19.11 Derivace implicitní funkce

57 Užitím derivace funkce dané implicitně určete rovnici tečny v bodě T dané kuželosečky. Načrtněte kuželosečku i tečnu v soustavě souřadnic. Vyznačte směrový úhel tečny. Vypočítejte směrový úhel tečny s přesností na minuty.

a) $x^2 + y^2 = 10,\ T[2; \sqrt{6}]$
b) $x^2 + 2y^2 = 4,\ T[\sqrt{2}; 1]$
c) $4x^2 + y^2 = 16,\ T[\sqrt{3}; 2]$
d) $x^2 - 4y^2 = 4,\ T[\sqrt{5}; \frac{1}{2}]$
e) $y^2 - 2x^2 = 16,\ T[0; 4]$
f) $y^2 = 6x - 8,\ T[2; -2]$
g) $x^2 = 4y + 5,\ T[3; 1]$
h) $x^2 + 4y^2 = 4,\ T[1; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$
i) $x^2 + 4y^2 = 4,\ T[0; 1]$
j) $x^2 + 4y^2 = 4,\ T[2; 0]$
k) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0,\ T[-5; 5]$
l) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0,\ T[1; -1]$
m) $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 19 = 0,\ T[9; 2\sqrt{3} - 1]$
n) $y^2 - 2y - 2x + 1 = 0,\ T[8; 5]$
o) $x^2 + 6x + 4y + 9 = 0,\ T[1; -4]$
p) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,\ T[2; 6]$
q) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,\ T[4; 2]$
r) $(x + 2)^2 + 4y^2 = 8,\ T[-4; -1]$
s) $2x^2 - (y + 3)^2 = 4,\ T[2\sqrt{5}; 3]$
t) $y^2 = 2(x - 1),\ T[9; 4]$

58 Ve kterém bodě elipsy $4(x - 1)^2 + y^2 = 1$ svírá tečna elipsy s kladnou poloosou x úhel $45°$?

59 Ve kterém bodě paraboly $y^2 = 4x - 8$ je tečna kolmá na osu I. a III. kvadrantu?

60 Vypočítejte odchylku tečen křivek $x^2 + y^2 = 5$, $2x^2 + y^2 = 9$ v jejich průsečících.

19.12 Derivace funkce a výpočet limity

61 Užitím definice derivace funkce vypočítejte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - 0{,}5}{x - \frac{\pi}{3}}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

c) $\lim \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3}$ f) $\lim \frac{\sin x}{x - \pi}$ i) $\lim \frac{e^x - 1}{x}$

62 Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$ $\frac{5}{3}$
b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ 4
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^3 + x}$ 1
d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$ $\frac{1}{3}$
e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ 2
f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x + 2x}{\sin x + x}$ $\frac{5}{2}$
g) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$ 0
h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$ 8
i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ 0 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2x} - 2}$ -8
j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ 1
k) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ 1
l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 1

19.13 Slovní úlohy řešené pomocí derivací

63 Z papíru tvaru čtverce $40\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$ vystřihneme ve všech rozích stejné čtverečky a složíme krabičku. Určete stranu čtverečku tak, aby tato krabička měla maximální objem.

64 Určete stranu čtverce, které musíme vyříznout ve všech rozích obdélníkového papíru o rozměrech $8\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$ tak, aby po složení vznikla krabička maximálního objemu.

65 Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

66 Určete rozměry válcové nádoby bez víka tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

67 Do koule o poloměru 3 cm vepište válec maximálního objemu. Určete jeho rozměry.

68 Do koule o poloměru 3 cm vepište kužel maximálního objemu. Určete poloměr podstavy a výšku kužele.

69 Do rotačního kužele o rozměrech $r = 6\,\text{cm}$, $v = 3\,\text{cm}$ vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce splývala s osou kužele. Určete rozměry válce.

70 Do rotačního kužele o rozměrech $r = 6\,\text{cm}$, $v = 3\,\text{cm}$ vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce byla kolmá na osu kužele. Určete rozměry válce.

71 Kouli o poloměru 3 cm opište kužel minimálního objemu. Určete jeho rozměry.

72 Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

73 Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obsahu $16\,\text{cm}^2$ měl minimální obvod.

74 Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obvodu 20 cm měl maximální obsah.