $a_0 \geq 0$ і за умовою теореми 5.2 отримуємо: $a_0 > 0$. Отже, з міркувань нормування, можемо вибрати єдиний параметр a_0 довільним додатним числом, наприклад, $a_0 = 1$.

Сформулюємо, нарешті, наслідок з теореми 5.2 для цього окремого випадку.

Наслідок 4 (вільні T та $x(T)$). *Нехай функції f_0, f_1, ..., f_n, Φ мають усі частинні похідні першого порядку і неперервні разом із цими похідними за сукупністю аргументів $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $T \in \mathbb{R}$, $t \leq T$. Нехай $(\tilde{u}, \tilde{x})$ – розв'язок задачі оптимального керування (5.26). Тоді існує розв'язок спряженої системи (5.13), який відповідає керуванню $\tilde{u}$ та траєкторії $\tilde{x}$, і числа $a_0 \geq 0$, a_1, ... a_n такі, що*

$$a_0 + |{}_1(t)| + |{}_2(t)| + \cdots + |{}_n(t)| \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$

причому виконуються:

– *умова максимуму: при кожному $t \in [t_0, \tilde{T}]$ функція Гамільтона $H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t))$ досягає максимуму за u при $u = \tilde{u}(t)$, тобто*

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, a_0, (t)) = \sup_{u\in U} H(\tilde{x}(t), u, t, a_0, (t));$$

– *перша умова трансверсальності на правому кінці:*

$$(\tilde{T}) = -a_0\Phi'_x(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T});$$

– *друга умова трансверсальності на правому кінці:*

$$\max_{u \in U} H(x_T, u, \tilde{T}, a_0, (\tilde{T})) = a_0 \Phi'_T(\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}).$$

5.2.5. Загальні зауваження

У вищенаведеному матеріалі було розглянуто два типи обмежень на правий кінець траєкторії – відсутність обмежень на $x(T)$ та жорстка фіксація ($x(T) = x_T$). Тут слід зробити три зауваження.

Зауваження 5.1. Часто трапляється комбінація розглянутих обмежень на $x(T)$, тобто деякі координати $x(T)$ закріплені, а інші вільні:

$$x_i(T) = (x_T)_i, \quad i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}.$$

У цьому разі до закріплених координат $x_i(T) = (x_T)_i$, $i = j_1, j_2, \ldots, j_k$ можна застосувати схему, запропоновану для закріпленого кінця траєкторії, тобто відповідні умови трансверсальності разом з відповідними параметрами вилучаються із крайової задачі (5.17), (5.18) (див. підрозд. 5.3, приклад 5.3).

Зауваження 5.2. Очевидно, що випадками жорсткого закріплення та повної свободи не вичерпуються всі можливі обмеження на правому кінці траєкторії. Зокрема, у задачі може існувати нетривіальний функціональний зв'язок між кінцем траєкторії $x(T)$ і моментом часу T, тобто одна або декілька функцій обмеження $g_k(, T)$ можуть суттєво залежати від обох змінних (див. підрозд. 5.3, приклад 5.4).

Зауваження 5.3. Схема застосування принципу максимуму, запропонована в підрозд. 5.1.3, має лише загальнорекомендаційний характер. Іноді можна прискорити розв'язання задачі, якщо відступити від запропонованої схеми. Так, якщо спряжена система не містить векторів x та u (це можливо, якщо система (5.4), що описує об'єкт, лінійна), доцільно спочатку знайти загальний розв'язок спряженої системи (5.13), а вже потім, використовуючи знайдений вираз для (t), переходити до загальної схеми.

5.3. Приклади розв'язання задач оптимального керування

Приклад 5.1. Нехай точка рухається по прямій за законом

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T$$

за фіксованих $x(0)$ та $x'(0)$. Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початкового положення в початок координат за мінімальний час T. При цьому швидкість точки в кінці траєкторії повинна бути нульовою, а керування має задовольняти умову:

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0, T].$$

Застосуємо до задачі принцип максимуму Понтрягіна. Спочатку позбавимось другої похідної, увівши двовимірний вектор фазових змінних: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тепер рух керованого об'єкта можна описати системою диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

Початкове положення $x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ при $t_0 = 0$ та кінцеве положення $x(T) = (0, 0)$ за умовою задачі фіксовані, а кінцевий момент часу T незакріплений, тобто маємо випадок, розглянутий в підрозд. 5.2.2. У цій задачі $U = [-1, 1]$, $f_0 \equiv 1$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = -a_0 + {}_1x_2 + {}_2u.$$

Спряжена система має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{}_1 &= -H'_{x_1} = 0, \\ \dot{}_2 &= -H'_{x_2} = -{}_1. \end{aligned}$$

Як зазначалось у підрозд. 5.2.2, у цьому випадку можна не використовувати першу умову трансверсальності (вилучивши відповідні параметри). Друга умова трансверсальності для цієї задачі має вигляд

$$-a_0 + {}_1(T)x_2(T) + {}_2(T)u(T) = 0. \tag{5.27}$$

Отже, крайова задача принципу максимуму набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{\ }_1(t) = 0; \\ \dot{\ }_2(t) = -{}_1; \\ x_k(0) = (x_0)_k, \quad k = \overline{1,2}; \\ x_k(T) = 0, \quad k = \overline{1,2}; \\ -a_0 + {}_1(T)x_2(T) + {}_2(T)\tilde{u}(T) = 0, \end{cases}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона:

$$-a_0 + {}_1(t)x_2(t) + {}_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u \in U}(-a_0 + {}_1(t)x_2(t) + {}_2(t)u).$$

Оскільки тепер спряжена система має дуже простий вигляд, не містить x та і допускає явний запис загального розв'язку, є сенс дещо відступити від загальної схеми і спочатку виписати загальний розв'язок спряженої системи, а вже потім шукати оптимальне керування з умови максимізації функції Гамільтона (див. зауваження 5.3). Загальний розв'язок спряженої системи можна записати в явному вигляді:

$${}_1(t) = C; \quad {}_2(t) = -Ct + D,$$

де C, D – константи інтегрування.

Беручи до уваги умову нормування (5.21), розглянемо випадок $|C| + |D| \neq 0$ (інакше, із (5.27) отримаємо $a_0 = 0$, що суперечить умові (5.21)). Максимум функції H по $u \in U$ досягається лише за такого керування $\tilde{u}$, яке задовольняє умову:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1, & {}_2(t) > 0; \\ -1, & {}_2(t) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що при ${}_2(t) = 0$ керування $\tilde{u}(t)$ може набувати довільного значення. Проте, ураховуючи вимогу неперервності u справа, а також умову ${}_2(t) \not\equiv 0$ (${}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow C = D = 0$) отримуємо, що $\tilde{u}(t) \in \{-1, 1\}$ і при ${}_2(t) = 0$.

Отже, оптимальне керування може набувати лише двох значень $u(t) \in \{-1, 1\}$ для всіх $t \in [0, T]$. Далі, завдяки лінійності $_2$, оптимальне керування $\tilde{u}$ може мати не більше однієї «точки перемикання» – точки розриву, де функція $\tilde{u}$ змінює знак.

Далі, як приклад, розглянемо конкретну початкову умову: $x^0 = (1, 0)$.

Легко переконатись, що функції керування $u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_1; \\ -1, & t_1 \le t \le T, \end{cases}$ $u(t) \equiv 1$ та $u(t) \equiv -1$ не можуть перевести точку $x(t)$ з положення $(1, 0)$ в $(0, 0)$, тобто оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ повинно мати точку перемикання $t_1 \in (0, T)$ із -1 в 1:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < t_1; \\ 1, & t_1 \le t \le T. \end{cases}$$

Такому керуванню та початковим умовам $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ відповідає траєкторія:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < t_1; \\ \frac{t^2}{2} - 2t_1 t + t_1^2 + 1, & t_1 \le t \le T; \end{cases}$$
$$x_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t < t_1; \\ t - 2t_1, & t_1 \le t \le T. \end{cases}$$

З умов $x_1(T) = x_2(T) = 0$ знаходимо: $T = \widetilde{T} = 2$, $t_1 = \frac{\widetilde{T}}{2} = 1$ (система має також розв'язок $t_1 = -1$, $T = -2$, який відкидаємо, оскільки від'ємний час не відповідає вимогам задачі).

Отже, принцип максимуму дозволяє лише одне оптимальне керування:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1; \\ 1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Існування оптимального керування можна довести, розглянувши фізичну суть задачі (зараз не будемо цього робити). Отже, оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ існує, воно єдине і йому відповідає така оптимальна траєкторія:

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1; \\ \frac{(t-2)^2}{2}, & 1 \le t \le 2; \end{cases}$$
$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t < 1; \\ t - 2, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Відповідні графіки наведені на рис. 5.1.

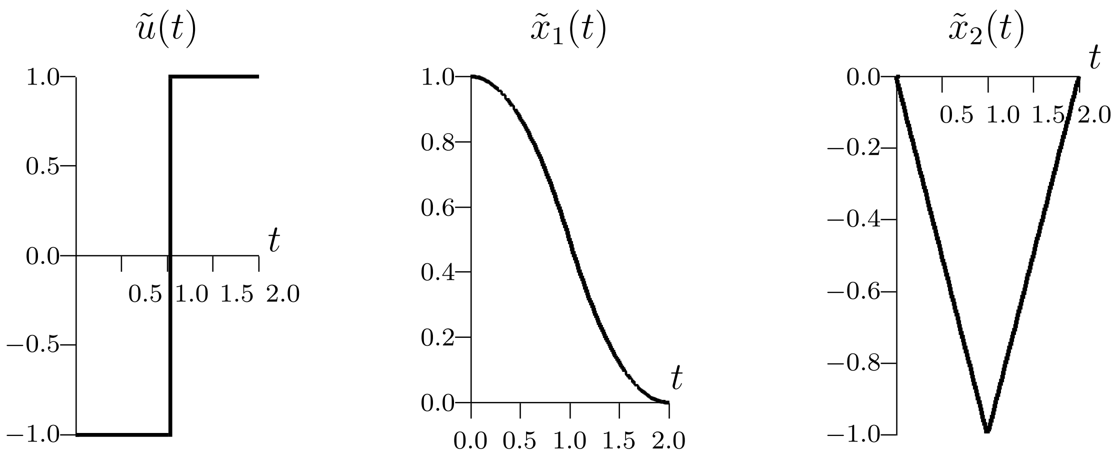

Рис. 5.1

Цікаво, що для розв’язання задачі, тобто для знаходження оптимального керування $\tilde{u}$ та відповідної траєкторії $\tilde{x}$, константи C та D не обчислювали, а знайшли лише точку перемикання $t_1 = T/2 = 1$, яка визначає зв’язок між C та D:

$${}_2(t_1) = 0 \Leftrightarrow -C + D = 0 \Leftrightarrow C = D.$$

Додаткове рівняння для обчислення C та D надається другою умовою трансверсальності (5.27):

$$-a_0 +_1(\widetilde{T})x_2(\widetilde{T}) +_2(\widetilde{T})\tilde{u}(\widetilde{T}) = 0 \Leftrightarrow -a_0 + (-C\widetilde{T} + D)\tilde{u}(\widetilde{T}) = 0 \Leftrightarrow a_0 = -C.$$

($\tilde{u}(\tilde{T}) = 1$, оскільки функція $\tilde{u}$ зростає від $\tilde{u}(0) = -1$ до $\tilde{u}(\tilde{T}) = 1$ і має лише одну точку перемикання $t_1 = \frac{\tilde{T}}{2}$).

Отже, як і слід було чекати, параметр $a_0 = -C$ та функції ${}_1(t) = C$ і ${}_2(t) = -C(t-1)$ визначені з точністю до додатного множника $-C$ (зазначимо, що $C < 0$, оскільки ${}_2(t) = -C(t-1)$ має зростати).

Приклад 5.2. Нехай, як і в попередньому прикладі, точка рухається по прямій за законом

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T,$$

початкове положення та швідкість фіксовані: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початку координат у положення $x(T) = 1$, $\dot{x}(T) = 0$, мінімізучи функціонал

$$J(u) = \int\limits_0^T u^2(t)dt.$$

Кінцевий момент T – фіксований.

Як і в попередньому прикладі, позбавимось другої похідної, увівши двовимірний вектор фазових змінних $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

Початкове положення $x(0) = (0,0)$, правий кінець $x(T) = (1,0)$ та кінцевий момент T за умовою задачі фіксовані, тобто маємо випадок, розглянутий в підрозд. 5.2.1. У цій задачі $U = \mathbb{R}$, $f_0(x(t), u(t), t) = u(t)$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона та спряжена система мають вигляд

$$H(x, u, T, a_0,) = -a_0u^2 + {}_1x_2 + {}_2u, \quad \begin{cases} \dot{}_1 = 0, \\ \dot{}_2 = -{}_1. \end{cases}$$

Отже, крайова задача принципу максимуму має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{}_1(t) = 0; \\ \dot{}_2(t) = -{}_1(t); \\ x_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \\ x_1(T) = 1, \ x_2(T) = 0, \end{cases}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюють з умови максимізації функції Гамільтона

$$-a_0\tilde{u}(t)^2 + {}_1(t)x_2(t) + {}_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u \in \mathbb{R}}(-a_0u^2 + {}_1(t)x_2(t) + {}_2(t)u).$$

Запишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$$ _1(t) = C; \quad _2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}. $$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум за u лише при тих t, коли $_2(t) = 0$, тобто $_2 \equiv 0$, $_1 = -\dot{}_2 \equiv 0$, що суперечить умові (5.21). Отже, $a_0 > 0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при $\tilde{u}(t) = \frac{_2(t)}{2} = \frac{-Ct+D}{2}$. Такому керуванню за початкових умов $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ відповідає траєкторія

$$ \begin{cases} x_1(t) = -\frac{Ct^3}{12} + \frac{Dt^2}{4}; \\ x_2(t) = -\frac{Ct^2}{4} + \frac{Dt}{2}. \end{cases} $$

Константи C та D знаходимо з умов на правому кінці інтервалу:

$$ \begin{cases} x_1(T) = -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = 0; \\ x_2(T) = -\frac{CT^2}{4} + \frac{DT}{2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{24}{T^3}; \\ D = \frac{12}{T^2}. \end{cases} $$

Отже, отримуємо оптимальне керування та відповідну траєкторію:

$$ \tilde{u}(t) = -\frac{12t}{T^3} + \frac{6}{T^2}; $$
$$ \tilde{x}_1(t) = -\frac{2t^3}{T^3} + \frac{3t^2}{T^2}; $$
$$ \tilde{x}_2(t) = -\frac{6t^2}{T^3} + \frac{6t}{T^2}. $$

Наведемо відповідні графіки для випадку $T = 1$ (рис. 5.2).

Приклад 5.3. Нехай, як і в двох попередніх прикладах, точка рухається по прямій за законом

$$ \ddot{x}(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T, $$

початкове положення та швидкість фіксовані: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Потрібно знайти керування u, яке переводить точку з початку координат у положення $x(T) = 1$ з довільною кінцевою швидкістю ($\dot{x}(T) \in \mathbb{R}$), мінімізуючи функціонал

$$ J(u) = \int_0^T u^2(t) dt. $$

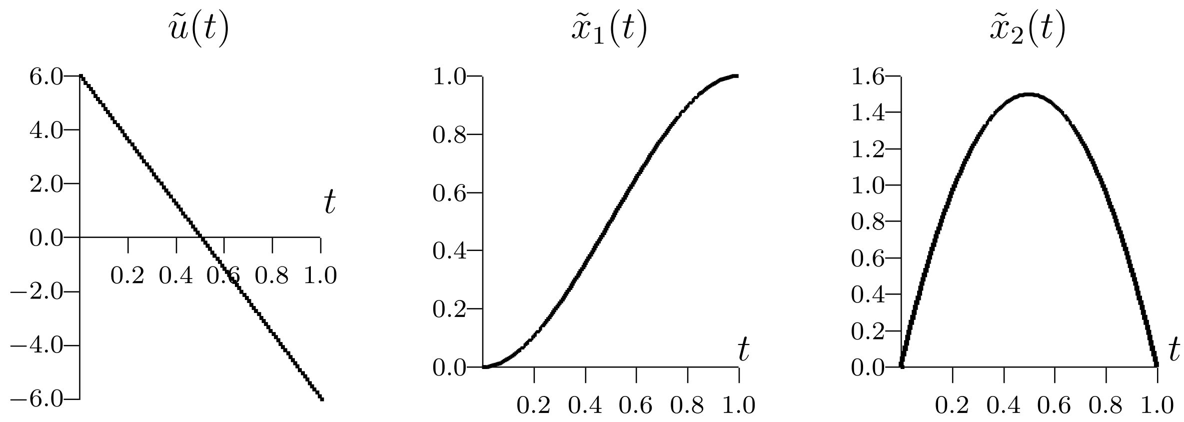

Рис. 5.2

Кінцевий момент T – фіксований.

Як і в попередньому прикладі, позбавимось другої похідної, увівши двовимірний вектор фазових змінних $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u.$$

Початкове положення та перша координата вектора $x(T)$ фіксовані: $x(0) = (0,0)$, $x_1(T) = 1$; значення $x_2(T)$ вільне. Отже, маємо одне обмеження на правому кінці траєкторії:

$$g_1((x_1(T), x_2(T)), T) = 0,$$

де $g_1(,T) = {}_1 - 1,\ = ({}_1, {}_2)$.

Згідно із теоремою 5.2 вводимо до розгляду $a_0 \geq 0$ та $a_1 \in \mathbb{R}$ (у нашому випадку $m = 1$). Випишемо першу умову трансверсальності:

$${}_1(T) = -a_1; \quad {}_2(T) = 0.$$

У цій задачі $U = \mathbb{R}$, $f_0(x(t), u(t), t) = u^2(t)$, $\Phi \equiv 0$. Функція Гамільтона та спряжена система мають вигляд

$$H(x, u, T, a_0,) = -a_0 u^2 + {}_1 x_2 + {}_2 u, \qquad \begin{cases} \dot{}_1 = 0, \\ \dot{}_2 = -{}_1. \end{cases}$$

Отже, крайова задача (5.17), (5.18) для цього випадку має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{}_1(t) = 0,\ \dot{}_2(t) = -{}_1(t); \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0; \\ x_1(T) = 1; \\ {}_1(T) = -a_1,\ {}_2(T) = 0, \end{cases} \tag{5.28}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюють з умови максимізації функції Гамільтона

$$-a_0\tilde{u}(t)^2 + {}_1(t)x_2(t) + {}_2(t)\tilde{u}(t) = \sup_{u\in\mathbb{R}}(-a_0u^2 + {}_1(t)x_2(t) + {}_2(t)u).$$

Як і слід було чекати (див. зауваження 5.1), параметр a_1 міститься лише в першій умові трансверсальності і його можна вилучити з розгляду разом з умовою ${}_1(T) = -a_1$. Отже, система (5.28) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}(t); \\ \dot{}_1(t) = 0,\ \dot{}_2(t) = -{}_1(t); \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0; \\ x_1(T) = 1; \\ {}_2(T) = 0. \end{cases}$$

Випишемо загальний розв'язок спряженої системи:

$${}_1(t) = C, \quad {}_2(t) = -Ct + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум за u лише при тих t, коли ${}_2(t) = 0$, тобто ${}_2 \equiv 0$, ${}_1 = -\dot{}_2 \equiv 0$, що суперечить умові $a_0 + |a_1| \neq 0$. Отже, $a_0 > 0$ і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при $\tilde{u}(t) = \frac{{}_2(t)}{2} = \frac{-Ct+D}{2}$. Такому керуванню за нульових початкових умов відповідає траєкторія

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{Ct^3}{12} + \frac{Dt^2}{4}; \\ x_2(t) = -\frac{Ct^2}{4} + \frac{Dt}{2}. \end{cases}$$

Константи C та D знаходимо з умови на правому кінці інтервалу та з першої умови трансверсальності:

$$\begin{cases} x_1(T) = -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = 1; \\ {}_2(T) = -CT + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{6}{T^3}; \\ D = \frac{6}{T^2}. \end{cases}$$

Отже, отримуємо оптимальне керування та відповідну траєкторію:

$$\tilde{u}(t) = \frac{3(T-t)}{T^3};$$
$$\tilde{x}_1(t) = -\frac{t^3}{2T^3} + \frac{3t^2}{2T^2};$$
$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{3t^2}{2T^3} + \frac{3t}{T^2}.$$

Наведемо відповідні графіки для випадку $T = 1$ (рис. 5.3).

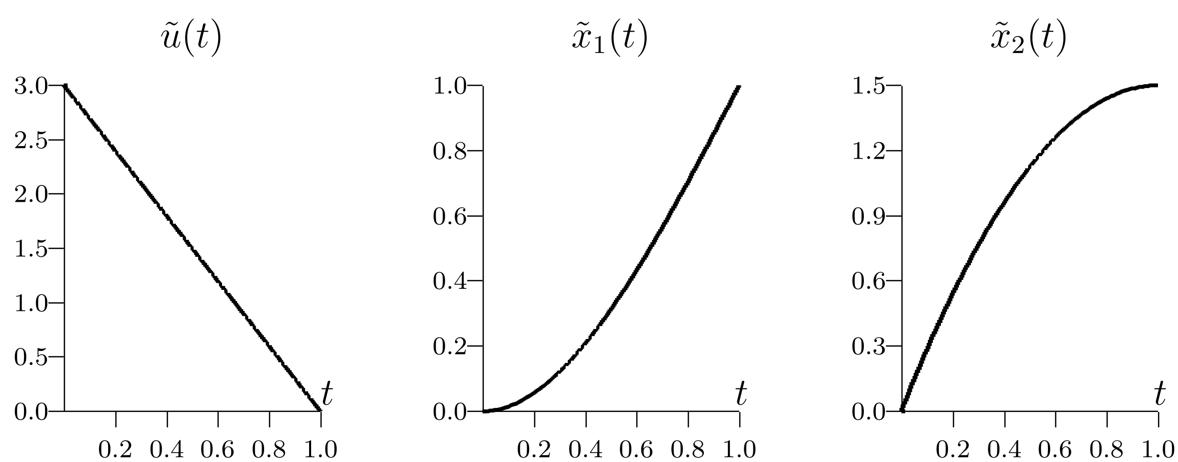

Рис. 5.3

Приклад 5.4. Розглянемо двовимірний випадок. Нехай керований об'єкт $(x(t), y(t))$ рухається на площині за законом

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u_1(t); \\ \ddot{y}(t) = u_2(t), \end{cases}$$

$0 \le t \le T$, початкове положення та швидкість фіксовані: $x'(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Потрібно в момент часу $t = T$ зустрітися з точкою $M = (r \cos wt, r \sin wt)$, мінімізуючи функціонал

$$J(u, T) = \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt + KT,$$

де $r > 0$, $w > 0$, $K > 0$ – фіксовані константи.

Швидкість об'єкта в момент зустрічі $t = T$ має дорівнювати швидкості точки M, тобто $(\dot{x}(T), \dot{y}(T)) = (-rw \sin wT,\ rw \cos wT)$. Кінцевий момент T вважаємо нефіксованим.

Як і в попередніх прикладах, позбавимось другої похідної, увівши чотиривимірний вектор фазових змінних $x_1 = x$, $\dot{x}_2 = x_1$, $y_1 = y$, $\dot{y}_2 = y_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = u_2(t). \end{cases}$$

Згідно з умовою задачі, маємо такі обмеження на правому кінці траєкторії (для зручності використовуємо двовимірну індексацію):

$$g_{i,j}((x_1(T), x_2(T), y_1(T), y_2(T)), T) = 0, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

де

$$g_{1,1}(, T) = {}_{1,1} - r\cos(wT); \quad g_{1,2}(, T) = {}_{1,2} + rw\sin(wT);$$
$$g_{2,1}(, T) = {}_{2,1} - r\sin(wT); \quad g_{2,2}(, T) = {}_{2,2} - rw\cos(wT);$$
$$= ({}_{1,1},\ {}_{1,2},\ {}_{2,1},\ {}_{2,2}).$$

У цій задачі маємо: $U = \mathbb{R}^2$, $f_0(x(t), u(t), t) = u_1^2(t) + u_2^2(t)$, $\Phi((x_1(T), x_2(T), y_1(T), y_2(T)), T) = KT$.

Згідно із теоремою 5.2 уводимо до розгляду параметри $a_0 \ge 0$ та $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R}$. Функція Гамільтона для цієї задачі має вигляд

$$H(x, u, T, a_0,) = -a_0(u_1^2 + u_2^2) + {}_{1,1}x_2 + {}_{1,2}u_1 + {}_{2,1}y_2 + {}_{2,2}u_2$$

(для координат вектор-функції $(t) = ({}_{1,1}(t), {}_{1,2}(t), {}_{2,1}(t), {}_{2,2}(t))$ також застосовуємо двовимірну індексацію).

Випишемо спряжену систему

$$\begin{cases} \dot{}_{1,1}(t) = 0; \quad \dot{}_{1,2}(t) = -{}_{1,1}(t); \\ \dot{}_{2,1}(t) = 0; \quad \dot{}_{2,2}(t) = -{}_{2,1}(t). \end{cases}$$

Випишемо першу та другу умови трансверсальності:

$$\begin{gathered} {}_{1,1}(T) = -a_{1,1}; \quad {}_{1,2}(T) = -a_{1,2}; \quad {}_{2,1}(T) = -a_{2,1}; \quad {}_{2,2}(T) = -a_{2,2}; \\ \sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2} \big(-a_0(u_1^2 + u_2^2) + {}_{1,1}(T)x_2(T) + {}_{1,2}(T)u_1 + \\ + {}_{2,1}(T)y_2(T) + {}_{2,2}(T)u_2 \big) = \\ = a_0 K + a_{1,1} rw \sin wT + a_{1,2} rw^2 \cos wT - a_{2,1} rw \cos wT + a_{2,2} rw^2 \sin wT. \end{gathered}$$

Отже, крайова задача принципу максимуму (5.17), (5.18) для цього випадку має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \tilde{u}_2(t); \\ \dot{}_{1,1}(t) = 0, \quad \dot{}_{1,2}(t) = -{}_{1,1}(t); \\ \dot{}_{2,1}(t) = 0, \quad \dot{}_{2,2}(t) = -{}_{2,1}(t); \\ x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = 0; \\ x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = 0; \\ x_1(T) = r\cos wT, \quad y_1(T) = r\sin wT; \\ x_2(T) = -rw\sin wT, \quad y_2(T) = rw\cos wT; \\ {}_{1,1}(T) = -a_{1,1}, \quad {}_{1,2}(T) = -a_{1,2}; \\ {}_{2,1}(T) = -a_{2,1}, \quad {}_{2,2}(T) = -a_{2,2}; \\ -a_0(\tilde{u}_1(T)^2 + \tilde{u}_2(T)^2) + {}_{1,1}(T)x_2(T) + {}_{1,2}(T)\tilde{u}_1(T) + \\ \quad + {}_{2,1}(T)y_2(T) + {}_{2,2}(T)\tilde{u}_2(T) = \\ \quad = a_0 K + a_{1,1} rw \sin wT + a_{1,2} rw^2 \cos wT - \\ \quad - a_{2,1} rw \cos wT + a_{2,2} rw^2 \sin wT, \end{cases} \tag{5.29}$$

де оптимальне керування $\tilde{u}(t)$ обчислюється з умови максимізації функції Гамільтона

$$-a_0(\tilde{u}_1(t)^2 + \tilde{u}_2(t)^2) + {}_{1,1}(t)x_2(t) + {}_{1,2}(t)\tilde{u}_1(t) + {}_{2,1}(t)y_2(t) + {}_{2,2}(t)\tilde{u}_2(t) =$$
$$= \sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2} \big(-a_0(u_1^2 + u_2^2) + {}_{1,1}(t)x_2(t) + {}_{1,2}(t)u_1 + {}_{2,1}(t)y_2(t) + {}_{2,2}(t)u_2\big).$$

Перша умова трансверсальності дозволяє виразити параметри $a_{i,j}$ через ${}_{i,j}$ $(i,j \in \{1,2\})$. Підставивши в (5.29) замість $a_{i,j}$ вираз $-{}_{i,j}(T)$ $(i,j \in \{1,2\})$, можемо вилучити параметри $a_{i,j}$ з розгляду разом з умовами $a_{i,j} = -{}_{i,j}(T)$ $(i,j \in \{1,2\})$. Крім того, використовуючи явний вираз для $x_i(T)$, $y_i(T)$ $(i = 1,2)$, можна суттєво спростити другу умову трансверсальності. Після відповідних підстановок і спрощень система (5.29) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = \tilde{u}_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \tilde{u}_2(t); \\ \dot{}_{1,1}(t) = 0, \quad \dot{}_{1,2}(t) = -{}_{1,1}(t); \\ \dot{}_{2,1}(t) = 0, \quad \dot{}_{2,2}(t) = -{}_{2,1}(t); \\ x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = 0; \\ x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = 0; \\ x_1(T) = r\cos wT, \quad y_1(T) = r\sin wT; \\ x_2(T) = -rw\sin wT, \quad y_2(T) = rw\cos wT; \\ -a_0(\tilde{u}_1(T)^2 + \tilde{u}_2(T)^2) + {}_{1,2}(T)\tilde{u}_1(T) + {}_{2,2}(T)\tilde{u}_2(T) = \\ \quad = a_0K - {}_{1,2}rw^2\cos wT - {}_{2,2}rw^2\sin wT. \end{cases} \tag{5.30}$$

Випишемо загальний розв'язок спряженої системи

$$\begin{cases} {}_{1,1}(t) = A, \quad {}_{1,2}(t) = -At + B, \\ {}_{2,1}(t) = C, \quad {}_{2,2}(t) = -Ct + D, \end{cases} \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $a_0 = 0$. Тоді функція Гамільтона має максимум за (u_1, u_2) лише при тих t, коли ${}_{1,2}(t) = {}_{2,2}(t) = 0$, тобто ${}_{1,2} = {}_{2,2} \equiv 0$. Але тоді ${}_{1,1} = -\dot{}_{1,2} \equiv 0$, ${}_{2,1} = -\dot{}_{2,2} \equiv 0$, що суперечить умові $a_0 + |a_{1,1}| + |a_{1,2}| + |a_{2,1}| + |a_{2,2}| \neq 0$. Отже, $a_0 > 0$, і з міркувань нормування можемо зафіксувати $a_0 = 1$.

Максимум функції Гамільтона досягається при

$$\tilde{u}_1(t) = \frac{{}_{1,2}(t)}{2} = \frac{-At + B}{2}; \quad \tilde{u}_2(t) = \frac{{}_{2,2}(t)}{2} = \frac{-Ct + D}{2}. \tag{5.31}$$

Такому керуванню за початкових умов $x_1(0) = y_1(0) = 0$, $x_2(0) = y_2(0) = 0$ відповідає траєкторія

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{At^3}{12} + \dfrac{Bt^2}{4}, \quad x_2(t) = -\dfrac{At^2}{4} + \dfrac{Bt}{2}; \\ y_1(t) = -\dfrac{Ct^3}{12} + \dfrac{Dt^2}{4}, \quad y_2(t) = -\dfrac{Ct^2}{4} + \dfrac{Dt}{2}. \end{cases} \tag{5.32}$$

Константи інтегрування A, B, C, D знаходимо з умов на правому кінці траєкторії

$$\begin{cases} -\frac{AT^3}{12} + \frac{BT^2}{4} = r\cos wT; \\ -\frac{AT^2}{4} + \frac{BT}{2} = -r\sin wT; \\ -\frac{CT^3}{12} + \frac{DT^2}{4} = r\sin wT; \\ -\frac{CT^2}{4} + \frac{DT}{2} = r\cos wT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{24}{T^3}\left(\frac{rwT}{2}\sin wT + r\cos wT\right); \\ B = \frac{12}{T^2}\left(\frac{rwT}{3}\sin wT + r\cos wT\right); \\ C = \frac{24}{T^3}\left(-\frac{rwT}{2}\cos wT + r\sin wT\right); \\ D = \frac{12}{T^2}\left(-\frac{rwT}{3}\cos wT + r\sin wT\right). \end{cases}$$

Нарешті, підставивши в другу умову трансверсальності знайдені вирази для оптимального керування і траєкторії, отримуємо рівняння для знаходження кінцевого моменту T (фізичний сенс мають лише дійсні невід'ємні значення часу):

$$(KT^4 - 4r^2w^2T^2 - 36r^2 = 0) \Rightarrow (T = \sqrt{\frac{2}{K}}\sqrt{r^2w^2 + r\sqrt{w^4r^2 + 9K}}).$$

Тепер, підставивши в (5.31) та (5.32) значення для констант A, B, C, D і кінцевого моменту T, можна виписати явний вигляд для оптимального керування $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ та відповідної траєкторії $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ (не робитимемо цього, ураховуючи громіздкість остаточного виразу та ідейну очевидність цього кроку).

На завершення, наведемо графіки, які зображують координати керованого об'єкта $x_1(t), y_1(t)$ у площині (x_1, y_1) для двох різних наборів значень r, w та K (див. рис. 5.4).

$r = 1,\ w = 50,\ K = 10^7$

$T \approx 0{,}04962$

$r = 1,\ w = 90,\ K = 10^7$

$T \approx 0{,}06415$

$(\tilde{x}_1(t); \tilde{y}_1(t))$ $(\tilde{x}_1(t); \tilde{y}_1(t))$

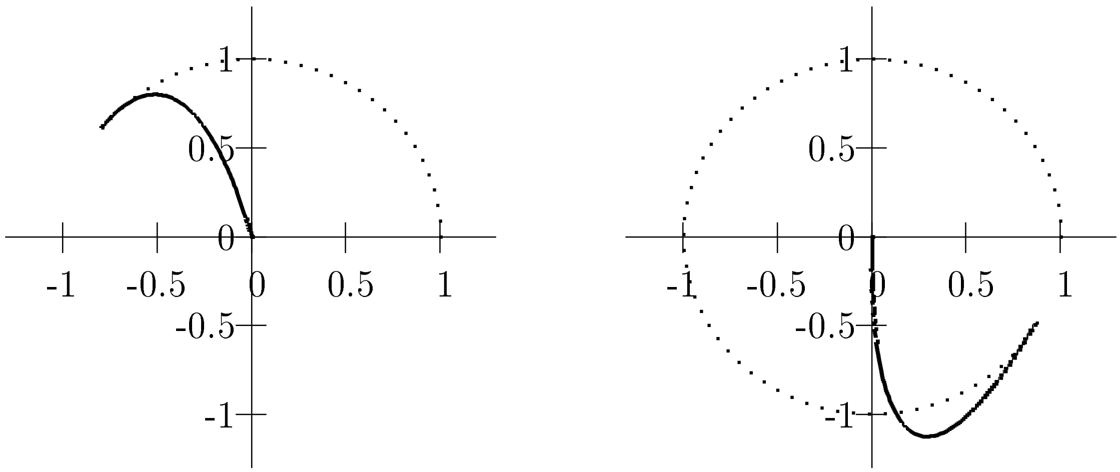

Рис. 5.4

5.4. Завдання до компьютерного практикуму

1. У табл. 5.1 знайти рівняння керованого об'єкта, обмеження на керування та цільовий функціонал згідно з номером варіанта, указаного викладачем.

2. Користуючись принципом максимуму Понтрягіна, знайти траєкторії оптимального керування $\tilde{u}(t)$ та відповідні траєкторії об'єкта $\tilde{x}(t)$.

Таблиця 5.1. **Варіанти завдань до компьютерного практикуму 5**

Варі-ант	Об'єкт	Умови на лівому кінці	Умови на правому кінці	Обме-ження	Цільовий функціонал
1	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2 + T$ $x_2(T) = 4T + 1$	$\lvert u(t)\rvert \leq 5$	T

Продовження табл. 5.1

2	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2 + 2T$ $x_2(T) = 6T + 2$	$\|u(t)\| \leq 10$	T
3	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2 + 3T$ $x_2(T) = 10T + 1$	$\|u(t)\| \leq 15$	T
4	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2 + 4T$ $x_2(T) = 14T + 4$	$\|u(t)\| \leq 20$	T
5	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2 + 5T$ $x_2(T) = 8T + 5$	$\|u(t)\| \leq 12$	T
6	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2$	$\|u(t)\| \leq 6$	$T + (x_2(T) - 4T)^2$
7	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2$	$\|u(t)\| \leq 10$	$T + (x_2(T) - 6T)^2$
8	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2$	$\|u(t)\| \leq 15$	$T + (x_2(T) - 10T)^2$
9	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2$	$\|u(t)\| \leq 20$	$T + (x_2(T) - 14T)^2$
10	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2$	$\|u(t)\| \leq 12$	$T + (x_2(T) - 8T)^2$
11	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T^2 + T$	$\|u(t)\| \leq 6$	T
12	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T^2 + 2T$	$\|u(t)\| \leq 10$	T
13	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 5T^2 + 3T$	$\|u(t)\| \leq 15$	T
14	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T^2 + 4T$	$\|u(t)\| \leq 20$	T
15	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 4T^2 + 5T$	$\|u(t)\| \leq 12$	T
16	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T + 1$ $x_2(T) = 2$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$

Продовження табл. 5.1

17	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T + 1$ $x_2(T) = 3$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
18	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 12T + 3$ $x_2(T) = 12$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
19	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 8T + 2$ $x_2(T) = 8$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
20	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T + 1$ $x_2(T) = 7$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
21	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 2T + 1$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
22	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 3T + 1$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
23	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 12T + 3$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
24	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 8T + 2$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
25	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$	$x_1(T) = 7T + 1$ T – фіксоване	—	$\int\limits_0^T u^2(t)dt$
26	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 64$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 10$	—	$2\int\limits_0^T u^2(t)dt + 5T$
27	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 81$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 18$	—	$3\int\limits_0^T u^2(t)dt + 8T$

Закінчення табл. 5.1

28	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 25$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 40$	—	$3\int\limits_0^T u^2(t)dt + 16T$
29	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 49$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 14$	—	$5\int\limits_0^T u^2(t)dt + 17T$
30	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u_1$ $\dot{y}_1 = y_2$ $\dot{y}_2 = u_2$	$x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$ $y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$	$x_1^2(T) + y_1^2(T) = 36$ $x_2^2(T) + y_2^2(T) = 18$	—	$19\int\limits_0^T u^2(t)dt + 2T$

Компьютерний практикум 6

Задача лінійного програмування

6.1. Загальні відомості

Задача лінійного програмування формулюється як задача оптимізації лінійної функції n змінних на множині, що задана набором лінійних обмежень. Формальний опис такої постановки на практиці може бути заданий кількома шляхами, які еквівалентні в тому сенсі, що будь-яке задання задачі в одній формі можна звести до іншої форми, розв'язок якої дасть розв'язок також і оригінальної задачі (див. розділ 6.1). Однак у вступі ми обмежимось розглядом стандартної задачі лінійного програмування, яка найчастіше зустрічається у житті.

Стандартна задача лінійного програмування виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$.

Зауваження 6.1. Очевидно, задача мінімізації зводиться до задачі максимізації зміною знаку вектора c, тому надалі в цьому розділі ми розглядатимемо лише задачу максимізації.

Як відомо, множина $X = \{x \mid Ax \leq b\}$, яку задає система обмежень задачі 6.1, має назву *поліедра* (або поліедральної області, якщо вона необмежена). Цей поліедр – опукла підмножина простору $\mathbb{R}^n$, грані якого – гіперплощини, що задаються окремими лінійними обмеженнями – рядками матриці A. Цільова функція також лінійна, її лінії рівня в просторі $\mathbb{R}^n$ – гіперплощини. Розглянемо постановку задачі на прикладі.

Приклад 6.1. Нехай задача лінійного програмування задана наступним чином:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 10x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача задана в просторі $\mathbb{R}^2$, кількість обмежень $m = 4$. Отже, допустима множина являє собою поліедр на декартовій площині, тобто многокутник не більш ніж з чотирма сторонами. Кожна сторона многокутника відповідає деякому з чотирьох обмежень. Зобразимо допустиму множину на площині (рис. 6.1). Тут пунктирна лінія зображує одну з ліній рівня цільової функції, а суцільні – обмеження допустимої множини.

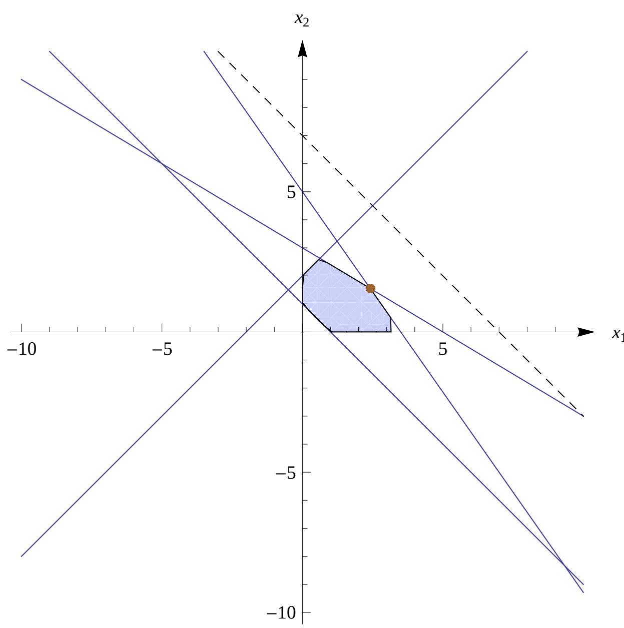

Рис. 6.1

За допомогою геометричного методу можна знайти розв'язок цієї задачі, визначивши лінію максимального рівня, що має спільні точки з поліедром. Рухаючи пряму $x_1 + x_2 = \alpha$, знаходимо таке максимальне значення α, при якому пряма ще перетинає допустиму множину. Таким виявляється $\alpha = 115/29$, а розв'язок задачі – точка $(70/29, 45/29)$. Її помічено на рис. 6.1.

У прикладі продемонстровано одна з найважливіших властивостей задач лінійного програмування: якщо розв'язок досягається, то він завжди знаходиться на границі поліедру – на грані, якщо лінії рівня цільової функції паралельні якійсь із граней поліедру, та на вершині в усіх інших випадках. Ця фундаментальна властивість стане ключем до формування алгоритму розв'язку задач лінійного програмування.

Щоб подати сформульоване твердження формально і повністю описати відповідність між точками поліедру обмежень у просторі $\mathbb{R}^n$ та розв'язками задачи 6.1, наведемо кілька означень.

Означення 6.1. Точка x множини X називається *внутрішньою*, якщо існує її непорожній окіл, що є підмножиною множини X.

Означення 6.2. Точка x множини X називається *граничною*, якщо будь-який її окіл містить як точки, що лежать у X, так і точки, що не лежать у X.

Означення 6.3. Точка x множини X називається *кутовою*, або *крайньою*, якщо вона не є внутрішньою для будь-якого відрізка, що цілком належить X.

Для опуклої множини її крайні точки завжди складають поліедр. У випадку, якщо множина X і являє собою поліедр, множина її крайніх точок співпадає з множиною вершин поліедру X. Зауважимо, що поліедр X може і не мати крайніх точок – наприклад, якщо він задається однією гіперплощиною.

Як випливає з означення поліедру, якщо точка x є для нього внутрішньою, то всі нерівності, що задають обмеження поліедру, виконуються для точки x у строгому сенсі, тобто $Ax < b$. Якщо ж хоча б одна з нерівностей перетворюється на рівність, тоді отримана система обмежень задаватиме граничну точку поліедру. Назвемо *носієм* граничної точки x_0 ту множину обмежень, яким вона відповідає у вигляді рівності. Тобто носій x_0 – множина гіперплощин вигляду $(a_j, x_0) = b_j$, де a_j – j-й рядок матриці обмежень A, b_j – j-та компонента стовпчика обмежень b. Наприклад, у прикладі 6.1 носієм точки-розв'язку $x_0 = (70/29, 45/29)$ є множина з першого і третього обмежень. По рис. 6.1 видно, що це ті прямі-обмеження, на яких лежить точка x_0.

Множина індексів обмежень носія $\subset \{1 \dots m\}$ задає матрицю тих обмежень A, які на даній граничній точці перетворюються на рівність.

Рядки цієї матриці – відповідні рядки матриці A. Аналогічним чином можна визначити стовпець обмежень носія b.

Тепер розглянемо деяку задачу лінійного програмування за умови, що в ній кількість обмежень менша за кількість змінних ($m < n$). Як відомо з курсу лінійної алгебри, якщо $\operatorname{rang} A = m$, то система лінійних рівнянь $Ax = b$ має безліч розв'язків. Назвемо *базисними* будь-яку комбінацію з m змінних, якщо визначник матриці коефіцієнтів при них не дорівнює нулю.

Базисні змінні у системі мають наступну властивість: їх можна виразити через небазисні змінні системи елементарними перетвореннями рівнянь, притому система матиме безліч розв'язків, і кожній комбінації значень небазисних змінних відповідатиме деякий розв'язок системи. Наприклад, розглянемо наступну систему двох лінійних рівнянь з чотирма змінними:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \tag{6.2}$$

В ній набори $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$ – варіанти базисних змінних. Якщо обрати в якості базисних пару $\{x_1, x_2\}$, а $\{x_3, x_4\}$ вважати небазисними, то отримаємо наступний вигляд системи 6.2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 2 - 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему, отримаємо шукане вираження базисних змінних через небазисні:

$$\begin{cases} x_1 = \qquad \dfrac{4}{3}x_3 \\ x_2 = \quad x_4 - \dfrac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

З-поміж усіх можливих значень небазисних змінних особливо виділимо такі, де всі вони дорівнюють нулю. Розв'язок системи при рівності нулю усіх небазисних змінних називатимемо *базисним розв'язком*. Крім того, аби розв'язки системи вдовольняли обмеження невід'ємності стандартної задачі лінійного програмування 6.1 ($x \geq 0$), доцільно вимагати, щоб значення усіх базисних змінних також були невід'ємними. Такі розв'язки називатимемо *допустимими*.

Наприклад, у системі 6.2 в залежності від вибору комбінації базисних змінних можна отримати наступні базисні розв'язки:

$$X_1 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right\}$$
$$X_2 = \left\{\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right\}$$
$$X_3 = \left\{\frac{2}{3}, 0, 0, -\frac{2}{3}\right\}$$

Перші два з них – допустимі розв'язки, третій – не допустимий, оскільки містить від'ємну змінну.

Тепер ми повністю готові до того, щоб сформулювати три основні теореми, які встановлюють зв'язок між задачею лінійного програмування та її геометричною інтерпретацією – поліедром обмежень. Ці теореми стануть в подальшому основою для формулювання алгоритму розв'язку задачі лінійного програмування.

Теорема 6.1. *Гранична точка $x_0 \in X$ з носієм є крайньою тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{rang} A = n$.

Теорема 6.2. *Якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то цільова функція набуває оптимального значення у крайній точці поліедру обмежень. Якщо ж цільова функція набуває оптимального значення більш ніж в одній крайній точці, то вона набуває цього значення на будь-якій опуклій лінійній комбінації цих точок.*

Зауваження 6.2. Опукла лінійна комбінація крайніх точок поліедра, на яких лінійна функція набуває оптимального значення – це або грань поліедра, для якої ці крайні точки є кутами, або ребро, для якого ці крайні точки є кінцями. Приймаючи цей факт до уваги, з теореми 6.2 витікає, що будь-яка комбінація кутів, яка не утворює грані або ребра поліедру, не може бути розв'язком задачі лінійного програмування.

Теорема 6.3. *Точка $x \in X$ є крайньою тоді і тільки тоді, коли x – допустимий базисний розв'язок системи лінійних рівнянь $Ax = b$.*

З теорем 6.2 і 6.3 можна зробити фундаментальний висновок: якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то він співпадає з одним з допустимих базисних розв'язків.

6.2. Форми задач лінійного програмування

У розділі 6.1 ми з'ясували основні властивості стандартної задачі лінійного програмування 6.1 та зв'язок її розв'язків з геометричною інтерпретацією допустимої множини – поліедром обмежень. Однак, щоб розробити простий алгоритм розв'язку задачі, користуючись наведеними відомостями, стандартна задача непридатна. Теореми 6.1, 6.2 і 6.3 використовують поняття системи лінійних рівнянь і її базисних розв'язків, а у стандартній задачі поліедр обмежень задано у вигляді системи нерівностей. Для вирішення цієї проблеми наведемо ще дві форми, у вигляді яких можна зустріти постановку задач лінійного програмування на практиці. Одну з них в подальшому будемо використовувати при розробці алгоритма розв'язку задачі.

6.2.1. Стандартна задача лінійного програмування

Вигляд стандартної задачі було розглянуто у розділі 6.1. Для зручності читача наведемо її означення 6.1 ще раз:

$$\begin{cases} (c,x) \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \\ x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathrm{Mat}(m \times n) \end{cases}$$

Більшість моделей на практиці зводиться саме до стандартного вигляду.

6.2.2. Канонічна задача лінійного програмування

Канонічна задача лінійного програмування відрізняється від стандартної тим, що обмеження задано у вигляді рівностей, а не нерівностей:

$$\begin{cases} (c,x) \to \max \\ Ax = b \\ x \ge 0 \\ x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathrm{Mat}(m \times n) \end{cases} \tag{6.3}$$

Для доказу того, що стандартна і канонічна форма запису задачі лінійного програмування еквівалентні, достатньо навести метод зведення кожної з цих двох задач до іншої. Так, зведення канонічної задачі 6.3 до стандартної очевидно – досить кожне обмеження-рівність вигляду

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$$

замінити на дві еквівалентні йому нерівності:

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \le b_j \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \ge b_j \end{aligned}$$

Після чого необхідно змінити знак останньої нерівності на зворотній, щоб отримати нерівність виду "$\le$", як в означенні стандартної задачі.

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \le b_j \\ -a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - \dots - a_{jn}x_n \le -b_j \end{aligned}$$

Зведення стандартної задачі до канонічної дещо складніше. Щоб перетворити кожне обмеження-нерівність на рівність, додамо в систему m нових змінних. Кожна додаткова змінна відповідатиме деякому обмеженню і представлятиме собою різницю між лінійною комбінацією змінних розв'язку та відповідною компонентою вектора b:

$$\tilde{x}_j = b_j - (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n), \qquad j = 1 \dots m$$

Так як всі нерівності стандартної задачі мають знак "$\le$", то маємо $\tilde{x}_j \ge 0$, як і вимагає означення канонічної задачі. Слід зауважити, що щойно додатні «штучні» змінні $\tilde{x}_j$ ніяк не впливають на вигляд цільової функції. Формально кажучи, вони фігурують в ній з коефіцієнтами, рівними нулю.

Обмеження канонічної задачі тепер складаються повністю з рівностей, і вся задача виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} (c,x) \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \tilde{x}_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \tilde{x}_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \tilde{x}_m = b_m \\ x_1, \dots, x_n \ge 0 \\ \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m \ge 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Можна ввести позначення:

$$\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$$

і записати канонічну задачу, як в означенні:

$$\begin{cases} (\tilde{c}, \tilde{x}) \to \max \\ \tilde{A}\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

Нехай тепер $(x_1^*, \ldots, x_n^*, \tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_m^*)$ – розв'язок отриманої канонічної задачі. Якщо тепер вибрати в ньому лише компоненти, що відповідають оригінальним змінним, а не штучним, отримаємо розв'язок вихідної стандартної задачі.

Ми довели еквівалентність стандартної і канонічної форм задачі лінійного програмування. Тепер, так як будь-яку стандартну задачу можна звести до канонічної і навпаки, ми маємо право розроблювати алгоритм розв'язку задачі лінійного програмування лише в канонічній формі: будь-яку іншу постановку можна перетворити на канонічну перед тим, як запускати алгоритм, а з результатів його роботи легко отримати розв'язок вихідної задачі.

6.2.3. Загальна задача лінійного програмування

Задача лінійного програмування, задана у загальній формі, складається як з обмежень-рівностей, так і з обмежень-нерівностей. Крім того, не від всіх її змінних може вимагатися невід'ємність. Для зручності наведемо її означення не в матричному вигляді, а у вигляді системи:

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j, \qquad j = 1 \ldots k \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \qquad j = k+1 \ldots m \\ x_1, \ldots, x_r \geq 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Тут $c \in \mathbb{R}^n, x \in R, k \leq m, r \leq n$.

Зрозуміло, що стандартна і канонічна форми запису – лише часткові випадки загальної форми, приймаючи $k = m, r = n$ і $k = 0, r = n$ відповідно. Отже, щоб довести еквівалентність загальної форми двом попереднім, достатньо звести її до будь-якої з двох.

Зведення загальної задачі до стандартної зробимо наступним чином. По-перше, як і в випадку з канонічною задачею, позбудемося обмежень-рівностей, замінивши кожну з них на дві еквівалентні нерівності. По-друге, щоб в задачі не залишилось змінних без вимоги невід'ємності, кожну з таких можна представити у вигляді різниці:

$$x_i = u_i - v_i, \qquad u_i, v_i \geq 0$$

Набор змінних отриманої стандартної задачі тепер складається із r змінних вихідної загальної задачі, які фігурували в ній з вимогою невід'ємності, а також $n - r$ пар нових змінних u_i, v_i, з яких після розв'язку стандартної задачі можна легко відновити змінну x_i вихідної задачі.

6.3. Сімплекс-алгоритм

Тут і надалі вважатимемо, що задачу лінійного програмування задано у канонічній формі.

Теореми 6.1, 6.2 і 6.3 з розділу 6.1 стверджують, що розв'язок задачі лінійного програмування варто шукати лише серед кутових точок поліедра обмежень. Більше того, в нас є формальний опис, як отримати кожну кутову точку – досить знайти всі допустимі базисні розв'язки системи обмежень. Найпростіший алгоритм можна сформувати вже зараз: перебрати всі кутові точки і порівняти значення цільової функції в кожній із них. Однак такий метод потребуватиме неприпустимо багато часу: в найгіршому випадку кожна комбінація з n змінних задачі буде базисною. Загальна кількість таких комбінацій дорівнює C_n^m. Якщо розмірність такої задачі досягне хоча б 1000, і число змінних $n \approx m/2$, на сучасних комп'ютерах за час нашого життя закінчення роботи методу ми не дочекаємось.

Замість того, щоб перебирати всі кутові точки, можна скористатись наступним методом:

1. Оберемо будь-який допустимий базисний розв'язок x^0. Це – так

званий *опорний план*, початкова кутова точка поліедру, з якої почне свій рух алгоритм.

2. Спробуємо перейти з поточного розв'язку x^k по ребру поліедра до іншого базисного розв'язку, у якому значення цільової функції не менше. Якщо такого не знайдено – припинити роботу, поточний розв'язок є оптимальним.
3. Якщо ж на кроці 2 знайдено кращий розв'язок, обрати його в якості поточного x^{k+1}. Повернутися на крок 2.

Це – загальна схема роботи методу, відомого як *сімплекс-алгоритм*. Невизначеними залишаються два питання: як обирати опорний план, та як шукати кандидата на наступний розв'язок на кожній ітерації.

6.3.1. Пошук опорного плану

Існує багато методів відшукання початкового допустимого базисного розв'язку для ініціалізації сімплекс-алгоритму. Не кожний з них може бути застосований в будь-якій ситуації; найчастіше при розв'язанні кожної конкретної задачі метод для знаходження опорного плану доводиться обирати навмання. Однак у найпростіших випадках, які, тим не менше, часто трапляються у житті, опорний план може бути визначений без особливих зусиль.

Нехай задано стандартну задачу лінійного програмування 6.1, в якій $b \geq 0$. Щоб звести її до канонічної, додамо в систему m штучних змінних $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m$. Тепер можна помітити, що коефіцієнти при штучних змінних у системі обмежень утворюють одиничну матрицю $m \times m$. Систему обмежень можна записати наступним чином:

$$Ax + I \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{pmatrix} = b$$

Одинична матриця I є невиродженою, а отже, набір штучних змінних $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m\}$ утворює базисний розв'язок. Більш того, він є також і допустимим, оскільки після прирівнювання усіх небазисних змінних до нуля отримуємо $\tilde{x}_j = b_j \geq 0$.

Таким чином, в задачі лінійного програмування, що утворена з стандартної форми, в якій $b \geq 0$, штучні змінні завжди утворюють допустимий опорний план.

Інший, більш загальний метод відшукання опорного плану припускає, що задача вже задана у канонічній формі, причому $b \geq 0$ (якщо це не так, то рівності з від'ємними b_j можна домножити на -1). Розглянемо тепер наступну модифіковану задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} -V_1 - V_2 - \ldots - V_m \to \max \\ V_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1\ldots m \\ x_1, \ldots, x_n, V_1, \ldots, V_m \geq 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

Задача 6.7, як було доведено вище, має допустимий базисний розв'язок, що складається зі змінних $\{V_1, \ldots, V_m\}$. Розв'яжемо тепер цю задачу сімплекс-методом; очевидно, вона має розв'язок, оскільки її цільова функція обмежена зверху. Нехай d – оптимальне значення цільової функції. Можливі два випадки: $d = 0$ та $d < 0$.

Оптимальному розв'язку канонічної задачі 6.3 $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ взаємно однозначно відповідає оптимальний розв'язок $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ модифікованої задачі 6.7, при якому $d = 0$. З іншого боку, якщо $d = 0$, то у будь-якого допустимого розв'язку $\{V_1, \ldots, V_m, x_1, \ldots, x_n\}$ має місце $V_1 = \ldots = V_m = 0$, і з нього отримується допустимий план $(x_1, \ldots, x_n)$ задачі 6.3. Отже, якщо $d < 0$, то вихідна задача лінійного програмування розв'язку не має. В іншому ж випадку можна взяти змінні x_j оптимального розв'язку задачі 6.7 як допустимий розв'язок задачі 6.3.

6.3.2. Пошук сусіднього розв'язку

Розглянемо базисний розв'язок x^k. *Базис* x^k – набір індексів змінних, що входять до числа базисних – дорівнює $= \{i_1, \ldots, i_m\}$. Маємо:

$$\begin{aligned} x_j &\neq 0, \qquad j \in \\ x_j &= 0, \qquad j \notin \end{aligned}$$

Для того, щоб перейти до наступного розв'язку x^{k+1}, треба здійснити перехід по ребру поліедра X. В термінах розв'язків систем перехід по ребру означає, що ми збільшуємо значення деякої небазисної змінної $x_s (s \notin\ )$ так, щоб збільшити разом з тим і значення цільової функції. Тим самим змінна x_s переходить до числа базисних, набуваючи ненульового значення, і, щоб отримати в якості кандидата на розв'язок крайню точку, а не граничну, ми маємо вивести з базису якусь іншу змінну, зберігши кількість змінних у базисі – m.

Виразимо базисні змінні системи через небазисні. Маємо:

$$x_i = \alpha_{i0} - \sum_{j\notin} \alpha_{ij} x_j, \qquad i \in \tag{6.8}$$

Тут α_{ij} – деякі коефіцієнти, які утворилися після перетворень матриці A і зведення системи до вигляду 6.8.

Зауваження 6.3. Якщо підставити у вираз 6.8 значення змінних базисного розв'язку x^k, отримаємо справжнє значення вільних членів: $\alpha_{i0} = x_i^k, \quad i \in .$

Виражаючи аналогічним чином цільову функцію, після підстановки рівнянь 6.8 отримуємо:

$$\begin{aligned}(c, x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i\in} c_i x_i + \sum_{i\notin} c_i x_i \\ &= \sum_{i\in} c_i \alpha_{i0} - \sum_{j\notin} \left(\sum_{i\in} c_i \alpha_{ij} - c_j \right) x_j\end{aligned}$$

Використовуючи зауваження 6.3, першу суму в отриманому виразі можна переписати як (c, x^k). Нарешті, зручно ввести нові позначення для коефіцієнтів цільової функції після її виразу через небазисні змінні:

$$\alpha_{0j} = \sum_{j\notin} \left(\sum_{i\in} c_i \alpha_{ij} - c_j \right), \qquad j \notin$$

Задача лінійного програмування набуває остаточного *зведеного* вигляду:

$$\begin{cases} (c, x^k) - \sum_{j\notin} \alpha_{0j} x_j \to \max \\ x_i + \sum_{j\notin} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}, \qquad i \in \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

Як обрати змінну, що вводиться в базис? Як ми визначились, вона має збільшувати значення цільової функції, а тому – входити у вираз для визначення цільової функції у зведеній системі 6.9 з від'ємним коефіцієнтом α_{0j} (враховуючи мінус перед загальною сумою, справжній коефіцієнт перед такою змінною у цільовій функції буде додатнім). Таких змінних може бути декілька; для визначеності оберемо ту, коефіцієнт при якій має найбільше абсолютне значення. Позначимо обрану небазисну змінну як $x_s(s \notin)$.

Яке значення надати x_s? Новий базисний розв'язок x^{k+1} має утворювати допустиму кутову точку, отже, всі змінні мають залишатися невід'ємними. Ця вимога обмежує границі, в яких може змінюватись значення x_s. Всі інші $m-1$ небазисних змінних зберігатимуть значення 0, отже, необхідно перевірити вимогу невід'ємності лише для базисних змінних. А це нескладно зробити, підставивши в їх визначення 6.8 значення поточних небазисних змінних на наступному кроці:

$$
\begin{aligned}
0 \leq x_i &= \alpha_{i0} - \sum_{j \notin} \alpha_{ij} x_j \\
&= \alpha_{i0} - \alpha_{is} x_s \\
x_s &\leq \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{is}}
\end{aligned}
$$

Якщо відношення α_{i0}/α_{is} скінченне і невід'ємне, воно задає коректне обмеження для нового значення x_s. В усіх інших випадках змінна x_i не дає свого обмеження для x_s; кажуть, що відповідне обмеження дорівнює ∞.

З-поміж усіх обмежень знайдемо мінімальне, щоб нове значення x_s задовольнило всі обмеження. Нехай це обмеження породжується базисною змінною x_i. Цю змінну називають *розв'язною*, саме її ми будемо виводити з базису, оскільки внаслідок покладання $x_s = \alpha_{i0}/\alpha_{is}$ тепер маємо $x_i = 0$.

Таким чином, новий базис остаточно сформовано: $\tilde{} = \cup \{s\} \setminus \{i\}$. Звівши систему до зведеного вигляду 6.9, використовуючи вже нові базисні змінні, отримуємо базисний розв'язок наступного кроку x^{k+1}.

Як визначити, чи є черговий розв'язок оптимальним? Оптимальність розв'язку означає, що симплекс-алгоритм не в змозі перейти до сусідньої вершини поліедра, покращуючи при цьому значення цільової функції. Оскільки небазисну змінну для введення в базис ми обираємо лише серед тих, що збільшують значення цільової функції, критерій зупинки алгоритма стає очевидним: якщо серед небазисних змінних розв'язку немає таких, що входять у цільову функцію з додатнім коефіцієнтом, то жодна з сусідніх вершин не покращує функцію, а отже, черговий розв'язок є оптимальним.

Приклад 6.2. Розв'яжемо сімплекс-алгоритмом наступну задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Допустима множина задачі 6.10 зображена на рис. 6.2.

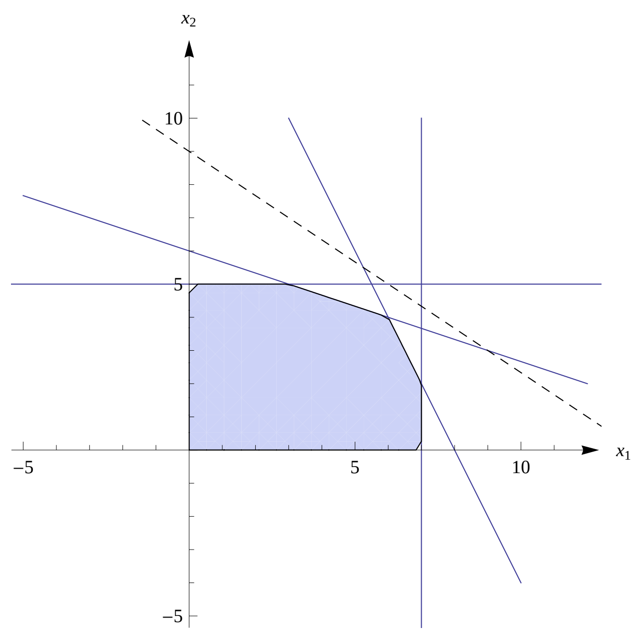

Рис. 6.2

Зведемо задачу до канонічної форми, додавши чотири штучні змінні

x_3, x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Оберемо в якості опорного плану штучні змінні $^0 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

Крок 1. Вираз базисних змінних $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ і цільової функції через небазисні $\{x_1, x_2\}$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 5 - x_2 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases}$$

Коефіцієнти при небазисних змінних у цільовій функції додатні. Обираємо змінну x_2 з більшим коефіцієнтом, її вводитимемо у базис.

Підставляємо у систему $x_1 = 0$, отримуємо обмеження на приріст x_2:

$$\begin{cases} x_2 \leq 18/3 = 6 \\ x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq \infty \end{cases}$$

Нове значення $x_2 = \min\{6, 16, 5, \infty\} = 5$. Розв'язна змінна – x_5, бо рівність $x_5 = 5 - x_2$ дає у наслідку $x_5 = 0$. Змінна x_5 виводиться з базису.

Крок 2. Вираз базисних змінних $\{x_2, x_3, x_4, x_6\}$ і цільової функції через небазисні $\{x_1, x_5\}$.

$$\begin{cases} 15 + 2x_1 - 3x_5 \to \max \\ x_2 = 5 - x_5 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_5) = 3 - x_1 + 3x_5 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_5) = 11 - 2x_1 + x_5 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases}$$

В якості нової базисної змінної можна обрати лише x_1. Її нове значення $x_1 = \min\{\infty, 3, 11/2, 7\} = 3$. Розв'язна змінна – x_3.

Крок 3. Вираз базисних змінних $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ і цільової функції через небазисні $\{x_3, x_5\}$.

$$\begin{cases} 21 - 2x_3 + 3x_5 \to \max \\ x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \\ x_2 = 5 - x_5 \\ x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9x_5 \end{cases}$$

В якості нової базисної змінної можна обрати лише x_5. Її нове значення $x_5 = \min\{\infty, 5, 1, 12/9\} = 1$. Розв'язна змінна – x_4.

Крок 4. Вираз базисних змінних $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ і цільової функції через небазисні $\{x_3, x_4\}$.

$$\begin{cases} 24 - \dfrac{4}{5}x_3 - \dfrac{3}{5}x_4 \to \max \\ x_1 = 6 + \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 4 - \dfrac{2}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_4 \\ x_5 = 1 + \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 3 - \dfrac{3}{5}x_3 + \dfrac{9}{5}x_4 \end{cases}$$

В цільовій функції усі коефіцієнти від'ємні. Отриманий базисний розв'язок $x^4 = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$ є оптимальним.

6.4. Завдання до компьютерного практикуму

Всі наведені у списку задачі – на максимізацію. В усіх варіантах $x, y, z \geq 0$.

Таблиця 6.1. **Варіанти завдань до компьютерного практикуму 6**

Варіант	Цільова функція	Обмеження	Варіант	Цільова функція	Обмеження
1	$x+2y+2z$	$x+y+z\geq 20$ $2x-y\leq 8$ $-2x+z\leq 3$ $2x+y+z\leq 50$ $2x\geq 1$	2	$-x+2y+z$	$2x+3y+z\leq 50$ $3x-3y\leq -1$ $-10x+y\leq 1$ $-3x-3y+z\leq 0$ $-x-y+z\geq 1$
3	$2x+2y+z$	$x+2y+2z\leq 40$ $5x-y\leq 30$ $-8x+2y\leq 1$ $-x-3y+z\leq 0$ $-x-y+2z\geq 1$	4	$x+z$	$x-y+2z\leq 40$ $2x-y\leq 26$ $-x+y\leq 4$ $2x+5y-3z\geq 0$ $x-2z\leq -1$
5	$y+2z$	$2x+y+2z\geq 95$ $x+y+z\leq 100$ $10x+y\geq 90$ $x+10y\geq 95$ $2x-y\leq 100$ $z\geq 1$	6	$4x-y+2z$	$2x-2y-z\leq 5$ $-3x+4z\leq 10$ $y-3z\leq 0$ $3x+y\leq 50$ $-x+30y\leq 1$ $15x-2y-z\geq 2$
7	$-x-y-z$	$x-3y+5z\leq -2$ $x-y+2z\geq 2$ $y+z\leq 20$ $-3x+3y\geq 1$ $-2x+5y\geq 27$	8	$-2x-y+5z$	$-x+y-2z\geq 2$ $-4x+5y-4z\geq 25$ $y-z\leq 8$ $5x-y-z\geq -1$ $3z\geq 2$
9	$x-y+2z$	$x+2y+2z\leq 8$ $2x+z\geq 2$ $9y-z\geq 1$ $-x-y+2z\geq 0$ $x-3y-3z\geq -15$	10	$3y-5z$	$2x-4y+2z\geq 3$ $4x+2y-6z\leq 7$ $2x-z\geq 2$ $x-3y+z\leq 0$ $2z+y\leq 90$
11	$-x-y+4z$	$x-2y+3z\leq 10$ $-4x+3y-z\geq -10$ $5y+z\leq 30$ $x+y+z\geq 5$ $5x+y-z\geq 6$ $x+y-15z\leq -2$	12	$7x-y+3z$	$-3x+y-2z\geq -10$ $4y-z\leq 25$ $x+2y-13z\leq -3$ $3x+y+3z\geq 15$ $4x+y-z\geq 4$ $2x\leq 7$
13	$3x+y-4z$	$-2x+3z\leq 10$ $-3y+2z\geq 5$ $5x+y+z\leq 20$ $4x+2y+z\geq 9$ $x+18y\geq 4$	14	$2y-z$	$2x-4y+z\geq 5$ $x-y-z\geq 0$ $2x+y+2z\leq 15$ $x+10y\geq 4$ $7x+y+z\geq 15$
15	$x-y+3z$	$4x-3y-z\geq 6$ $x-5y+z\leq -2$ $2x+2y-3z\leq 21$ $2x+y+z\leq 30$ $-y+3z\geq -1$	16	$-x+y+2z$	$-2x+y+z\leq 1$ $x-y-z\leq -10$ $x+2y-2z\leq 10$ $z\leq 25$ $3x+20y\geq 60$

Основні напрями вибору теми курсової роботи

1. Метод лінеаризації як один з найефективніших методів розв'язку задач математичного програмування.

2. Симплекс-метод – основний числовий метод метод розв'язку задач лінійного програмування.

3. Програмна реалізація та дослідження методів безумовної оптимізації: метод Давидона – Флетера – Пауелла для функції Розенброка.

4. Числові методи мінімізації унімодальних функцій: порівняльний аналіз.

5. Методи штрафних функцій: порівняльний аналіз.

6. Квазіньютонівські методи безумовної оптимізації.

7. Задача про знаходження відрізка мінімальної довжини, який сполучає сторони даного кута і проходить через задану точку.

8. Методи безумовної оптимізації для дослідження функцій з погано обумовленою матрицею Гессе («ярні» функції).

9. Знаходження точки у просторі, сума відстаней від якої до двох або більше заданих точок була б мінімальною.

10. Знаходження точки на одиничній кулі, сума відстаней від якої до двох або більше заданих точок була б мінімальною.

11. Прикладні задачі оптимізації (умовні та безумовні).

12. Оптимальне керування: застосування принципу максимуму Понтрягіна.

13. Потоки в мережах: знаходження оптимальних режимів.

14. Застосування методів оптимізації в диференційних іграх. Групове переслідування.

15. Багатокритеріальна оптимізація. Теорія подвійності в задачах оптимізації: лінійна та квадратична задачі.

16. Порівняльний аналіз методів дослідження функції Розенброка (одновимірний та багатовимірний випадки).

17. Побудова дуальних задач до задач лінійного та квадратичного програмування.

18. Числові методи умовної оптимізації і метод проекції градієнта.

19. Методи спряжених напрямів (з відновленням і без відновлення матриці та для квадратичної функції).

20. Методи умовної оптимізації і методи типу Ньютона.

Список використаної літератури

1. Банда Б. Основы линейного программирования [Текст] / Б. Банда. – М.: Радио и связь, 1989. – 51 с.
2. Бейко И. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации [Текст] / И. Бейко, Б. Бублик, П. Зинько. – К.: Вища шк., 1983. – 512 с.
3. Васильев Ф. Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. Гилл Ф. Практическая оптимизация [Текст] / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 481 с.
5. Пантелеева Т. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] / Т. Пантелеева. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.
6. Поляк Б. Введение в оптимизацию [Текст] / Б. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
7. Пшеничный Б. Выпуклый анализ и экстремальные задачи [Текст] / Б. Пшеничный. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
8. Пшеничный Б. Численные методы в экстремальных задачах [Текст] / Б. Пшеничный, Ю. Данилин. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
9. Сухарев А., Тимохов А., Федоров В. Курс методов оптимизации [Текст] / А. Сухарев, А. Тимохов, В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 326 с.
10. Химмельбрау Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельбрау. – М.: Мир, 1975. – 398 с.

Предметний покажчик