Trabalho Prático 1: Tree + Heap = Treap

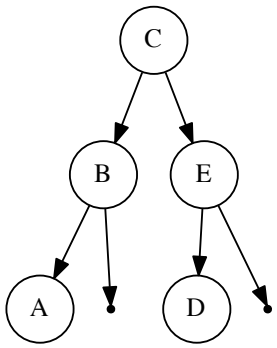
Entrega: 10/09/2017

August 9, 2017

Introdução

Em Algoritmos e Estruturas de Dados II (AEDS II) você deve ter aprendido sobre duas estruturas de dados bastante interessantes: Árvores Binárias de Pesquisa e Heaps. Vamos relembrar como cada uma dessas estruturas funciona.

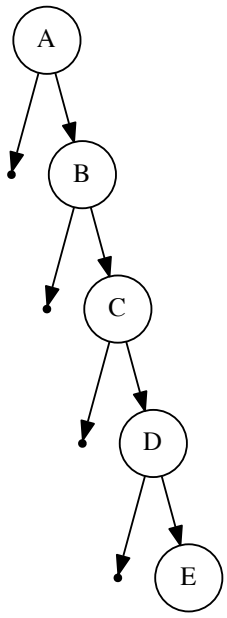
Uma Árvore Binária de Pesquisa é uma árvore enraizada em que cada vértice contém uma chave e até dois filhos: o filho da direita e o da esquerda. Essas árvores tem a propriedade de que a chave de um nó é sempre *maior* que as chaves de todos os nós à esquerda e *menor* que as chaves de todos os nós a direita. Nessas árvores, os vértices que não tem filhos são chamados de *folhas*. Eis um exemplo de árvore binária de pesquisa contendo nós com as chaves "A", "B", "C", "D", "E":



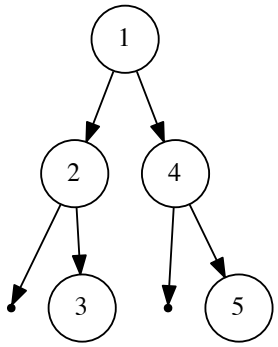
Arvores desse tipo são muito úteis para implementar um tipo abstrato de dados que você já conhece: o *dicionário*. Um dicionário armazena um conjunto de pares chave-valor. Ele executa operações como encontrar o valor associado a uma chave e inserir ou remover pares chave-valor.

Como você deve se lembrar, cada árvore desse tipo tem uma altura, que é o maior número de arestas num caminho entre a raiz e algum vértice folha. O tempo de execução dos algoritmos

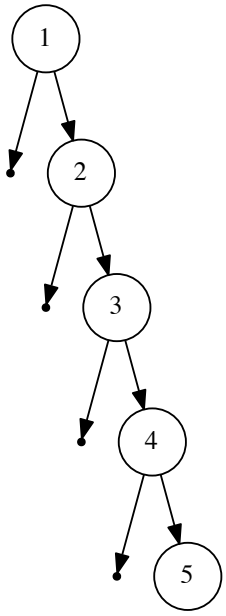
que executam essas operações depende dessa altura. Quanto mais alta a árvore, pior. A árvore abaixo, por exemplo, contém as mesmas chaves da árvore anterior. Porém, ela é tão alta quanto seja possível.



Outra estrutura de dados que é vista nos cursos de AEDS II é o *heap*. Assim como as árvores binárias de pesquisa, heaps são árvores enraizadas em que cada vértice contém uma chave e até dois filhos: um à esquerda e outro à direita. A diferença entre heaps e árvores binárias de pesquisa é a restrição imposta sob as chaves. Em um heap, a chave de um vértice é sempre menor que as chaves de todos os vértices que são descendentes dele. Por descendentes, nos referimos aos filhos do vértice, aos filhos desses filhos, os filhos dos filhos desses filhos e assim por diante. Eis um exemplo de heap construído com as chaves $1, 2, 3, 4, 5$.



Heaps também padecem do problema de serem potencialmente muito mais altos do que o necessário. Considere o heap acima, por exemplo. Com as mesmas chaves que foram utilizadas para construí-lo, é possível obter o seguinte heap.

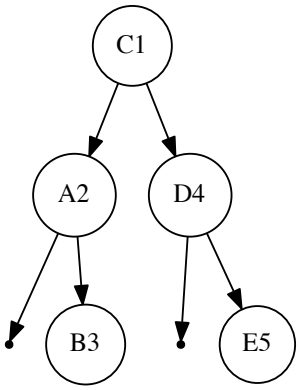


Para evitar que árvores binárias de pesquisa e heaps fiquem muito mais altos do que o necessário, várias estratégias de *balanceamento* foram propostas ao longo dos anos. Você deve ter visto pelo menos uma delas em AEDS II. Talvez essas estratégias tenham até lhe causado pesadelos.

A ideia por trás dessas estratégias é adaptar os algoritmos que manipulam arvores de pesquisa e heaps para que essas estruturas de dados nunca fiquem altas demais. Essas adaptações normalmente consistem em manipular alguns ponteiros demoníacos em cada chamada recursiva de modo a evitar que um dos dois lados de um vértice fique muito mais alto que o outro.

Nesse trabalho, você verá que um pouco de sorte é tudo o que é necessário para que não seja preciso utilizar essas estratégias de balanceamento. Para tal, você implementará uma estrutura de dados que é ao mesmo tempo uma árvore binária de pesquisa e um heap. Essa estrutura é conhecida pelo nome não muito criativo de "treap" (do inglês "tree" + "heap").

Sem mais delongas, eis um exemplo de treap.



Cada vértice em um treap contém não uma, mas sim *duas* chaves. Para evitar ambiguidades, vamos chamar uma dessas chaves de chave e a outra de prioridade. Treaps se comportam como árvores binárias de pesquisa quando você analisa apenas as chaves. E quando você olha para as prioridades, eles se comportam como heaps. O treap acima, por exemplo, foi construído com base no conjunto de pares chave-prioridade A2, B3, C1, D4, E5 em que as letras denotam chaves e os números inteiros são as prioridades.

A combinação de árvores binárias de pesquisa e heaps é muito poderosa. Para que você entenda o porque, faremos algumas observações sobre essas estruturas de dados completamente geniais.

A primeira observação é que ao contrário de árvores binárias de pesquisa e heaps, os treaps são *únicos*. Isso significa que dado um conjunto de pares chave-prioridade em que nem chaves nem prioridades se repetem, só há um *treap* que pode ser construído. Nós não apresentaremos uma prova formal desse fato aqui, mas indicaremos a intuição por trás da prova.

Suponha que você queira construir um treap a partir de um conjunto de pares chave-prioridade. Se você fosse construir uma árvore binária de pesquisa, qualquer chave poderia servir para ser colocada na raiz. Mas como se trata de um treap, só há uma possibilidade: a chave que está no par chave-prioridade de *menor* prioridade. No caso da figura acima, estamos falando do par C1. Agora restaram vários pares chave-prioridade e eles naturalmente precisam de ir parar em algum lugar. Nesse ponto, o fato de que um treap é uma árvore binária de pesquisa ajuda. Sabemos que os pares

chave-prioridade em que a chave é *menor* que a chave da raiz precisam ir para o lado esquerdo, enquanto os demais pares precisam ir para o lado direito. No caso da figura, isso significa que A2 e B3 precisam aparecer do lado esquerdo da raiz, enquanto D4 e E5 precisam aparecer do lado direito. Afinal, A e B vem antes de C no alfabeto. Agora é preciso construir um sub-treap com base nos pares chave-prioridade em cada lado. Mas isso é fácil, porque o problema é idêntico ao de construir um treap do zero. Então basta selecionar o par que tem menor prioridade e continuar o processo recursivamente.

A segunda observação sobre treaps tem a ver com a altura que essas árvores podem atingir. A ideia é a seguinte: suponha que as prioridades sejam escolhidas de maneira *aleatória*. Será que as chances de se obter um treap muito alto são grandes? A resposta é que não. De fato, usando um pouco de probabilidade, é possível mostrar que, em média, um treap construído dessa forma terá altura $O(\log n)$, em que n é o número de pares chave-prioridade. Você deverá assumir que os treaps sendo manipulados tem essa altura para as análises de complexidade. No entanto, probabilidade não é um pré-requisito de Algoritmos e Estruturas de Dados III. Portanto, não apresentaremos a prova aqui. No entanto, pode ser interessante ao leitor enumerar alguns exemplos de treaps a fim de se convencer do seguinte fato: para um mesmo conjunto de chaves, treaps muito altos são bem raros.

Nesse ponto, é provável que o leitor esteja se perguntando: como operações como inserção, remoção e busca de chaves podem ser implementadas num treap? E além disso, como essas operações podem ser implementadas sem a necessidade de balanceamento? Bom... Essa não seria a especificação de um trabalho prático se nós contássemos como fazer tudo :)

Código

Você deve implementar, em linguagem C, um tipo abstrato de dados *treap* em que chaves e prioridades sejam números inteiros. Sua implementação deve suportar as seguintes operações:

- Fusão: Dados *dois* treaps A e B tais que qualquer chave de A é menor do que qualquer chave de B, retorne um treap C contendo os pares de chave-prioridade de A e os de B. Tanto A quanto B deixam de existir no processo, o que significa que C pode ser obtido modificando ponteiros para nós filho que aparecem em A e B.
- Corte: Dado um treap A e uma chave k que não necessariamente aparece em A, divida o treap em dois treaps B e C tais que qualquer chave de B seja menor ou igual a k e qualquer chave de C seja maior que k.
- Inserção de um par chave-prioridade na árvore.
- Remoção de um par chave-prioridade da árvore.
- Detecção de se uma certa chave aparece no treap.

Seu tipo abstrato de dados deve alocar os nós desse treap utilizando as funções `malloc` ou `calloc` da biblioteca padrão de C. Tome cuidado para liberar toda a memória que foi alocada

utilizando a função `free`. Se você se esquecer disso e deixar vértices voando por aí quando o programa terminar de executar receberá menos pontos. Existe uma ferramenta chamada *valgrind* que detecta esse tipo de erro. Use-a :)

A entrada do trabalho prático consistirá numa séries de operações de busca, inserção e remoção que deverão ser realizadas com um treap. Você também deve escrever código que leia a descrição de quais operações devem ser realizadas a partir da entrada e imprima a saída de acordo. Apresentaremos uma descrição mais precisa de entrada e saída na seção a seguir.

Eis uma observação importante: você deve implementar inserção e remoção com base nas duas primeiras operações. Para inserir um par chave-prioridade (k, p) você pode usar um corte para quebrar o treap em um treap A contendo chaves menores que k e um treap B contendo chaves maiores. Então você pode fundir A ao treap de um único nó que contém (k, p) e depois fundir o resultado com B, obtendo um único treap de novo. Essa observação é interessante porque tanto fusões quanto cortes podem ser implementados de maneira simples.

Já para remover um vértice que contenha uma chave k, você pode utilizar dois cortes para separar o treap original em três treaps A, B, e C tais que A contenha vértices com chaves *menores* que k, B contenha um único vértice com chave k e C contenha vértices com chaves *maiores* que k. Após fazer isso, basta eliminar o único vértice do treap B e fundir os treaps A e C.

Entrada e Saída

Seu programa deverá ler a entrada da entrada padrão (`stdin`) e gravar a saída na saída padrão (`stdout`). A entrada começa com um inteiro N ($1 \leq N \leq 100000000$) que indica o número de operações que devem ser processadas. Em seguida há N linhas, cada uma descrevendo uma operação. As seguintes operações são possíveis:

`INSERT` $k\ p$ Insere um nó no treap com chave k e prioridade p. Não imprima nada na tela. Se já houver um nó com a mesma chave no treap, não faça nada.

`REMOVE` k Remove o vértice que contem a chave k, se existir. Não imprimima nada na tela.

`LOCATE` k Encontre o vértice cuja chave é k e imprima o caminho da raiz até ele numa linha. Se o vértice não existir, imprima uma linha contendo "-1". O caminho deve ser especificado por uma sequência de caracteres $c_1c_2...c_n$ em que cada caractere c_i pode ser `L` ou `R`. O caractere `L` indica que você tomou o vértice a esquerda e o caractere `R` indica que você seguiu pelo filho da direita. No treap que foi utilizado como exemplo anteriormente, o caminho `LR` especifica o vértice B3, enquanto que `R` especifica o vértice D4.

Em todos os casos, $0 \leq k \leq 10^9$ e $0 \leq p \leq 10^9$. Lembre-se de **seguir rigorosamente** a especificação de entrada e saída acima, pois a correção será automatizada. Cada linha na saída deve terminar em `\n`. Não inclua outros espaços em branco nem termine linhas com `\r\n`. **NÃO** inclua `system("pause");` em seu código. Isso pode fazer com que ele não execute adequadamente no PRATICO. A seguir, apresentamos alguns exemplos de entrada e saída.

ENTRADA	SAÍDA
14	RL
REMOVE 4	LR
INSERT 3 1	R
INSERT 2 6	-1
INSERT 1 4	
INSERT 11 2	LLR
INSERT 8 3	
INSERT 9 5	
LOCATE 8	
LOCATE 2	
LOCATE 11	
REMOVE 3	
LOCATE 3	
LOCATE 11	
LOCATE 2	

Table 1: Toy example: teste o qual o TP deve gerar a saída correta para ser elencado para uma entrevista.

ENTRADA	SAÍDA
14	-1
LOCATE 3	
INSERT 3 1	-1
LOCATE 3	
REMOVE 3	
LOCATE 3	
9	LL
INSERT 2 4	
INSERT 3 3	L
INSERT 4 2	
INSERT 5 1	
LOCATE 3	
REMOVE 3	
REMOVE 5	
LOCATE 4	
LOCATE 2	

Table 2: Outros exemplos de teste.

O que entregar

Você deve submeter uma documentação de até 10 páginas contendo uma descrição de como cada uma das operações foi implementada, além de uma análise de complexidade de tempo dos algoritmos envolvidos.

Além da documentação, você deve submeter um arquivo compactado no formato *.tar.gz* contendo todos os arquivos de código (*.c* e *.h*) que foram implementados. Além dos arquivos de código, esse arquivo compactado deve incluir um *makefile*.

Avaliação

Seu trabalho será avaliado quanto a documentação escrita e à implementação. Eis uma lista **não exaustiva** de critérios de avaliação utilizados.

Documentação

Introdução Inclua uma breve explicação do problema que está sendo resolvido no seu trabalho e um resumo da sua solução.

Solução do Problema Você deve descrever a solução do problema de maneira clara e precisa. Para tal, artificios como pseudo-códigos, exemplos ou figuras podem ser úteis. Note que documentar uma solução não é o mesmo que documentar seu código. **Não** é preciso incluir trechos de código em sua documentação nem mostrar detalhes de sua implementação, exceto quando os mesmos influenciem o seu algoritmo principal, o que se torna interessante.

Análise de Complexidade Inclua uma análise de complexidade de tempo dos principais algoritmos implementados e uma análise de complexidade de espaço das principais estruturas de dados de seu programa. Cada complexidade apresentada deverá ser devidamente **justificada** para que seja aceita.

Avaliação Experimental Sua documentação deve incluir os resultados de experimentos que avaliem o tempo de execução de seu código em função de características da entrada. Cabe a você gerar entradas para esses experimentos. Por exemplo: se esse trabalho fosse sobre ordenação, seria interessante mostrar como o tempo de execução de cada algoritmo varia quando o número de items a serem ordenados aumenta. Para tal, um gráfico mostrando o tempo de execução em função do tamanho da entrada pode ser interessante. Você também deve interpretar os resultados obtidos. Comente sobre cada gráfico ou tabela que você apresentar mostrando o que é possível concluir a partir dele.

Limite de Tamanho Sua documentação deve ter no máximo 10 páginas. Todo o texto a partir da página 11, se existir, será desconsiderado.

Valor

- O trabalho vale 10 pontos, sendo 7 pontos para o código e 3 pontos para a documentação. Ambos devem ser entregues. O aluno que entregar somente um dos dois terá sua nota zerada.
- O trabalho que não compilar receberá nota 0. Se o trabalho apresentar algum erro em tempo de execução, pelo menos 25% da nota será descontada.
- O trabalho poderá ser feito em dupla.

Considerações Finais

- Essa especificação não é isenta de erros e ambiguidades. Portanto, se tiver problemas para entender o que está escrito aqui, pergunte a nós, monitores.
- A penalização por atraso seguirá será de $\frac{2^{d-1}}{0.32}\%$, em que d é o número de dias **úteis** de atraso.
- Você **não** precisa de utilizar uma IDE como Netbeans, Eclipse, Code::Blocks ou QtCreator para implementar esse trabalho prático. No entanto, se o fizer, **não** inclua os arquivos que foram gerados por essa IDE em sua submissão.