ŘEŠENÍ

Maturita

POHODĚ

MATEMATIKA

Příprava na maturitní zkoušku

OBSAH

ŘEŠENÍ

Vydavatelství Taktik

ŘEŠENÍ

(verze 2025)

ČÍSELNÉ OBORY

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	16,4	
2	$-\frac{9}{4}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{2}$	
3	9	
4	$\frac{37}{4}$	
5	$b : c = 8 : 9$	
6	620 kg	
7	Přibližně o 53,3 %.	
8		
9	24	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $\frac{20 \cdot 72 \cdot 225}{25 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Všechna čísla rozložíme na součin mocnin prvočísel a u krácení zlomku využijeme věty o počítání s mocninami.

---

2 $n\,(10, 12, 15) = 60$
Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

$60 : 10 = 6$
$60 : 12 = 5$
$60 : 15 = 4$

Do krychle se vejde $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ krabiček.

Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

---

3 Součin čísel 12 a 25 je $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo *n* je dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo *n* je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo *n* není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo *n* je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo *n* je nejmenším společným násobkem čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek.
Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

4

		A	N
4.1	2 je prvočíslo.	☒	☐
4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	☒	☐
4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	☐	☒

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

5

5.1 $15 = 3 \cdot 5;\ 20 = 2^2 \cdot 5;\ n\,(15;\,20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \ \rightarrow$ F)

5.2 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2;\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ D\,(150;\,180) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \ \rightarrow$ C)

5.3 $10 = 2 \cdot 5;\ 25 = 5^2;\ n\,(10;\,25) = 2 \cdot 5^2 = 50 \ \rightarrow$ E)

5.4 $100 = 2^2 \cdot 5^2;\ 160 = 2^5 \cdot 5;\ D\,(100;\,160) = 2^2 \cdot 5 = 20 \ \rightarrow$ B)

Provedeme rozklad čísel na součiny mocnin prvočísel. Nejmenší společný násobek je součinem prvočísel s největší mocninou, ve které je dané prvočíslo v rozkladech. Největší společný násobek je součinem prvočísel s nejmenší mocninou, ve které je dané prvočíslo v rozkladech.

---

6 Průměrná hodnota $\dfrac{8+6+5+5+6}{5}\,°\mathrm{C} = \dfrac{30}{5}\,°\mathrm{C} = 6\,°\mathrm{C}$

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

---

7 $\dfrac{(-1)\cdot|-2|}{(-3)} \cdot \dfrac{(-5+4)}{|-5+4|} = \dfrac{(-1)\cdot 2}{(-3)} \cdot \dfrac{(-1)}{1} = -\dfrac{2}{3} \ \rightarrow$ E)

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

8

		A	N
8.1	Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná.	☒	☐
8.2	Součin lichého počtu záporných čísel je záporný.	☐	☒
8.3	Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný.	☐	☒

Klademe důraz na správné přečtení zadání.
8.1 Rozlišíme pojmy kladné (> 0) a nezáporné číslo (≥ 0) (resp. záporné a nekladné číslo).
8.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

9

9.1 $(-2) + 3 = -2 + 3 = 1 \ \rightarrow$ D)

9.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2 \ \rightarrow$ B)

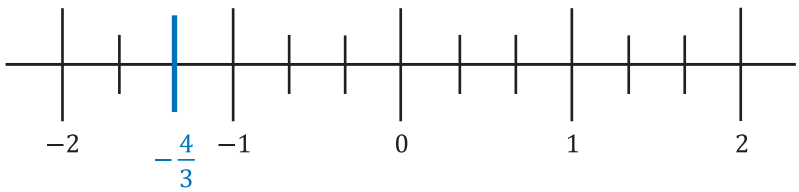
9.3 $(-2) \cdot (-1^2) = -2 \cdot (-1) = 2 \ \rightarrow$ E)

9.4 $(-3) - (-2) = -3 + 2 = -1 \ \rightarrow$ A)

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze **9.2** a **9.3** je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1^{\,2}) = -1$.
Úlohu **9.4** lze řešit jako rozdíl dvou záporných čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

---

10 $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1-9}{6} = \dfrac{-8}{6} = -\dfrac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Rozdíl je výsledek odčítání, podíl je výsledek dělení. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose.

11 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{2}{3}+2}{2} = \dfrac{1}{\frac{2+1}{2}} + \dfrac{\frac{2+6}{3}}{2} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} + \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

---

12 35 ... 100 % → 50 ... 143 % → změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, že základ (tedy kolik je 100 %) je 35. Řešíme pomocí trojčlenky nebo výpočtem 1 %.

		A	N
13.1	12 395 ≐ 12 000	☒	☐
13.2	na stovky 12 395 ≐ 12 400 na desítky 12 395 ≐ 12 400	☒	☐
13.3	12 395 = 12 395 – zůstane stejné	☐	☒

V úloze **13.2** porovnáme oba výsledky zaokrouhlení. Úloha **13.3** může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“. Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

14

14.1 $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S$ → o 125 % → E)

14.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C$ → C)

14.3 $l' : l = 5 : 10$ → $l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l$ → B)

14.4 1 h = 60 min........ 100 %
75 min.............. 125 % → změna 25 % → A)

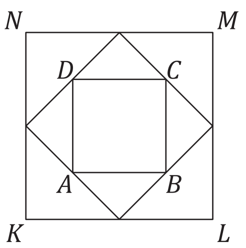
Úloha **14.1** může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah. Úloha **14.2** je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina. V úloze **14.4** žák nejprve převede základ 1 h na 60 minut.

---

15 Platí pro každé reálné číslo.

---

16 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$,
poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční“, a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

17 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 .... 100 %

3 .... x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 % → B).

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

18

		A	N
18.1	Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění.	☐	☒
18.2	Absolutní hodnota nuly je nula. Správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná.	☐	☒
18.3	Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné.	☒	☐

Úloha **18.1** může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha **18.2** vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha **18.3** může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

19

19.1 $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$ → E)

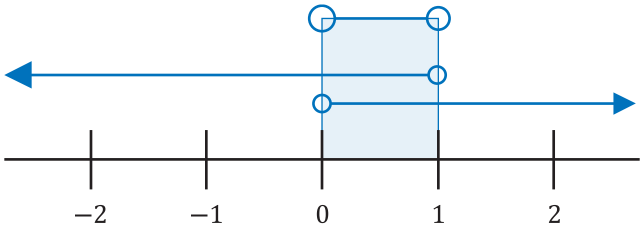
19.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ → D)

19.3 $-\sqrt{4} = -2$ → A)

19.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ → C)

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

20



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; ...).

---

21 $A = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ nebo $A = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha **20**). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

22 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5) \rightarrow$ E)

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalu *A*, *B* a *C* na číselné ose.

23

		A	N
23.1	$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{Z}^+$	☒	☐
23.2	$(-1; 1) \subset \langle -1; 1\rangle$	☐	☒
23.3	$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	☒	☐

Úlohy **23.1** a **23.3** ověřují znalosti číselných množin. V úloze **23.2** je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

24

24.1 $\mathbb{R}^+ = (0; \infty) \rightarrow$ F)

24.2 $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset = (0; 0) \rightarrow$ B)

24.3 $\mathbb{R}_0^- \cup \mathbb{R}_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty) \rightarrow$ C)

24.4 $\mathbb{R}_0^- \setminus \{0\} = \mathbb{R}^- = (-\infty; 0) \rightarrow$ E)

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověd A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy **20** a **21**).

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$-a+3$	
2	$b^{\frac{11}{2}}$	
3		
3.1	B	
3.2	D	
3.3	A	
4	$(-a^3+5)^2 = a^6 - 10a^3 + 25$	Kvadratický člen v mnohočlenu chybí, tzn. že koeficient je roven 0.
5	$-\dfrac{18}{k(k+3)}$	
6	$(1+2\sqrt{3}-x)(1+x)$	
7	E	
8		
8.1	D	
8.2	B	
8.3	E	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{x(x-2) - x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x - x^2 - 2x}{x^2 - 4} = -\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve -3 a potom 1.

$$A = -\frac{4 \cdot (-3)}{(-3)^2 - 4} = -\frac{-12}{9-4} = \frac{12}{5}$$

$$B = -\frac{4 \cdot 1}{1^2 - 4} = -\frac{4}{1-4} = \frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku…

$\frac{4}{3}$ .... 100 %

$\frac{12}{5}$ .... x %

$x = 180$ %

… tedy o 80 % větší.

2 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$x^2 - x - 6 \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 \neq \frac{1+5}{2} \rightarrow x_1 \neq 3$$

$$x_2 \neq \frac{1-5}{2} \rightarrow x_2 \neq -2$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 2(x^2 - x - 6)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 2x^2 - 2x - 12$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x = \pm 3$, ale hodnota $x = 3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru. Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x = -3$.

---

3 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

3.1 $\dfrac{x}{x^2 - 1} \rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1 \rightarrow$ B)

3.2 $\dfrac{\frac{x-1}{x}}{x+1} \rightarrow x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1 \rightarrow$ D)

3.3 $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{x} \rightarrow x - 1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 0 \rightarrow$ C)

---

4 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(a^2 - 2)^2 - \left(4 - a^2\right)^2 - 4 = \left[\left(a^2\right)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2 + 2^2\right] - \left[4^2 - 2 \cdot 4 \cdot a^2 + \left(a^2\right)^2\right] - 4 =$$

$$= a^4 - 4a^2 + 4 - (16 - 8a^2 + a^4) - 4 = a^4 - 4a^2 + 4 - 16 + 8a^2 - a^4 - 4 =$$

$$= 4a^2 - 16 = 4(a^2 - 4) = 4(a-2)(a+2)$$

5 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x + 0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x + 0{,}5x$	$0{,}5p(x + 0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x + 0{,}5x)$	$0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x)$

$0{,}3px + 0{,}5p(x + 0{,}5x) + 0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x) = 0{,}3px + 0{,}5p.1{,}5x + 0{,}2p \cdot 2.1{,}5x =$
$= 0{,}3px + 0{,}75px + 0{,}6px = 1{,}65px \rightarrow$ D)

6 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$(a + 2)^3 + (a - 2)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 + a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 - 2^3 =$
$= a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 2a^3 + 24a = 2a(a^2 + 12)$

7 $3a^2x - 6ax - 2a^2y + 4ay = 3ax(a - 2) - 2ay(a - 2) = (a - 2)(3ax - 2ay) =$
$= a(a - 2)(3x - 2y)$

8 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x) : B(x)$.

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - x - 6) : (x^2 + x - 3) = x + 2 \\
\underline{-x^3 - x^2 + 3x} \\
\quad\quad 2x^2 + 2x - 6 \\
\quad\quad \underline{-2x^2 - 2x + 6} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

B) $A(x) = (x + 2) \cdot B(x)$

			A	N
9	**9.1**	Postupujeme dle vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, kde $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$. $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$	☒	☐
	9.2	$(3x + 3)^2 + (4x + 4)^2 = 9x^2 + 18x + 9 + 16x^2 + 32x + 16 = 25x^2 + 50x + 25 = (5x + 5)^2$	☒	☐
	9.3	$(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$	☐	☒
	9.4	$(x + 2)^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 5 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$	☒	☐

10 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$
$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$
$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$
$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$
$$(x-1)^2 = A^2(x)$$
$$A(x) = x - 1 \rightarrow \text{D)}$$

---

11 $$\left(\frac{1}{a+1} + \frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \left(\frac{1}{a+1} + \frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right) \cdot \frac{1-a}{a} =$$

$$= \frac{a-1-2a}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-a-1}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{-\cancel{(a-1)}}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}$$

podm.: $a \neq \pm 1$; $a \neq 0$

---

12 $$\frac{1 + \frac{1}{a-2}}{a - \frac{1}{2-a}} = \frac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}} = \frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}} = \frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{-(a-2)}} = \frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{(a-1)^2}{a-2}} =$$

$$= \frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}} \cdot \frac{\cancel{a-2}}{(a-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a-1}$$

podm.: $a \neq 1$; $a \neq 2$

---

13 $$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{a-1}} = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{a-1}{a} = 1 + \frac{a-1}{a} =$$

$$= \frac{a+a-1}{a} = \frac{2a-1}{a} \rightarrow \text{B)}$$

14 Výraz není definován pro taková $x \in \mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

A) $\dfrac{x-2}{1+\dfrac{2}{x}} \to 1+\dfrac{2}{x} \neq 0 \to \dfrac{x+2}{x} \neq 0 \to x \neq -2 \wedge x \neq 0$

B) $\dfrac{x-2}{1+\dfrac{2}{x+2}} \to 1+\dfrac{2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x+2+2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x+4}{x+2} \neq 0 \to$

$x \neq -4 \wedge x \neq -2$

C) $\dfrac{x+2}{1+\dfrac{4}{x-2}} \to 1+\dfrac{4}{x-2} \neq 0 \to \dfrac{x-2+4}{x-2} \neq 0 \to \dfrac{x+2}{x-2} \neq 0 \to x \neq \pm 2$

D) $\dfrac{x-2}{1-\dfrac{2}{x+2}} \to 1-\dfrac{2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x+2-2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x}{x+2} \neq 0 \to$

$x \neq 0 \wedge x \neq -2$

E) $\dfrac{x-2}{1-\dfrac{2}{x}} \to 1-\dfrac{2}{x} \neq 0 \to \dfrac{x-2}{x} \neq 0 \to x \neq 2 \wedge x \neq 0$

---

15 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

		A	N
15.1	$\dfrac{A(a)}{B(a)} = \dfrac{\dfrac{2a}{a^2-1}}{\dfrac{a}{a+1}} = \dfrac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \dfrac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \dfrac{2}{a-1}$	$\square$	$\boxtimes$
15.2	$\dfrac{B(a)}{A(a)} + 1 = \dfrac{\dfrac{a}{a+1}}{\dfrac{2a}{a^2-1}} + 1 = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \dfrac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \dfrac{a-1}{2} + 1 = \dfrac{a-1+2}{2} = \dfrac{a+1}{2}$	$\boxtimes$	$\square$
15.3	$A(a) - B(a) = \dfrac{2a}{a^2-1} - \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{2a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{3a-a^2}{a^2-1}$	$\boxtimes$	$\square$
15.4	$A(a) + B(a) = \dfrac{2a}{a^2-1} + \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{2a + a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \dfrac{a}{a-1}$	$\square$	$\boxtimes$

---

16 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} =$

$= \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

popř.

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}-1) + (x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

17 $\sqrt{x} + \sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x} + 1 = 2 \qquad | - 1$$

$$\sqrt{2x} = 1$$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{1}$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{C)}$$

---

18 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$$V(a, b) = \left(a^{-16}b^{4}\right)^{8} = a^{-16\cdot 8}\, b^{4\cdot 8} = a^{-128}b^{32} = \frac{b^{32}}{a^{128}}$$

$$V(\sqrt{5}, 25) = \frac{25^{32}}{\left(\sqrt{5}\right)^{128}} = \frac{25^{32}}{25^{32}} = 1 \rightarrow \text{A)}$$

---

19 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

19.1 $\frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{2-x}} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 2-x > 0 \rightarrow 2 > x \end{matrix}\right\} \rightarrow x \in \langle -1; 2) \rightarrow \text{E)}$

19.2 $\frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} \rightarrow 4 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 4 \rightarrow |x| < 2 \rightarrow x \in (-2; 2) \rightarrow \text{D)}$

19.3 $\sqrt{1 + \frac{1}{x+1}} = \sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}} = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \rightarrow \frac{x+2}{x+1} \geq 0$

$$(x+2 \geq 0 \ \wedge \ x+1 > 0) \quad \vee \quad (x+2 \leq 0 \ \wedge \ x+1 < 0)$$

$$(x \geq -2 \ \wedge \ x > -1) \quad \vee \quad (x \leq -2 \ \wedge \ x < -1)$$

$$x \in (-1; \infty) \qquad x \in (-\infty; -2\rangle$$

$$\rightarrow x \in (-\infty; -2\rangle \ \cup \ (-1; \infty) \rightarrow \text{A)}$$

ROVNICE A NEROVNICE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	B	
2	$K = (-\infty; 10\rangle$	
3	$x \neq 3$, $K = \{0\}$	
4	Úkol bude splněn po 21 dnech.	
5		
5.1	A	
5.2	A	
5.3	A	
5.4	A	
6	D	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich x-ová a y-ová souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \ \wedge \ [x, y] = [3; a] \ \rightarrow \ 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \ \rightarrow \ 9 + 2a = 5 \ \rightarrow \ 2a = -4 \ \rightarrow \ a = -2$

$3x + 2y = 5 \ \wedge \ [x, y] = [b; 4] \ \rightarrow \ 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \ \rightarrow \ 3b + 8 = 5 \ \rightarrow \ 3b = -3 \ \rightarrow \ b = -1$

$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

---

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

A) $$x = 10 \left\{ \begin{aligned} & L(x=10)\colon \frac{10^2 - 3}{\sqrt{10-1}} = \frac{100-3}{\sqrt{9}} = \frac{97}{3} = 32\frac{1}{3} \\ & \mathrm{P}(x=10)\colon \frac{10}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow L(x=10) \neq P(x=10)$$

B) $$x = 5 \left\{ \begin{aligned} & L(x=5)\colon \frac{5^2 - 3}{\sqrt{5-1}} = \frac{25-3}{\sqrt{4}} = \frac{22}{2} = 11 \\ & \mathrm{P}(x=5)\colon \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned} \right\} \rightarrow L(x=5) \neq P(x=5)$$

C) $$x = 4 \left\{ \begin{aligned} & L(x=4)\colon \frac{4^2 - 3}{\sqrt{4-1}} = \frac{16-3}{\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}} \\ & \mathrm{P}(x=4)\colon \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow L(x=4) \neq P(x=4)$$

D) $x = 2$ $\left\{\begin{array}{l} L(x=2)\colon\ \dfrac{2^2-3}{\sqrt{2-1}} = \dfrac{4-3}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \mathrm{P}(x=2)\colon\ \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow L(x=2) = P(x=2)$

E) $x = 1$ $\left\{\begin{array}{l} L(x=1)\colon\ \dfrac{1^2-3}{\sqrt{1-1}} = \dfrac{1-3}{\sqrt{0}} \text{ výraz není definován} \\ \mathrm{P}(x=1)\colon\ \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow$ pro $x = 1$ rovnice není definována

---

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách.............. x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$$32 + x = 0{,}96(x + 35)$$
$$32 + x = 0{,}96x + 33{,}6 \qquad |-0{,}96x; -32$$
$$0{,}04x = 1{,}6 \qquad |:0{,}04$$
$$x = 40$$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

---

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. Po odčerpání 20 % vody ($0{,}2x$) a třetiny zbytku vody $\left(\frac{1}{3}\cdot 0{,}8x\right)$ klesne jeho hmotnost na 79 kg.

hmotnost vody v sudu x

$$135 - 0{,}2x - \frac{1}{3}\cdot 0{,}8x = 79 \qquad |\cdot 3$$
$$405 - 0{,}6x - 0{,}8x = 237 \qquad |-405$$
$$-1{,}4x = -168 \qquad |:(-1{,}4)$$
$$x = 120$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

---

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$p = p_1[1 + \alpha(t - t_1)]$$
$$p = p_1 + p_1\alpha(t - t_1)$$
$$p = p_1 + p_1\alpha t - p_1\alpha t_1 \qquad |-p_1; +p_1\alpha t_1$$
$$p - p_1 + p_1\alpha t_1 = p_1\alpha t \qquad |:p_1\alpha$$
$$\frac{p - p_1 + p_1\alpha t_1}{p_1\alpha} = t$$

A N

6 **6.1** Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in \mathbb{R}$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$. Tvrzení tedy pravdivé není. ☐ ☒

6.2 Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 1$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = 1$$

$$x - 2 = 1 \qquad | + 2$$

$$x = 3$$

6.3 Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

6.4 Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnici a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a -2. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad | - x; - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

7

$$\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} = 2x - 4 \qquad | \cdot 6$$

$$3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) = 12x - 24$$

$$3x + 2x + \frac{2x+4}{3} = 12x - 24 \qquad | \cdot 3$$

$$9x + 6x + 2x + 4 = 36x - 72$$

$$17x + 4 = 36x - 72 \qquad | - 36x; - 4$$

$$-19x = -76 \qquad | : (-19)$$

$$x = 4$$

---

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ x - 2y &= -4 \qquad | \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ 2x - 4y &= -8 \end{aligned}$$

$$4x - 3y = -11 \rightarrow \text{D)}$$

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$\begin{aligned}(x+3)^2-4(x-1)^2-2x&=-3(x-2)^2+6x-1\\ x^2+6x+9-4(x^2-2x+1)-2x&=-3(x^2-4x+4)+6x-1\\ x^2+6x+9-4x^2+8x-4-2x&=-3x^2+12x-12+6x-1\\ -3x^2+12x+5&=-3x^2+18x-13 &&|+3x^2;-18x;-5\\ 12x-18x&=-13-5\\ -6x&=-18 &&|:(-6)\\ x&=3\end{aligned}$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. → C)

---

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}-\frac{x}{x+1}&=\frac{3x+2}{x^2+x}-1 &&\text{podm.: } x\neq 0;\ x\neq -1\\ \frac{2}{x}-\frac{x}{x+1}&=\frac{3x+2}{x(x+1)}-1 &&|\cdot x(x+1)\\ 2(x+1)-x\cdot x&=3x+2-x(x+1)\\ 2x+2-x^2&=3x+2-x^2-x\\ -x^2+2x+2&=-x^2+2x+2 &&|+x^2-2x-2\\ 0&=0\end{aligned}$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

---

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím kratší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci .... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků .... x hodin

$$\begin{aligned}\frac{6}{4}&=\frac{x+2{,}5}{x} &&|\cdot 4x\\ 6x&=4(x+2{,}5)\\ 6x&=4x+10 &&|-4x\\ 2x&=10 &&|:2\\ x&=5\end{aligned}$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků .... 5 hodin
10 soustružníků .... y hodin

$$\begin{aligned}\frac{10}{6}&=\frac{5}{y} &&|\cdot 6y\\ 10y&=30 &&|:10\\ y&=3\end{aligned}$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice, její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, $0{,}75x$. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku .... $0{,}75x$
jmenovatel zlomku x

$$\frac{0{,}75x+2}{x+2} = 0{,}8 \qquad | \cdot (x+2)$$
$$0{,}75x + 2 = 0{,}8(x+2)$$
$$0{,}75x + 2 = 0{,}8x + 1{,}6 \qquad | -0{,}8x - 2$$
$$-0{,}05x = -0{,}4 \qquad | : (-0{,}05)$$
$$x = 8$$

Jmenovatel původního zlomku je roven 8, čitatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. $0{,}75 \cdot 8 = 6$.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8}$.

---

13 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{3}{x^2-4} + 2 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 2$$
$$\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{3}{(x-2)(x+2)} + 2 \qquad | \cdot (x-2)(x+2)$$
$$2(x+2) + x(x-2) = 3 + 2(x-2)(x+2)$$
$$2x + 4 + x^2 - 2x = 3 + 2(x^2-4)$$
$$x^2 + 4 = 3 + 2x^2 - 8$$
$$x^2 + 4 = 2x^2 - 5 \qquad | -2x^2; -4$$
$$-x^2 = -9 \qquad | \cdot (-1)$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$
$$K = \{\pm 3\}$$

---

14 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{x-1}{x+9} \qquad | \cdot (x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x \neq -3;\ x \neq -9$$
$$(x-2)(x+9) = (x-1)(x+3)$$
$$x^2 + 9x - 2x - 18 = x^2 + 3x - x - 3$$
$$x^2 + 7x - 18 = x^2 + 2x - 3 \qquad | -x^2 - 2x + 18$$
$$5x = 15 \qquad | : 5$$
$$x = 3$$

$$\frac{y-3}{y+3} = \frac{y-4}{y-1} \qquad | \cdot (y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y \neq -3;\ y \neq 1$$
$$(y-1)(y-3) = (y-4)(y+3)$$
$$y^2 - 3y - y + 3 = y^2 + 3y - 4y - 12$$
$$y^2 - 4y + 3 = y^2 - y - 12 \qquad | -y^2 + y - 3$$
$$-3y = -15 \qquad | : (-3)$$
$$y = 5$$

Řešením rovnic jsou čísla $x = 3$ a $y = 5$. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15. → B)

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

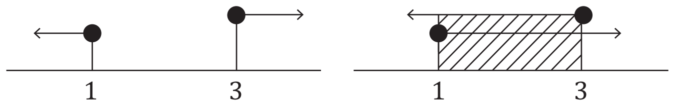
$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, jestliže $(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \leq 0) \quad \vee \quad (x - 3 \leq 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0)$$
$$(x \geq 3 \ \wedge \ x \leq 1) \quad \vee \quad (x \leq 3 \ \wedge \ x \geq 1)$$
$$x \in \emptyset \quad \vee \quad x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

---

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku .... $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$x(x + 17{,}5) = 375$

$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1\,500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1\,806{,}25}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \ \rightarrow \ \text{nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka $12{,}5 + 17{,}5 = 30$ cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1\,056{,}25} = 32{,}5$ cm. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

---

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x + 1$ (druhá mocnina je $(x + 1)^2$) a největší $x + 2$ (druhá mocnina je $(x + 2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo .... $x + 1$
třetí číslo .... $x + 2$

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 10(x + 2)$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 20$

$3x^2 + 6x + 5 = 10x + 20 \qquad | - 10x - 20$

$3x^2 - 4x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = \frac{4 + 14}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 14}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \ \rightarrow \ \text{nevyhovuje (} x \text{ je přirozené číslo)}$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je $3 + 4 + 5 = 12$.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$(x+3)^2-(3x-1)^2=0$$
$$x^2+6x+9-(9x^2-6x+1)=0$$
$$x^2+6x+9-9x^2+6x-1=0$$
$$-8x^2+12x+8=0 \qquad |:(-4)$$
$$2x^2-3x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \rightarrow |x_1|=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \rightarrow |x_2|=2 \end{array}\right\} \rightarrow |x_2|=4|x_1| \rightarrow \text{E)}$$

---

19 Je-li $x_1=3$ řešením rovnice $x^2-x-b^2+5b=0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-x-b^2+5b=0 \\ x_1=3 \end{array}\right\} 3^2-3-b^2+5b=0 \rightarrow b^2-5b-6=0$$

$$b_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm7}{2}$$

$$b_1=\frac{5-7}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$b_2=\frac{5+7}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Nyní do původní rovnice $x^2-x-b^2+5b=0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-x-b^2+5b=0 \\ b_1=-1 \end{array}\right\} x^2-x-(-1)^2+5(-1)=0 \rightarrow x^2-x-6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

$$x_2=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven -2. → B)

---

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2}=|x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x-a|\le b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a-b; a+b\rangle$.

20.1 $(x-1)^2\le1 \rightarrow |x-1|\le1 \rightarrow x\in\langle0;2\rangle$ → C)

20.2 $(x+1)^2\le4 \rightarrow |x-(-1)|\le2 \rightarrow x\in\langle-3;1\rangle$ → A)

20.3 $(x+1)^2\le9 \rightarrow |x-(-1)|\le3 \rightarrow x\in\langle-4;2\rangle$ → D)

21 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$
\begin{aligned}
3(2x-1)-2(x+3) &\le 5x-1 \\
6x-3-2x-6 &\le 5x-1 \\
4x-9 &\le 5x-1 \qquad | -5x+9 \\
4x-5x &\le -1+9 \\
-x &\le 8 \qquad | :(-1) \\
x &\ge -8 \ \rightarrow\ x \in \langle -8; \infty)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2(4x-3)-5(x+2) &\ge 4x-13 \\
8x-6-5x-10 &\ge 4x-13 \\
3x-16 &\ge 4x-13 \qquad | -4x+16 \\
3x-4x &\ge -13+16 \\
-x &\ge 3 \qquad | :(-1) \\
x &\le -3 \ \rightarrow\ x \in (-\infty; -3\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned} x &\in \langle -8; \infty) \\ x &\in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}\right\} \rightarrow x \in \langle -8; -3\rangle
$$

---

22 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x-1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \le 0 \qquad \text{podm.: } x \ne \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} \le 0$$

$$\frac{1}{x-1} \le 0$$

$1 \ge 0 \ \rightarrow\ x-1<0 \ \rightarrow\ x<1 \ \rightarrow\ x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$

---

23 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$
\begin{aligned}
2(3x-1)-3[2(x+4)-3(x-2)] &\le 7(x-5)+1 \\
6x-2-3[2x+8-3x+6] &\le 7x-35+1 \\
6x-2-3[-x+14] &\le 7x-34 \\
6x-2+3x-42 &\le 7x-34 \\
9x-44 &\le 7x-34 \qquad | -7x+44 \\
9x-7x &\le -34+44 \\
2x &\le 10 \qquad | :2 \\
x &\le 5
\end{aligned}
$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \le 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1+2+3+4+5=15.$ → D)

---

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\frac{2x-\frac{1}{3}(x+4)}{4}+\frac{3x-\frac{1}{4}(x-2)}{3} \le \frac{3x+1}{2} \qquad | \cdot 12$$

$$3\left[2x-\frac{1}{3}(x+4)\right]+4\left[3x-\frac{1}{4}(x-2)\right] \le 6(3x+1)$$

$$
\begin{aligned}
6x-(x+4)+12x-(x-2) &\le 18x+6 \\
6x-x-4+12x-x+2 &\le 18x+6 \\
16x-2 &\le 18x+6 \qquad | -18x+2 \\
-2x &\le 8 \qquad | :(-2) \\
x &\ge -4 \ \rightarrow\ x \in \langle -4; \infty) \ \rightarrow\ \text{A)}
\end{aligned}
$$

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

25.1
$$\begin{aligned}2(3x-1)-3(x+2) &\le 4x-6\\ 6x-2-3x-6 &\le 4x-6\\ 3x-8 &\le 4x-6 && |-4x+8\\ 3x-4x &\le -6+8\\ -x &\le 2 && |:(-1)\\ x &\ge -2 \ \rightarrow\ x\in\langle -2;\infty) \ \rightarrow\ \text{B)}\end{aligned}$$

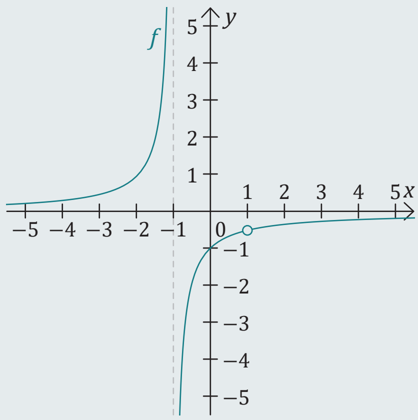
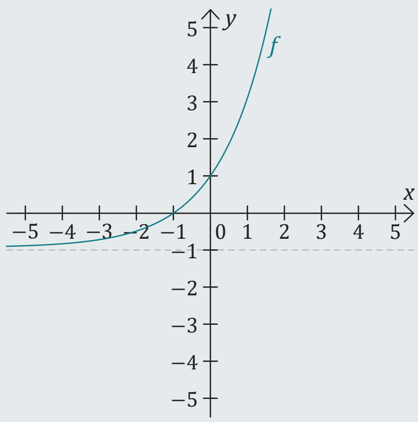
25.2
$$\begin{aligned}4(2x-3)-2(x+1) &\le 7x-8\\ 8x-12-2x-2 &\le 7x-8\\ 6x-14 &\le 7x-8 && |-7x+14\\ 6x-7x &\le -8+14\\ -x &\le 6 && |:(-1)\\ x &\ge -6 \ \rightarrow\ x\in\langle -6;\infty) \ \rightarrow\ \text{E)}\end{aligned}$$

25.3
$$\begin{aligned}4(3x-2)-6(x-3) &\le 7x+15\\ 12x-8-6x+18 &\le 7x+15\\ 6x+10 &\le 7x+15 && |-7x-10\\ 6x-7x &\le 15-10\\ -x &\le 5 && |:(-1)\\ x &\ge -5 \ \rightarrow\ x\in\langle -5;\infty) \ \rightarrow\ \text{D)}\end{aligned}$$

FUNKCE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	C	
2	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ Grafem je hyperbola s výjimkou jednoho bodu ($x = 1$). 	
3	$K = \{4\}$	
4	$P_x[-1; 0]$, $P_y[0; 1]$ 	
5	$K = \{1\}$	
6	$a = -4$	
7	$\log_5 6 = \frac{p}{3} + \frac{q}{2}$	
8	$K = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

---

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule. Proto musí platit, že:

$$\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \ \rightarrow \ x > 3 \end{array}\right\} \rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \ \rightarrow \ x \in (3; 5\rangle$$

---

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$. Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f\colon y = \frac{|x-3|}{2x} \rightarrow \left(\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

		A	N
4 **4.1**	$f_1\colon y = \dfrac{2}{\lvert x\rvert - 3} \rightarrow \lvert x\rvert - 3 \neq 0 \rightarrow \lvert x\rvert \neq 3 \rightarrow x \neq \pm 3$	☐	☒
4.2	$f_2\colon y = \dfrac{x}{x^2 + 3} \rightarrow x^2 + 3 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in \mathbb{R}$	☒	☐
4.3	$f_3\colon y = \dfrac{2x + 2}{x + 1} \rightarrow x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$	☐	☒
4.4	$f_4\colon y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{2}} \rightarrow \dfrac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in \mathbb{R}$	☒	☐

---

5 $A\,[0; 0]\colon \dfrac{0^2 + 0}{0 - 1} = 0 \ \rightarrow$ bod $A\,[0; 0]$ leží

$B\,[-1; 0]\colon \dfrac{(-1)^2 + (-1)}{(-1) - 1} = \dfrac{1 - 1}{-2} = 0 \ \rightarrow$ bod $B\,[-1; 0]$ leží

$C\,[2; 6]\colon \dfrac{2^2 + 2}{2 - 1} = \dfrac{4 + 2}{1} = 6 \ \rightarrow$ bod $C\,[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]\colon \dfrac{(-3)^2 + (-3)}{(-3) - 1} = \dfrac{9 - 3}{-4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \ \rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

Na grafu funkce f leží 3 body A, B a C. $\rightarrow$ D)

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6{,}3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k, vyjádříme pomocí lineární funkce:

$$p = 55 - \frac{6{,}3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0{,}063k + 55$.

---

7 $v = at + b \;\rightarrow\; \left\{\begin{matrix} v_1 = at_1 + b \;\rightarrow\; 337{,}92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \;\rightarrow\; 350{,}12 = 30a + b \end{matrix}\right\}$

Řešením soustavy je $a = 0{,}61$ a $b = 331{,}82$.
Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0{,}61t + 331{,}82$.

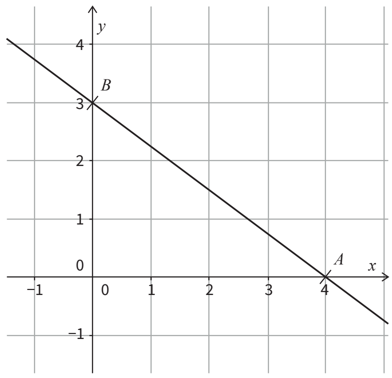
---

8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A\,[x;\,0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B\,[0;\,y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge y = 0) \;\rightarrow\; 0 = -0{,}75x + 3 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{0{,}75} = 4 \;\rightarrow\; A\,[4;\,0]$

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge x = 0) \;\rightarrow\; y = -0{,}75 \cdot 0 + 3 \;\rightarrow\; y = 3 \;\rightarrow\; B\,[0;\,3]$

Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.
$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



9
9.1 $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1} \;\rightarrow\;$ D)

9.2 $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1} \;\rightarrow\;$ B)

9.3 $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1} \;\rightarrow\;$ E)

---

10 $f\colon y = x - 2 \wedge P\,[x;\,1] \in f \;\rightarrow\; 1 = x - 2 \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\;$ funkce se protínají v bodě $P\,[3;\,1]$

$g\colon y = ax + 4 \wedge P\,[3;\,1] \in g \;\rightarrow\; 1 = 3a + 4 \;\rightarrow\; -3 = 3a \;\rightarrow\; a = -1 \rightarrow$ B)

---

11 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je -4, potom funkce prochází bodem $V\,[0;\,-4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice $[2;\,0]$, potom druhý má souřadnice $[-2;\,0]$.
Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}\,[2;\,0]$ a $P_{x2}\,[-2;\,0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f\colon y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

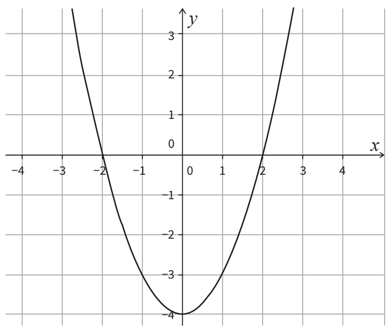
$V \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\rightarrow\; c = -4$

$P_{x1} \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \;\rightarrow\; 0 = 4a + 2b + c$

$P_{x2} \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \;\rightarrow\; 0 = 4a - 2b + c$

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je
$a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.

Pro funkci f tedy platí: $f\colon y = x^2 - 4$.



Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

12 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \quad \wedge \quad f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) + 3 =$
$= a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$$f(a+1) \geq f(a)$$
$$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$$
$$2a \geq -3$$
$$a \geq -\frac{3}{2}$$

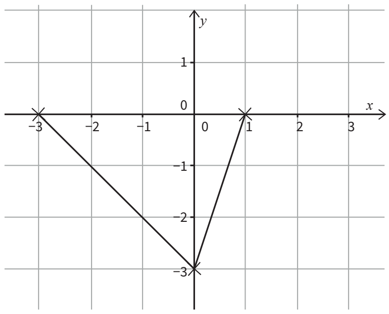
$a \in \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)$

---

13 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu f: $y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu f: $y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.

$(f\colon y = x^2 + 2x - 3 \ \wedge\ x = 0) \ \rightarrow\ y = -3 \ \rightarrow\ P_1[0; -3]$
$(f\colon y = x^2 + 2x - 3 \ \wedge\ y = 0) \ \rightarrow\ x^2 + 2x - 3 = 0 \ \rightarrow\ (x+3)(x-1) = 0 \ \rightarrow$
$(x = -3 \ \vee\ x = 1) \ \rightarrow\ P_2[-3; 0] \ \wedge\ P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



---

14 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj.

f: $y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$.

V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí g: $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$. $\rightarrow$ B)

---

15 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f\colon y = a^{x+1} + b \ \rightarrow\ 4 = a^{-1+1} + b \ \rightarrow\ 4 = a^0 + b \ \rightarrow\ 4 = 1 + b \ \rightarrow\ b = 3$
$B[2; 11] \in f\colon y = a^{x+1} + b \ \rightarrow\ 11 = a^{2+1} + b \ \rightarrow\ 11 = a^3 + 3 \ \rightarrow\ 8 = a^3 \ \rightarrow\ a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

---

16 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\dfrac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$
$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$
$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$
$$\frac{2}{a-1} > 0 \ \rightarrow\ a - 1 > 0 \ \rightarrow\ a > 1$$

$a \in (1; \infty)$

17
$$\begin{aligned} 2^{3-x} + 2^{1-x} &= 40 \\ 2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} &= 40 \\ 2^{-x}\left(2^3 + 2^1\right) &= 40 \\ 2^{-x}(8+2) &= 40 \\ 2^{-x} \cdot 10 &= 40 \\ 2^{-x} &= 4 \\ 2^{-x} &= 2^2 \\ x &= -2 \ \rightarrow \ x \in (-3; -1) \ \rightarrow \ \text{B)} \end{aligned}$$

---

18 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$$\begin{aligned} \log_2(x-3) &= \log_3 9 \\ \log_2(x-3) &= 2 \\ 2^2 &= x-3 \\ 4 &= x-3 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

---

19 $$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{3\left(1-2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}\left(1-2\sqrt{3}\right)}{3} = \sqrt{3}\left(1-2\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 6$$

---

20 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být vetší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \ \wedge \ \sin x \geq 0) \ \rightarrow \ \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

---

21 $$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1}{-(1-\sin^2 x)} =$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x\cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 2\sin x\cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{-\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\operatorname{tg} x$$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \ \rightarrow \ \sin^2 x \neq 1 \ \rightarrow \ \sin x \neq \pm 1 \ \rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \wedge$

$x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \rightarrow \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

22

22.1 $y = 2\sin x - 1 \rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \rightarrow D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right] \end{cases}$

22.2 $y = \cos x + 2 \rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3}+4}{2} \rightarrow B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right] \\ \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

22.3 $y = \operatorname{tg} x - 3 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{\sqrt{3}-9}{3} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \rightarrow C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right] \end{cases}$

---

23 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi \rightarrow$ C)

POSLOUPNOSTI A FINANČNÍ MATEMATIKA

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$a_1 = 3$	
2	7 975	
3	98 550	
4	1 300 Kč, 2 100 Kč, 2 900 Kč, 3 700 Kč	
5	855	
6	$s_8 = \dfrac{6\,305}{243} \doteq 25$	
7	$a_{10} \doteq 0{,}04$ cm, $s_{15} \doteq 23{,}38$ cm^2	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 A) $a_5 = \dfrac{5^2 - 3 \cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \dfrac{1^2 - 3 \cdot 1}{5} = -\dfrac{2}{5}$; $a_2 = \dfrac{2^2 - 3 \cdot 2}{5} = -\dfrac{2}{5}$; $a_3 = \dfrac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \ \rightarrow$ posloupnost není aritmetická

D) $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{a_3}{a_2} \ \rightarrow$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \dfrac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} + \dfrac{4^2 - 3 \cdot 4}{5} = 0 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.
V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

---

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5) \cdot d$

$d = \dfrac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení: $d = 0{,}08$ m.

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5) \cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14 \cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$d = \dfrac{9 - 2a_1}{10}$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

---

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12$; $a_n = 96$; $d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$

$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_{15} = \dfrac{15}{2} \cdot (12 + 96)$

$s_{15} = 810$

---

5 **5.1** Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20$; $d = 3$; $n = 9$

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9 - 1) \cdot 3$

$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot d)$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\dfrac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 **6.1** Počty kostek v modrých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet modrých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n - 1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma. Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98 \rightarrow$ B)

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n - 1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144 \rightarrow$ E)

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

---

7 $K_0 = 400\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}08$ (úroková míra,vyjádřená desetinným číslem)
$n = 3$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient,v tomto případě se nemusí uvádět)

A ☐ N ☒

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$

Po dosazení:

$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč $\doteq 503\,885$ Kč

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí ($k = 1$). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % ($k = 0{,}85$).

8 **8.1** $q = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ — A ☐ N ☒

8.2 $a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ — A ☒ N ☐

8.3 $a_3 + a_4 + a_5 = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{38}{81}$ — A ☒ N ☐

8.4 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$ — A ☐ N ☒

Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

---

9 $K_0 = 40\,000$ Kč (počáteční vklad)
$p_1 = 0{,}02$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$p_2 = 0{,}013$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n_1 = 3$ (počet úrokovacích období)
$n_2 = 2$ (počet úrokovacích období)
$k = 0{,}85$ (zdaňovací koeficient)

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} = 42\,075$ Kč

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$
$K_5 = 43\,010$ Kč $\doteq 43\,000$ Kč $\rightarrow$ B)

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$

---

10 $K_0 = 1\,500\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}055$ (úroková míra,vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient,v tomto případě se nemusí uvádět)

10.1 Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:
$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10} \doteq 2\,562\,000$ Kč

10.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Po dosazení:

$$p = \sqrt[10]{\frac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq 5{,}2\ \%$$

PLANIMETRIE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$135°$	
2	$S = 90\ \text{cm}^2$	
3	4 cm, $\left(80 - 32\sqrt{3}\right)$ cm $\doteq 4{,}9$ cm	
4	$\frac{64}{25}$	
5	$\cos\alpha = -\frac{1}{6}$, $\alpha \doteq 99°\,36'$	
6	C	
7	$\lvert DE\rvert = \sqrt{74}$ cm, $\lvert GH\rvert : \lvert HF\rvert = 2 : 5$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1.1** D)
1.2 B)
1.3 E)
1.4 A)

Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

---

2 **2.1** C)
2.2 A)
2.3 B)
2.4 F)

2.1 Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou *p*, ale obě, tedy přímky *q* i *r*.
2.3 Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem *AB* (tedy *k*) bez krajních bodů *A* a *B*.
2.4 Jde o osu úsečky *AB*, což je přímka *p*, protože je na *AB* kolmá a prochází jejím středem.

---

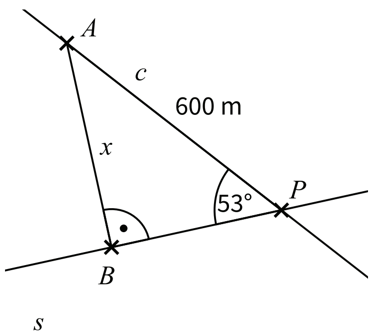
3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}$ km $= 0{,}6$ km $= 600$ m.

Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka *s*, lesní cesta jako přímka *c*. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu *P* do bodu *A*. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice *x* vedené z bodu *A* na přímku *s*.

V pravoúhlém trojúhelníku *ABP* platí: $\frac{x}{\lvert AP\rvert} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\ \text{m} \doteq 480\ \text{m} \rightarrow$ A)



4 **4.1** V pravoúhlém trojúhelníku *ACD* s odvěsnami *AC* a *CD* platí:

$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\ \text{cm}^2$

$S = 7\ \text{cm}^2$

4.2 Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany *a*, *b*).

Protože máme zadány strany *b* a *c* a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako

$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. A dosadíme známé hodnoty.

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$

$S = 7{,}66\ \text{cm}^2$

$S \doteq 8\ \text{cm}^2$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

---

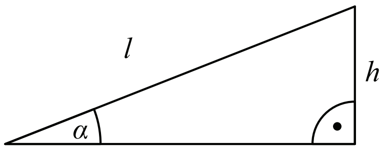
5 Pomůže nám obrázek vpravo.

Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin \alpha = \frac{h}{l}$;

kde *h* se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy $h = (630 - 440)\ \text{m} = 190\ \text{m}$

$\sin \alpha = \frac{190}{2\,100} = 0{,}090\,5$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}090\,5) = 5{,}19° \rightarrow$ A)



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

---

6 **6.1** $v = 8 \cdot \text{tg } 35° = 5{,}6\ \text{m} \rightarrow$ B)

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \text{m} \rightarrow$ A)

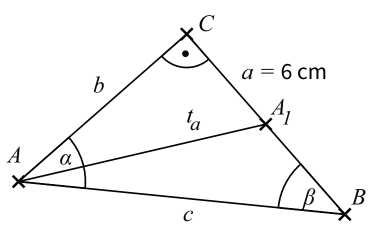
6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

$v = 5{,}9\ \text{cm} \rightarrow$ C)

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

		A	N
7.1	Je-li α = 30°, pak $c = 12$ cm.	☒	☐
7.2	Je-li $b = 4$ cm, pak $t_a = 5$ cm.	☒	☐
7.3	Je-li $b = 4$ cm, pak $c = 8$ cm.	☐	☒
7.4	Je-li β = 50°, pak je trojúhelník *ABC* rovnoramenný.	☐	☒



7.1 $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2} \rightarrow c = 2a = 12\ \text{cm}$

7.2 Těžnice t_a spojuje vrchol *A* se středem strany *a*, tedy bodem A_1.

$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3\ \text{cm}$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 platí

$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow t_a^2 = 4^2 + 3^2$

$t_a = 5\ \text{cm}$

7.3 $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{52}\ \text{cm} \doteq 7{,}21\ \text{cm} \neq 8\ \text{cm}$

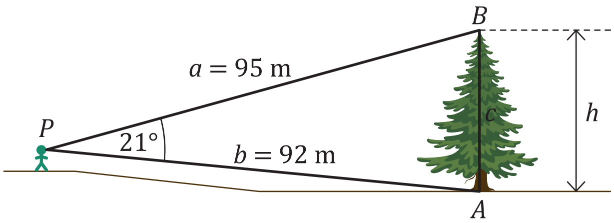
7.4 Je-li β = 50°, pak je α = 90° − 50° = 40°. Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musí mít dva vnitřní úhly shodné.

8 Pomůžeme si obrázkem.

Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.

V trojúhelníku ABP známe dvě strany a úhel, který svírají. Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m → D)



---

9 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten je zmenšený. Budeme muset obě délky vypočítat.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{|AC|}{8 \text{ cm}} = \cos 60°$$
$$|AC| = 4 \text{ cm}$$

Stranu BD vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu A, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.

$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$

Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}797\,95\ldots$ cm

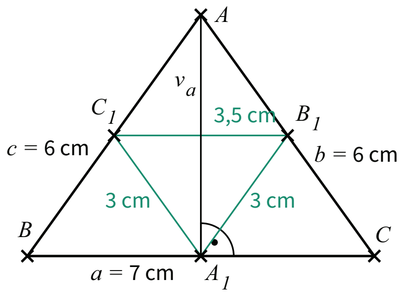
Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi:

$9{,}798 : 4 = 2{,}449\,48\ldots : 1$

Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$. → C)

---

10 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný. Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$

Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.

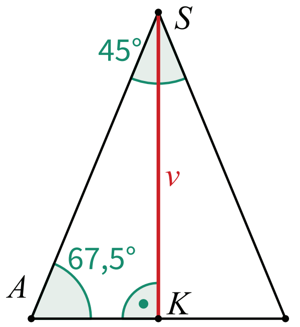
$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$
$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm

Dosadíme do vzorce: $S = \frac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057$ cm².

$S \doteq 17$ cm² → A)

11 **11.1** Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost $360° : 8 = 45°$, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

11.2 Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$$\frac{v}{|AK|} = \text{tg } 67{,}5°$$

$$v = 2{,}5 \text{ m} \cdot \text{tg } 67{,}5° = 6{,}036 \text{ m}$$

Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09 \text{ m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy $3 \cdot 15{,}09 \text{ m}^2 = 45{,}27 \text{ m}^2 \doteq 45 \text{ m}^2$.

---

12 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$.

Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$$2S = (a + c) \cdot v \qquad | : v$$

$$\frac{2S}{v} = a + c \qquad | - c$$

$$\frac{2S}{v} - c = a$$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm. → E)

---

13 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

$S = a \cdot v$; $S = \frac{e \cdot f}{2}$. → Platí tedy $a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2}$.

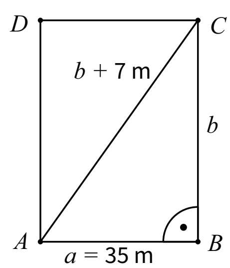
Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$$a = \frac{e \cdot f}{2v}$$

$a \doteq 11$ cm → A)

---

14 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.
Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.

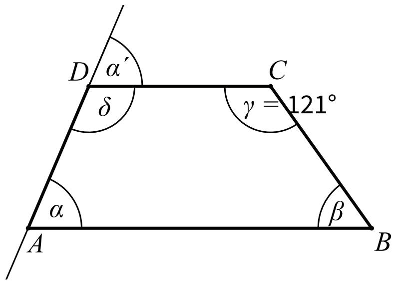


Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.

Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84 \text{ m}^2$.

$S = 2\,940 \text{ m}^2$

15 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α' (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α', proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.



Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.

Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\frac{2}{3}\delta$:

$$\frac{2}{3}\delta + \delta = 180°$$
$$\delta = 108°$$
$$\alpha = 72°$$

Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy $72° - 59° = 13°$.

---

16 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem $(400 - 2 \times 80)$ m = = 240 m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce $o = 240$ m.

$$o = 2\pi r$$
$$r = \frac{o}{2\pi}$$
$$r = 38{,}197 \text{ m} \doteq 38 \text{ m}$$

---

17 **17.1** Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$$S = \pi \cdot {r_2}^2 - \pi \cdot {r_1}^2$$
$$S = \pi \cdot \left(11^2 - 8^2\right)$$
$$S = 57\pi \;\rightarrow\; \text{E)}$$

17.2 Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$$
$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\,\pi \;\rightarrow\; \text{C)}$$

17.3 Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu $r_1 = 15$, poloměr většího kruhu $r_2 = (15 + 10) = 25$.

$$S = \frac{1}{8} \cdot \left(\pi \cdot {r_2}^2 - \pi \cdot {r_1}^2\right)$$
$$S = \frac{1}{8} \cdot \left(\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2\right)$$
$$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi \;\rightarrow\; \text{D)}$$

18 **18.1** F)

18.2 C)

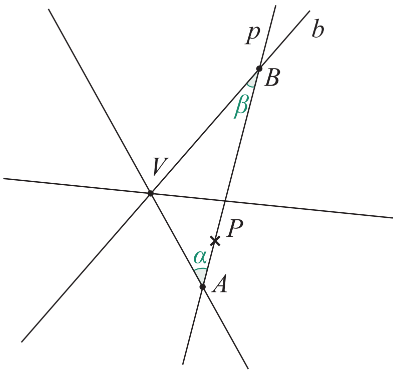
18.3 A)

18.4 D)

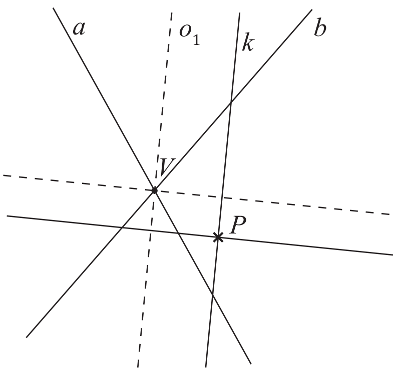
18.1 Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu $S\,[1;\,1]$ o 90° v záporném smyslu, již to vychází.
18.2 Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.
18.3 Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.
18.4 Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor $u = (-2;\,1)$.

---

19 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.



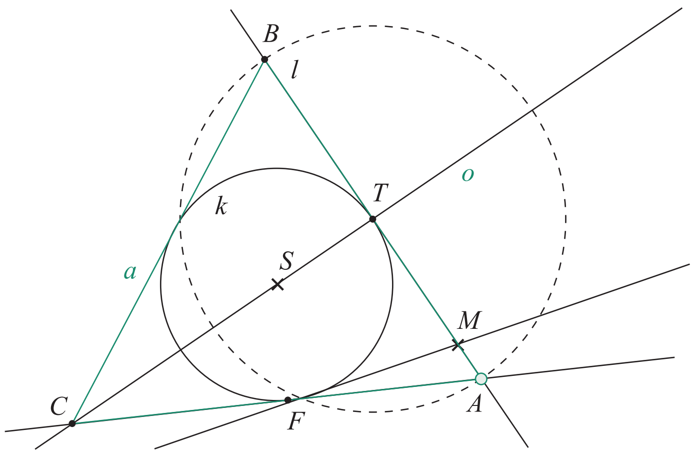
Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

20 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



STEREOMETRIE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	A	
2	Přibližně 2,06 cm od podstavy.	
3	B	
4	$v \doteq 14{,}2$ cm	
5	492,4 cm^3	
6	Povrch se zvětší o $2(3x^2 + 18)$ cm^2.	
7	216°	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle. Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je

$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je

$S' = 6 \cdot (0,75a)^2 = 6 \cdot 0,75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}562\,5$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25 % původního povrchu.

Změní-li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch o 43,75 %.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}562\,5 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch...? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je 100 % − 56,25 % = 43,75 %.

---

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$. S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu $\sin 390° = \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$

$V = 18 \cdot 24 \cdot 8 = 3\,456\ \text{cm}^2. \rightarrow$ E)

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268{,}1\ \text{cm}^3$.

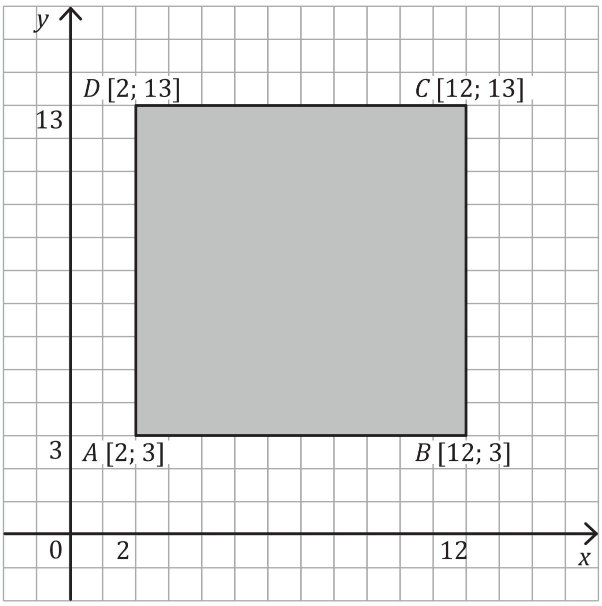
Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268{,}1\ \text{cm}^3 = 804{,}25\ \text{cm}^3$ a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804{,}25\ \text{cm}^3$, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule $S = 4\pi \cdot R^2 = 418\ \text{cm}^2$.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

---

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

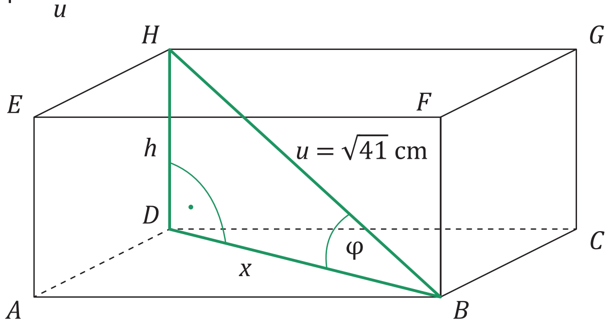
Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3}a^2 v = 433{,}3\ \text{j}^3$.

Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ \text{j}^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13$ j. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

---

5 **5.1** Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin \varphi = \frac{h}{u} \rightarrow h = u \cdot \sin 28° \doteq 3$ cm



5.2 Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos \varphi = \frac{x}{u} \rightarrow x = u \cdot \cos 28° \doteq 5{,}65$ cm

Navíc podstava je čtverec: $x = \sqrt{2} \cdot |AB| \rightarrow |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

Povrch celého kvádru je: $S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq 80\ \text{cm}^2$.

K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.

6 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavy válečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě: Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.

Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ .... 35 %

$\pi \cdot r^2$ .... 100 %

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28 \text{ cm.}$$

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

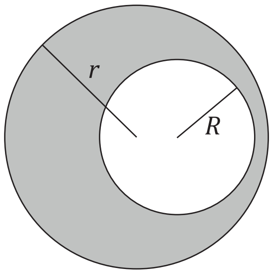
Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

$$S = 2 \cdot \left(\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2\right) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$$

$$S = 2\pi\left(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v\right)$$

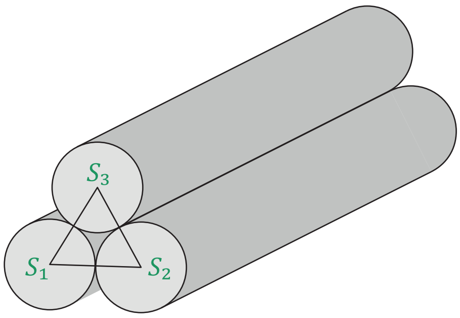
$$S \doteq 8\,080 \text{ cm}^2$$

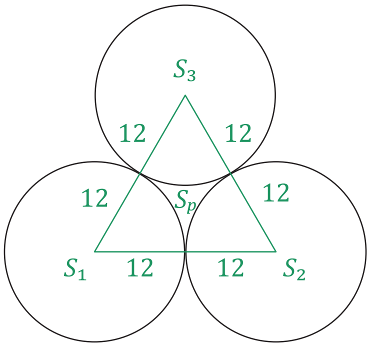
Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.



---

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný.





Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \doteq 249{,}4 \text{ cm}^2$$

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226{,}1 \text{ cm}^2$$

Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$$S_p = S - S_1 = 23{,}3 \text{ cm}^2$$

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu $v = 300$ cm:

$$V = S_p \cdot v = 6\,990 \text{ cm}^3 \doteq 7 \text{ dm}^3$$

Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru. K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů.
Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

---

8 $u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ m}$

$r = 0{,}65$ m

$60 \text{ hl} = 6\,000 \text{ l} = 6\,000 \text{ dm}^3 = 6 \text{ m}^3$

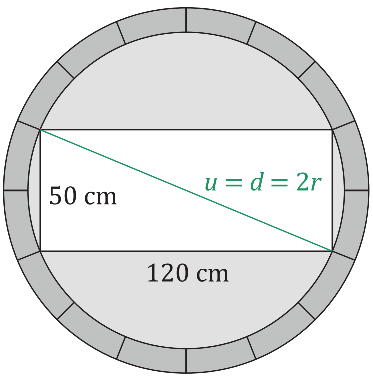
$0{,}74 \cdot V = 6$

$V \doteq 8{,}1 \text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$

$v \doteq 6{,}1 \text{ m} \rightarrow$ A)



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce“, což odpovídá 74 % hloubky studně.

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729\ \text{cm}^2 = 12\pi\ \text{cm}^2$.
Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.
Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:
$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.
Pro délku hrany krychle platí: $a = \dfrac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.
Objem krychle je potom: $V = a^3 = 8\ \text{cm}^3$.

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

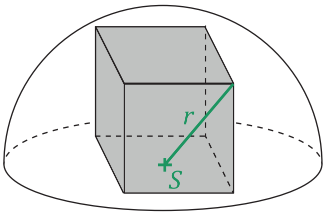
---

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.
Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm, poloměr horní podstavy je $r_1 = 12$ cm a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot v \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$.
Objem kyblíku je tedy: $V = 7\,671{,}77\ \text{cm}^3$,
tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7\,671{,}77\ \text{cm}^3 = 92\,061\ \text{cm}^3 \doteq 92$ litrů.

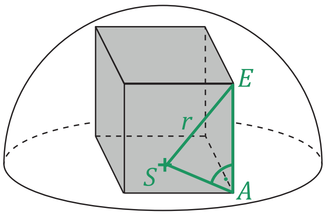
V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

---

11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle. Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku *SAE*:
$r^2 = 8^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2 \ \rightarrow\ r = \sqrt{96}\ \text{cm} = 4 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}$
Pro délku vnitřního průměru misky platí: $d = 8 \cdot \sqrt{6}$ cm.

Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

12

		A	N
12.1	$S_{koule} = S_{krychle}$	☒	☐
12.2	$3 \cdot 10^8\ \text{cm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = \dots$	☒	☐
12.3	$V = 1{,}5$ l	☐	☒

12.1 $S_{koule} = S_{krychle}$
$4\pi r^2 = 6a^2$
$r^2 = \dfrac{3a^2}{2\pi}$
$r = a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}$

$$\left.\begin{aligned} V_{koule} &= \frac{4}{3}\pi\left(a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq 1{,}38a^3 \\ V_{krychle} &= a^3 \end{aligned}\right\} V_{krychle} < V_{koule}$$

12.2 $3 \cdot 10^8\ \text{cm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = 3 \cdot 10^5\ \text{dm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 =$
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{l} = 43\,000\ \text{hl}$

12.3 $V = 1{,}5$ l
$\dfrac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\ \text{l} = 900\ \text{ml}$

12.1 V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2 Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3 Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

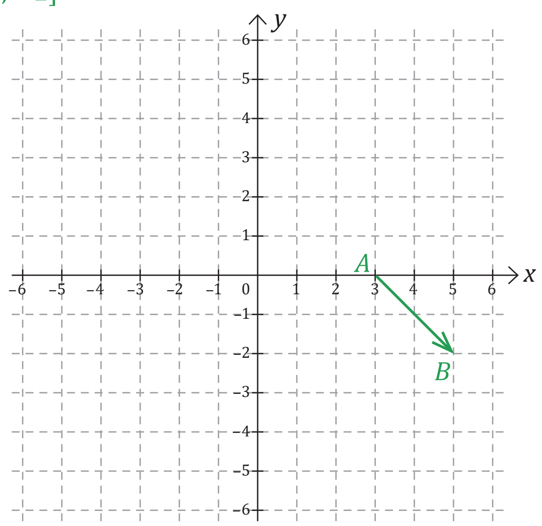
DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$A = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$	
2	$D\,[-8; 1]$	
3	$o: x + 2y - 6 = 0$	
4	$c = \pm 5\sqrt{2}$	
5	Přímky jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod.	
6	$\alpha \doteq 36°\,52'$	
7	$m: y + 3 = 0$	
8	$k = 28$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $A\,[3; 0]$, $B\,[5; -2]$



$\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky → C)

Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru (3; −4). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

2

		A	N
2.1	Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé.	☐	☒
2.2	Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k-násobkem jeden druhého.	☐	☒
2.3	Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p.	☒	☐

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \ \rightarrow \ q\colon 3x - y + c = 0$

$B \in q\colon 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \ \rightarrow \ c = -15$

$q\colon 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

---

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \ \rightarrow \ r\colon x + 3y + c = 0$

$A \in r\colon 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \ \rightarrow \ c = 11$

$r\colon x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky p zapíše normálový nebo směrový vektor přímky r a rovnici přímky r. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce p.

---

5 $\overrightarrow{n_{o_{AB}}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \ \rightarrow \ o_{AB}\colon 4x + 4y + c = 0 \quad | : 4$

$x + y + c = 0$

$S_{AB}\,[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}\colon 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + c = 0$

$3 - 2 + c = 0$

$c = -1$

$o_{AB}\colon x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu S úsečky AB napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce AB procházející bodem S.

---

6 $\overrightarrow{AC} = (1; 7) = \overrightarrow{s_{AC}}$

$\overrightarrow{n_{AC}} = (7; -1)$

$\leftrightarrow AC\colon\ 7 \cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC\colon\ 7 \cdot 1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

$7x - y - 5 = 0 \ \rightarrow$ D)

$\overrightarrow{BD} = (-7; 1) = \overrightarrow{s_{BD}}$

$\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 7)$

vyhovuje úhlopříčka AC

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku AC, nebo BD. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

7

7.1 $\vec{u_p} = (1; -1) \ \rightarrow \ \vec{n_p} = (1; 1) \ \rightarrow$ F)

7.2 $\vec{u_q} = (1; 0) \ \rightarrow \ \vec{n_q} = (0; -1)$, resp. $\vec{n_q} = (0; 1) \ \rightarrow$ B)

7.3 $\vec{u_r} = (1; 1) \ \rightarrow \ \vec{n_r} = (1; -1) \ \rightarrow$ E)

7.4 $\vec{u_s} = (0; 1) \ \rightarrow \ \vec{n_s} = (-1; 0)$, resp. $\vec{n_s} = (1; 0) \ \rightarrow$ A)

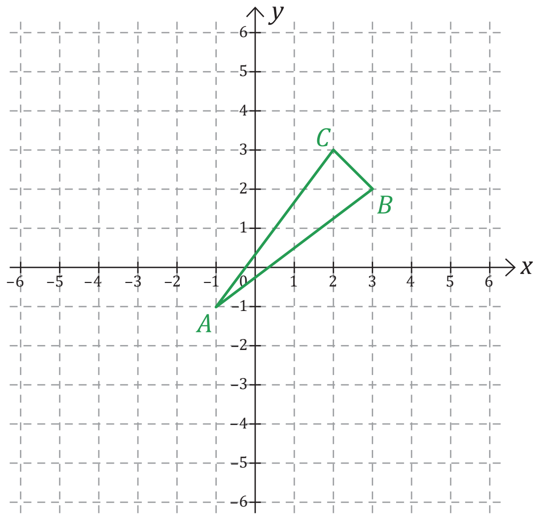
Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky q a s, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

8

		A	N
8.1	vektor $\overrightarrow{BA} = (2; 1)$	☐	☒
8.2	vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$	☐	☒
8.3	vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1) \ \rightarrow \ 3 \cdot AB = (-6; -3)$	☒	☐

Žák může chybně počítat v úloze **8.1** se souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{AB}$ a ne vektoru $\overrightarrow{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy **8.2** a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy **8.1**. V úloze **8.3** se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\overrightarrow{AB}$.

9



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

---

10 $a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

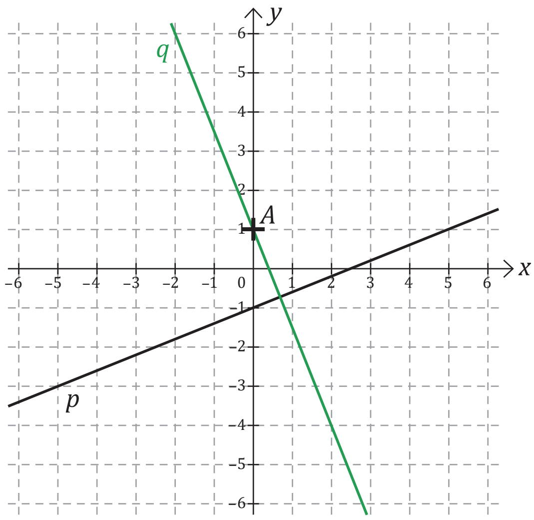
Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

---

11 $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \dfrac{24}{25} \rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

12



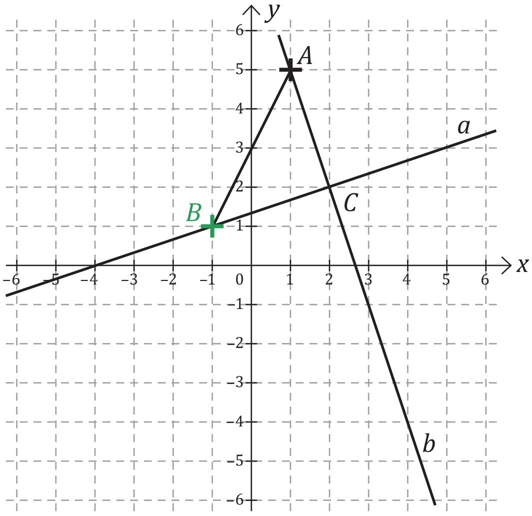
$\vec{u}_p = (5; 2) = \vec{n}_q \rightarrow q: 5x + 2y + c = 0$

$A \in q: 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + c = 0 \rightarrow c = -2$

$q: 5x + 2y - 2 = 0$

Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

13



$B = [-1; 1] \;\rightarrow\; \overrightarrow{BA} = \vec{u}_c = (2; 4)$

$\vec{n}_c = (4; -2) \;\rightarrow\; c\colon 4x - 2y + c = 0 \qquad |:2$

$A \in c\colon 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + c = 0 \;\rightarrow\; c = 3$

$c\colon 2x - y + 3 = 0$

Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu *B* lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě *C*, poloměr *CA* je přenesen na přímku *a*. Z obrázku žák určí souřadnice bodu *B*. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky *AB*.

---

14 $B\,[0; 0]$, $D\,[-3; 3] \;\rightarrow\; \overrightarrow{BD} = (-3; 3)$

$u_{BD}\colon\; x = -3t,$ resp. $x = t$

$y = 3t;\; t \in \mathbb{R}$ $\qquad y = -t;\; t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů *B* a *D*. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\overrightarrow{AC}$ a z normálového vektoru $\overrightarrow{AC}$ vypočítat směrový vektor.

---

15 $\vec{n}_o = \overrightarrow{AB} = (2; -4) \;\rightarrow\; o\colon 2x - 4y + c = 0 \qquad |:2$

$S_{AB}\,[2; 0] \in o\colon 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \;\rightarrow\; c = -2$

$o\colon x - 2y - 2 = 0$

$P_x\,[x; 0] \;\rightarrow\; P_x = S_{AB}\,[2; 0]$

$P_y\,[0; y]\colon 0 - 2y - 2 = 0 \;\rightarrow\; y = -1 \;\rightarrow\; P_y\,[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou *x* a *y* jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

---

16 $\vec{n}_p = (2; -3) \;\rightarrow\; \vec{u}_p = (3; 2)$

$\vec{u}_q = (2; -3) \;\rightarrow\; \vec{n}_q = (3; 2)$

$\vec{n}_p = \vec{u}_q = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky *p* a parametrické rovnice přímky *q* žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

---

17 **17.1** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \;\rightarrow\;$ F)

17.2 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \;\rightarrow\;$ C)

17.3 $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \;\rightarrow\;$ A)

17.4 $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \;\rightarrow\;$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$

a: $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

---

19 Body A a B jsou osově souměrné podle osy o $\rightarrow$ $B\,[4; 3]$

$\vec{u_o} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; -3)$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0$ $\rightarrow$ $c = 1$

$\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

---

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a -2.

Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A\,[3; 0]$ a koncovým bodem $B\,[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	200 čísel	
2	6 týmů	
3	$-2p^2 + 13p - 36$; podmínky: $p \in \mathbb{N}, p \geq 8$	
4	$P = \frac{1}{32}$	
5	697 680 způsobů; $P = \frac{1}{45}$	
6	16 bodů	
7	8 dětí	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1. způsob** – s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**.
Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

pro rozpis faktoriálu $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!} =$$

$$= \frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!} - \cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}} + \cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}} + \frac{8!}{5!\cdot 3!} - \cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}} + \cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1+56}{120-6} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály. Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**. Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$

$\binom{n}{0} = 1$ proto platí: $\binom{8}{0} = 1$

$$\frac{\binom{8}{0} - \cancel{\binom{8}{1}} + \cancel{\binom{8}{2}} + \binom{8}{5} - \cancel{\binom{8}{6}} + \cancel{\binom{8}{7}}}{5! - 3!} = \frac{1+56}{120-6} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

---

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)!}{(x-1)!} - 2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} =$

$= \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!} - \frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!} =$

$= (x+3)\cdot(x+2) + (x+1)\cdot x - 2x(x-1) = x^2 + 2x + 3x + 6 + x^2 + x - 2x^2 + 2x =$

$= 8x + 6 \;\rightarrow\;$ A)

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou *x*. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

---

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

	A	N
3.1	☒	☐
3.2	☒	☐
3.3	☒	☐
3.4	☐	☒

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \frac{20!}{17! \cdot (20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!}$

proto rovnost platí: $1\,140 = 1\,140$

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$

platí: $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \;\rightarrow\; 2 = 22$

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi. Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

4 Jedná se o kombinace bez opakování.

4.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$$K(3, 7) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

4.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$$K(3, 6) + K(3, 9) = \binom{6}{3} + \binom{9}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 104$$

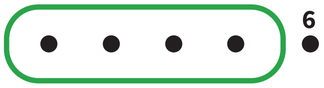
4.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$$K(3, 9) + K(3, 5) = \binom{9}{3} + \binom{5}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 94$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce. Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací muže být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích. Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

---

5 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o variace bez opakování, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:



zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

$V(4, 8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680 \rightarrow$ D)

K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici. Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

---

6 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu. Jedná se tedy o kombinace bez opakování.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2, 6) \cdot K(1, 6) = \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1} = 15 \cdot 6 = 90 \rightarrow \text{B)}$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací. Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací muže být jiný počet mužů a žen.

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

	A	N
7.1	☒	☐
7.2	☒	☐
7.3	☐	☒
7.4	☒	☐

7.1 Příznivé výsledky jsou součty: $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $4 + 1$, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Příznivé výsledky jsou součty: $1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1$, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti opačného jevu C'.

Platí $P(C) = 1 - P(C')$.

Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, proto celkový počet příznivých výsledků je m = 5.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz výše), pro součet 6 je $m = 5$ (viz výše).

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

---

8 **8.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen. To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:

$V'(6, 8) = 8^6 = 262\,144$

8.2 Máme 4 způsoby umístění slova PES. Každý z těchto způsobů má 5.4.3 = 60 možností, jak uspořádat zbytek písmen. Celkem tedy máme 4.60 = 240 možností

---

9 **9.1** Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \% \ \to \ \text{D)}$$

9.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí. Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \% \ \to \ \text{A)}$$

9.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka. Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \% \ \to \ \text{C)}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

10 **10.1** Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.

Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 =$ 0,86, proto 86 % → C)

10.2 Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.

Pravděpodobnost, že Ferrari nedokončí závod, vypočítáme jako pravděpodobnost jevu opačného:

$P(B) = 1 - 0{,}81 =$ 0,19, proto 19 % → E)

10.3 Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. → že nedokončí závod je 0,24.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. → že nedokončí závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 =$ 0,06, proto 6 % → B)

10.4 Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86 a tudíž že ho nedokončí je 0,14.

Závod dokončí Williams, ale nedokončí Force India:

P (D) = 0,86 · 0,14 = 0,12, a to je 12 % → F)

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáku pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

---

11 Víme, že průměr dosažených bodů je 78 (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.

Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.

Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmů:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{496} = 78 \quad | \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1\,092$$

$$3x = 165 \quad | : 3$$

$$x = 55$$

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

---

12 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky.

Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno.

Pro medián platí, že soubor hodnot musí být uspořádaný podle velikosti!

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$), tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\bar{x} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

WTA 2016	průměr	modus	medián
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	průměr	modus	medián
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	průměr	modus	medián
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

Proto je správná varianta D).

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu. Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti. Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu. Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

TEST 1

1 Počet závodníků, kteří plavali jenom jeden závod, je 100 % – 10 % = 90 %. V obou závodech plaval stejný počet závodníků, proto 90 % rozdělíme na dvě poloviny.
90 % : 2 = 45 %
Jenom v prvním závodě plavalo 45 % závodníků. K tomuto počtu ještě přidáme počet závodníků, kteří plavali oba závody. 45 % + 10 % = 55 %

Je nutno si uvědomit, že první závod plavaly dva druhy závodníků. Ti, kteří plavali oba závody, a ti, kteří plavali jenom první závod.

2 Nejprve upravíme vztah tak, aby byly jednočleny s neznámou m na jedné straně rovnice.
$mn + 2m = 1 + 3n^2$
Z výrazů na levé straně rovnice vytkneme neznámou m.
$m\,(n + 2) = 1 + 3n^2$
Rovnici vydělíme dvojčlenem $n + 2$.
$$m = \frac{1 + 3n^2}{2 + n}$$

Musíme si dát pozor na to, abychom neměli neznámou m na obou stranách rovnosti.

3 $$\frac{2}{3x} : \left(1 - x \cdot \frac{x^2}{x^2 - 4}\right) = \frac{2}{3x} : \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - 4}\right) = \frac{2}{3x} : \left(\frac{x^2 - 4 - x^2}{x^2 - 4}\right) =$$
$$= \frac{2}{3x} : \left(\frac{-4}{x^2 - 4}\right) = \frac{2}{3x} : \left(\frac{x^2 - 4}{-4}\right) = \frac{x^2 - 4}{-6x}$$

V lomeném výrazu můžeme krátit jenom činitele v součinu. Krácení výsledku na výraz $\frac{x - 2}{-3}$ není správným řešením.

4 Výraz $x^2 - 25$ rozložíme na součin $(x - 5) \cdot (x + 5)$. Obě strany rovnice vynásobíme výrazem $(x - 5) \cdot (x + 5)$.
$$\frac{4x}{x + 5} - \frac{x + 1}{(x - 5)\,(x + 5)} = -1 \qquad | \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)$$
$$4x \cdot (x - 5) - (x + 1) = -(x - 5) \cdot (x + 5)$$
$$4x^2 - 20x - x - 1 = -x^2 + 25$$
$$5x^2 - 21x - 26 = 0$$
$$D = 441 - 4 \cdot 5 \cdot (-26) = 961$$
$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 5} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 5{,}2$$
$K = \{-1; 5{,}2\}$

Pozor na minus před lomeným výrazem. Při násobení rovnice musíme dát dvojčlen v čitateli lomeného výrazu do závorky, protože minus před lomeným výrazem změní znaménka v celém mnohočlenu v čitateli, ne jenom prvnímu členu.

5 **5.1** $$9^{-2} \cdot 81^n = \frac{81^n}{9^2} = \frac{81^n}{81^1} = 81^{n-1}$$

5.2 Uvědomíme si, že 25 % je čtvrtina.
$$\frac{1}{4} \cdot 16^{2n} = \frac{(4^2)^{2n}}{4} = \frac{4^{4n}}{4^1} = 4^{4n-1} = 2^{8n-2}$$

Musíme si uvědomit, že $81 = 81^1$ a $4 = 4^1$.
Při úpravách používáme vztahy pro úpravu mocnin.

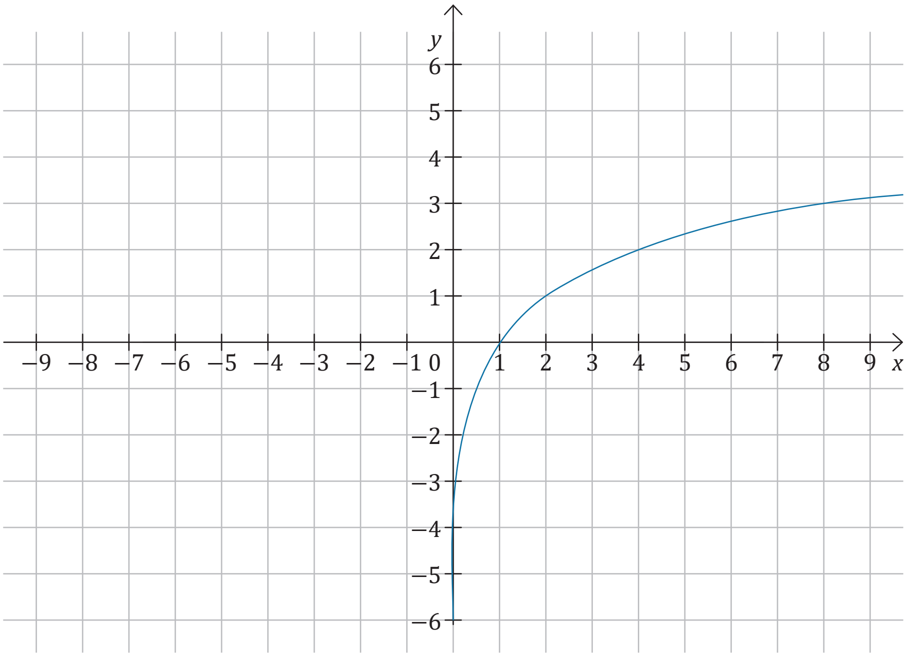
6 V předpisu funkce $y = 2^{x+4} : 2^{2x-6}$ nahradíme y hodnotou 8.
$$8 = 2^{x+4} : 2^{2x-6}$$
$$8 = 2^{x+4-(2x-6)}$$
$$2^3 = 2^{x+4-2x+6}$$
$$3 = -x + 10$$
$$x = 7$$

Uvědomíme si, že hodnota funkce je funkční hodnota, tedy y.
K úpravě použijeme vztahy pro úpravu mocnin.
Nezapomeneme na závorku v exponentu $x + 4 - (2x - 6)$, abychom odečetli celý exponent dělitele, ne jenom jeho první člen.

7 **7.1** Do předpisu dosadíme bod A a zjistíme hodnotu a.
$3 = \log_a 8 \rightarrow 8 = a^3$, tedy platí $a = 2$
Předpis funkce g je $g : y = \log_2 x$.
Do předpisu dosadíme známou souřadnici bodu B a dopočítáme jeho druhou, neznámou souřadnici.
$b_2 = \log_2 4 = 2$

7.2 Do předpisu funkce $g : y = \log_2 x$ si dosadíme pár hodnot x a dopočítáme k nim hodnoty y. Získáme tak souřadnice bodů, které leží na tomto grafu.

Pozor na záměnu souřadnic x a y. Při **7.2** volíme hodnoty x, které jsou druhou mocninou čísla 2 (např. 1, 2, 8), aby nám vyšly celočíselné hodnoty y.



8 Kvadratické mnohočleny ve tvaru $x^2 + bx + c$ můžeme zapsat jako součin dvou závorek, ze kterých každá má hodnotu nula pro jeden z kořenů kvadratického mnohočlenu. Předpis funkce tedy bude výraz s kvadratickým členem a nulovými body −4 a 5.
$y = (x - 5)\,(x + 4)$
$y = x^2 + 4x - 5x - 20$
$y = x^2 - x - 20$

Jestliže má být nulový bod číslo −4, v závorce použijeme člen s opačným znaménkem, tedy $(x + 4)$.

9 Pro geometrickou posloupnost platí vztah $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
Dosadíme členy posloupnosti do tohoto vztahu.
$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$
$320 = 5 \cdot q^3$
$64 = q^3$
$q = \sqrt[3]{64} = 4$

Využijeme vztah $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ pro součet n členů geometrické posloupnosti.

$S_4 = 5 \cdot \dfrac{4^4 - 1}{4 - 1} = 425$

10 **10.1** Za 1 minutu . . . . $\dfrac{20}{m}$

Za 1 hodinu . . . . $60 \cdot \dfrac{20}{m} = \dfrac{1\,200}{m}$

Za 8 hodin . . . . $8 \cdot \dfrac{1\,200}{m} = \dfrac{9\,600}{m}$

10.2 Musíme zjistit výkon strojů za 2 hodiny.

Stroj X . . . . $2 \cdot 60 \cdot \dfrac{20}{m} = \dfrac{2\,400}{m}$

Stroj Y . . . . $2 \cdot 60 \cdot \dfrac{20}{m+20} = \dfrac{2\,400}{m+20}$

Abychom zjistili rozdíl, musíme výrazy odečíst.

$$\frac{2\,400}{m} - \frac{2\,400}{m+20} = 2\,400 \cdot \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+20}\right) =$$
$$= 2\,400 \cdot \frac{m+20-m}{m \cdot (m+20)} = 2\,400 \cdot \frac{20}{m \cdot (m+20)} =$$
$$= \frac{48\,000}{m \cdot (m+20)}$$

Pozor na vztah mezi minutou a hodinou.

---

11 Do předpisu přímky $y = ax + b$ dosadíme nejprve souřadnice bodu B a pak souřadnice bodu C.

Bod B: $1 = 5a + b$

Bod C: $4 = 3a + b$

Dostali jsme soustavu rovnic, kterou vyřešíme. Zjistíme hodnoty a a b pro přímku p.

$$\begin{array}{rl}
1 = 5a + b & \quad | \cdot (-1) \\
4 = 3a + b & \\
\hline
-1 = -5a - b & \\
4 = 3a + b & \\
\hline
3 = -2a & \\
a = -1{,}5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1 = 5 \cdot (-1{,}5) + b \\
1 = -7{,}5 + b \\
b = 8{,}5
\end{array}$$

Rovnice přímky p je $y = -1{,}5x + 8{,}5$. Obecná rovnice přímky p je $-1{,}5x - y + 8{,}5 =$ $= 0$. Normálový vektor přímky p je směrovým vektorem přímky q.
Normálový vektor přímky p je $(-1{,}5; -1)$. Normálový vektor přímky q je tedy $(-1; 1{,}5)$.
Přímka q má obecnou rovnici $-x + 1{,}5y + c = 0$. Této rovnici musí vyhovovat i souřadnice bodu A, který na přímce q má ležet. Souřadnice bodu A do rovnice dosadíme a zjistíme hodnotu c.

Bod A: $-(-2) + 1{,}5 \cdot 5 + c = 0$
$$2 + 7{,}5 + c = 0$$
$$c = -9{,}5$$

Obecná rovnice přímky q je $-x + 1{,}5y - 9{,}5 = 0$.

Pozor na vztah mezi normálovým a směrovým vektorem kolmých přímek.
Pozor při dosazování záporné hodnoty za neznámou, před kterou je minus.

---

12 Průsečík leží jak na přímce p, tak na přímce q. Vyřešíme soustavu rovnic.

$$\begin{array}{rl}
-1{,}5x - y + 8{,}5 = 0 & \quad | \cdot 1{,}5 \\
-x + 1{,}5y - 9{,}5 = 0 & \\
\hline
-2{,}25x - 1{,}5y + 12{,}75 = 0 & \\
-x + 1{,}5y - 9{,}5 = 0 & \\
\hline
-3{,}25x + 3{,}25 = 0 & \\
x = 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-1 + 1{,}5y - 9{,}5 = 0 \\
y = 7
\end{array}$$

Průsečík přímek p a q má souřadnice $[x; y] = [1; 7]$.

13 **13.1.** Rovnici upravíme do součinového tvaru. V čitateli využijeme Vietovy vztahy a v jmenovateli můžeme vytýkat.

$$\frac{(x+5)\cdot(x-3)}{3\cdot(x-3)}=0$$

Podmínka existence lomeného výrazu je $x \neq 3$. Lomený výraz je roven nule, když se nule rovná čitatel. Čitatel má hodnotu nula pro $x = -5$ a $x = 3$. Hodnotu $x = 3$ ale vylučuje podmínka.
Rovnice má jedno řešení. → N

Výraz $x^2 + 25$ nejde rozložit na součin.

13.2. Rovnici vydělíme číslem 5 a upravíme na součin pomocí vztahu
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$.
$4x^2 + 28x + 49 = (2x + 7)^2 = (2x + 7)\cdot(2x + 7)$
Rovnice má jeden dvojnásobný kořen. → A

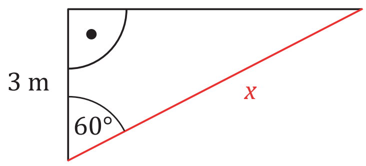
13.3 Rovnice nemá řešení, protože součet kladného a nezáporného čísla nikdy nemůže být nula.→ N

---

14 **14.1.** Kratší strana vstupu má délku čtvrtiny z 12 m, tedy 3 m. Délku delšího vstupu vypočítáme z trojúhelníku pomocí funkce kosinus.

$$\cos 60° = \frac{3}{x}$$

$$x = 6 \text{ m}$$



Délka delšího vstupu je 6 m.

Pozor na převod jednotek objemu. Je důležité si uvědomit, že brouzdaliště je hranol a můžeme na objem použít vztah $V = Sp \cdot v$.

14.2. Musíme zjistit obsah podstavy brouzdaliště. Vypočítáme obsah trojúhelníku, který tvoří vstup, a odečteme ho od obdélníku, kterým je brouzdaliště bez vstupů.
Pythagorovou větou dopočítáme druhou odvěsnu trojúhelníku, který tvoří vstupy.
$6^2 = 3^2 + y^2$
$y = \sqrt{27}$
S (obdélníku) – S (trojúhelníku) $= 12 \cdot 20 - 1{,}5\sqrt{27} \doteq 232{,}205\ \text{m}^3$
Objem brouzdaliště v m^3: $232{,}205 \cdot 0{,}15 \doteq 34{,}830\,86$.

$34{,}830\,86\ \text{m}^3 \doteq$ 350 hl

---

15 Vyjádříme si objemy obou válců.

Modrý válec: poloměr $= r$ výška $= v$
Červený válec: poloměr $= 0{,}8r$ výška $= v + 11{,}25$
$V_m = \pi r^2 v$ $V_č = \pi(0{,}8r)^2 \cdot (v + 11{,}25)$
$V_m = V_č$
$\pi r^2 v = \pi(0{,}8r)^2\,(v + 11{,}25)$
$\pi r^2 v = \pi \cdot 0{,}64\, r^2\,(v + 11{,}25) \quad |:(\pi r^2)$
$v = 0{,}64\,(v + 11{,}25)$
$v = 0{,}64v + 7{,}2$
$v = 20\ \text{cm}$
Výška červeného válce je 31,25 cm.

I když nemůžeme vypočítat konkrétní hodnotu objemu, můžeme objemy vyjádřit a dát je do rovnosti. Po úpravách rovnice dostaneme lineární rovnici s neznámou v.

16 Platí $2 \cdot (-3) + (-1) \cdot y = 3$, tedy $y = -9$.

Vektor $\vec{u}$ má velikost $\sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \rightarrow$ D)

---

17 Použijeme sinovou větu.

Využijeme znalosti, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° a vedlejší úhly mají v součtu velikostí také 180°.

$$\frac{|BD|}{\sin 30°} = \frac{7}{\sin 130°}$$

$|BD| \doteq 4{,}569$

Délku *AD* dopočítáme pomocí sinu úhlu *ABD*.

$$\sin 50° = \frac{|AB|}{|BD|}$$

$|AD| \doteq 3{,}5$ cm

Délku *AB* dopočítáme pomocí kosinu úhlu *ABD*.

$$\cos 50° = \frac{|AB|}{|BD|}$$

$|AB| \doteq 2{,}94$ cm

Obsah trojúhelníku *ABD* je polovinou součinu délek jeho odvěsen.
$S = (3{,}5 \cdot 2{,}94) : 2 \doteq 5\ \text{cm}^2 \rightarrow$ A

---

18 Dopočítáme souřadnice bodu *A*.

Pozor na pořadí souřadnic při počítání s vektorem $\overrightarrow{CA}$. Obsah trojúhelníku je polovina součinu strany a k ní odpovídající výšce.

$\overrightarrow{CA} = [-5; -4] = A - C = [x - 6; y - 4]$
$x = 1 \qquad y = 0$
Bod *A* má souřadnice [1; 0]. Bod *B* má souřadnice [11; 0], protože jde o rovnoramenný trojúhelník se základnou na ose *x*.

Obsah trojúhelníku je $S = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20\ \text{cm}^2$. → B

---

19 Musíme sečíst obsah mezikruží a obsah pláště kužele.

K výpočtu potřebujeme jenom plášť kužele, ne celý kužel.

Obsah pláště kužele:
Na výpočet potřebujeme zjistit délku strany kužele pomocí Pythagorovy věty.
$S = \sqrt{256 + 36}$
$S \doteq 17{,}1$ cm

$S_{pl} \doteq \pi \cdot 6\ \text{cm} \cdot 17{,}1\ \text{cm} \doteq 322\ \text{cm}^2$

Obsah mezikruží:
$144\pi \cdot 36\pi \doteq 339\ \text{cm}^2$
$322\ \text{cm}^2 + 339\ \text{cm}^2 = 661\ \text{cm}^2 \rightarrow$ F

---

20 Funkce *f* má jenom kladné hodnoty *y*, tedy vyhovuje graf B), D), a E).
Funkce *g* je rostoucí, tedy z grafů B), D), a E) vyhovuje jenom graf E).
Graf E.

---

21 Jde o aritmetickou posloupnost s prvním členem 2 a s diferencí 3. Dnes ulovila $22 \cdot 2 = 44$ myší, platí tedy:

Pozor na záměnu $(n - 1)$ a n.

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 44 \qquad n = 15$
Chceme zjistit prvních 15 členů posloupnosti.
$S_{15} = (2 + 44) \cdot 7{,}5 = 345 \rightarrow$ E

22 Vypíšeme pár prvních členů obou posloupností. Na základě informací ze zadání zjistíme, že diference u aritmetické posloupnosti je 2 a kvocient u geometrické posloupnosti je také 2.
Aritmetická posloupnost: 20; 18; 16; 14; ...
Geometrická posloupnost: 2; 4; 8; 16; ...
Součet prvních členů je $2 + 20 = 22$. → D

---

23 původní zisk x
nový zisk .... $1{,}5x$ (za 10 měsíců)
Využijeme vztah pro pravidelný růst veličiny o pevný počet procent (geometrickou posloupnost).

$$x \cdot q^{10} = 1{,}5x$$

$$x \cdot \left(1 + \frac{100}{p}\right)^{10} \doteq 1{,}5x$$

$$p = 4{,}1$$

Základ vzrostl o 4,1 %. → B

---

24 Neznámou cenu vstupenek označíme x. Modus ceny vstupenek je 500.

$$\frac{300 \cdot 10 + 500 \cdot 12 + 10x + 1\,000 \cdot 8}{10 + 12 + 10 + 8} = 1{,}15 \cdot 500$$

$x = 600$ → B

---

25 Nejprve zjistíme počet růží.
Červené růže 7 ks.
Růžové růže 4 ks.
Bílé růže 10 ks.

25.1 Všech příznivých možností je $7 \cdot 4 \cdot 10$.
Všech možností je celkem $\binom{21}{3}$.

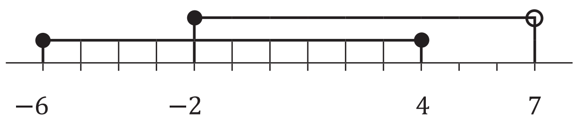
$$\frac{7 \cdot 4 \cdot 10}{\binom{21}{3}} = \frac{280}{\frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{6}} \doteq 21{,}1\ \% \rightarrow \text{D}$$

25.2 Zjistíme nejprve počet příznivých možností. Dáváme pozor, že po prvním tahání červené růže máme těchto růží už jenom 6. Celkový počet možností se v každém z dalších tahů sníží o 1, už vytaženou růži.

$$\frac{10 \cdot 7 \cdot 6}{21 \cdot 20 \cdot 19} \doteq 5{,}3\ \% \rightarrow \text{B}$$

TEST 2

1 Sjednocení jsou všechny prvky, které patří do intervalu A nebo B.



$A \cup B = \langle -6; 7)$

Číslo 7 už nepatří do intervalu A, tedy nepatří ani do sjednocení intervalů A a B.

2 $3 : \dfrac{(3^2)^{4n}}{3^{n-1}} = 3 \cdot \dfrac{3^{n-1}}{3^{8n}} = 3 \cdot 3^{n-1-8n} = 3^1 \cdot 3^{-1-7n} = 3^{-7n}$

Číslo 3 je rovno 3^1.

3 Na střední školu se hlásily $\frac{3}{4}$ žáků. Z těchto žáků se dostalo 80 %, tedy $\frac{4}{5}$.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} = 60\ \%$$

4 Z pravoúhlého trojúhelníku vypočteme polovinu délky strany čtverce.

$$x^2 + x^2 = 2^2$$
$$2x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{2}$$

Strana čtverce má délku $2\sqrt{2}$ cm. Obvod čtverce je tedy $4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm.

Obvod čtverce je $8\sqrt{2}$ cm.

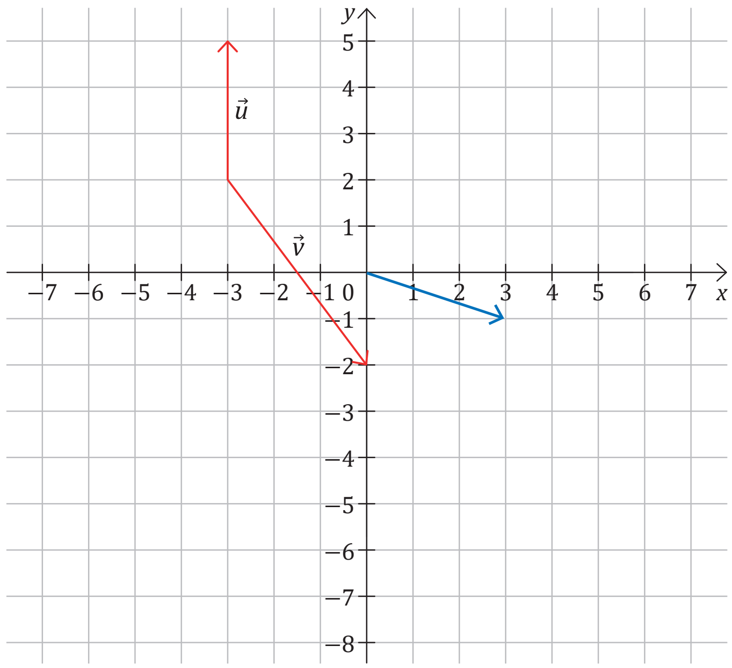
Délku strany můžeme vypočítat například i přes obsah, který vypočítáme z délky úhlopříček.

5 **5.1** $(-3 - (-3); 5 - 2) = (0; 3)$

5.2 Zjistíme souřadnice vektoru $\vec{v}$.

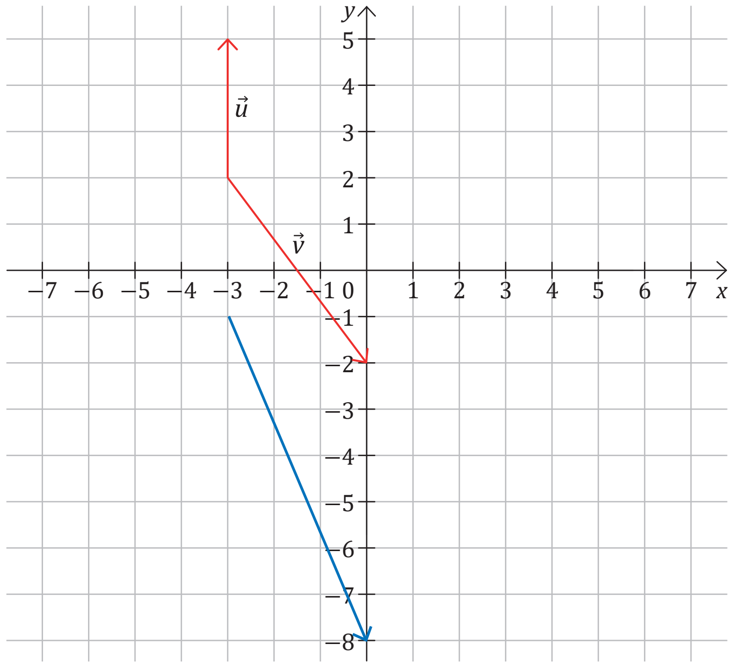
$(0 - (-3); -2 - 2) = (3; -4)$

Součet vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $(0 + 3; 3 + (-4)) = (3; -1)$



Když posouváme vektor, děláme rovnoběžku požadovaným počátečním bodem vektoru.

5.3 Rozdíl vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$: (3 − 0; −4 −3) = (3; −7)
Tento vektor posuneme tak, aby jeho začátek byl v bodě B [−3; −1].



---

6 $\dfrac{3}{(x-3)^3} : \dfrac{3 \cdot (x+3) - 9}{x^2 - 9} = \dfrac{3}{(x-3)} \cdot \dfrac{x+3}{3x} = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x}$

---

7 Podmínky existence: $x \neq \pm 5$.

$$\frac{x^2}{(x-5)(x+5)} + \frac{x}{x-5} = \frac{8-x}{(x-5)(x+5)} \qquad |\cdot (x-5)(x+5)$$

$$x^2 + x(x+5) = 8 - x$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x+4)(x-1) = 0$$

$x_1 = 1$ a $x_2 = -4$
K = {−4; 1}

Rozložíme jmenovatele na součin. Kvadratickou rovnici můžeme řešit pomocí Vietových vztahů.

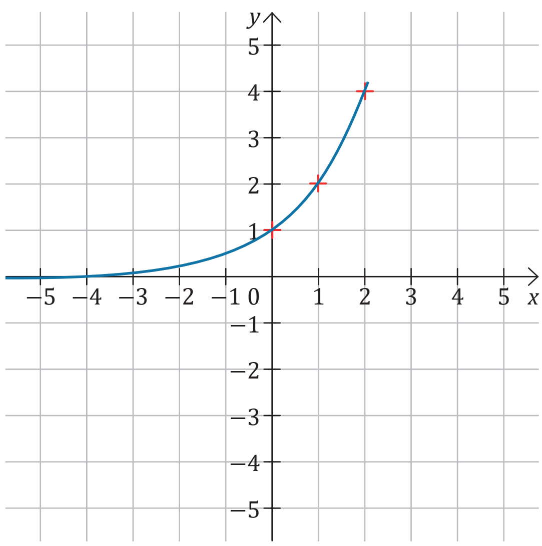
---

8 **8.1** $0{,}5 = 2^x$

$\dfrac{1}{2} = 2^x$

$2^{-1} = 2^x$

8.2



9 **9.1.** Zvolíme si jeden z bodů, který leží na grafu funkce, např. [6; −1]. Souřadnice dosadíme do předpisu funkce a dopočítáme hodnotu k.

$$6 = \frac{k}{-1}$$

$k = -6$

9.2. Oborem hodnot jsou dle grafu všechna reálná čísla kromě 0, tedy $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

---

10 $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$
Průsečíky s osou x mají hodnoty y rovnu 0.
$0 = (x - 5) \cdot (x + 4)$
$x_1 = 5 \qquad x_2 = 4$
Vzdálenost průsečíků je $5 + 4 = 9$.

K rozkladu na součin můžeme využít Vietovy vztahy.

---

11 **11.1** První místo můžeme obsadit 3 způsoby.
Druhé místo můžeme obsadit 2 způsoby.
Poslední místo 1 způsobem.
Na obsazení 3. a 4. místa zbyla ještě 2 písmena a 4 čísla. Dle zadání má kód dvě různá písmena, takže jedno z míst musí být ještě obsazeno písmenem a druhé číslem.

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 48 \quad \text{nebo} \quad 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

Celkem je možností $48 \cdot 2 = 96$.

Nesmíme zapomenout na podmínku, že kód obsahuje dvě písmena a 3 číslice.

11.2 První místo můžeme obsadit 3 způsoby.
Třetí místo můžeme obsadit 2 způsoby.
Předposlední místo 3 způsoby.
Poslední místo 2 způsoby.
Druhé místo můžeme obsadit už jenom číslicí, tedy máme 4 způsoby.

$$3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 144$$

Celkem je možností 144.

---

12 **12.1** $(76 - 64) : 2 = 6$
Diference je 6.

12.2 $\alpha_1 = 64 - 14 \cdot 6 = -20$
Posloupnost má členy:
$-20; -14; -8; -2; 4; 10; 16; 22; 28; 34; \ldots$
Musíme sečíst 8 členů.

---

13 Poměr zůstává konstantní, platí:
$a : b = b : c = c : d = \ldots$
Víme, že součet $a + b = 5$ a $c = 4{,}5$. Vyjádříme hodnotu a pomocí b a dosadíme do poměru.

$$a = 5 - b$$
$$a : b = b : c$$
$$(5 - b) : b = b : 4{,}5$$
$$\frac{5 - b}{b} = \frac{b}{4{,}5}$$
$$4{,}5 \cdot (5 - b) = b^2$$
$$2b^2 + 9b - 45 = 0$$

$b_1 = 3 \qquad b_2 = -7{,}5$
$a = 5 - b$
$a = 5 - 3$
$a = 2$

Trasa a má 2 jednotky.

S poměrem můžeme pracovat jako se zlomkem. Hodnota b nemůže být záporná, jde o délku.

14 Počet motocyklů označíme y a počet automobilů x.

$$\begin{aligned} x + y &= 34 \\ 4x + 2y &= 120 \\ \hline 4x + 2(34 - x) &= 120 \\ x &= 26 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

$8 : 26 = 4 : 23$

Pozor na pořadí členů v poměru, nemůžeme je zaměnit.

---

15 **15.1** $\frac{n^2}{\sqrt{n}} : n^3 = \frac{n^2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \rightarrow$ A

15.2 $\left(n^2 : \frac{1}{n^2}\right)^2 = (n^2 \cdot n^2)^2 = n^8 \rightarrow$ N

15.3 $n^2 : \frac{1}{n^2} = n^2 \cdot n^2 = n^4 \rightarrow$ A

Když dělíme lomeným výrazem, musíme násobit lomeným výrazem k němu obráceným.

---

16 $10 : 7 : 9 = 30 : 21 : 27$

$\frac{36{,}2 \cdot 30 + 42{,}8 \cdot 21 + 39{,}5 \cdot 27}{75} \doteq 39{,}1 \rightarrow$ A

Trojpoměr rozšíříme tak, aby součet členů byl 78.

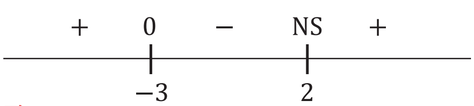
17

$$\frac{3x + 4}{x - 2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{3x + 4 - x + 2}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{2x + 6}{x - 2} \leq 0$$

Nulový bod $x = -3$. Podmínka: $x \neq 2$.



E)

Nerovnici upravíme na podílový tvar. Číselnou osu rozdělíme na 3 intervaly nulovým bodem a podmínkou. Zkoumáme, zda je na daném intervalu podíl kladný, nebo záporný.

---

18 Pythagorovou větou zjistíme délku strany AC.

$|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ cm

Pythagorovou větou dopočítáme i délku strany AB.

$|AB| = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 12^2} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$ cm $\rightarrow$ A

Hodnoty odmocnin nemusíme zaokrouhlovat, můžeme pracovat s odmocninou, nebo ji částečně odmocnit.

---

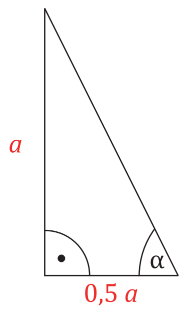
19 Odchylku vypočítáme z trojúhelníku, který je tvořen výškou boční stěny jehlanu, výškou jehlanu a polovinou délky hrany krychle.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha}{0{,}5\ \alpha}$

$\operatorname{tg} \alpha = 2$

$\alpha \doteq 63{,}43°$

$\alpha \doteq 63°\ 26' \rightarrow$ C



Nezapomeňte na převod velikosti úhlu ze stupňů na stupně a minuty.

20 Povrch krychle: $S_k = 6a^2$.

Povrch jehlanu: $S_j = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a \cdot v_a}{2} = a^2 + 2\,a \cdot v_a$.

Vyjádříme v_a pomocí a z Pythagorovy věty.

$$v_a = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vyjádření dosadíme do povrchu jehlanu.

$$Sj = a^2 + 2a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = a^2 + a^2\sqrt{5} = a^2\,(1 + \sqrt{5})$$

Oba povrchy jsou vyjádřeny pomocí násobku a^2.

Stačí porovnat jenom dané násobky.

S_k 6

S_j ....$1 + \sqrt{5} \doteq 3{,}236$

Vidíme, že povrch krychle je téměř dvojnásobkem povrchu jehlanu. → E

Jde o obecný vztah, nemusíme znát konkrétní hodnotu délky hrany krychle.
Délku hrany krychle si můžeme vymyslet a počítat s konkrétním číslem (např. $a = 10$ cm).
Na konci úlohy můžeme vypočítat přesný počet procent, ale už na základě odhadu dokážeme vybrat správnou odpověď.

---

21 Platí vztah $v = 2r$.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r 2r$

$S = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$

$S = 6\,\pi r^2$

Dosadíme hodnoty povrchu a dopočítáme r.

$18\pi = 6\pi r^2$

$3 = r^2$

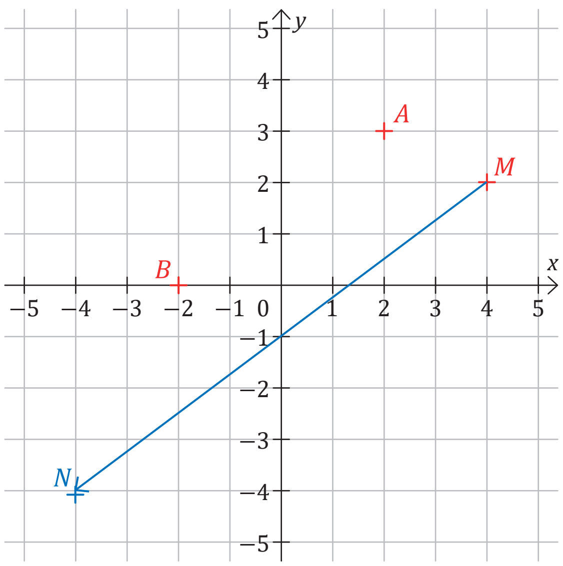
$r = \sqrt{3}$

$v = 2\sqrt{3}$ → C

Pozor na vztah z poměru, pořadí musíme zachovat.

---

22 Souřadnice bodu N jsou [4; 4]. → B



Úlohu můžeme řešit početně, nebo pomocí zakreslení vektoru do soustavy souřadnic.

---

23 Počet mužů je 126, počet žen je 84.

Vybíráme 3 z 126 a 3 z 84, celkem vybíráme 6 z 210.

$$\frac{\binom{126}{3}\binom{84}{3}}{\binom{210}{6}} \doteq 0{,}28 = 28\ \% \rightarrow \text{B}$$

24 Diference je 5. Vypíšeme si několik členů posloupnosti.
$a_3 = 10$
$a_4 = 5$
$a_5 = 0$
$a_6 = -5$
$a_7 = -10$
Součet 6. a 7. členu: $-5 + (-10) = -15$. → C

Pozor na součet dvou záporných čísel.

---

25 **25.1** $\log_3(x \cdot x) = \log_3 1$
$x^2 = 1$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
Hodnota -1 ale nevyhovuje definičnímu oboru logaritmu. → C

25.2 $\log_4 \dfrac{x}{x+8} = \log_4 16$
$x = 16x + 128$
$-15x = 128$
$x = \dfrac{-128}{15}$

Rovnice nemá řešení, protože definičním oborem logaritmu jsou jenom kladná čísla. → B

25.3 $5^{-1-2x} = 5^{\frac{1}{3}}$
$-1 - 2x = \dfrac{1}{3}$
$x = \dfrac{-2}{3}$
→ E

25.4 $2^{10+7x} = 2^0$
$7x = -10$
$x = \dfrac{-10}{7}$
→ D

TEST 3

1 $-8; -7; -6$

Číslo -6 nenáleží průniku, protože není v intervalu B. Číslo 4 nepatří ani do intervalu A, ani do intervalu B.

2 $x-1 > 0$ a zároveň $6 - 3x > 0$

$x > 1$ $\quad$ $x < 2$

Průnikem těchto dvou intervalů je $x \in (1; 2)$.

Výraz pod odmocninou nemůže být roven nule, protože je ve jmenovateli lomeného výrazu.

3 Z grafu vyčteme nejnižší a nejvyšší hodnotu na ose y.
Oborem hodnot je interval $\langle -5; 4 \rangle$

4 Podmínky existence: $x \neq 3$ a $x \neq -3$.

$$\frac{4}{x-3} - \frac{x^2+12}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{2(x+3)} \qquad |\cdot 2\,(x-3)\,(x+3)$$

$$8 \cdot (x+3) - 2 \cdot (x^2+12) = x(x-3)$$

$$8x + 24 - 2x^2 - 24 = x^2 - 3x$$

$$-3x^2 + 11x = 0$$

$$x(11 - 3x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{11}{3}$$

$$K = \left\{0; \frac{11}{3}\right\}$$

Jmenovatele rozložíme co nejvíc na součin. Pozor na minus před lomeným výrazem, ovlivní celého čitatele, ne jenom první člen v čitateli.

5 $$x \cdot \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} - \frac{x^2-1}{x} = \frac{x(x+4)}{x} - \frac{x^2-1}{x} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x - x^2 + 1}{x} = \frac{4x+1}{x}$$

Pozor na minus před lomeným výrazem. Minus ovlivní celého čitatele, ne jenom první člen. Je zbytečné rozkládat čitatele $x^2 - 1$ na součin, tento výraz nelze zkrátit.

6 **6.1** Do předpisu funkce dosadíme souřadnice bodu A.

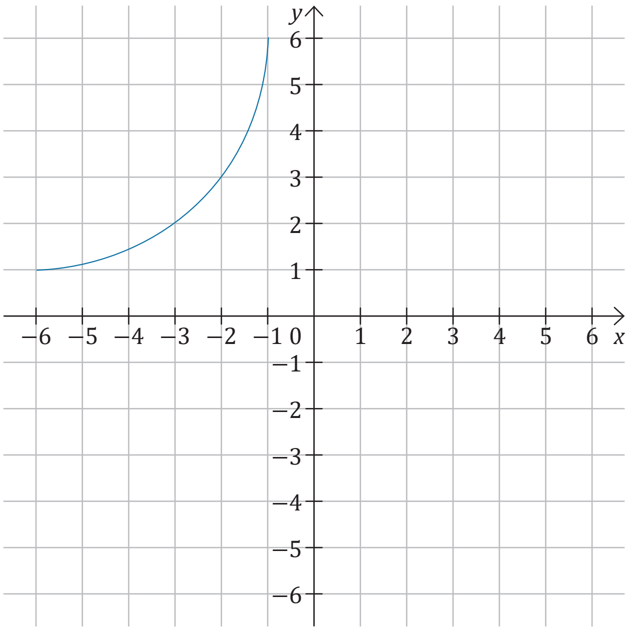
$$y = \frac{k}{x}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{k}{-4}$$

$$k = -6$$

Dáváme pozor na definiční obor funkce, který je tvořen množinou záporných čísel.

6.2



7

$$\frac{2x-1}{5-x} > 2$$

$$\frac{2x-1}{5-x} - 2 > 0$$

$$\frac{2x-1-10+2x}{5-x} > 0$$

$$\frac{4x-11}{5-x} > 0$$

Nulový bod $x = \frac{11}{4}$. Podmínka existence: $x \neq 5$.

$K = \left(\frac{11}{4}; 5\right)$

Hodnoty 5 ani $\frac{11}{4}$ nepatří do množiny kořenů, protože pro ně nemá výraz hodnotu větší než 2.

8 $a_1 = -10$

$a_2 + a_5 = 10$

Ze vztahu $a_1 + d + a_1 + 4d = 10$ zjistíme, že diference $d = 6$

$a_3 = 2$

Kvadratická rovnice tedy má tvar $(x-2)^2 = 0$, tedy $x^2 - 4x + 4 = 0$.

$b = -4, c = 4$

Při určování rovnice, která má daný dvojnásobný člen, využijeme poznatky o mocnině dvojčlenu.

9 $5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 = 58$

Vybíráme dvojice z 5 chlapců a 8 dívek, tedy $5 \cdot 8$ a 6 dívek a 3 chlapců, tedy $6 \cdot 3$

10 **10.1.** $x \in (0; \infty)$

10.2 Funkce prochází bodem [2; 1]. Tento bod dosadíme do předpisu funkce.

$y = log_a x$

$1 = log_a 2$

$a = 2$

10.3. *h(x)* je souřadnice *y*.

$\frac{1}{2} = log_2 x$

$x = 2^{\frac{1}{2}}$

$x = \sqrt{2}$

Pozor na dosazování souřadnic bodu do předpisu funkce. První souřadnice je *x*, druhá souřadnice je *y*, tedy *h(x)*.

11
$$\frac{60\,000}{x} = \frac{60\,000}{x+10} + 1\,000 \qquad | \cdot x \cdot (x+10)$$

$$60\,000x + 600\,000 = 60\,000x + 1\,000x^2 + 10\,000x$$

$$0 = x^2 + 10x - 600$$

$$0 = (x-20)(x+30)$$

$x_1 = 20 \qquad x_2 = -30$

Vyhovuje jenom kořen $x = 20$.

$60\,000 : 20 = 3\,000$

Každý účastník zaplatí 3 000 Kč.

Musíme vyloučit zápornou hodnotu kořene kvadratické rovnice.

---

12 $\text{tg } 70° = \frac{8}{x}$

$x = \frac{8}{\text{tg } 70°}$

$x \doteq 2{,}9$ m

Bydlí v 1. patře.

Nezapomeneme odečíst z výšky 3 m hodnotu 1,5.

---

13 $\text{tg } 70° = \frac{8}{y}$

$y = \frac{8}{\text{tg } 25°}$

$y \doteq 17$ m

17 m nad zemí je left $(17 - 1{,}5) : 3 \doteq 5{,}17$, tedy Mařenka bydlí v 6. patře.

Mezi byty je 2.; 3.; 4. a 5. patro.

Mezi byty jsou 4 patra.

Pod bytem Mařenky je 5 pater, tedy Mařenka bydlí v 6. patře. Nemůžeme pořadí pater od sebe odečíst, $6 - 1 = 5$, protože v tomto případě bychom počítali ještě s patrem, kde Mařenka bydlí. My chceme jenom patra mezi 6. a 1. patrem, tedy patra 4.

---

14 Vyjádříme obsahy obou útvarů a odečteme je od sebe.

Obsah velkého lichoběžníku: $S_v = \frac{(2a + 3a) \cdot a}{2} = \frac{5a^2}{2}$.

Obsah malého lichoběžníku: $S_m = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{\frac{3a^2}{8}}{2}$.

$$S_v - S_m = S$$

$$\frac{5a^2}{2} - \frac{\frac{3a^2}{8}}{2} = \frac{37a^2}{16}$$

$S = \frac{37a^2}{16}$ cm^2.

15 **15.1** Vektor $\vec{u}$ je kolmý na osu x, má směr úhlopříčky daného čtverce. → A

Pozor na vztah mezi směrovým a normálovým vektorem.

15.2 Délka úhlopříčky čtverce má 4 jednotky. Obsah čtverce je polovinou druhé mocniny úhlopříčky, tedy 42 : 2 = 8. → A

15.1 Normálový vektor úsečky AB je (1, 1).
Rovnice osy, která je kolmá na AB bude mít tvar $1x + 1y + c = 0$.
Hodnotu C dostaneme dosazením souřadnic bodu
S [5; 4], který je středem úsečky AB.

$$5 + 4 + c = 0$$
$$c = -9$$

Obecná rovnice osy úsečky je $x + y - 9 = 0$. → N

---

16 Podmínka existence: $x + 1 > 0$, tedy $x > -1$.

Pozor na kořeny, které vylučuje podmínka existence.

$$\log_2 (x^2 + x) = \log_2 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$x_1 = -2$ $\quad$ $x_2 = 1$
Hodnota -2 není kořenem, vylučuje ji podmínka.
Rovnice má 1 řešení.

$$5^{x^2} = (5^2)^2$$
$$x^2 = 4$$

$x_1 = 2$ $\quad$ $x_2 = -2$
Rovnice má 2 řešení.

$x + 1 = 4$ nebo $x + 1 = -4$
$x = 3$ $\quad$ $x = -5$
Rovnice má 2 řešení.

Právě dvě řešení mají dvě rovnice, II. a III. → E

---

17 Jde o úhel 300 °, ten má hodnotu tangens $-\sqrt{3}$. → D

K určování hodnot a úhlů můžeme využít kalkulačku nebo matematické tabulky.

---

18 Zjistíme souřadnice bodu B [1; 20].
Vektor BC má mít souřadnice (5; −2) a dostaneme ho jako $C-B$, tedy $(x - 1; y - 20)$.
Bod C má souřadnice [6; 18]. → C

Body A a B jsou středově souměrné dle bodu S.

---

19 $$\frac{a + 2b}{b^2} - \frac{1}{3} = 2a$$

$$3a + 6b - b^2 = 6ab^2$$
$$a(3 - 6b^2) = b^2 - 6b$$
$$a = \frac{b^2 - 6b}{3 - 6b^2}$$ → E

Jednočleny s proměnnou a musíme mít na jedné straně rovnice a následně z těchto výrazů proměnnou a vytýkáme.

20 Pro členy platí:

$a_3 = a_2 \cdot q$ a zároveň $a_3 = a_2 + 6$

$a_3 = 2a_2$

Z těchto vztahů zjistíme, že $a_3 = 12$.
Vypíšeme několik prvních členů posloupnosti: 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192; …
Nejmenším trojciferným členem je 7. člen. → D

---

21 Výšku kužele vypočítáme Pythagorovou větou.

$v = \sqrt{13^2 - 6^2}$

$v = \sqrt{133}$

Objem otvoru: $V_o = \dfrac{4\pi \cdot 4^3}{6}$.

Objem kužele: $V_k = \dfrac{36\pi \cdot \sqrt{133}}{3}$.

Vypočítáme objem kužele s otvorem.

$V = \dfrac{36\pi \cdot \sqrt{133}}{3} - \dfrac{4\pi \cdot 4^3}{6}$

$V = 12\pi\sqrt{133} - \dfrac{128\pi}{3}\ \text{cm}^3$

$V \doteq 300{,}726\ 08\ \text{cm}^3$

Přičteme 2 % na nožičku.
$1{,}02 \cdot 300{,}726\ 08 = 307$ → C

Odmocninu nemusíme vyčíslit. Objemy musíme od sebe odečíst. Nezapomeneme přičíst dvě procenta na nožičku.

---

22 Možnosti A) a C) nemohou být správně, protože hráči nemohli získat 5 ani 8 bodů. Aritmetický průměr Milošových bodů není 5,8 ze stejného důvodu.

Medián Otových bodů je 1,5. → D

Pozor na záměnu hodnoty znaku a jeho počtu výskytu.

---

23 Příznivých hodů na první kostce je 3 a na druhé 2. Celkem je možností 36.

$\dfrac{3 \cdot 2}{36} = \dfrac{1}{6}$ → B

---

24 Vyjádříme si obsahy a dáme je do poměru.

$\dfrac{a^2}{4}\pi = a^2 \quad | \cdot 4$

$a^2\pi = 4a^2$

$\pi : 4$ → B

Poloměr modrého kruhu je $\dfrac{a}{2}$.

---

25 **25.1** A)

25.2 D)

25.3 F)

25.4 C)

Na vyjádření předpisu v 25.2 použijeme například bod [2; 5], který leží na grafu funkce. Na vyjádření předpisu v 25.4 použijeme například bod [−1; 1], který leží na grafu funkce.

TEST 4

1 Anglicky i německy mluví 13 účastníků $\rightarrow$ jen jedním z těchto jazyků mluví $24 - 13 = 11$ účastníků.

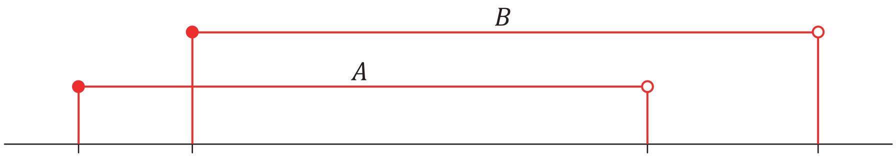
jen anglicky mluví .... x účastníků
anglicky mluví............ $x + 13$ účastníků
jen německy mluví........ $11 - x$ účastníků

$$x + 13 = 7 \cdot (11 - x)$$
$$x + 13 = 77 - 7x$$
$$8x = 64$$
$$x = 8$$

Jen anglicky mluví 8 účastníků konference.

Jako neznámou x můžeme označit také počet německy mluvících účastníků. Lidí, kteří mluví jen anglicky, je $11 - x$ a lidí, kteří mluví anglicky, je $11 - x + 13$. Pak můžeme sestavit rovnici: $11 - x - 13 = 7x$.

2



$\frac{p}{2}$ $\quad$ $p = 15 - 11$ $\quad$ $3p$ $\quad$ $p + 11$

$p = 4$ $\quad$ $3 \cdot 4 = 12$ $\quad$ $4 + 11 = 15$

$\frac{p}{2} = 2$

$$15 = p + 11$$

$$p = 4 \rightarrow \frac{p}{2} = 2;\ 3p = 12$$

2.1 $A \cap B = \langle 4; 12)$

2.2 $A \cup B = \langle 2; 15)$

Symbol $\cap$ je průnik množin (tedy prvky, které náleží oběma množinám). Symbol $\cup$ je sjednocení všech prvků množin. Lomená závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu patří. Kulatá závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu nepatří.

---

3 Levnější .... l kusů..................... c Kč/ks

Dražší .... $l + \frac{1}{4}l = \frac{5}{4}l$ kusů .... $2{,}5c$ Kč/ks

Celkem .... x Kč

$$lc + \frac{5}{4}l \cdot 2{,}5c = x$$
$$lc + \frac{25}{8}lc = x$$
$$8lc + 25lc = 8x$$
$$33lc = 8x$$
$$l = \frac{8x}{33c}$$

Sestavíme rovnici, která popisuje danou situaci. Pomocí ekvivalentních úprav rovnice z ní vyjádříme neznámou l.

4

$$\frac{1 - \frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x+1} : \frac{1}{x}} + 2 : x^2 = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x}{1}} + \frac{2}{x^2} = \frac{\frac{-1}{x^2-1}}{\frac{x^2}{x+1}} + \frac{2}{x^2} = \frac{-1}{x^2-1} : \frac{x^2}{x+1} + \frac{2}{x^2} =$$

$$= \frac{-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x-1)} + \frac{2}{x^2} = \frac{-1 + 2(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{-1 + 2x - 2}{x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{2x-3}{x^2(x-1)}$$

Mnohočlen $x^2 - 1$ rozložíme podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$. Pozor na pořadí operací – součet provádíme až jako poslední.

5 $\dfrac{2}{x-5} - \dfrac{2}{x(x-5)} = \dfrac{3x+1}{x^2-25} \qquad | \cdot x(x-5)(x+5)$

$$2x(x+5) - 2(x+5) = x(3x+1)$$
$$2x^2 + 10x - 2x - 10 = 3x^2 + x$$
$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$

$x_1 = 2; x_2 = 5$

Podmínky: $x \neq 5; x \neq -5; x \neq 0.$ → $x = 2$

Jmenovatel výrazu na pravé straně rovnice rozložíme pomocí vytýkání a vzorce pro rozdíl druhých mocnin:
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.
Kvadratickou rovnici $x^2 - 7x + 10 = 0$ řešíme buď využitím Vietových vzorců nebo přes diskriminant.
Musíme ověřit, jestli řešení rovnice splňuje podmínky, pro které mají lomené výrazy v zadání smysl.

---

6 $\dfrac{2}{3x-5} > 2$

$$\frac{2}{3x-5} - 2 > 0$$
$$\frac{2 - 2(3x-5)}{3x-5} > 0$$
$$\frac{2 - 6x + 10}{3x-5} > 0$$
$$\frac{-6x+12}{3x-5} > 0$$

	$\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}; 2\right)$	$(2; \infty)$
$-6x + 12$	+	+	−
$3x - 5$	−	+	+
výsledné znaménko	−	+	−

Nulové body: $x_1 = 2; x_2 = \frac{5}{3}$. Daný výraz je větší než 2 pro x (patří) $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$

Nerovnici upravíme do podílového tvaru, aby na jedné její straně byl lomený výraz a na druhé nula. Následně nerovnici řešíme přes nulové body nebo soustavou nerovnic.
$-6x + 12 > 0 \ \wedge \ 3x - 5 < 0 \quad \vee$
$-6x + 12 < 0 \ \wedge \ 3x - 5 < 0$

---

7 Sada talířů.......... 6 po x Kč.............. 7 po $(x - 100)$ Kč
Sada hrnků.......... 5 po y Kč.............. 8 po $0{,}8y$ Kč
Celkem.............. 9 400 Kč.............. 10 720 Kč

$$6x + 5y = 9\,400$$
$$7(x - 100) + 8 \cdot 0{,}8y = 10\,720$$

$$6x + 5y = 9\,400$$
$$7x - 700 + 6{,}4y = 10\,720$$

$$6x + 5y = 9\,400 \qquad | \cdot 7$$
$$7x + 6{,}4y = 11\,420 \qquad | \cdot (-6)$$

$$42x + 35y = 65\,800$$
$$-42x - 38{,}4y = -68\,520$$

$$-3{,}4y = -2\,720$$
$$y = 800$$

7.1 $6x + 5 \cdot 800 = 9\,400$
$6x = 5\,400$
$x = 900$ Kč

Původní cena sady talířů je 900 Kč.

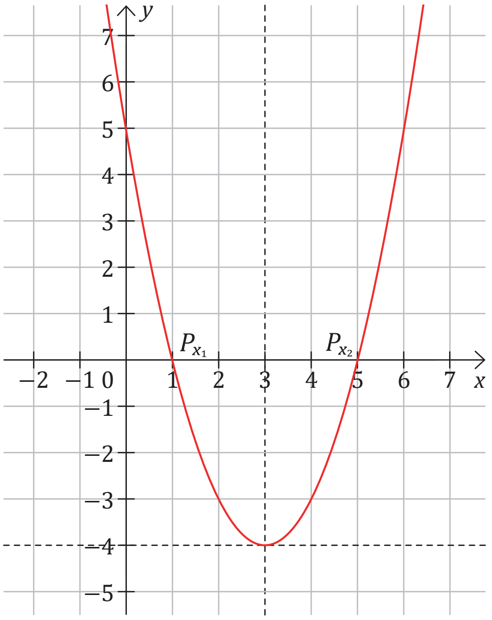
7.2 80 % z 800 = $0{,}8 \cdot 800 = 640$ Kč

Cena sady hrnků po slevě je 640 Kč.

Soustavu rovnic můžeme řešit i dosazovací nebo porovnávací metodou (popř. i dalšími).
V tomto případě však nejsou výhodné.

8 **8.1** parabola

8.2



8.3 $V\,[3; -4]$

Vrchol paraboly je průsečík kolmic na osy v bodech $x = 3$ a $y = -4$.

---

9 Průsečíky s osou x: P_{x1} [1; 0]; P_{x2} [5; 0].

$(x-1)(x-5) = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = x^2 - 6x + 5$

Průsečíky paraboly s osou x jsou souměrné podle osy paraboly a (podle zadání) je jejich vzdálenost 4. Ze zadání i grafu plyne, že tato parabola má koeficient a v předpisu $y = ax^2 + bx + c$ kladný.

10

$$5^x \cdot \sqrt{5} = 0{,}2$$

$$5^x \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$5^{x+\frac{1}{2}} = 5^{-1}$$

$$x + \frac{1}{2} = -1$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Všechny členy v rovnici převedeme na stejný základ a využijeme vzorce pro úpravu mocnin.
Pokud platí rovnost a jsou základy stejné, musí být stejné exponenty: $a^m = a^n \;\leftrightarrow\; m = n$.

---

11 Kód má 6 pozic: ☐☐☐☐☐☐

Na první pozici máme možnosti (A, B, C nebo D).

Číslice v kódu jsou (až na poslední) různé:

- na druhou pozici máme 10 možností (číslice 0, 1, 2, ... 9);
- na třetí pozici máme už jen 9 možností (číslic) – jednu jsme použili na předchozí pozici;
- na čtvrtou pozici máme už jen 8 možností (číslic) – dvě jsme použili na předchozí pozice;
- na pátou pozici máme už jen 7 možností (číslic) – tři jsme použili na předchozí pozice;
- na poslední pozici je stejná číslice jako na 3. pozici, takže možnost je jen jedna.

Počet možností: $4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 20\,160$.

Jiný způsob řešení:
Jde o variace (záleží na pořadí), můžeme tedy použít vzorec pro jejich výpočet.
Počet k-členných variací z n prvků:

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

První pozice $V(1, 4) = \dfrac{4!}{(4-1)!} = 4.$

Druhá až pátá pozice:

$$V(4, 10) = \frac{10!}{(10-4)!} = 5\,040.$$

Poslední pozice: 1 možnost.

Celkem: $4 \cdot 5\,040 \cdot 1 = 20\,160$.

12 $a_1 = 3a_3 \;\rightarrow\; a_3 = \dfrac{a_1}{3}$

$S_4 = -12$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d$$
$$\frac{a_1}{3} = a_1 + 2\cdot d$$
$$-\frac{2}{3}a_1 = 2d \;\rightarrow\; d = \frac{-1}{3}a_1$$

$$S_4 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$-12 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4)$$
$$-12 = 2(a_1 + a_1 + 3d)$$
$$-6 = 2a_1 + 3d$$
$$-6 = 2a_1 + 3\cdot\frac{-1}{3}a_1$$
$$-6 = 2a_1 - a_1$$
$$-6 = a_1 \;\rightarrow\; a_1 = -6$$
$$d = \frac{-1}{3}a_1 = -\frac{1}{3}\cdot(-6) = 2$$

12.1 $d = 2$

12.2 $a_1 = -6$

12.2 Jiný způsob řešení:
Z definice aritmetické posloupnosti plyne:
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$

Součet prvních 4 členů je -12, tedy:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -12$
$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = -12$
$4a_1 + 6d = -12 \;\rightarrow\; 2a_1 + 3d = -6.$

Dále platí:
$a_1 = 3a_3 \;\rightarrow\; a_1 = 3\cdot(a_1 + 2d) \;\rightarrow$
$2a_1 + 6d = 0.$

Sestavíme soustavu rovnic, kterou vypočítáme libovolnou metodou.
$2a_1 + 3d = -6$
$2a_1 + 6d = 0$

---

13 Souřadnice vektoru $\vec{u}$ vyčteme z obrázku: $\vec{u}\,(2; -5)$.

13.1 Směrový vektor přímky p je kolmý na vektor $\vec{u}$. Směrový vektor přímky p má tedy souřadnice např. $\vec{s}\,(5; 2)$. Přímka p prochází počátkem soustavy souřadnic, tedy bodem $S\,[0; 0]$. Přímku do soustavy souřadnic narýsujeme.

13.2 Obecná rovnice přímky má tvar $ax + by + c = 0$, kde a, b jsou souřadnice normálového vektoru přímky.

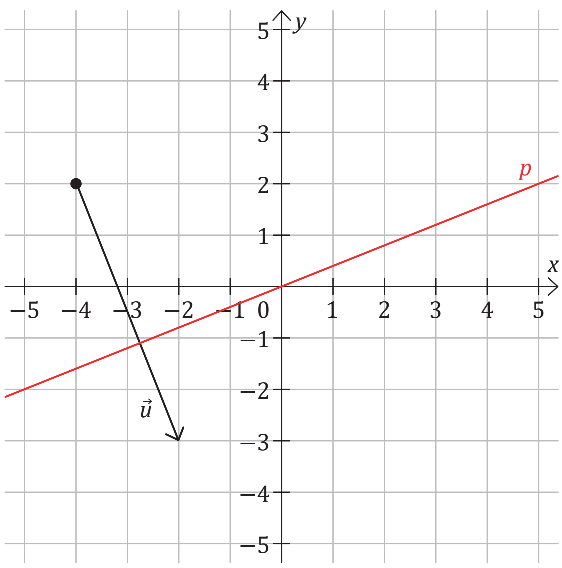
$\vec{n_p} = \vec{u} = (2; -5)$

$ax + by + c = 0$

$2x - 5y + c = 0$

$S\,[0; 0] \;\rightarrow\; 2\cdot 0 - 5\cdot 0 + c = 0$

$c = 0 \;\rightarrow\; p\colon 2x - 5y = 0$



Pokud má vektor souřadnice $\vec{u}\,(a; b)$, pak vektor k němu kolmý má souřadnice $\vec{n}\,(b; -a)$ nebo $\vec{n}\,(-b; a)$.

14 Pravidelný šestiúhelník je složen ze šesti rovnostranných trojúhelníků.

obsah pravidelného šestiúhelníku: $S = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

$S_1 = 6 \cdot \dfrac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \doteq 259{,}81\ \text{cm}^2$

Obsah kruhové dutiny: $S_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 \doteq 28{,}26\ \text{cm}^2$.

Obsah podstavy jedné součástky: $S = S_1 - S_2 = 259{,}81 - 28{,}26 \doteq 231{,}55\ \text{cm}^2$.

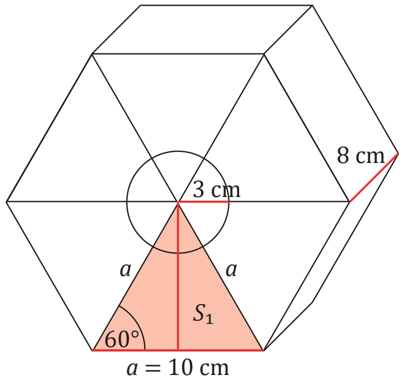
Objem jedné součástky: $V = S_p \cdot v = 231{,}55 \cdot 8 = 1\,852{,}4\ \text{cm}^3$.

Hmotnost jedné součástky: $m = 1\,852{,}4 \cdot 7{,}874 \doteq 14\,585{,}8\ \text{g} \doteq 14{,}585\,8\ \text{kg}$.

Hmotnost 100 ks součástek: $m_{100} = 100 \cdot 14{,}585\,8 = 1\,458{,}8\ \text{kg} \doteq 1\,460\ \text{kg}$.

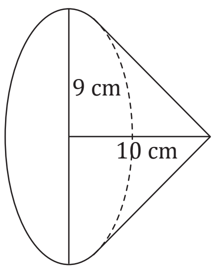
Hmotnost součástek v bedně je 1 460 kg.

Jiný způsob výpočtu objemu součástky: Vypočítáme objem šestibokého hranolu a potom odečteme objem válce, který dutinu tvoří.

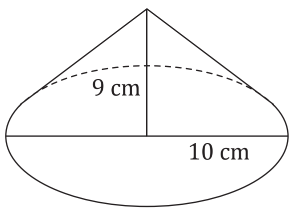


		A	N
15	**15.1** Čísla na kostce, která jsou menší než 4 jsou tři: 1, 2, 3. Čísla na kostce, která nejsou menší než 4 jsou také tři: 4, 5, 6. Pravděpodobnost je tedy stejná.	☒	☐
	15.2 Součet 10 může padnout ve třech možnostech: 4 + 6; 5 + 5; 6 + 5. Pravděpodobnost je tedy: $P = \dfrac{3}{6 \cdot 6} = \dfrac{1}{12} \doteq 8{,}3\ \%$.	☐	☒
	15.3 Pravděpodobnost, že na kostce padne číslo 6 je stejná, jako pravděpodobnost, že padne jakékoli jiné číslo. Pravděpodobnosti jsou tedy stejné.	☐	☒

16



A



B

Kužel A: $r = 9\ \text{cm};\ v = 10\ \text{cm}$.

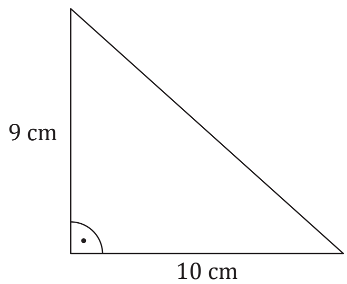
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 10 = 270\pi\ \text{cm}^3$$

Kužel B: $r = 10\ \text{cm};\ v = 9\ \text{cm}$.

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 9 = 300\pi\ \text{cm}^3$$

Rozdíl objemů: $V = V_2 - V_1 = 300\pi - 270\pi = 30\pi$. → C)

Odvěsny svírají pravý úhel a je důležité si uvědomit, která je poloměrem podstavy a která je výškou kužele. Vzhledem k nabídce výsledků objem vyjádříme jako násobek čísla π.



---

17 **I.**

$$\log_4(x^2+1) = -4$$
$$\log_4(x^2+1) = \log_4 4^{-4}$$
$$x^2 + 1 = \frac{1}{256} \qquad | -1$$
$$x^2 = -\frac{255}{256}$$

→ rovnice nemá řešení

17.1 Musíme zapsat pravou stranu rovnice tak, aby na každé straně rovnice byl logaritmus se stejným základem. Použijeme definici logaritmu:
$y = \log_a x \quad x = a^y$.
Druhá mocnina jakéhokoli čísla nikdy není číslo záporné.

II. $\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}=0 \ \rightarrow \ x-1=0$

$x=1$

Podmínky:

$x^2+4x-5 \neq 0$

$(x-1)\cdot(x+5) \neq 0$

$x_1 \neq 1;\ x_2 \neq -5$ → rovnice nemá řešení

III. $2^{x-1}=0$

Oborem hodnot exponenciální funkce jsou čísla větší než nula $H(f)=(0;\infty)$, číslo 0 nemůže být tedy řešením této rovnice. → rovnice nemá řešení

IV. $x-\log_2 8=0$

$x-3=0$

$x=3$ → řešením rovnice je číslo 3 → D)

> **17.2** Řešení rovnice $x^2+4x-5=0$ můžeme vypočítat pomocí diskriminantu.
>
> **17.3** Řešit rovnici můžeme i pomocí exponenciálního grafu, který nemá průsečík s osou x.

---

18 $A\,[2;3];\ S\,[0;1]$

Bod S je střed AC. → $s_1=\dfrac{a_1+c_1}{2}$ $\quad s_2=\dfrac{a_2+c_2}{2}$

$0=\dfrac{2+c_1}{2} \rightarrow c_1=-2$

$1=\dfrac{3+c_2}{2} \rightarrow c_2=-1 \rightarrow C\,[-2;-1]$

$\triangle ABC$ je rovnostranný, všechny strany jsou stejně dlouhé → vypočítáme délku strany AC.

$|AC|=\sqrt{(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$o=3\cdot a=3\cdot 4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ → C)

> Jiný způsob řešení:
> Bod S je středem strany AC, takže délka úsečky AS je polovinou délky strany tohoto rovnostranného trojúhelníka.
> $|AC|=2\cdot|AS|=$
> $=2\cdot\sqrt{(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2}=$
> $=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=$
> $=2\cdot\sqrt{8}=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

---

19 Použijeme vzorec pro pravidelný růst: $a_n=a_0\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$.

a_0 .....vstupní hodnota

a_n .....hodnota po n obdobích. V tomto příkladu $a_4=1{,}8\cdot a_0$ (zvětšení o 80 %).

p ......průměrný roční přírůstek

n ......počet období, v tomto příkladu $n=4$.

Dosadíme a vypočítáme hodnotu p.

$$a_4=a_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$$

$$1{,}8\cdot a_0=a_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$$

$$1{,}8=\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$$

$$\sqrt[4]{1{,}8}=1+\frac{p}{100} \rightarrow p \doteq 16\ \%$$ → C)

20 Celková výška všech dětí v oddíle před prázdninami byla:
$6 \cdot 1{,}25 = 7{,}5$ m $= 750$ cm.

Přes prázdniny děti vyrostly o:
$2 \cdot 3$ cm $+ 3 \cdot 2$ cm $+ 5$ cm $= 17$ cm.

Výška všech dětí po prázdninách je:
750 cm $+ 17$ cm $= 767$ cm.

Průměrná výška po prázdninách je:
$767 : 6 \doteq 127{,}8$ cm $= 1{,}28$ m. $\rightarrow$ B)

Jiné řešení:
Průměrnou výšku 1,25 m si můžeme představit tak, že každé ze šesti dětí měří 1,25 m, tedy 125 cm.
Po prázdninách měří dvě děti 125 cm + 3 cm, dvě děti měří 125 cm + 2 cm a jedno dítě měří 125 cm + 5 cm. Poslední z dětí měří stále 125 cm.
Vypočítáme průměrnou výšku po prázdninách.
$\overline{x} = \frac{2\cdot(125+3)+2\cdot(125+2)+(125+5)+125}{6} =$
$= 127{,}5$ cm $\doteq 1{,}28$ m

---

21 Zakreslený graf je grafem funkce $y = \log_z x$.
Protože na grafu leží bod se souřadnicemi $[3; 1]$ $\rightarrow$ základ tohoto logaritmu je 3.
$y = \log_3 x$ $\rightarrow$ C)

Hledaný základ logaritmické funkce můžeme vypočítat pomocí rovnice. Na grafu leží bod se souřadnicemi [3; 1].
$y = \log_z x$
$1 = \log_z 3$
$\log_z z^1 = \log_z 3$
$z^1 = 3 \rightarrow z = 3$

---

22 **První týden:**
Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 3$; $q = 2$; $n = 6$.
Součet dřepů v tomto týdnu vypočítáme podle vzorce: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
Dosadíme a vypočítáme: $S_6' = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 189$ dřepů v 1. týdnu.

Druhý týden:
Jde o geometrickou posloupnost, kde $q = 2$; $n = 6$.
První člen je rovem 3. členu předchozí posloupnosti, tedy
$b_1 = a_3 = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$.
Počet dřepů v tomto týdnu vypočítáme podle vzorce:
$S_n'' = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 12 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 756$ dřepů v 2. týdnu.

Třetí týden:
Počet dřepů v pondělí je stejný jako ve středu předchozího týdne.
Tedy: $c_1 = b_3 = b_1 \cdot q^{n-1} = 12 \cdot 2^{3-1} = 48$.
Ve třetím týdnu udělá $6 \cdot 48 = 288$ dřepů.
Celkem: $189 + 756 + 288 = 1\,233$ dřepů $\rightarrow$ D)

Jiný postup řešení:
První týden: Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 3$; $q = 2$. Využitím definice geometrické posloupnosti spočítáme počet dřepů v jednotlivých dnech a sečteme.
$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$
$a_4 = a_3 \cdot q = 12 \cdot 2 = 24$
$a_5 = a_4 \cdot q = 24 \cdot 2 = 48$
$a_6 = a_5 \cdot q = 48 \cdot 2 = 96$
Součet:
$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$.
Obdobně spočítáme součty dřepů v dalších týdnech.

---

23 Vypočítáme hodnoty x, y.
Z druhé rovnice vypočítáme hodnotu x.
$16 : x = 20$
$\frac{16}{x} = 20 \rightarrow x = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8$
Dosadíme do první rovnice a vypočítáme hodnotu y.
$\frac{x^2}{2} + 2 = xy$
$\frac{0{,}8^2}{2} + 2 = 0{,}8 \cdot y$
$2{,}32 = 0{,}8y \rightarrow y = \frac{29}{10} = 2{,}9$
Vypočítáme hodnotu čísla z dle zadání.
$z = 10 \cdot x - 5 \cdot y = 10 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 2{,}9 = -6{,}5$ $\rightarrow$ A)

V nabídce řešení B) je otevřený interval (kulaté závorky), krajní body do něj tedy nepatří. Číslo −6,5 tedy do tohoto intervalu nepatří.

24 Počet dětí ve věku 4 let označíme x.

$x : 21 = 4 : 7 \ \rightarrow \ x = 3 \cdot 4 = 12$

Dětí ve věku 4 roky je 12.

Aritmetický průměr souboru je: $\overline{x} = \dfrac{3 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 4}{10 + 12 + 21 + 4} = \dfrac{207}{47} \doteq 4{,}404.$

Modus (nejčastější hodnota): mod = 5.

Medián (prostřední hodnota): med = 5.

Prostřední hodnota 47 : 2 = 23,5 $\rightarrow$ prostřední je 24. člen, jeho hodnota je 5.

Platí $\overline{x}$ < mod = med. → C)

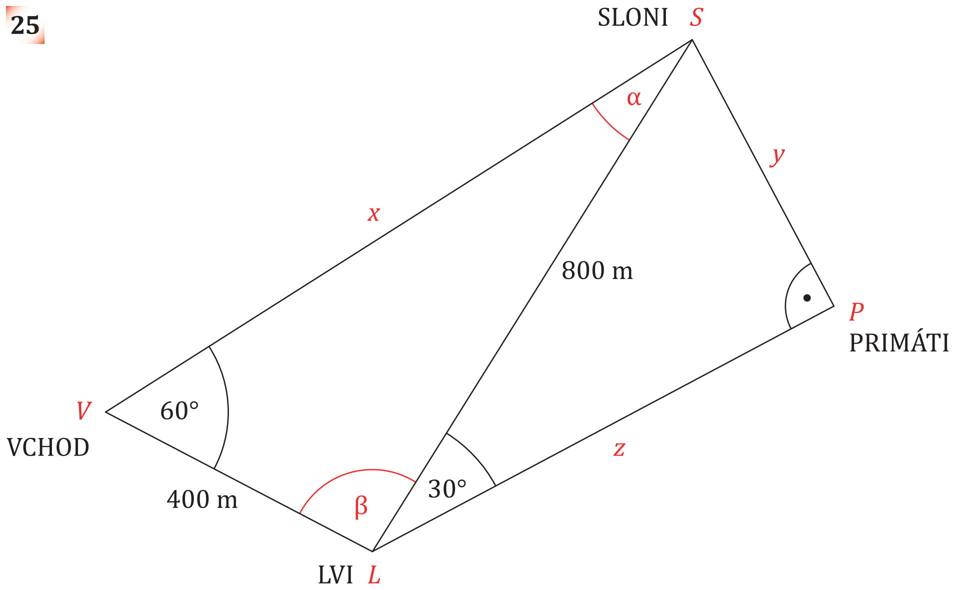
Jiný výpočet počtu dětí ve věku 4 roky. Jejich počet označíme x.

$\dfrac{x}{21} = \dfrac{4}{7} \ \rightarrow \ x = 4 \cdot 3 = 12$

nebo:

$\dfrac{x}{21} = \dfrac{4}{7} \ \rightarrow \ x = 21 \cdot \dfrac{4}{7} = 12$

25



V obecném trojúhelníku ABC platí sinová a kosinová věta.

25.1 $\triangle VLS$:

Vypočítáme velikost úhlu α. Trojúhelník VLS je obecný, použijeme sinovou větu.

$$\frac{\sin 60°}{800} = \frac{\sin \alpha}{400}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin 60°}{800} \cdot 400 \ \rightarrow \ \alpha = 25°\,40'$$

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Dopočítáme velikost úhlu β.

$\beta = 180° - \alpha - \beta = 180° - 60° - 25°\,40' = 94°\,20'$

Pomocí kosinové věty dopočítáme velikost strany x.

$x^2 = 400^2 + 800^2 - 2 \cdot 400 \cdot 800 \cdot \cos 94°\,20' \ \rightarrow \ x \doteq 921$ m → E)

25.2 $\triangle LPS$ je pravoúhlý. K výpočtu použijeme definici goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku a Pythagorovu větu.

$$\sin \rho = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přepona}}$$

$$\sin 30° = \frac{y}{800} \ \rightarrow \ y = 400 \text{ m}$$ → F)

25.3 $z^2 = 800^2 - 400^2 \ \rightarrow \ z \doteq 693$ m → B)

TEST 5

1 $\left(-2^6\right) \cdot \left(2^{-2}\right) : (-4)^{-3} = \left(-2^4\right) \cdot \left(-4^3\right) = \left(-4^2\right) \cdot \left(-4^3\right) = 4^5$

Jiný způsob řešení:
$\left(-2^6\right) \cdot \left(2^{-2}\right) : (-4)^{-3} =$
$= \left(-4^3\right) \cdot \left(4^{-1}\right) : (-4)^{-3} =$
$= -4^2 : \left(-4^{-3}\right) = 4^5.$
Pokud umocňujeme záporné číslo na lichou mocninu, je výsledek záporný, pokud na sudou, je výsledek kladný.

---

2 Objem kvádru: $V_1 = \dfrac{2a^3}{3}$.

Objem krychle: $V_2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{a^3}{8}$.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{a^3}{8}}{\frac{2a^3}{3}} = \frac{a^3}{8} \cdot \frac{3}{2a^3} = \frac{3}{16}$$

Je třeba sestavit poměr objemů krychle a kvádru v tomto pořadí a krácením upravit.

---

3 **3.1** $M \cap N = (-8; 2\rangle$

3.2 $M \cup N = \langle -8; \infty)$

Symbol $\cap$ je průnik množin (tedy prvky, které náleží oběma množinám). Symbol $\cup$ je sjednocení všech prvků množin. Lomená závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu patří. Kulatá závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu nepatří.

---

4 **4.1** Po dvou směnách: 10 dělníků by pracovalo už jen 18 směn. Sestavíme trojčlenku.

10 dělníků .... 18 směn
12 dělníků .... x směn

Směny, na kterých pracovalo 12 dělníků.

Jde o nepřímou úměrnost: $\dfrac{x}{18} = \dfrac{10}{12} \rightarrow x = \dfrac{10}{12} \cdot 18 = 15$ směn.

Směny v průběhu celé práce: $2 + 15 =$ 17 směn.

4.2 10 dělníků pracuje 2 směny a 12 dělníků pracuje pak ještě 15 směn $\rightarrow$
$10 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 320 + 12 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 320 =$ 512 000 Kč.

4.3 10 dělníků .... 20 směn
12 dělníků .... x směn

$\dfrac{x}{20} = \dfrac{10}{12} \rightarrow x = \dfrac{10}{12} \cdot 20 \doteq$ 17 směn.

Trojčlenku „se změnou“ sestavujeme pro okamžik změny, ne od začátku děje. Jde o nepřímou úměrnost (čím víc dělníků, tím méně času).

5 $$\frac{\frac{2}{x-2}-\frac{x-1}{x^2-4}}{1+\frac{2}{x+2}}:\frac{-10-2x}{x^2-4x+4}=\frac{\frac{2}{x-2}-\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+2+2}{x+2}}:\frac{-2(5+x)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+4}{x+2}}\cdot\frac{(x-2)^2}{-2(x+5)}=\frac{2x+4-x+1}{(x-2)(x+2)}:\frac{x+4}{x+2}\cdot\frac{(x-2)^2}{-2(x+5)}=$$

$$=\frac{x+5}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x+2}{x+4}\cdot\frac{(x-2)^2}{-2(x+5)}=-\frac{x-2}{2(x+4)}=\frac{2-x}{2x+8}$$

Mnohočlen x^2-4 rozložíme podle vzorce po rozdíl druhých mocnin: $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. Mnohočlen x^2-4x+4 rozložíme na součin pomocí vzorce na úpravu druhé mocniny rozdílu: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

---

6 $$\frac{4}{x+3}-\frac{2x}{3-x}=\frac{3(x^2-1)}{2x^2-18}$$

$$\frac{4}{x+3}-\frac{2x}{3-x}=\frac{3(x^2-1)}{2(x^2-9)}$$

$$\frac{4}{x+3}+\frac{2x}{x-3}=\frac{3(x^2-1)}{2(x-3)(x+3)} \qquad |\cdot 2(x+3)(x-3)$$

$$8(x-3)+4x(x+3)=3x^2-3$$

$$8x-24+4x^2+12x=3x^2-3$$

$$x^2+20x-21=0$$

$$(x+21)(x-1)=0$$

$x_1=-21;\ x_2=1$

Podmínky: $x\neq-3;\ x\neq3$.

Jmenovatel výrazu na pravé straně rovnice rozložíme pomocí vytýkání a vzorce pro rozdíl druhých mocnin: $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. Kvadratickou rovnici $x^2+20x-21=0$ řešíme buď využitím Vietových vzorců nebo pomocí diskriminantu. Musíme ověřit, jestli řešení rovnice splňuje podmínky, pro které mají lomené výrazy v zadání smysl.

---

7 $$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{25}{4}\right)^{2x}=0{,}064$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{4x}=\frac{8}{125}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-4x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1-4x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$$

$$-3x-1=3$$

$$-3x=4$$

$$x=-\frac{4}{3}$$

Všechny členy rovnice převedeme na stejný základ a využijeme vzorce pro úpravu mocnin. Pokud platí rovnost a jsou základy stejné, musí být stejné exponenty: $a^m=a^n \leftrightarrow m=n$.

---

8 Cena oběda . . . . $x+160$
Cena snídaně x

$$x+160=\frac{7}{6}\cdot2\cdot x$$

$$x+160=\frac{7}{3}x$$

$$3x+480=7x$$

$$4x=480$$

$$x=120\text{ Kč}$$

Oběd . . . . $120+160=280$ Kč

Cena oběda je 280 Kč.

Jiný způsob řešení – soustavou rovnic:

Cena oběda . . . . x Kč
Cena snídaně. . . . . y Kč

$x=y+160$

$x=\frac{7}{6}\cdot 2y$

Soustavu můžeme řešit kteroukoli metodou (sčítací, dosazovací, porovnávací atd.).

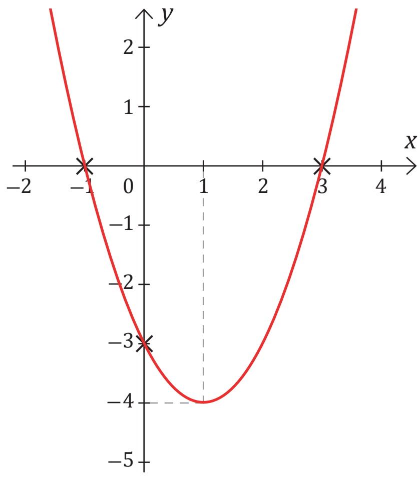
9 **9.1** $y = (x + 1) \cdot (x - 3)$

$y = x^2 - 3x + x - 3$

$y = x^2 - 2x - 3$

9.2 $P_y[0; y] \rightarrow y = 0^2 - 0 - 3 = -3 \rightarrow P_y[0; -3]$

9.3



9.1 Jiný způsob řešení:
Souřadnice bodů P_{x_1} a P_{x_2} do předpisu funkce a dopočítáme koeficienty a, b.
Vypočítáme souřadnice vrcholu paraboly. X-ová souřadnice vrcholu je uprostřed průsečíků paraboly s osou x. V našem případě tedy $x_V = 1$. Dosadíme do předpisu funkce a dopočítáme y-ovou souřadnici vrcholu.

---

10 $v_a = \frac{8}{5} \cdot a$

Obsah rovnoběžníků: $S = a \cdot v_a$.

$S = a \cdot \frac{8}{5}a = \frac{8}{5}a^2$

$57{,}6 = \frac{8}{5}a^2 \rightarrow a = 6 \text{ dm}$

$v_a = \frac{8}{5} \cdot 6 = 9{,}6 \text{ dm}$

$b = 220\ \%$ z $9{,}6 \text{ dm} = 2{,}2 \cdot 9{,}6 = 21{,}12 \text{ dm}$

$o = 2(a + b) = 2 \cdot (6 + 21{,}12) = 54{,}24 \text{ dm}$

11
$$\begin{aligned} \log_2(x-3) + \log_2 2^2 &= \log_2(x-2)^2 \\ \log_2 4(x-3) &= \log_2(x-2)^2 \\ 4(x-3) &= (x-2)^2 \\ 4x - 12 &= x^2 - 4x + 4 \\ 0 &= x^2 - 8x + 16 \\ 0 &= (x-4)^2 \\ x_{1,2} &= 4 \end{aligned}$$

Podmínky: $x > 3$; $x > 2 \rightarrow x \in (3; \infty)$.

Upravíme tak, aby byl na obou stranách rovnice logaritmus se stejným základem. Pak už jen porovnáme argumenty logaritmů. Použijeme definici logaritmu a věty pro úpravy logaritmů.

$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$
$\log_z a + \log_z b = \log_z a \cdot b$
$n \cdot \log_z a = \log_z a^n$

Je třeba určit podmínky – definičním oborem logaritmické funkce jsou čísla $x \in (0; \infty)$.

12 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Součet lichých členů: $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 4$

Součet prvních čtyř členů: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -8$

$$\begin{array}{r} a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d = 4 \\ a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = -8 \\ \hline 4a_1 + 12d = 4 \\ 4a_1 + 6d = -8 \\ \hline 6d = 12 \;\rightarrow\; d = 2 \end{array}$$

$4a_1 + 12 \cdot 2 = 4 \;\rightarrow\; a_1 = -5$

$a_6 = a_1 + 5d = -5 + 5 \cdot 2 = 5$

$a_7 = 5 + 2 = 7$

$a_8 = 7 + 2 = 9 \quad \rightarrow \quad 5 + 7 + 9 = 21$

Sestavenou soustavu rovnic lze řešit i jinou, než použitou sčítací metodu (např. dosazovací nebo porovnávací).

---

13 Jde o graf nepřímé úměrnosti.

Předpis funkce nepřímá úměrnost: $f\!: y = \frac{k}{x}$.

Bod ležící na grafu funkce, např. $A\,[-2; 3]$.

Dosadíme do předpisu: $3 = \frac{k}{-2} \;\rightarrow\; k = -6$.

$f\!: y = -\frac{6}{x}$

Do předpisu funkce je možné dosadit i další vhodné body ležící na grafu, např. $B\,[-3; 2]$; $C\,[3; -2]$ nebo $A\,[2; -3]$.

---

14 Jde o geometrickou posloupnost, kde:

$q = \frac{2}{3}$

$a_1 = 14\,580$

$a_n = 1\,920$

$n = ?$

Dosadíme do vzorce a dopočítáme.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$1\,920 = 14\,580 \cdot \frac{2}{3}^{\,n-1} \qquad | : 14\,580$$

$$\frac{1\,920}{14\,580} = \frac{2}{3}^{\,n-1}$$

$$\frac{2^5}{3} = \frac{2}{3}^{\,n-1}$$

$$5 = n - 1$$

$$n = 6$$

6. den bude ve vzorku přesně 1 920 bakterií.

Šestý den bude 8. dubna.

Všechny členy rovnice převedeme na stejný základ a využijeme vzorce pro úpravu mocnin. Pokud platí rovnost a jsou základy stejné, musí být stejné exponenty: $a^m = a^n \leftrightarrow m = n$.

15 Obsah kružnice: $S = \pi \cdot r^2$

$20\pi = \pi \cdot r^2 \ \rightarrow \ r = \sqrt{20}$ cm

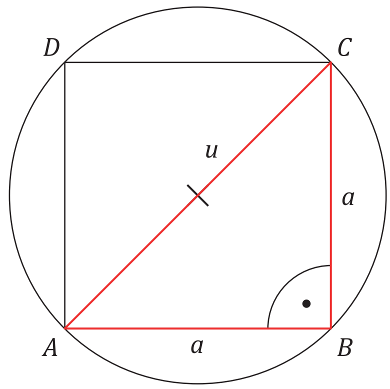
$u = 2r = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$ cm

Pythagorova věta: $u^2 = a^2 + a^2$

$\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 2a^2$

$80 = 2a^2$

$a^2 = 40 \ \rightarrow \ a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm



Obsah čtverce $ABCD$: $S = a^2 = 40\ \text{cm}^2$.

Obdélník $KLMN$: $S = k \cdot l = 40\ \text{cm}^2$ a platí $k = 4l$.

$40 = 4l \cdot l$

$40 = 4l^2 \ \rightarrow \ l = \sqrt{10}$ cm; $k = 4 \cdot \sqrt{10}$ cm.

15.1 $k - l = 4\sqrt{10} - \sqrt{10} \doteq 9{,}5$ cm $\rightarrow$ ano

15.2 $o = 2(k + l) = 2\left(4\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 2 \cdot 5\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$ cm $\rightarrow$ ne

15.3 Čtverec: $o = 4a = 4 \cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$ cm.

$8\sqrt{10} : 10\sqrt{10} = 4 : 5 \ \rightarrow$ ne

---

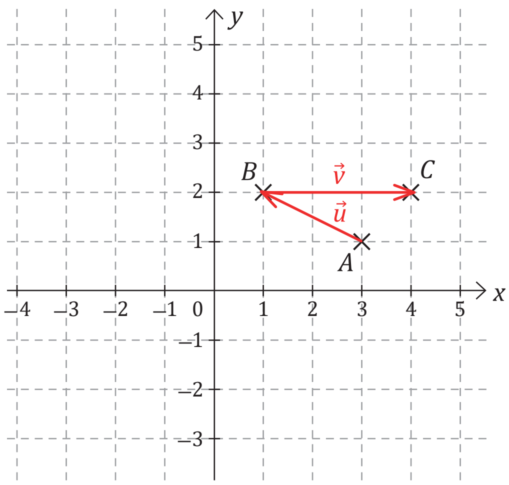
16 Pravděpodobnost, že vytáhneme ze 31 lístečků právě jeden, který potřebujeme, je $\dfrac{1}{31}$.

Pravděpodobnost, že vytáhneme z 12 lístečků právě jeden, který potřebujeme, je $\dfrac{1}{12}$.

Použijeme pravidlo o výpočtu pravděpodobnosti dvou nezávislých jevů (musí platit obě současně, hledáme jejich průnik).

$\dfrac{1}{31} \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{372} \doteq 2{,}688 \cdot 10^{-3} = 0{,}268\,8\ \% \doteq 0{,}269\ \% \ \rightarrow$ A)

17



Jiný způsob určení souřadnic bodů B, C.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \ \rightarrow \ -\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (2; -1) \ \rightarrow$ souřadnice bodu A získáme ze souřadnic bodu B posunem o 2 ve směru osy x a o (-1) ve směru osy y $\rightarrow$ $A[1 + 2; 2 - 1] = A[3; 1]$.

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (4; 0) \ \rightarrow$ souřadnice bodu C získáme ze souřadnic bodu B posunem o 4 ve směru osy x a o 0 ve směru osy y $\rightarrow$ $C[1 + 4; 2 + 0] = C[5; 2]$.

$B[1; 2]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2; 1) \ \rightarrow \ A[3; 1]$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (4; 0) \ \rightarrow \ C[5; 2]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} \ \rightarrow$ B)

18 Počet děvčat................n

Jde o kombinace druhé třídy (dvojice) z n prvků. Těchto kombinací je 15.

$$C_2(n) = 15$$

$$\binom{n}{2} = 15$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 15$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = 15$$

$$n \cdot (n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6) \cdot (n+5) = 0$$

$n_1 = 6$; $n_2 = -5$ → D)

Využijeme vzorec pro úpravu kombinačního čísla a úpravy faktorálů:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

Kvadratickou rovnici $n^2 - n - 30 = 0$ řešíme buď využitím Vietových vzorců nebo vzorcem přes diskriminant. Počet děvčat (n) nemůže být záporné číslo.

---

19 △ AXY sinová věta:

$$\frac{350}{\sin\alpha} = \frac{200}{\sin 30°}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin 30°}{200} \cdot 350 \;\rightarrow\; \alpha \doteq 61°$$

△ AXY součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°:

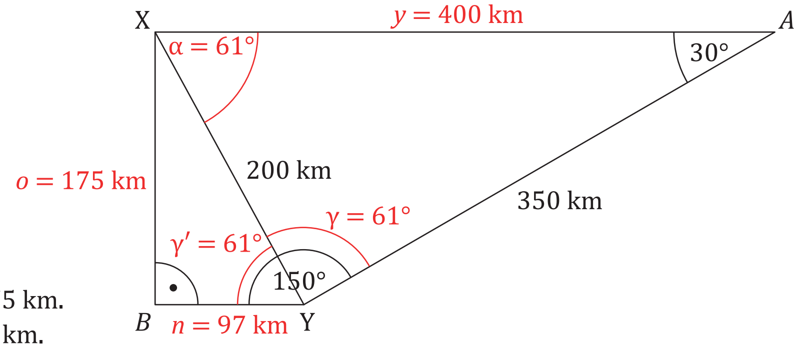
$\gamma = 180° - 61° - 30° = 89°$

△ AXY kosinová věta:

$y^2 = 350^2 + 200^2 - 2 \cdot 350 \cdot 200 \cdot \cos 89° \;\rightarrow\; y \doteq 400$ km

$\gamma + \gamma' = 150° \;\rightarrow\; \gamma' = 150° - 89° = 61°$.

Úhly γ' a α tvoří dvojici střídavých úhlů, tudíž mají stejnou velikost.



Pravoúhlý △ BYX:

$$\cos\gamma' = \frac{n}{m}$$

$$\cos 61° = \frac{n}{200} \;\rightarrow\; n \doteq 97 \text{ km}$$

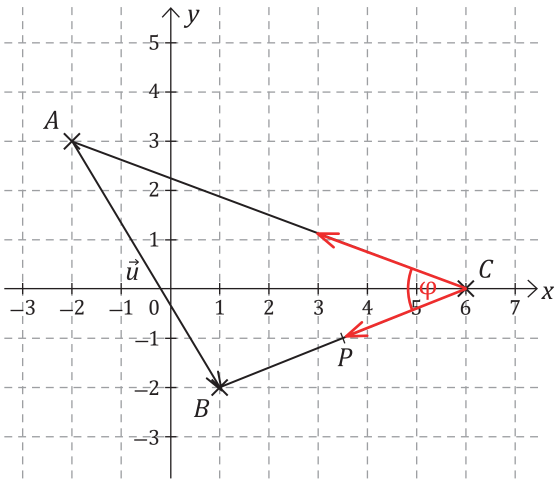
$o^2 = m^2 - n^2$

$o^2 = 200^2 - 97^2 \;\rightarrow\; o \doteq 175$ km

Trasa přes X: $y + o = 400$ km $+ 175$ km $= 575$ km.
Trasa přes Y: $x + n = 350$km $+ 97$ km $= 447$ km.
Rozdíl délek tras: 575 km − 447 km = 128 km.

Rychlost je 40 km/hod → 128 km : 40 km/hod = 3,2 hod. → E)

20



$B\,[1; -2]$

Dopočítáme souřadnice bodu A.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3; -5)$

$3 = 1 - x_A \ \rightarrow\ x_A = -2$

$-5 = -2 - y_A \ \rightarrow\ y_A = 3$

$A\,[-2; 3]$

Dopočítáme souřadnice bodu C.

Bod $P\left[\frac{7}{2}; -1\right]$ je středem úsečky BC.

Vzorec po výpočet středu úsečky BC: $S\left[\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right]$.

$\frac{7}{2} = \frac{1 + x_C}{2} \ \rightarrow\ x_C = 6$

$-1 = \frac{-2 + y_C}{2} \ \rightarrow\ y_C = 0$

$C\,[6; 0]$

Zjistíme souřadnice vektorů $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$, které potřebujeme pro výpočet velikosti jejich odchylky:

$\vec{b} = \overrightarrow{CA} = A - C = (-2 - 6; 3 - 0) = (-8; 3),$

$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = B - C = (1 - 6; -2 - 0) = (-5; -2).$

Vypočítáme odchylku daných vektorů.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{b_1\cdot a_1 + b_2\cdot a_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\cdot\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{(-8)\cdot(-5) + 3\cdot(-2)}{\sqrt{(-8)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}}$$

$\varphi \doteq 42°\,21' \quad \rightarrow \quad$ B)

Jiný způsob určení souřadnic bodu A, C:
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \ \rightarrow\ -\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-3; 5) \ \rightarrow$ souřadnice bodu A získáme ze souřadnic bodu B posunem o (-3) ve směru osy x a o 5 ve směru osy y $\rightarrow$
$A\,[1 - 3; -2 + 5] = A\,[-2; 3]$.
Souřadnice bodu C lze také získat přímo v grafu.

---

21 V PINu jsou čtyři různé číslice z výběru: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
Na první pozici je prvočíslo – máme na výběr ze čtyř možností (2; 3; 5; 7).
Na druhé pozici je nejmenší přirozené číslo, tedy číslo 1 – pouze jedna možnost.
Na třetí pozici je složené číslo, které je násobkem čísla 3 – máme 2 možnosti (6; 9).
Na poslední pozici je složené sudé číslo – máme na výběr 3 možnosti (4; 6; 8).

K výpočtu počtu řešení využijeme kombinatorické pravidlo součinu.
Možností je: $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ možností. $\rightarrow$ D)

Prvočíslo je číslo, která má právě dva dělitele – číslo 1 a samo sebe.
Jednociferná prvočísla jsou: 2, 3, 5, 7.
Přirozená čísla jsou čísla 1; 2; 3; ...
Složené číslo má více než dva dělitele.

22 Aritmetická posloupnost:
$a_1 = -4$,
$a_6 = 16$.
Pro výpočet součtu prvních pěti členů použijeme vzorec:

$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$,

$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_5)$.

Je tedy třeba zjistit člen a_5. Nejprve vypočítáme diferenci této posloupnosti.
Použijeme vzorec:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \ \rightarrow \ 16 = -4 + (6-1) \cdot d \ \rightarrow \ d = 4$.
Vypočítáme 5. člen. Použijeme definici aritmetické posloupnosti.
$a_{n+1} = a_n + d \ \rightarrow \ a_6 = a_5 + 4 \ \rightarrow \ a_5 = a_6 - d \ \rightarrow \ a_5 = 16 - 4 = 12$

Dopočítáme součet: $S_5 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_5) = \frac{5}{2} \cdot (-4 + 12) = 20$.

Geometrická posloupnost:
$b_1 = -4$,
$-b_3 = 16 \ \rightarrow \ b_3 = -16$.
Pro výpočet součtu prvních pěti členů použijeme vzorec:

$S_n = b_1 \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1} \ \rightarrow \ S_5 = -4 \cdot \frac{q^{5-1}}{q-1}$.

Je tedy třeba zjistit kvocient. Použijeme vzorec $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:
$b_3 = -4 \cdot q^{3-1}$
$-16 = -4 \cdot q^2$
$q^2 = 4 \ \rightarrow \ q = 2$ ... Posloupnost je rostoucí, kvocient je kladné číslo větší než 1.

Dopočítáme součet: $S_5 = -4 \cdot \frac{2^{5-1}}{2-1} = -124$.

Vypočítáme součin obou součtů: $20 \cdot (-124) = -2\,480$. → D)

Jiný způsob výpočtu součtu – vypočítáme si všech 5 členů a sečteme je:
Aritmetická posloupnost:
$a_1 = -4;\ d = 4$
$a_2 = a_1 + d = -4 + 4 = 0$
$a_3 = a_2 + d = 0 + 4 = 4$
$a_4 = a_3 + d = 4 + 4 = 8$
$a_5 = a_4 + d = 8 + 4 = 12$
$S_5 = -4 + 0 + 4 + 8 + 12 = 20$
Geometrická posloupnost:
$b_1 = -4;\ q = 2$
$b_2 = b_1 \cdot q = -4 \cdot 2 = -8$
$b_3 = b_2 \cdot q = -8 \cdot 2 = -16$
$b_4 = b_3 \cdot q = -16 \cdot 2 = -32$
$b_5 = b_4 \cdot q = -32 \cdot 2 = -64$
$S_5 = -4 - 8 - 16 - 32 - 64 = -124$

---

23 Jedná se o nerovnici v součinovém/podílovém tvaru.
Určíme nulové body jednotlivých členů.

$x_{01} = \frac{3}{2};\ x_{02} = -\frac{1}{2};\ x_{03} = 0$

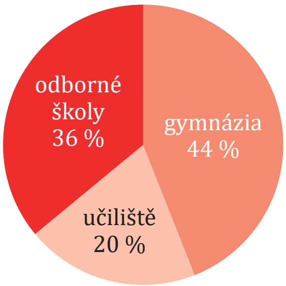
$x \neq 0$

	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left\langle -\frac{1}{2}; 0\right)$	$\left(0; \frac{3}{2}\right\rangle$	$\left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$
$(2x-3)$	−	−	−	+
$\left(x + \frac{1}{2}\right)$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
výsledné znaménko	−	+	−	+

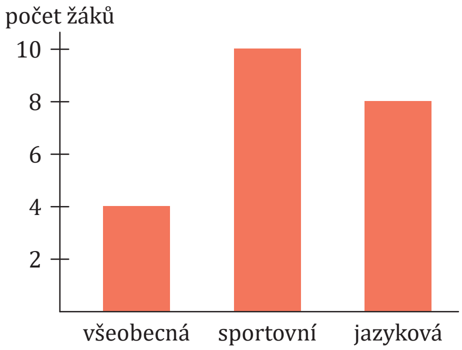
Nerovnici vyhovují intervaly $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left(0; \frac{3}{2}\right\rangle$. → D)

Nerovnici upravíme do podílového tvaru, aby na jedné její straně byl lomený výraz a na druhé nula. Následně nerovnici řešíme přes nulové body nebo soustavou nerovnic.
Pozor na podmínky. Ve jmenovateli lomeného výrazu nesmí být nula! Lomená závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu patří. Kulatá závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu nepatří.

24



GRAF 1



GRAF 2

Graf 2:
Na všeobecná gymnázia byli přijati 4 žáci, na sportovní 10 a na jazyková 8. Celkem na gymnázia bylo přijato 22 žáků.

Graf 1:
Na gymnázia bylo přijato 44 % žáků, na učiliště 20 % (100 % − 44 % − 36 %).

44 % .... 22 žáků
20 % x

$x = \frac{20}{44} \cdot 22 = 10$

Na učiliště bylo přijato 10 žáků. → A)

---

25 Povrch koule: $S = 4\pi r^2$.

Povrch polokoule: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2$.

Povrch polokoule s poloměrem 6 cm: $S = 2\pi \cdot 6^2 = 72\pi\ \text{cm}^2$.

25.1 Těleso X:

Povrch je složen z povrchu polokoule a obsahu pláště kužele.

Kužel: $r = 6$ cm; $s = 2 \cdot 6 = 12$ cm.

Povrch polokoule: $S_1 = 72\pi$.

Obsah pláště kužele: $S_2 = \pi rs = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$.

Povrch tělesa X: $S_X = 72\pi + 72\pi = 144\pi$. → B)

25.2 Těleso Y:

Povrch je složen z povrchu polokoule a obsahu pláště válce a obsahu jedné („spodní“) podstavy válce.

Válec: $r = 6$ cm; $v = 2 \cdot 6 = 12$ cm.

Povrch polokoule: $S_1 = 72\pi$.

Obsah pláště válce: $S_3 = 2\pi rv = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 12 = 144\pi$.

Obsah podstavy válce: $S_4 = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$.

Povrch tělesa Y: $S_Y = 72\pi + 144\pi + 36\pi = 252\pi$. → C)

25.3 Těleso Z:

Povrch je složen z povrchu polokoule, obsahu pěti stěn krychle a „zbytku“ plochy na horní podstavě, kterou nezakrývá polokoule.

Krychle: $a = 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12$ cm.

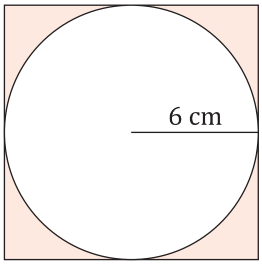
Povrch polokoule: $S_1 = 72\pi$.

Obsah pěti stěn krychle: $S_5 = 5 \cdot a^2 = 5 \cdot 12^2 = 720\ \text{cm}^2$.

Obsah nezakryté části horní podstavy vypočítáme jako rozdíl obsahu čtverce a obsahu kruhu: $S_6 = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 36\pi$.

Povrch tělesa Z: $S_Z = 72\pi + 720 + 144 - 36\pi = 864 + 36\pi$. → D)

Pozor na to, co tvoří povrch složeného tělesa.
V případě tělesa X nesmíme do povrchu započítat podstavu kužele a horní podstavu válce.
V případě tělesa Z je třeba dopočítat „zbytky“ čtvercové horní podstavy krychle po zakrytí polokoulí.



12 cm

ŘEŠENÍ

(verze 2024)

ČÍSELNÉ OBORY

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	16,4	
2	$-\frac{9}{4}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{2}$	
3	9	
4	$\frac{37}{4}$	
5	$b : c = 8 : 9$	
6	620 kg	
7	Přibližně o 53,3 %.	
8		
9	24	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $\frac{20 \cdot 72 \cdot 225}{25 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Všechna čísla rozložíme na součin mocnin prvočísel a u krácení zlomku využijeme věty o počítání s mocninami.

---

2 $n\,(10, 12, 15) = 60$
Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

$60 : 10 = 6$
$60 : 12 = 5$
$60 : 15 = 4$

Do krychle se vejde $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ krabiček.

Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

---

3 Součin čísel 12 a 25 je $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo *n* není dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo *n* je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo *n* není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo *n* je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo *n* je nejmenším společným násobkem čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek.
Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

			A	N
4	**4.1**	2 je prvočíslo.	☒	☐
	4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	☒	☐
	4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	☐	☒

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

---

5 **5.1** $15 = 3 \cdot 5;\ 20 = 2^2 \cdot 5;\ n\,(15;\,20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \ \rightarrow$ F)

5.2 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2;\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ D\,(150;\,180) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \ \rightarrow$ C)

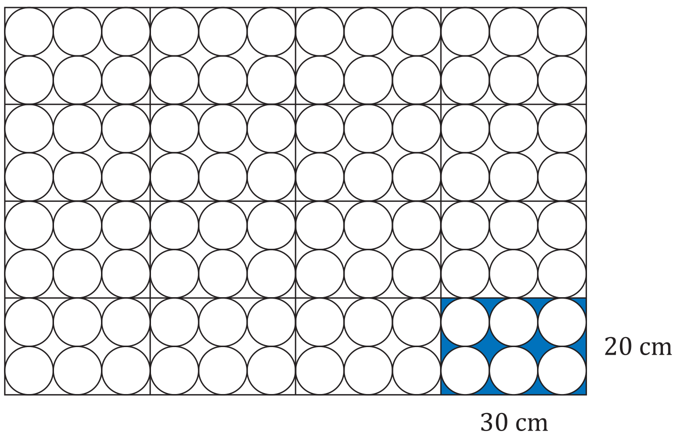
5.3 $10 = 2 \cdot 5;\ 25 = 5^2;\ n\,(10;\,25) = 2 \cdot 5^2 = 50 \ \rightarrow$ E)

5.4 $100 = 2^2 \cdot 5^2;\ 160 = 2^5 \cdot 5;\ D\,(100;\,160) = 2^2 \cdot 5 = 20 \ \rightarrow$ B)

Provedeme rozklad čísel na součiny mocnin prvočísel. Nejmenší společný násobek je součinem prvočísel s největší mocninou, ve které je dané prvočíslo v rozkladech. Největší společný násobek je součinem prvočísel s nejmenší mocninou, ve které je dané prvočíslo v rozkladech.

---

6 Krabice lze na paletu umístit po celé délce i šířce (na orientaci nezáleží). Na paletě je $6 \cdot 16 = 96$ koulí.



Rozměr a počet krabic nemají pro výpočet zásadní smysl. Slouží pouze pro upevnění koulí a vizualizaci úlohy. Určíme počet koulí, které lze umístit do jedné krabice (známe poloměr koule) a vynásobíme počtem krabic.

---

7 Průměrná hodnota $\dfrac{8+6+5+5+6}{5}\ °C = \dfrac{30}{5}\ °C = 6\ °C$

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

---

8 $\dfrac{(-1)\cdot|-2|}{(-3)} \cdot \dfrac{(-5+4)}{|-5+4|} = \dfrac{(-1)\cdot 2}{(-3)} \cdot \dfrac{(-1)}{1} = -\dfrac{2}{3} \ \rightarrow$ E)

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

			A	N
9	**9.1**	Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná.	☒	☐
	9.2	Součin lichého počtu záporných čísel je záporný.	☐	☒
	9.3	Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný.	☐	☒

Klademe důraz na správné přečtení zadání.
9.1 Rozlišíme pojmy kladné (> 0) a nezáporné číslo (≥ 0) (resp. záporné a nekladné číslo).
9.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

10 **10.1** $(-2) + 3 = -2 + 3 = 1 \to$ D)

10.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2 \to$ B)

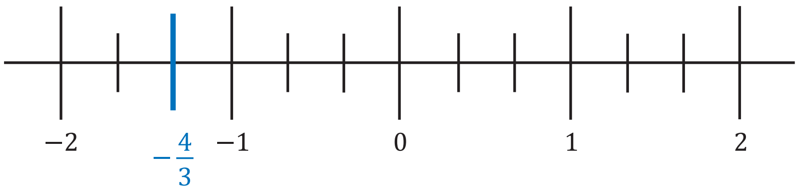
10.3 $(-2) \cdot (-1^2) = -2 \cdot (-1) = 2 \to$ E)

10.4 $(-3) - (-2) = -3 + 2 = -1 \to$ A)

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze **10.2** a **10.3** je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1^2) = -1$.
Úlohu **10.4** lze řešit jako rozdíl dvou záporných čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

---

11 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Rozdíl je výsledek odčítání, podíl je výsledek dělení. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose.

---

12 $$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}+2}{2} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} + \frac{\frac{2+6}{3}}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

---

13 35 ... 100 % $\to$ 50 ... 143 % $\to$ změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, že základ (tedy kolik je 100 %) je 35. Řešíme pomocí trojčlenky nebo výpočtem 1 %.

14

		A	N
14.1	12 395 ≐ 12 000	☒	☐
14.2	na stovky 12 395 ≐ 12 400 na desítky 12 395 ≐ 12 400	☒	☐
14.3	12 395 = 12 395 – zůstane stejné	☐	☒

V úloze **14.2** porovnáme oba výsledky zaokrouhlení.
Úloha **14.3** může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“. Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

---

15 **15.1** $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S \to$ o 125 % $\to$ E)

15.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C \to$ C)

15.3 $l' : l = 5 : 10 \to l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l \to$ B)

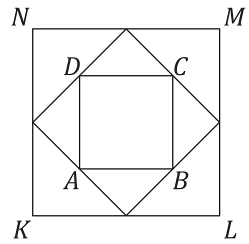
15.4 1 h = 60 min .... 100 %
75 min .... 125 % $\to$ změna 25 % $\to$ A)

Úloha **15.1** může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah.
Úloha **15.2** je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina.
V úloze **15.4** žák nejprve převede základ 1 h na 60 minut.

---

16 Platí pro každé reálné číslo.

17 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$,
poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční", a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

---

18 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 .... 100 %

3 .... x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 % → B).

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

19

		A	N
19.1	Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění.	☐	☒
19.2	Absolutní hodnota nuly je nula. Správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná.	☐	☒
19.3	Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné.	☒	☐

Úloha **19.1** může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha **19.2** vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha **19.3** může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

20

20.1 $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4 \rightarrow$ E)

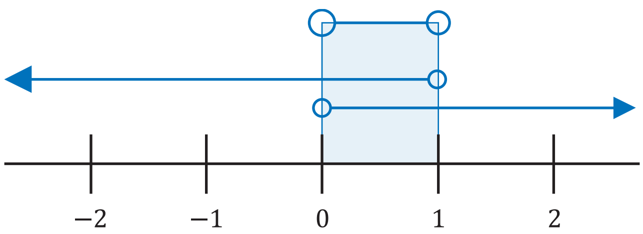
20.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow$ D)

20.3 $-\sqrt{4} = -2 \rightarrow$ A)

20.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \rightarrow$ C)

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

21



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; ...).

22 $A = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ nebo $A = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha **21**). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

---

23 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5) \rightarrow$ E)

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalu *A*, *B* a *C* na číselné ose.

24

		A	N
24.1	$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{Z}^+$	☒	☐
24.2	$(-1; 1) \subset \langle -1; 1\rangle$	☐	☒
24.3	$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	☒	☐

Úlohy **24.1** a **24.3** ověřují znalosti číselných množin. V úloze **24.2** je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

25

25.1 $\mathbb{R}^+ = (0; \infty) \rightarrow$ F)

25.2 $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset = (0; 0) \rightarrow$ B)

25.3 $\mathbb{R}_0^- \cup \mathbb{R}_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty) \rightarrow$ C)

25.4 $\mathbb{R}_0^- \setminus \{0\} = \mathbb{R}^- = (-\infty; 0) \rightarrow$ E)

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověď A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy **21** a **22**).

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$-a+3$	
2	$b^{\frac{11}{2}}$	
3		
3.1	B	
3.2	D	
3.3	A	
4	$(-a^3+5)^2 = a^6 - 10a^3 + 25$	Kvadratický člen v mnohočlenu chybí, tzn. že koeficient je roven 0.
5	$-\dfrac{18}{k(k+3)}$	
6	$(1+2\sqrt{3}-x)(1+x)$	
7	E	
8		
8.1	D	
8.2	B	
8.3	E	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\\[2ex] x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{4}-1+3}{\frac{1+2}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1+2\cdot 4}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1+8}{4}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\cancel{9}^{\,3}}{{}_{2}\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

2 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2-2x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve -3 a potom 1.

$$A=-\frac{4\cdot(-3)}{(-3)^2-4}=-\frac{-12}{9-4}=\frac{12}{5}$$

$$B=-\frac{4\cdot 1}{1^2-4}=-\frac{4}{1-4}=\frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\cancel{12}^{3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku…

$\frac{4}{3}$ .... 100 %

$\frac{12}{5}$ .... x %

$x = 180$ %

… tedy o 80 % větší.

---

3 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$x^2-x-6\neq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1\neq\frac{1+5}{2}\ \rightarrow\ x_1\neq 3$$

$$x_2\neq\frac{1-5}{2}\ \rightarrow\ x_2\neq -2$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$

$$\begin{aligned}x^2-2x-3&=2(x^2-x-6)\\x^2-2x-3&=2x^2-2x-12\\-x^2&=-9\\x^2&=9\\x&=\pm 3\end{aligned}$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x=\pm 3$, ale hodnota $x=3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru. Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x=-3$.

---

4 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

4.1 $\frac{x}{x^2-1}\ \rightarrow\ x^2-1\neq 0\ \rightarrow\ x^2\neq 1\ \rightarrow\ x\neq\pm 1\ \rightarrow$ B)

4.2 $\dfrac{\frac{x-1}{x}}{x+1}\ \rightarrow\ x\neq 0\wedge x+1\neq 0\ \rightarrow\ x\neq 0\wedge x\neq -1\ \rightarrow$ D)

4.3 $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{x}\ \rightarrow\ x-1\neq 0\wedge x\neq 0\ \rightarrow\ x\neq 1\wedge x\neq 0\ \rightarrow$ C)

5 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(a^2-2)^2-(4-a^2)^2-4=\left[(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 2+2^2\right]-\left[4^2-2\cdot 4\cdot a^2+(a^2)^2\right]-4=$$
$$=a^4-4a^2+4-(16-8a^2+a^4)-4=a^4-4a^2+4-16+8a^2-a^4-4=$$
$$=4a^2-16=4(a^2-4)=4(a-2)(a+2)$$

---

6 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x+0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x+0{,}5x$	$0{,}5p(x+0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x+0{,}5x)$	$0{,}2p\cdot 2(x+0{,}5x)$

$$0{,}3px+0{,}5p(x+0{,}5x)+0{,}2p\cdot 2(x+0{,}5x)=0{,}3px+0{,}5p\cdot 1{,}5x+0{,}2p\cdot 2.1{,}5x=$$
$$=0{,}3px+0{,}75px+0{,}6px=1{,}65px \ \rightarrow\ \text{D)}$$

---

7 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$$(a+2)^3+(a-2)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3+a^3-3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2-2^3=$$
$$=a^3+6a^2+12a+8+a^3-6a^2+12a-8=2a^3+24a=2a(a^2+12)$$

---

8 $3a^2x-6ax-2a^2y+4ay=3ax(a-2)-2ay(a-2)=(a-2)(3ax-2ay)=$
$=a(a-2)(3x-2y)$

---

9 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x):B(x)$.

$$\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-x-6):(x^2+x-3)=x+2\\
\underline{-x^3-x^2+3x}\\
\qquad 2x^2+2x-6\\
\qquad \underline{-2x^2-2x+6}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

B) $A(x)=(x+2)\cdot B(x)$

10

		A	N
10.1	Postupujeme dle vzorce $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, kde $a=x$ a $b=\frac{1}{x}$. $x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$	☒	☐
10.2	$(3x+3)^2+(4x+4)^2=9x^2+18x+9+16x^2+32x+16=$ $=25x^2+50x+25=(5x+5)^2$	☒	☐
10.3	$(x+2)^2-(x-2)^2=x^2+4x+4-x^2+4x-4=8x$	☐	☒
10.4	$(x+2)^2+2x+5=x^2+4x+4+2x+5=x^2+6x+9=(x+3)^2$	☒	☐

11 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$
$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$
$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$
$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$
$$(x-1)^2 = A^2(x)$$
$$A(x) = x - 1 \;\rightarrow\; \text{D)}$$

---

12 $$\left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2}\right)\left(x - \frac{4}{x}\right) = \frac{x(x-2) + x(x+2)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x \cdot x - 4}{x} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + x^2 + 2x}{\cancel{x^2 - 4}} \cdot \frac{\cancel{x^2 - 4}}{x} = \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 2x$$

podm.: $x \neq \pm 2$; $x \neq 0$

---

13 $$\left(\frac{1}{a+1} + \frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \left(\frac{1}{a+1} + \frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right) \cdot \frac{1-a}{a} =$$

$$= \frac{a - 1 - 2a}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-a-1}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{-\cancel{(a-1)}}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}$$

podm.: $a \neq \pm 1$; $a \neq 0$

---

14 $$\frac{1 + \frac{1}{a-2}}{a - \frac{1}{2-a}} = \frac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}} = \frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}} = \frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{-(a-2)}} = \frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{(a-1)^2}{a-2}} =$$

$$= \frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}} \cdot \frac{\cancel{a-2}}{(a-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a-1}$$

podm.: $a \neq 1$; $a \neq 2$

---

15 $$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{a-1}} = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{a-1}{a} = 1 + \frac{a-1}{a} =$$

$$= \frac{a + a - 1}{a} = \frac{2a - 1}{a} \;\rightarrow\; \text{B)}$$

16 Výraz není definován pro takové $x \in \mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

A) $\dfrac{x-2}{1+\dfrac{2}{x}} \;\rightarrow\; 1+\dfrac{2}{x} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x+2}{x} \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq -2 \wedge x \neq 0$

B) $\dfrac{x-2}{1+\dfrac{2}{x+2}} \;\rightarrow\; 1+\dfrac{2}{x+2} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x+2+2}{x+2} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x+4}{x+2} \neq 0 \;\rightarrow$

$x \neq -4 \wedge x \neq -2$

C) $\dfrac{x+2}{1+\dfrac{4}{x-2}} \;\rightarrow\; 1+\dfrac{4}{x-2} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x-2+4}{x-2} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x+2}{x-2} \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq \pm 2$

D) $\dfrac{x-2}{1-\dfrac{2}{x+2}} \;\rightarrow\; 1-\dfrac{2}{x+2} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x+2-2}{x+2} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x}{x+2} \neq 0 \;\rightarrow$

$x \neq 0 \wedge x \neq -2$

E) $\dfrac{x-2}{1-\dfrac{2}{x}} \;\rightarrow\; 1-\dfrac{2}{x} \neq 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x-2}{x} \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 2 \wedge x \neq 0$

---

17 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

	A	N
17.1 $\dfrac{A(a)}{B(a)} = \dfrac{\dfrac{2a}{a^2-1}}{\dfrac{a}{a+1}} = \dfrac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \dfrac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \dfrac{2}{a-1}$	☐	☒
17.2 $\dfrac{B(a)}{A(a)} + 1 = \dfrac{\dfrac{a}{a+1}}{\dfrac{2a}{a^2-1}} + 1 = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \dfrac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \dfrac{a-1}{2} + 1 = \dfrac{a-1+2}{2} = \dfrac{a+1}{2}$	☒	☐
17.3 $A(a) - B(a) = \dfrac{2a}{a^2-1} - \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{2a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{3a-a^2}{a^2-1}$	☒	☐
17.4 $A(a) + B(a) = \dfrac{2a}{a^2-1} + \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{2a + a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \dfrac{a}{a-1}$	☐	☒

---

18 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} =$

$= \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

popř.

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}-1) + (x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

19 $\left(\sqrt{x}\right)^{-1} + \left(\sqrt{x}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x^2}}{x\sqrt{x^2}} = \dfrac{x\sqrt{x} + x}{x \cdot x} = \dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{x^{\cancel{2}}} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$

---

20 $\sqrt{x} + \sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x} + 1 = 2 \qquad | - 1$$

$$\sqrt{2x} = 1$$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{1}$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{C)}$$

---

21 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$V(a, b) = \left(a^{-16}b^4\right)^8 = a^{-16\cdot 8}\, b^{4\cdot 8} = a^{-128}b^{32} = \dfrac{b^{32}}{a^{128}}$

$V(\sqrt{5}, 25) = \dfrac{25^{32}}{\left(\sqrt{5}\right)^{128}} = \dfrac{25^{32}}{25^{32}} = 1 \rightarrow \text{A)}$

---

22 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

22.1 $\dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{2-x}} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 2-x > 0 \rightarrow 2 > x \end{array}\right\} \rightarrow x \in \langle -1; 2) \rightarrow \text{E)}$

22.2 $\dfrac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} \rightarrow 4 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 4 \rightarrow |x| < 2 \rightarrow x \in (-2; 2) \rightarrow \text{D)}$

22.3 $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{x+1+1}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}} \rightarrow \dfrac{x+2}{x+1} \geq 0$

$$(x+2 \geq 0 \ \wedge \ x+1 > 0) \quad \vee \quad (x+2 \leq 0 \ \wedge \ x+1 < 0)$$

$$(x \geq -2 \ \wedge \ x > -1) \quad \vee \quad (x \leq -2 \ \wedge \ x < -1)$$

$$x \in (-1; \infty) \qquad x \in (-\infty; -2\rangle$$

$$\rightarrow x \in (-\infty; -2\rangle \ \cup \ (-1; \infty) \rightarrow \text{A)}$$

ROVNICE A NEROVNICE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	B	
2	$K = (-\infty; 10\rangle$	
3	$x \neq 3$, $K = \{0\}$	
4	Úkol bude splněn po 21 dnech.	
5		
5.1	A	
5.2	A	
5.3	A	
5.4	A	
6	D	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich x-ová a y-ová souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \ \wedge \ [x, y] = [3; a] \ \rightarrow \ 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \ \rightarrow \ 9 + 2a = 5 \ \rightarrow \ 2a = -4 \ \rightarrow \ a = -2$

$3x + 2y = 5 \ \wedge \ [x, y] = [b; 4] \ \rightarrow \ 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \ \rightarrow \ 3b + 8 = 5 \ \rightarrow \ 3b = -3 \ \rightarrow \ b = -1$

$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

---

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

A) $$x = 10 \left\{ \begin{array}{l} L(x=10)\colon \dfrac{10^2 - 3}{\sqrt{10} - 1} = \dfrac{100 - 3}{\sqrt{9}} = \dfrac{97}{3} = 32\dfrac{1}{3} \\[2ex] \mathrm{P}(x=10)\colon \dfrac{10}{2} = 5 \end{array} \right\} \rightarrow L(x=10) \neq P(x=10)$$

B) $$x = 5 \left\{ \begin{array}{l} L(x=5)\colon \dfrac{5^2 - 3}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{25 - 3}{\sqrt{4}} = \dfrac{22}{2} = 11 \\[2ex] \mathrm{P}(x=5)\colon \dfrac{5}{2} = 2{,}5 \end{array} \right\} \rightarrow L(x=5) \neq P(x=5)$$

C) $$x = 4 \left\{ \begin{array}{l} L(x=4)\colon \dfrac{4^2 - 3}{\sqrt{4} - 1} = \dfrac{16 - 3}{\sqrt{3}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}} \\[2ex] \mathrm{P}(x=4)\colon \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \rightarrow L(x=4) \neq P(x=4)$$

D) $x = 2$ $\left\{\begin{array}{l} L(x=2)\text{:}\ \dfrac{2^2-3}{\sqrt{2-1}} = \dfrac{4-3}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \\ \mathrm{P}(x=2)\text{:}\ \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow L(x=2) = P(x=2)$

E) $x = 1$ $\left\{\begin{array}{l} L(x=1)\text{:}\ \dfrac{1^2-3}{\sqrt{1-1}} = \dfrac{1-3}{\sqrt{0}}\ \text{výraz není definován} \\ \\ \mathrm{P}(x=1)\text{:}\ \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow$ pro $x = 1$ rovnice není definována

---

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$$\begin{aligned} 32 + x &= 0{,}96(x + 35) \\ 32 + x &= 0{,}96x + 33{,}6 && |\ -0{,}96x;\ -32 \\ 0{,}04x &= 1{,}6 && |\ :0{,}04 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

---

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. Po odčerpání 20 % vody ($0{,}2x$) a třetiny zbytku vody $\left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}8x\right)$ klesne jeho hmotnost na 79 kg.

hmotnost vody v sudu x

$$\begin{aligned} 135 - 0{,}2x - \frac{1}{3} \cdot 0{,}8x &= 79 && |\ \cdot 3 \\ 405 - 0{,}6x - 0{,}8x &= 237 && |\ -405 \\ -1{,}4x &= -168 && |\ :(-1{,}4) \\ x &= 120 \end{aligned}$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

---

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$\begin{aligned} p &= p_1[1 + \alpha(t - t_1)] \\ p &= p_1 + p_1\alpha(t - t_1) \\ p &= p_1 + p_1\alpha t - p_1\alpha t_1 && |\ -p_1;\ +p_1\alpha t_1 \\ p - p_1 + p_1\alpha t_1 &= p_1\alpha t && |\ :p_1\alpha \\ \frac{p - p_1 + p_1\alpha t_1}{p_1\alpha} &= t \end{aligned}$$

A N

6 **6.1** Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in \mathbb{R}$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$. Tvrzení tedy pravdivé není. ☐ ☒

6.2 Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

$$\frac{x^2-4}{x+2} = 1$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = 1$$

$$x - 2 = 1 \qquad | + 2$$

$$x = 3$$

6.3 Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

6.4 Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnici a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a -2. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad | - x; -2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

7

$$\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} = 2x - 4 \qquad | \cdot 6$$

$$3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) = 12x - 24$$

$$3x + 2x + \frac{2x+4}{3} = 12x - 24 \qquad | \cdot 3$$

$$9x + 6x + 2x + 4 = 36x - 72$$

$$17x + 4 = 36x - 72 \qquad | - 36x; -4$$

$$-19x = -76 \qquad | : (-19)$$

$$x = 4$$

---

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$2x + y = -3$$
$$x - 2y = -4 \qquad | \cdot 2$$

$$2x + y = -3$$
$$2x - 4y = -8$$

$$4x - 3y = -11 \quad \rightarrow \quad \text{D)}$$

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$\begin{aligned}
(x+3)^2 - 4(x-1)^2 - 2x &= -3(x-2)^2 + 6x - 1 \\
x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1) - 2x &= -3(x^2 - 4x + 4) + 6x - 1 \\
x^2 + 6x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 - 2x &= -3x^2 + 12x - 12 + 6x - 1 \\
-3x^2 + 12x + 5 &= -3x^2 + 18x - 13 && |+3x^2; -18x; -5 \\
12x - 18x &= -13 - 5 \\
-6x &= -18 && |:(-6) \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. → C)

---

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} &= \frac{3x+2}{x^2+x} - 1 && \text{podm.: } x \neq 0;\ x \neq -1 \\
\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} &= \frac{3x+2}{x(x+1)} - 1 && |\cdot x(x+1) \\
2(x+1) - x \cdot x &= 3x + 2 - x(x+1) \\
2x + 2 - x^2 &= 3x + 2 - x^2 - x \\
-x^2 + 2x + 2 &= -x^2 + 2x + 2 && |+x^2 - 2x - 2 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

---

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím kratší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci .... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků .... x hodin

$$\begin{aligned}
\frac{6}{4} &= \frac{x+2{,}5}{x} && |\cdot 4x \\
6x &= 4(x+2{,}5) \\
6x &= 4x + 10 && |-4x \\
2x &= 10 && |:2 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků .... 5 hodin
10 soustružníků .... y hodin

$$\begin{aligned}
\frac{10}{6} &= \frac{5}{y} && |\cdot 6y \\
10y &= 30 && |:10 \\
y &= 3
\end{aligned}$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice, její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, $0{,}75x$. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku .... $0{,}75x$
jmenovatel zlomku x

$$\frac{0{,}75x+2}{x+2}=0{,}8 \qquad |\cdot(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8x+1{,}6 \qquad |-0{,}8x-2$$
$$-0{,}05x=-0{,}4 \qquad |:(-0{,}05)$$
$$x=8$$

Jmenovatel původního zlomku je roven 8, čitatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. $0{,}75\cdot 8=6$.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8}$.

---

13 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x^2-4}+2 \qquad \text{podm.: } x\neq\pm2$$
$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{(x-2)(x+2)}+2 \qquad |\cdot(x-2)(x+2)$$
$$2(x+2)+x(x-2)=3+2(x-2)(x+2)$$
$$2x+4+x^2-2x=3+2(x^2-4)$$
$$x^2+4=3+2x^2-8$$
$$x^2+4=2x^2-5 \qquad |-2x^2;-4$$
$$-x^2=-9 \qquad |\cdot(-1)$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm3$$
$$K=\{\pm3\}$$

---

14 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-1}{x+9} \qquad |\cdot(x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x\neq-3;\ x\neq-9$$
$$(x-2)(x+9)=(x-1)(x+3)$$
$$x^2+9x-2x-18=x^2+3x-x-3$$
$$x^2+7x-18=x^2+2x-3 \qquad |-x^2-2x+18$$
$$5x=15 \qquad |:5$$
$$x=3$$

$$\frac{y-3}{y+3}=\frac{y-4}{y-1} \qquad |\cdot(y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y\neq-3;\ y\neq1$$
$$(y-1)(y-3)=(y-4)(y+3)$$
$$y^2-3y-y+3=y^2+3y-4y-12$$
$$y^2-4y+3=y^2-y-12 \qquad |-y^2+y-3$$
$$-3y=-15 \qquad |:(-3)$$
$$y=5$$

Řešením rovnic jsou čísla $x=3$ a $y=5$. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15. → B)

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

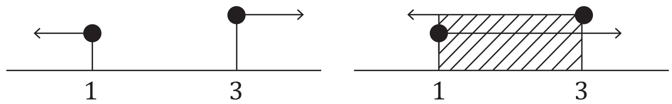
$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, jestliže $(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \leq 0) \quad \vee \quad (x - 3 \leq 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0)$$
$$(x \geq 3 \ \wedge \ x \leq 1) \quad \vee \quad (x \leq 3 \ \wedge \ x \geq 1)$$
$$x \in \emptyset \quad \vee \quad x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

---

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku . . . . $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$x(x + 17{,}5) = 375$

$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1\,500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1\,806{,}25}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \ \rightarrow \ \text{nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka $12{,}5 + 17{,}5 = 30$ cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1\,056{,}25} = 32{,}5$ cm. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

---

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x + 1$ (druhá mocnina je $(x + 1)^2$) a největší $x + 2$ (druhá mocnina je $(x + 2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo . . . . $x + 1$
třetí číslo . . . . $x + 2$

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 10(x + 2)$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 20$

$3x^2 + 6x + 5 = 10x + 20 \qquad | - 10x - 20$

$3x^2 - 4x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = \frac{4 + 14}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 14}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \ \rightarrow \ \text{nevyhovuje (} x \text{ je přirozené číslo)}$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je $3 + 4 + 5 = 12$.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$(x+3)^2 - (3x-1)^2 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - (9x^2 - 6x + 1) = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$-8x^2 + 12x + 8 = 0 \qquad | : (-4)$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow |x_1| = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow |x_2| = 2 \end{array}\right\} \rightarrow |x_2| = 4|x_1| \rightarrow \text{E)}$$

---

19 Je-li $x_1 = 3$ řešením rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ x_1 = 3 \end{array}\right\} 3^2 - 3 - b^2 + 5b = 0 \rightarrow b^2 - 5b - 6 = 0$$
$$b_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$
$$b_1 = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$
$$b_2 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Nyní do původní rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ b_1 = -1 \end{array}\right\} x^2 - x - (-1)^2 + 5(-1) = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$
$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven -2. → B)

---

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2} = |x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x - a| \leq b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a - b; a + b \rangle$.

20.1 $(x-1)^2 \leq 1 \rightarrow |x-1| \leq 1 \rightarrow x \in \langle 0; 2 \rangle \rightarrow$ C)

20.2 $(x+1)^2 \leq 4 \rightarrow |x-(-1)| \leq 2 \rightarrow x \in \langle -3; 1 \rangle \rightarrow$ A)

20.3 $(x+1)^2 \leq 9 \rightarrow |x-(-1)| \leq 3 \rightarrow x \in \langle -4; 2 \rangle \rightarrow$ D)

21 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 3(2x-1)-2(x+3) &\leq 5x-1 \\ 6x-3-2x-6 &\leq 5x-1 \\ 4x-9 &\leq 5x-1 \qquad |-5x+9 \\ 4x-5x &\leq -1+9 \\ -x &\leq 8 \qquad |:(-1) \\ x &\geq -8 \;\rightarrow\; x \in \langle -8; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4x-3)-5(x+2) &\geq 4x-13 \\ 8x-6-5x-10 &\geq 4x-13 \\ 3x-16 &\geq 4x-13 \qquad |-4x+16 \\ 3x-4x &\geq -13+16 \\ -x &\geq 3 \qquad |:(-1) \\ x &\leq -3 \;\rightarrow\; x \in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x &\in \langle -8; \infty) \\ x &\in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}\right\} \rightarrow x \in \langle -8; -3\rangle$$

---

22 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x-1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} \leq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 0$$

$1 \geq 0 \;\rightarrow\; x-1 < 0 \;\rightarrow\; x < 1 \;\rightarrow\; x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$

---

23 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 2(3x-1)-3[2(x+4)-3(x-2)] &\leq 7(x-5)+1 \\ 6x-2-3[2x+8-3x+6] &\leq 7x-35+1 \\ 6x-2-3[-x+14] &\leq 7x-34 \\ 6x-2+3x-42 &\leq 7x-34 \\ 9x-44 &\leq 7x-34 \qquad |-7x+44 \\ 9x-7x &\leq -34+44 \\ 2x &\leq 10 \qquad |:2 \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \leq 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1+2+3+4+5 = 15$. → D)

---

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\frac{2x - \frac{1}{3}(x+4)}{4} + \frac{3x - \frac{1}{4}(x-2)}{3} \leq \frac{3x+1}{2} \qquad |\cdot 12$$

$$3\left[2x - \frac{1}{3}(x+4)\right] + 4\left[3x - \frac{1}{4}(x-2)\right] \leq 6(3x+1)$$

$$\begin{aligned} 6x-(x+4)+12x-(x-2) &\leq 18x+6 \\ 6x-x-4+12x-x+2 &\leq 18x+6 \\ 16x-2 &\leq 18x+6 \qquad |-18x+2 \\ -2x &\leq 8 \qquad |:(-2) \\ x &\geq -4 \;\rightarrow\; x \in \langle -4; \infty) \;\rightarrow\; \text{A)} \end{aligned}$$

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

25.1
$$
\begin{aligned}
2(3x-1)-3(x+2) &\le 4x-6 \\
6x-2-3x-6 &\le 4x-6 \\
3x-8 &\le 4x-6 && |-4x+8 \\
3x-4x &\le -6+8 \\
-x &\le 2 && |:(-1) \\
x &\ge -2 \;\rightarrow\; x \in \langle -2; \infty) \;\rightarrow\; \text{B)}
\end{aligned}
$$

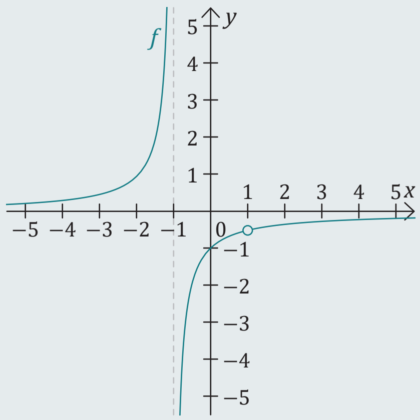
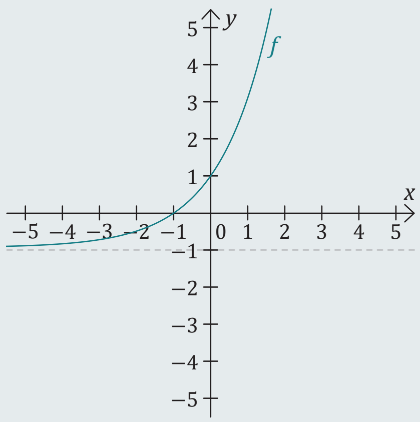
25.2
$$
\begin{aligned}
4(2x-3)-2(x+1) &\le 7x-8 \\
8x-12-2x-2 &\le 7x-8 \\
6x-14 &\le 7x-8 && |-7x+14 \\
6x-7x &\le -8+14 \\
-x &\le 6 && |:(-1) \\
x &\ge -6 \;\rightarrow\; x \in \langle -6; \infty) \;\rightarrow\; \text{E)}
\end{aligned}
$$

25.3
$$
\begin{aligned}
4(3x-2)-6(x-3) &\le 7x+15 \\
12x-8-6x+18 &\le 7x+15 \\
6x+10 &\le 7x+15 && |-7x-10 \\
6x-7x &\le 15-10 \\
-x &\le 5 && |:(-1) \\
x &\ge -5 \;\rightarrow\; x \in \langle -5; \infty) \;\rightarrow\; \text{D)}
\end{aligned}
$$

FUNKCE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	C	
2	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ Grafem je hyperbola s výjimkou jednoho bodu ($x = 1$). 	
3	$K = \{4\}$	
4	$P_x[-1; 0]$, $P_y[0; 1]$ 	
5	$K = \{1\}$	
6	$a = -4$	
7	$\log_5 6 = \frac{p}{3} + \frac{q}{2}$	
8	$K = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

---

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule. Proto musí platit, že:

$$\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \ \rightarrow \ x > 3 \end{array}\right\} \rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \ \rightarrow \ x \in (3; 5\rangle$$

---

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$. Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f: y = \frac{|x-3|}{2x} \ \rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\[2ex] f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

		A	N
4 **4.1**	$f_1: y = \dfrac{2}{|x| - 3} \ \rightarrow \ |x| - 3 \neq 0 \ \rightarrow \ |x| \neq 3 \ \rightarrow \ x \neq \pm 3$	☐	☒
4.2	$f_2: y = \dfrac{x}{x^2 + 3} \ \rightarrow \ x^2 + 3 \neq 0 \ \rightarrow \ x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in \mathbb{R}$	☒	☐
4.3	$f_3: y = \dfrac{2x + 2}{x + 1} \ \rightarrow \ x + 1 \neq 0 \ \rightarrow \ x \neq -1$	☐	☒
4.4	$f_4: y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{2}} \ \rightarrow \ \dfrac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in \mathbb{R}$	☒	☐

---

5 $A\,[0; 0]$: $\dfrac{0^2 + 0}{0 - 1} = 0 \ \rightarrow$ bod $A\,[0; 0]$ leží

$B\,[-1; 0]$: $\dfrac{(-1)^2 + (-1)}{(-1) - 1} = \dfrac{1 - 1}{-2} = 0 \ \rightarrow$ bod $B\,[-1; 0]$ leží

$C\,[2; 6]$: $\dfrac{2^2 + 2}{2 - 1} = \dfrac{4 + 2}{1} = 6 \ \rightarrow$ bod $C\,[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $\dfrac{(-3)^2 + (-3)}{(-3) - 1} = \dfrac{9 - 3}{-4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \ \rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

Na grafu funkce f leží 3 body A, B a C. $\rightarrow$ D)

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6,3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k, vyjádříme pomocí lineární funkce:

$$p = 55 - \frac{6,3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0,063k + 55$.

---

7 $v = at + b \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = at_1 + b \rightarrow 337,92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \rightarrow 350,12 = 30a + b \end{array} \right\}$

Řešením soustavy je $a = 0,61$ a $b = 331,82$.
Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0,61t + 331,82$.

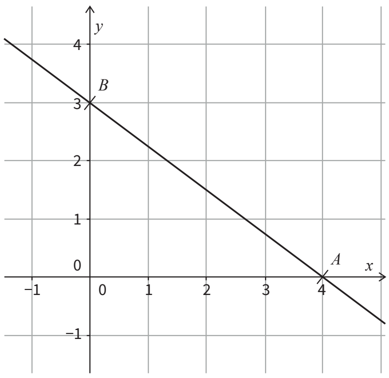
---

8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A\,[x;\,0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B\,[0;\,y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0,75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0,75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0,75x + 3 \wedge y = 0) \rightarrow 0 = -0,75x + 3 \rightarrow x = \frac{3}{0,75} = 4 \rightarrow A\,[4;\,0]$

$(y = -0,75x + 3 \wedge x = 0) \rightarrow y = -0,75 \cdot 0 + 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow B\,[0;\,3]$

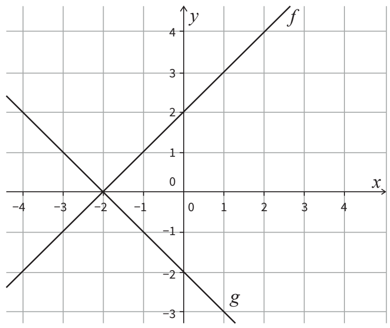
Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.
$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



---

9 Grafem funkce f je přímka, která se v osové souměrnosti podle osy x zobrazí opět na přímku. V osové souměrnosti podle osy x se funkční hodnoty původní funkce změní na hodnoty opačné, tzn. $g(x) = -f(x)$.

Proto $g\colon y = -x - 2$. → D)



---

10 **10.1** $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ → D)

10.2 $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ → B)

10.3 $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ → E)

---

11 $f\colon y = x - 2 \wedge P\,[x;\,1] \in f \rightarrow 1 = x - 2 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ funkce se protínají v bodě $P\,[3;\,1]$

$g\colon y = ax + 4 \wedge P\,[3;\,1] \in g \rightarrow 1 = 3a + 4 \rightarrow -3 = 3a \rightarrow a = -1 \rightarrow$ B)

12 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je -4, potom funkce prochází bodem $V[0; -4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice $[2; 0]$, potom druhý má souřadnice $[-2; 0]$.

Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}\,[2; 0]$ a $P_{x2}\,[-2; 0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f\colon y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

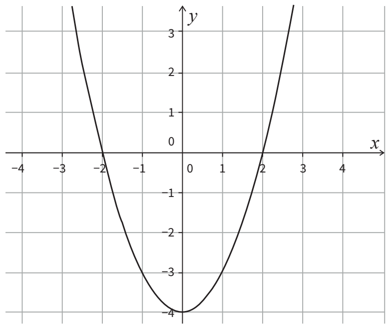
$V \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\rightarrow\; c = -4$

$P_{x1} \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \;\rightarrow\; 0 = 4a + 2b + c$

$P_{x2} \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \;\rightarrow\; 0 = 4a - 2b + c$

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je
$a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.

Pro funkci f tedy platí: $f\colon y = x^2 - 4$.



Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

---

13 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \quad \wedge \quad f(a + 1) = (a + 1)^2 + 2(a + 1) + 3 =$
$= a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$$f(a + 1) \geq f(a)$$
$$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$$
$$2a \geq -3$$
$$a \geq -\frac{3}{2}$$

$$a \in \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)$$

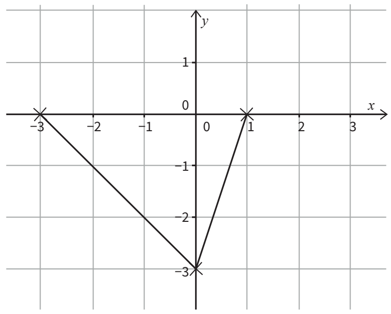
---

14 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu $f\colon y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu $f\colon y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.

$(f\colon y = x^2 + 2x - 3 \;\wedge\; x = 0) \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; P_1[0; -3]$

$(f\colon y = x^2 + 2x - 3 \;\wedge\; y = 0) \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; (x + 3)(x - 1) = 0 \;\rightarrow$
$(x = -3 \;\vee\; x = 1) \;\rightarrow\; P_2[-3; 0] \;\wedge\; P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



---

15 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj.

$f\colon y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$.

V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí $g\colon y = (x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3. \;\rightarrow\;$ B)

---

16 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f\colon y = a^{x+1} + b \;\rightarrow\; 4 = a^{-1+1} + b \;\rightarrow\; 4 = a^0 + b \;\rightarrow\; 4 = 1 + b \;\rightarrow\; b = 3$

$B[2; 11] \in f\colon y = a^{x+1} + b \;\rightarrow\; 11 = a^{2+1} + b \;\rightarrow\; 11 = a^3 + 3 \;\rightarrow\; 8 = a^3 \;\rightarrow\; a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

17 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\dfrac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$

$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$

$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$

$$\frac{2}{a-1} > 0 \;\rightarrow\; a - 1 > 0 \;\rightarrow\; a > 1$$

$a \in (1; \infty)$

---

18 Exponenciální funkce $y = a^x$ je definována pro všechna $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. U uvedených funkcí ověříme, zda základ a vyhovuje příslušné podmínce.

$f\colon y = (\cos 2\pi)^{x+1} \;\rightarrow\; a = \cos 2\pi = 1 \;\rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$g\colon y = \left(\sin \dfrac{\pi}{6}\right)^{2x+1} \;\rightarrow\; a = \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$ vyhovuje podmínce, je exp. fce

$h\colon y = (\log_{\frac{1}{2}} 4)^{x-1} \;\rightarrow\; a = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \;\rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$l\colon y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{x+3} \;\rightarrow\; a = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \;\rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

Z uvedených funkcí je exponenciální pouze jedna. $\rightarrow$ B)

19

$$2^{3-x} + 2^{1-x} = 40$$
$$2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} = 40$$
$$2^{-x}(2^3 + 2^1) = 40$$
$$2^{-x}(8 + 2) = 40$$
$$2^{-x} \cdot 10 = 40$$
$$2^{-x} = 4$$
$$2^{-x} = 2^2$$
$$x = -2 \;\rightarrow\; x \in (-3; -1) \;\rightarrow\; \text{B)}$$

---

20 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$$\log_2(x-3) = \log_3 9$$
$$\log_2(x-3) = 2$$
$$2^2 = x - 3$$
$$4 = x - 3$$
$$x = 7$$

21
$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{3(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{3} = \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 6$$

22 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být vetší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \ \wedge\ \sin x \geq 0) \ \rightarrow\ \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi;\, \pi + 2k\pi),\, k \in \mathbb{Z}$.

---

23 $$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1}{-(1 - \sin^2 x)} =$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x\cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 2\sin x\cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{-\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\,\mathrm{tg}\, x$$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \ \rightarrow\ \sin^2 x \neq 1 \ \rightarrow\ \sin x \neq \pm 1 \ \rightarrow\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \wedge$

$$x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \rightarrow\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}$$

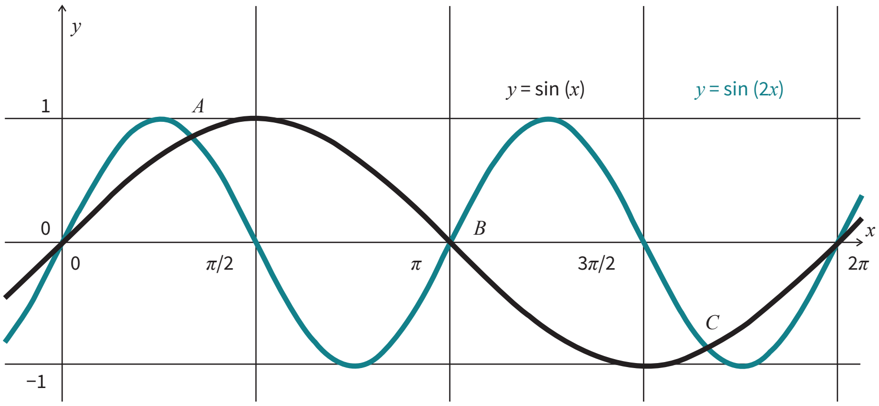
---

24 Využijeme grafické řešení.

Z obrázku jsou patrné příslušné tři průsečíky. $\rightarrow$ D) 3 řešení

Průsečíky v bodech $x = 0$ a $x = 2\pi$ nevyhovují intervalu, na kterém řešení hledáme.

Využijte grafů obou funkcí.



25

25.1 $y = 2\sin x - 1 \ \rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \ \rightarrow\ D\left[\frac{\pi}{3};\, \sqrt{3} - 1\right] \end{cases}$

25.2 $y = \cos x + 2 \ \rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3} + 4}{2} \ \rightarrow\ B\left[\frac{\pi}{6};\, \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right] \\ \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

25.3 $y = \mathrm{tg}\, x - 3 \ \rightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{\sqrt{3} - 9}{3} \\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \ \rightarrow\ C\left[\frac{\pi}{3};\, \sqrt{3} - 3\right] \end{cases}$

---

26 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},\, x_2 = \frac{3\pi}{4} \ \rightarrow\ x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi \ \rightarrow\ \text{C)}$$

POSLOUPNOSTI A FINANČNÍ MATEMATIKA

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$a_1 = 3$	
2	7 975	
3	98 550	
4	1 300 Kč, 2 100 Kč, 2 900 Kč, 3 700 Kč	
5	855	
6	$s_8 = \frac{6\,305}{243} \doteq 25$	
7	$a_{10} \doteq 0{,}04$ cm, $s_{15} \doteq 23{,}38$ cm^2	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.
V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

1 A) $a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \ \rightarrow$ posloupnost není aritmetická

D) $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2} \ \rightarrow$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} + \frac{4^2 - 3 \cdot 4}{5} = 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

---

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5) \cdot d$

$d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení: $d = 0{,}08$ m.

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5) \cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14 \cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$$d = \frac{9 - 2a_1}{10}$$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

---

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12;\ a_n = 96;\ d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$

$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_{15} = \frac{15}{2} \cdot (12 + 96)$$

$s_{15} = 810$

---

5 **5.1** Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20;\ d = 3;\ n = 9$

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9 - 1) \cdot 3$

$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot d)$$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\frac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 **6.1** Počty kostek v modrých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet modrých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n-1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma. Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98 \rightarrow$ B)

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n-1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144 \rightarrow$ E)

---

7 $K_0 = 400\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}08$ (úroková míra,vyjádřená desetinným číslem)
$n = 3$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient,v tomto případě se nemusí uvádět)

A ☐ **N** ☒

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí ($k = 1$). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % ($k = 0{,}85$).

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$

Po dosazení:

$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč $\doteq$ 503 885 Kč

8

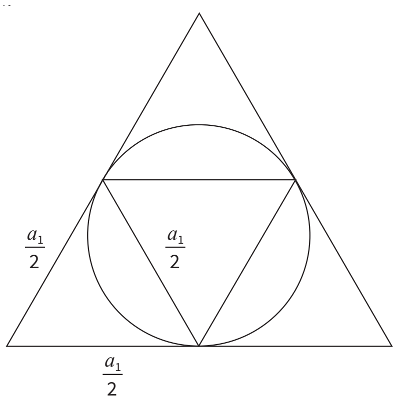
		A	N
8.1	$q = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$	☐	☒
8.2	$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$	☒	☐
8.3	$a_3 + a_4 + a_5 = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{38}{81}$	☒	☐
8.4	$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$	☐	☒

Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

---

9 **9.1** Délky stran jednotlivých trojúhelníků tvoří členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 1$ m.

Abychom si lépe představili hodnotu kvocientu, je vhodné si druhý největší trojúhelník pootočit tak, aby jeho vrcholy ležely ve středech stran největšího trojúhelníku.



Geometrická posloupnost má tedy kvocient $q = \frac{1}{2}$. Čtvrtý člen posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ m} = 0{,}125 \text{ m}$

Pro obvod trojúhelníku platí:

$o_4 = 3 \cdot a_4 = 0{,}375 \text{ m}$

9.2 $S_n = \frac{\sqrt{3}}{32} \text{ m}^2$

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí vztah:

$S_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Z tohoto vztahu vyjádříme strany trojúhelníku:

$a_n = \sqrt{\frac{4S_n}{\sqrt{3}}}$

Po dosazení:

$a_n = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}} \text{ m} = 0{,}25 \text{ m}$

Pořadí hledaného členu posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$0{,}25 \text{ m} = 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n = 3$

Daný obsah má třetí největší trojúhelník.

Podle Pythagorovy věty má výška rovnostranného trojúhelníku velikost $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Pro obsah rovnostranného trojúhelníku pak dostáváme vztah $S = \frac{a \cdot v}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Úlohu bychom mohli řešit taky pomocí posloupnosti obsahů trojúhelníků. Ta je taky geometrická a její kvocient je druhou mocninou kvocientu posloupnosti délek stran trojúhelníků.

Kvocient posloupnosti obsahů je tedy $\frac{1}{4}$ a první člen $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$.

10 $K_0 = 40\,000$ Kč (počáteční vklad)
$p_1 = 0{,}02$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$p_2 = 0{,}013$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n_1 = 3$ (počet úrokovacích období)
$n_2 = 2$ (počet úrokovacích období)
$k = 0{,}85$ (zdaňovací koeficient)

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} = 42\,075$ Kč

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$
$K_5 = 43\,010$ Kč $\doteq 43\,000$ Kč $\rightarrow$ B)

---

11 $K_0 = 1\,500\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}055$ (úroková míra,vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient,v tomto případě se nemusí uvádět)

11.1 Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:
$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10} \doteq 2\,562\,000$ Kč

11.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Po dosazení:

$$p = \sqrt[10]{\frac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq 5{,}2\ \%$$

PLANIMETRIE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$135°$	
2	$S = 90\ \text{cm}^2$	
3	$4\ \text{cm},\ \left(80 - 32\sqrt{3}\right)\ \text{cm} \doteq 4{,}9\ \text{cm}$	
4	$\frac{64}{25}$	
5	$\cos\alpha = -\frac{1}{6},\ \alpha \doteq 99°\,36'$	
6	C	
7	$\lvert DE\rvert = \sqrt{74}\ \text{cm},\ \lvert GH\rvert : \lvert HF\rvert = 2 : 5$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1.1** D)
1.2 B)
1.3 E)
1.4 A)

Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

---

2 **2.1** C)
2.2 A)
2.3 B)
2.4 F)

2.1 Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou *p*, ale obě, tedy přímky *q* i *r*.
2.3 Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem *AB* (tedy *k*) bez krajních bodů *A* a *B*.
2.4 Jde o osu úsečky *AB*, což je přímka *p*, protože je na *AB* kolmá a prochází jejím středem.

---

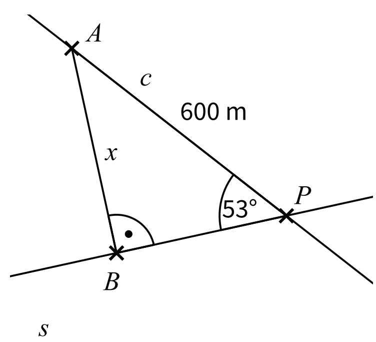
3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}\ \text{km} = 0{,}6\ \text{km} = 600\ \text{m}.$

Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka *s*, lesní cesta jako přímka *c*. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu *P* do bodu *A*. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice *x* vedené z bodu *A* na přímku *s*.

V pravoúhlém trojúhelníku *ABP* platí: $\frac{x}{\lvert AP\rvert} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\ \text{m} \doteq 480\ \text{m}\ \rightarrow$ A)



4 **4.1** V pravoúhlém trojúhelníku *ACD* s odvěsnami *AC* a *CD* platí:

$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\ \text{cm}^2$

$S = 7\ \text{cm}^2$

4.2 Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany *a*, *b*).

Protože máme zadány strany *b* a *c* a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako

$\mathrm{S} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. A dosadíme známé hodnoty.

$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$

$\mathrm{S} = 7{,}66\ \text{cm}^2$

$\mathrm{S} \doteq 8\ \text{cm}^2$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

---

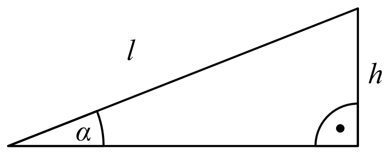
5 Pomůže nám obrázek vpravo.

Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin\alpha = \frac{h}{l}$;

kde *h* se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy $h = (630 - 440)\ \text{m} = 190\ \text{m}$

$\sin\alpha = \frac{190}{2\,100} = 0{,}090\,5$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}090\,5) = 5{,}19° \rightarrow$ A)



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

---

6 **6.1** $v = 8 \cdot \text{tg}\,35° = 5{,}6\ \text{m} \rightarrow$ B)

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \text{m} \rightarrow$ A)

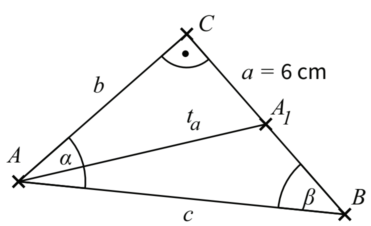
6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

$v = 5{,}9\ \text{cm} \rightarrow$ C)

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

		A	N
7.1	Je-li α = 30°, pak *c* = 12 cm.	☒	☐
7.2	Je-li *b* = 4 cm, pak $t_a = 5$ cm.	☒	☐
7.3	Je-li *b* = 4 cm, pak *c* = 8 cm.	☐	☒
7.4	Je-li β = 50°, pak je trojúhelník *ABC* rovnoramenný.	☐	☒



7.1 $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2} \rightarrow c = 2a = 12\ \text{cm}$

7.2 Těžnice t_a spojuje vrchol *A* se středem strany *a*, tedy bodem A_1.

$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3\ \text{cm}$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 platí

$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow t_a^2 = 4^2 + 3^2$

$t_a = 5\ \text{cm}$

7.3 $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{52}\ \text{cm} \doteq 7{,}21\ \text{cm} \neq 8\ \text{cm}$

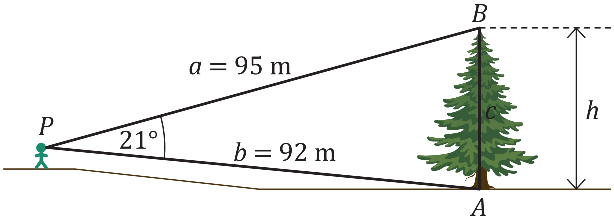
7.4 Je-li β = 50°, pak je α = 90° − 50° = 40°. Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musí mít dva vnitřní úhly shodné.

8 Pomůžeme si obrázkem.

V trojúhelníku *ABP* známe dvě strany a úhel, který svírají. Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m → D)

Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.



---

9 **9.1** Protože skutečná délka arboreta je 7 500krát větší než na plánu a skutečná šířka je také 7 500krát větší než na plánu, je skutečná rozloha $7\,500^2$krát větší než rozloha na plánu.

$S = 3{,}84 \cdot 7\,500^2\ \text{cm}^2 = 2{,}16 \cdot 10^8\ \text{cm}^2 = 21\,600\ \text{m}^2$
$S = 2{,}16$ ha

9.2 Označme délku arboreta jako *a*, šířku jako *b*. Protože má být délka o polovinu větší než šířka, platí $a = 1{,}5b$.

$S = a \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$1{,}5b \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$b^2 = 14\,400\ \text{m}^2$
$b = 120$ m
$a = 180$ m

---

10 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten je zmenšený. Budeme muset obě délky vypočítat.

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* platí:

$$\frac{|AC|}{8\ \text{cm}} = \cos 60°$$
$$|AC| = 4\ \text{cm}$$

Stranu *BD* vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu *A*, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.

$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$

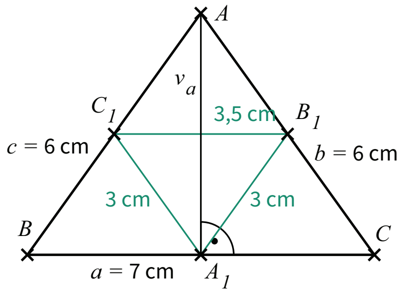
Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}797\,95\ldots$ cm

Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi:

$9{,}798 : 4 = 2{,}449\,48\ldots : 1$

Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$. → C)

11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný. Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$

Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.

$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$

$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm

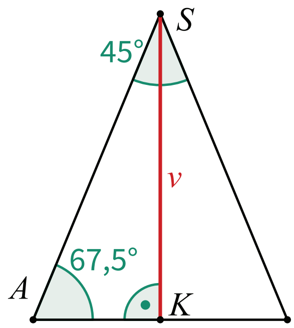
Dosadíme do vzorce: $S = \dfrac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057\ \text{cm}^2$.

$S \doteq 17\ \text{cm}^2 \ \rightarrow$ A)

---

12 **12.1** Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost $360° : 8 = 45°$, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

12.2 Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$\dfrac{v}{|AK|} = \text{tg}\ 67{,}5°$

$v = 2{,}5\ \text{m} \cdot \text{tg}\ 67{,}5° = 6{,}036\ \text{m}$

Obsah trojúhelníku $S = \dfrac{a \cdot v}{2} = \dfrac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09\ \text{m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy $3 \cdot 15{,}09\ \text{m}^2 = 45{,}27\ \text{m}^2 = 45\ \text{m}^2$.

---

13 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \dfrac{(a+c) \cdot v}{2}$.

Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$$2S = (a+c) \cdot v \qquad |:v$$

$$\frac{2S}{v} = a + c \qquad |-c$$

$$\frac{2S}{v} - c = a$$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm. $\rightarrow$ E)

---

14 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

$S = a \cdot v$; $S = \dfrac{e \cdot f}{2}$. $\rightarrow$ Platí tedy $a \cdot v = \dfrac{e \cdot f}{2}$.

Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$a = \dfrac{e \cdot f}{2v}$

$a \doteq 11$ cm $\rightarrow$ A)

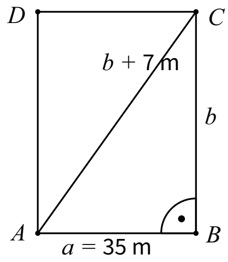
15 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.

Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.

Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84\ \text{m}^2$.

$S = 2\,940\ \text{m}^2$



---

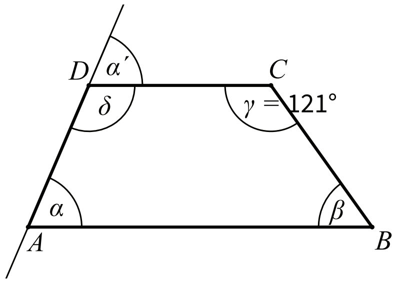
16 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α' (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α', proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.

Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.

Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\frac{2}{3}\delta$:

$$\frac{2}{3}\delta + \delta = 180°$$
$$\delta = 108°$$
$$\alpha = 72°$$

Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy $72° - 59° = 13°$.



---

17 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem $(400 - 2 \times 80)$ m $=$ $= 240$ m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce $o = 240$ m.

$$o = 2\pi r$$
$$r = \frac{o}{2\pi}$$
$$r = 38{,}197\ \text{m} \doteq 38\ \text{m}$$

---

18 **18.1** Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$$S = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$$
$$S = \pi \cdot \left(11^2 - 8^2\right)$$
$$S = 57\pi \;\rightarrow\; \text{E)}$$

18.2 Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$$
$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\,\pi \;\rightarrow\; \text{C)}$$

18.3 Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu $r_1 = 15$, poloměr většího kruhu $r_2 = (15 + 10) = 25$.

$$S = \frac{1}{8} \cdot \left(\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2\right)$$
$$S = \frac{1}{8} \cdot \left(\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2\right)$$
$$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi \;\rightarrow\; \text{D)}$$

19 Délku oběžné dráhy vypočítáme jako délku kružnice s poloměrem 384 400 km:

$o = 2\pi r = 2\,415\,256$ km.

Tuto dráhu vykoná Měsíc za 27,3 dne. Za jeden den tedy urazí dráhu 27,3× kratší.

$s = 88\,471$ km ≐ 88 000 km → E)

---

20 **20.1** F)

20.2 C)

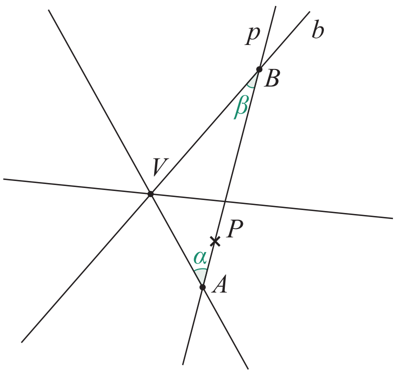
20.3 A)

20.4 D)

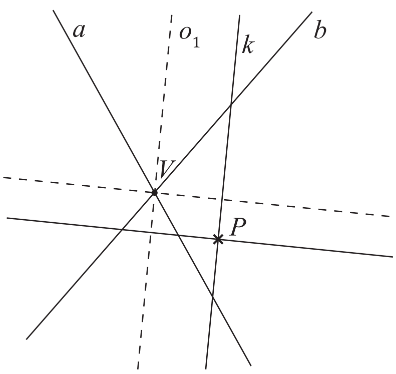
20.1 Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu $S\,[1; 1]$ o 90° v záporném smyslu, již to vychází.
20.2 Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.
20.3 Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.
20.4 Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor $u = (-2; 1)$.

---

21 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.



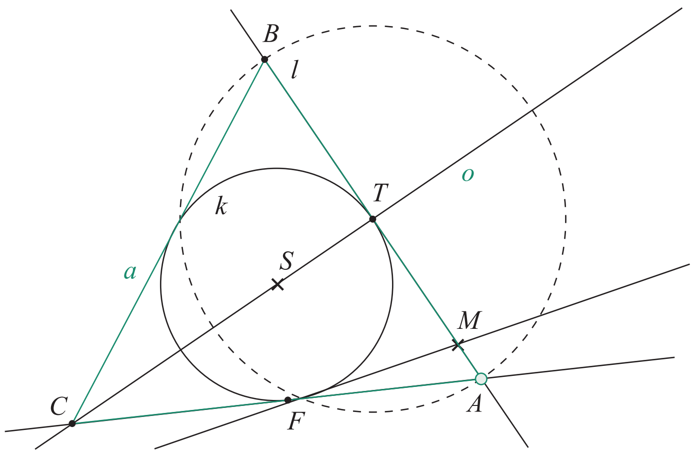
Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

22 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



STEREOMETRIE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	A	
2	Přibližně 2,06 cm od podstavy.	
3	B	
4	$v \doteq 14{,}2$ cm	
5	492,4 cm^3	
6	Povrch se zvětší o $2(3x^2 + 18)$ cm^2.	
7	216°	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle. Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je

$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je

$S' = 6 \cdot (0,75a)^2 = 6 \cdot 0,75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}562\,5$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25 % původního povrchu.

Změní-li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch o 43,75 %.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}562\,5 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch…? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je 100 % − 56,25 % = 43,75 %.

---

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$. S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu $\sin 390° = \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$

$V = 18 \cdot 24 \cdot 8 = 3\,456\ cm^2$. → E)

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268{,}1\ \text{cm}^3$.

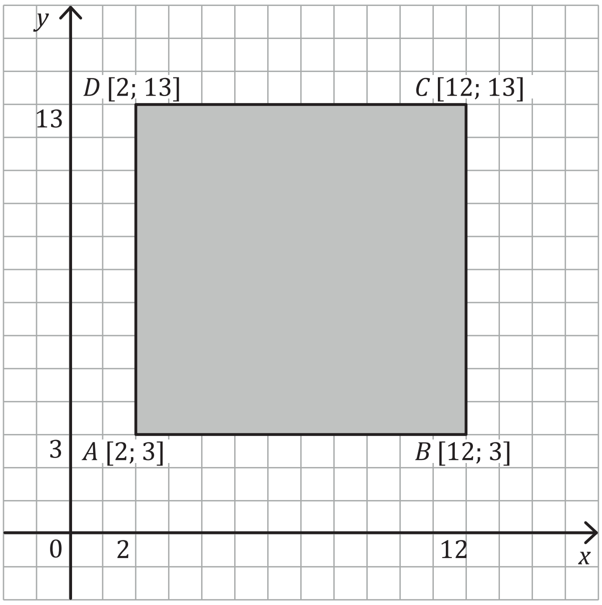
Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268{,}1\ \text{cm}^3 = 804{,}25\ \text{cm}^3$ a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804{,}25\ \text{cm}^3$, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule $S = 4\pi \cdot R^2 = 418\ \text{cm}^2$.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

---

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

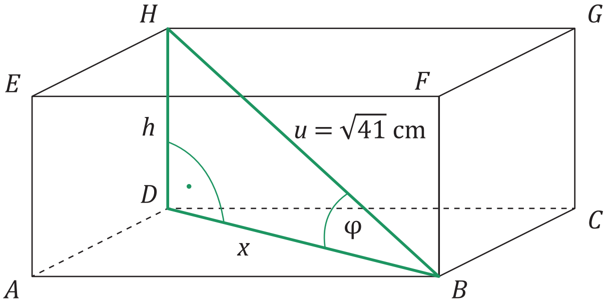
Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3}a^2 v = 433{,}3\ \text{j}^3$.

Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ \text{j}^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13$ j. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

---

5 **5.1** Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin \varphi = \frac{h}{u} \rightarrow h = u \cdot \sin 28° \doteq 3$ cm



5.2 Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos \varphi = \frac{x}{u} \rightarrow x = u \cdot \cos 28° \doteq 5{,}65$ cm

Navíc podstava je čtverec: $x = \sqrt{2} \cdot |AB| \rightarrow |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

Povrch celého kvádru je: $S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq 80\ \text{cm}^2$.

K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.

6 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavyválečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě: Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.

Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ .... 35 %

$\pi \cdot r^2$ .... 100 %

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28 \text{ cm.}$$

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

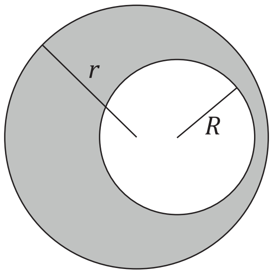
Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

$$S = 2 \cdot \left(\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2\right) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$$

$$S = 2\pi\left(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v\right)$$

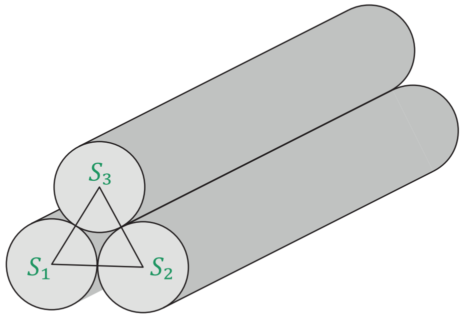
$S \doteq 8\,080 \text{ cm}^2$

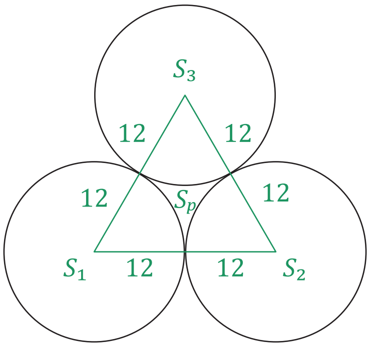
Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.



---

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný.





Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \doteq 249{,}4 \text{ cm}^2$$

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226{,}1 \text{ cm}^2$$

Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$$S_p = S - S_1 = 23{,}3 \text{ cm}^2$$

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu $v = 300$ cm:

$$V = S_p \cdot v = 6\,990 \text{ cm}^3 \doteq 7 \text{ dm}^3$$

Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru. K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů.
Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

---

8 $u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ m}$

$r = 0{,}65$ m

$60 \text{ hl} = 6\,000 \text{ l} = 6\,000 \text{ dm}^3 = 6 \text{ m}^3$

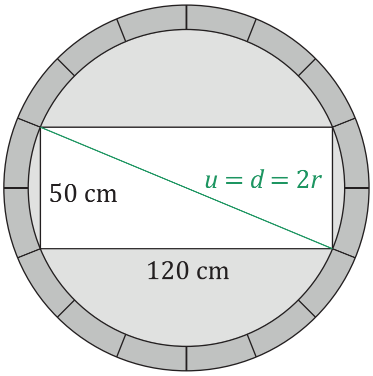
$0{,}74 \cdot V = 6$

$V \doteq 8{,}1 \text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$

$v \doteq 6{,}1 \text{ m} \rightarrow$ A)



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce“, což odpovídá 74 % hloubky studně.

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729\ \text{cm}^2 = 12\pi\ \text{cm}^2$.
Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.
Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:
$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.
Pro délku hrany krychle platí: $a = \dfrac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.
Objem krychle je potom: $V = a^3 = 8\ \text{cm}^3$.

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

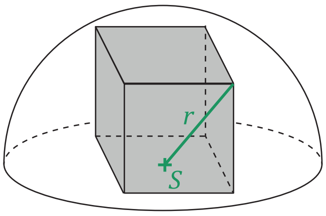
---

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.
Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm, poloměr horní podstavy je $r_1 = 12$ cm a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot v \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$.
Objem kyblíku je tedy: $V = 7\,671{,}77\ \text{cm}^3$,
tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7\,671{,}77\ \text{cm}^3 = 92\,061\ \text{cm}^3 \doteq 92$ litrů.

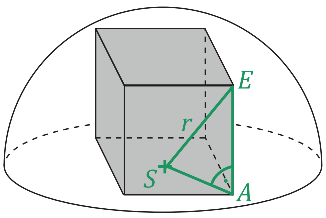
V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

---

11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle. Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAE:
$r^2 = 8^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2 \rightarrow r = \sqrt{96}\ \text{cm} = 4 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}$
Pro délku vnitřního průměru misky platí: $d = 8 \cdot \sqrt{6}$ cm.

Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

A N

12 **12.1** $S_{koule} = S_{krychle}$ ☒ ☐

$$4\pi r^2 = 6a^2$$
$$r^2 = \frac{3a^2}{2\pi}$$
$$r = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$
$$\left.\begin{array}{l} V_{koule} = \dfrac{4}{3}\pi\left(a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq 1{,}38a^3 \\ V_{krychle} = a^3 \end{array}\right\} V_{krychle} < V_{koule}$$

12.2 $3 \cdot 10^8\ \text{cm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = 3 \cdot 10^5\ \text{dm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 =$ ☒ ☐
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{l} = 43\,000\ \text{hl}$

12.3 $V = 1{,}5$ l ☐ ☒
$\dfrac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\ \text{l} = 900\ \text{ml}$

12.1 V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2 Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3 Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

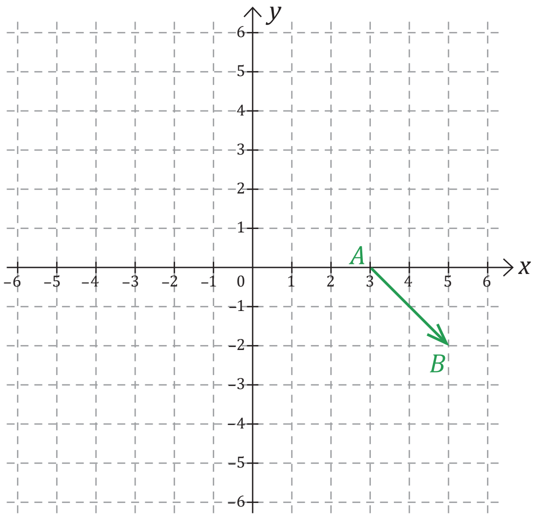
DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$A = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$	
2	$D\,[-8; 1]$	
3	$o: x + 2y - 6 = 0$	
4	$c = \pm 5\sqrt{2}$	
5	Přímky jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod.	
6	$\alpha \doteq 36°\,52'$	
7	$m: y + 3 = 0$	
8	$k = 28$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $A\,[3; 0]$, $B\,[5; -2]$



$\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky → C)

Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru (3; −4). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

			A	N
2	**2.1**	Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé.	☐	☒
	2.2	Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k-násobkem jeden druhého.	☐	☒
	2.3	Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p.	☒	☐

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \ \rightarrow \ q\colon 3x - y + c = 0$

$B \in q\colon 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \ \rightarrow \ c = -15$

$q\colon 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

---

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \ \rightarrow \ r\colon x + 3y + c = 0$

$A \in r\colon 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \ \rightarrow \ c = 11$

$r\colon x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky p zapíše normálový nebo směrový vektor přímky r a rovnici přímky r. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce p.

---

5 $\overrightarrow{n_{o_{AB}}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \ \rightarrow \ o_{AB}\colon 4x + 4y + c = 0 \qquad |:4$

$x + y + c = 0$

$S_{AB}\,[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}\colon 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + c = 0$

$3 - 2 + c = 0$

$c = -1$

$o_{AB}\colon x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu S úsečky AB napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce AB procházející bodem S.

---

6 $\overrightarrow{AC} = (1; 7) = \overrightarrow{S_{AC}}$

$\overrightarrow{n_{AC}} = (7; -1)$

$\leftrightarrow AC\colon \ 7 \cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC\colon \ 7 \cdot 1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

$7x - y - 5 = 0 \ \rightarrow$ D)

$\overrightarrow{BD} = (-7; 1) = \overrightarrow{S_{BD}}$

$\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 7)$

vyhovuje úhlopříčka AC

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku AC, nebo BD. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

---

7 **7.1** $\vec{u_p} = (1; -1) \ \rightarrow \ \vec{n_p} = (1; 1) \ \rightarrow$ F)

7.2 $\vec{u_q} = (1; 0) \ \rightarrow \ \vec{n_q} = (0; -1)$, resp. $\vec{n_q} = (0; 1) \ \rightarrow$ B)

7.3 $\vec{u_r} = (1; 1) \ \rightarrow \ \vec{n_r} = (1; -1) \ \rightarrow$ E)

7.4 $\vec{u_s} = (0; 1) \ \rightarrow \ \vec{n_s} = (-1; 0)$, resp. $\vec{n_s} = (1; 0) \ \rightarrow$ A)

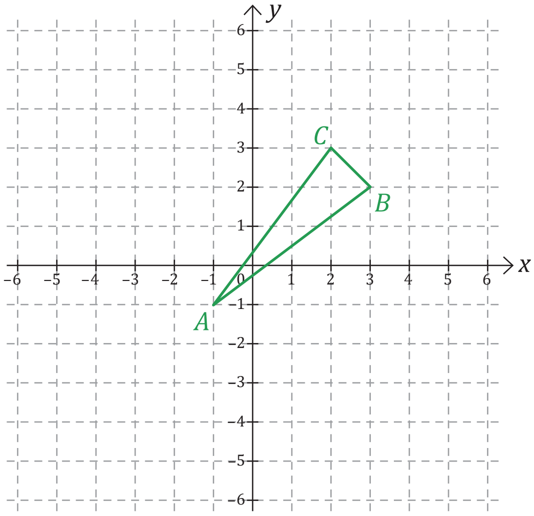
Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky q a s, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

8

		A	N
8.1	vektor $\overrightarrow{BA} = (2; 1)$	☐	☒
8.2	vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$	☐	☒
8.3	vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1) \ \rightarrow \ 3 \cdot AB = (-6; -3)$	☒	☐

Žák může chybně počítat v úloze **8.1** se souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{AB}$ a ne vektoru $\overrightarrow{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy **8.2** a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy **8.1**. V úloze **8.3** se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\overrightarrow{AB}$.

9



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

---

10 $a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

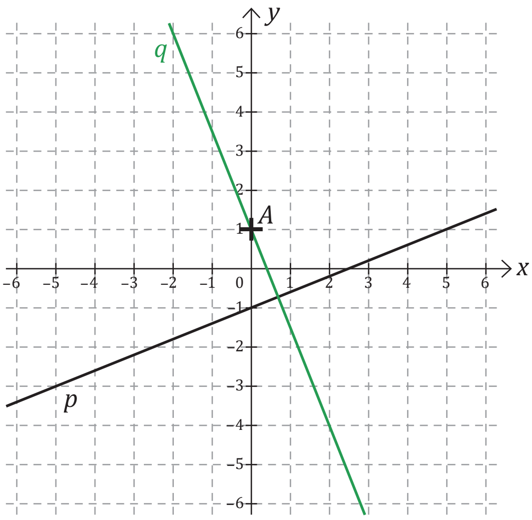
Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

---

11 $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \dfrac{24}{25} \rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

12



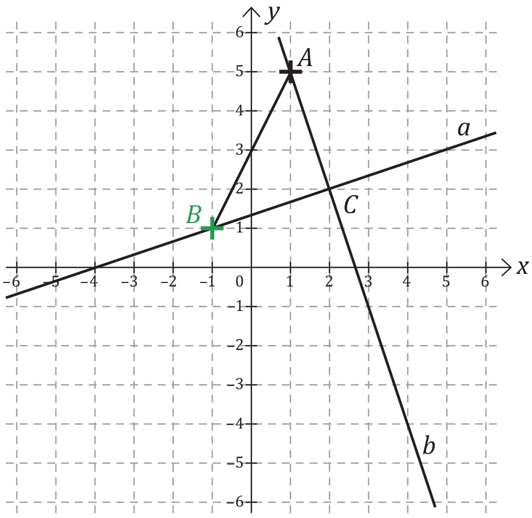
$\vec{u}_p = (5; 2) = \vec{n}_q \rightarrow q: 5x + 2y + c = 0$

$A \in q: 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + c = 0 \rightarrow c = -2$

$q: 5x + 2y - 2 = 0$

Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

13



$B = [-1; 1] \rightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{u_c} = (2; 4)$

$\vec{n_c} = (4; -2) \rightarrow c\colon 4x - 2y + c = 0 \quad |:2$

$A \in c\colon 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + c = 0 \rightarrow c = 3$

$c\colon 2x - y + 3 = 0$

Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu B lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě C, poloměr CA je přenesen na přímku a. Z obrázku žák určí souřadnice bodu B. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky AB.

---

14 $B\,[0; 0]$, $D\,[-3; 3] \rightarrow \overrightarrow{BD} = (-3; 3)$

$u_{BD}\colon\ x = -3t,$ resp. $x = t$

$y = 3t;\ t \in \mathbb{R}$ $\qquad y = -t;\ t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů B a D. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\overrightarrow{AC}$ a z normálového vektoru $\overrightarrow{AC}$ vypočítat směrový vektor.

---

15 $\vec{n_o} = \overrightarrow{AB} = (2; -4) \rightarrow o\colon 2x - 4y + c = 0 \quad |:2$

$S_{AB}\,[2; 0] \in o\colon 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = -2$

$o\colon x - 2y - 2 = 0$

$P_x\,[x; 0] \rightarrow P_x = S_{AB}\,[2; 0]$

$P_y\,[0; y]\colon 0 - 2y - 2 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow P_y\,[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou x a y jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

---

16 $\vec{n_p} = (2; -3) \rightarrow \vec{u_p} = (3; 2)$

$\vec{u_q} = (2; -3) \rightarrow \vec{n_q} = (3; 2)$

$\vec{n_p} = \vec{u_q} = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky p a parametrické rovnice přímky q žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

---

17 **17.1** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \rightarrow$ F)

17.2 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \rightarrow$ C)

17.3 $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \rightarrow$ A)

17.4 $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \rightarrow$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$

a: $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

---

19 Body A a B jsou osově souměrné podle osy o $\rightarrow$ $B\,[4; 3]$

$\vec{u_o} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; -3)$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0$ $\rightarrow$ $c = 1$

$\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

---

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a -2.

Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A\,[3; 0]$ a koncovým bodem $B\,[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	200 čísel	
2	6 týmů	
3	$-2p^2 + 13p - 36$; podmínky: $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 8$	
4	$P = \dfrac{1}{32}$	
5	697 680 způsobů; $P = \dfrac{1}{45}$	
6	16 bodů	
7	8 dětí	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1. způsob** – s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**.
Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

pro rozpis faktoriálu $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=$$

$$=\frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!}-\cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}}+\cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}+\frac{8!}{5!\cdot 3!}-\cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}+\cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály. Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**. Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$

$\binom{n}{0} = 1$ proto platí: $\binom{8}{0} = 1$

$$\frac{\binom{8}{0} - \cancel{\binom{8}{1}} + \cancel{\binom{8}{2}} + \binom{8}{5} - \cancel{\binom{8}{6}} + \cancel{\binom{8}{7}}}{5! - 3!} = \frac{1 + 56}{120 - 6} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

---

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)!}{(x-1)!} - 2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} =$

$= \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!} - \frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!} =$

$= (x+3)\cdot(x+2) + (x+1)\cdot x - 2x(x-1) = x^2 + 2x + 3x + 6 + x^2 + x - 2x^2 + 2x =$

$= 8x + 6 \;\rightarrow\;$ A)

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou *x*. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

---

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

	A	N
3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$	☒	☐
3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$	☒	☐
3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$	☒	☐
3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$	☐	☒

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \frac{20!}{17!\cdot(20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!}$

proto rovnost platí: 1 140 = 1 140

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$

platí: $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \;\rightarrow\; 2 = 22$

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi. Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

4 Jedná se o kombinace bez opakování.

4.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$$K(3, 7) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

4.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$$K(3, 6) + K(3, 9) = \binom{6}{3} + \binom{9}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 104$$

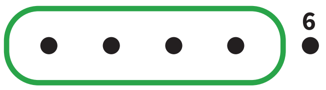
4.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$$K(3, 9) + K(3, 5) = \binom{9}{3} + \binom{5}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 94$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce. Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací muže být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích. Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

---

5 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o variace bez opakování, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:



zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

$V(4, 8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680 \rightarrow$ D)

K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici. Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

---

6 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu. Jedná se tedy o kombinace bez opakování.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2, 6) \cdot K(1, 6) = \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1} = 15 \cdot 6 = 90 \rightarrow \text{B)}$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací. Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací muže být jiný počet mužů a žen.

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

A N

7.1 Příznivé výsledky jsou součty: $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $4 + 1$, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$. ☒ ☐

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Příznivé výsledky jsou součty: $1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1$, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$. ☒ ☐

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti opačného jevu C'. ☐ ☒

Platí $P(C) = 1 - P(C')$.

Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, proto celkový počet příznivých výsledků je m = 5.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz výše), pro součet 6 je $m = 5$ (viz výše). ☒ ☐

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

---

8 **8.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen. To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:

$V'(6, 8) = 8^6 = 262\,144$

8.2 Máme 4 způsoby umístění slova PES. Každý z těchto způsobů má 5.4.3 = = 60 možností, jak uspořádat zbytek písmen. Celkem tedy máme 4.60 = = 240 možností

---

9 **9.1** Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \% \ \rightarrow \ \text{D)}$$

9.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí. Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \% \ \rightarrow \ \text{A)}$$

9.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka. Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \% \ \rightarrow \ \text{C)}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

10 **10.1** Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93. Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.

Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 = 0{,}86$, proto 86 % → C)

10.2 Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.

Pravděpodobnost, že Ferrari nedokončí závod, vypočítáme jako pravděpodobnost jevu opačného:

$P(B) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$, proto 19 % → E)

10.3 Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. → že nedokončí závod je 0,24.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. → že nedokončí závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 = 0{,}06$, proto 6 % → B)

10.4 Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86 a tudíž že ho nedokončí je 0,14.

Závod dokončí Williams, ale nedokončí Force India:

P (D) = $0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}12$, a to je 12 % → F)

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáku pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

---

11 Víme, že průměr dosažených bodů je 78 (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.

Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.

Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmů:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{496} = 78 \quad | \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1\,092$$

$$3x = 165 \quad | : 3$$

$$x = 55$$

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

---

12 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky. Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno.

Pro medián platí, že soubor hodnot musí být uspořádaný podle velikosti!

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$), tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\bar{x} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

WTA 2016	průměr	modus	medián
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	průměr	modus	medián
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	průměr	modus	medián
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

Proto je správná varianta D).

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu. Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti. Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu. Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

TEST 1

1 Vyjádříme všechna čísla jako zlomky se jmenovatelem 42, protože 42 je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 6, 7.

$-\frac{17}{6} = -\frac{119}{42}$ $\quad -\frac{7}{3} = -\frac{98}{42}$ $\quad \frac{2}{7} = \frac{12}{42}$ $\quad \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$

Do intervalu $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{105}{42}; \frac{28}{42}\right)$ tedy patří čísla $-\frac{98}{42} = -\frac{7}{3}$ a $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

$-\frac{7}{3} + \frac{2}{7} = -\frac{98}{42} + \frac{12}{42} = -\frac{86}{42} = -\frac{43}{21}$

Není vhodné převádět zlomky na desetinná čísla.
$-\frac{43}{21}$ případně lze vyjádřit jako smíšené číslo $-2\frac{1}{21}$.

---

2 Přímý úhel má velikost 180° nebo π radiánů. Tento vztah využijeme k vyjádření úhlu $\frac{7}{10}\pi$ radiánů ve stupňové míře.

$\frac{7}{10}\pi \text{ rad} = \frac{7}{10} \cdot 180° = 126°$

$\alpha = 180° - 126° = 54°$

$\alpha = 54°$

Druhá možnost řešení:
Vypočítáme nejprve velikost úhlu α v obloukové míře:
$\alpha = \left(\pi - \frac{7}{10}\pi\right) \text{ rad} = \frac{3}{10}\pi \text{ rad}$
a výsledek převedeme na stupňovou míru:
$\alpha = \frac{3}{10}\pi \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$.

---

3 Dosazovací metodou (využijeme toho, že v druhé rovnici je vyjádřena neznámá y, dosadíme za y do první rovnice, vyřešíme rovnici s jednou neznámou x):

$$\begin{aligned} x &= 2(2x + 7) + 4 \\ x &= 4x + 14 + 4 \\ -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $y = 2x + 7$ hodnotu x a vypočítáme y: $y = 2 \cdot (-6) + 7 = -5$

$K = \{[-6; -5]\}$

Použili jsme jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, proto provádět zkoušku není nutné.
Bylo možné využít x vyjádřené z první rovnice pro dosazení do druhé rovnice:
$y = 2(2y + 4) + 7$, pak $y = -5$ a dopočítáme $x = -6$.

Je možné použít též sčítací metodu (uspořádáme umístění neznámých v obou rovnicích, druhou rovnici vynásobíme dvěma a obě rovnice sečteme, vyřešíme rovnici s jedinou neznámou x):

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + y &= 7 \\ \hline -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme $y = -5$.

---

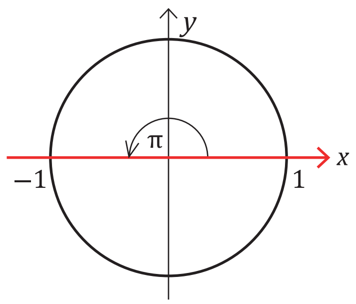
4 Funkce $y = \cos x$ nabývá hodnoty -1 pro všechna $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Použijeme substituci $x = \frac{\pi}{3} + t$; řešíme tedy rovnici $\frac{\pi}{3} + t = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z této rovnice vyjádříme $t = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

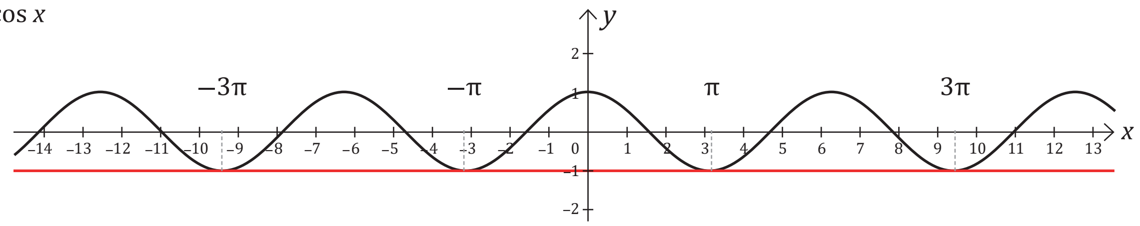
Hledáme řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi)$: pro $k = 0$ je $t = \frac{2\pi}{3}$ a pro žádné jiné celé číslo k nepatří t do intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

$t = \frac{2\pi}{3}$

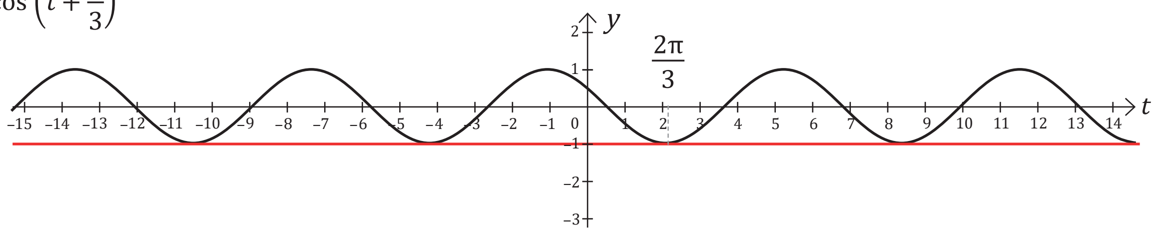
Lze ilustrovat na grafu funkce (viz následující strana), případně na jednotkové kružnici.



$y = \cos x$



$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$



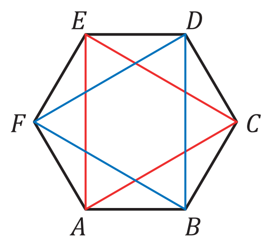
5 Pravděpodobnost náhodného jevu počítáme jako poměr počtu výsledků pokusu jevu příznivých m a počtu všech možných výsledků pokusu n. Náhodným pokusem se v tomto případě rozumí výběr tří vrcholů ze šesti vrcholů šestiúhelníku.

$n = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

Rovnostranný trojúhelník lze sestrojit právě dvěma způsoby (červený trojúhelník ACE a modrý trojúhelník FBD), $m = 2$.

Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Nezáleží na pořadí výběru vrcholů trojúhelníku.



6 $\frac{1}{2} - 3x \geq -2 + x$

Od obou stran nerovnice odečteme x a $\frac{1}{2}$:

$-4x \geq -2 - \frac{1}{2}$

$-4x \geq -\frac{5}{2}$

Obě strany nerovnice dělíme číslem −4:

$x \leq -\frac{5}{2} : (-4)$

$x \leq \frac{5}{8}$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší nebo rovna $\frac{5}{8}$, tedy všechna čísla z intervalu $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Při dělení záporným číslem se obrací znak nerovnosti.
Mohli bychom postupovat i takto:
K oběma stranám nerovnice přičteme výraz $3x + 2$, dostaneme nerovnici

$\frac{1}{2} + 2 \geq x + 3x$, tedy $\frac{5}{2} \geq 4x$.

Dělíme obě strany rovnice kladným číslem 4 (bez obracení znaku nerovnosti) a dostaneme

$\frac{5}{8} \geq x$.

Je nutno dát pozor na správné přečtení této nerovnosti – vyjadřuje pořád skutečnost, že x je **menší nebo rovno** $\frac{5}{8}$, tedy $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

7 Mezi množstvím těsta a počtem rohlíčků je přímá úměrnost, tedy Katka bude potřebovat $240 \cdot \frac{90}{60}$ g těsta.

360 rozdělíme v poměru 4 : 2 : 5 : 5, na máslo připadá 90 g.

Katka bude potřebovat 90 g másla.

Dělení hmotnosti 360 g v daném poměru: $4 + 2 + 5 + 5 = 16$,

$\frac{360}{16} \cdot 4\ \text{g} = 90\ \text{g}$.

Jiná možnost:
Určíme nejdříve hmotnost másla při pečení 60 rohlíčků:

$\frac{240}{16} \cdot 4\ \text{g} = 60\ \text{g}$.

Proto pro 90 rohlíčků bude třeba 90 g másla.

8 V geometrické posloupnosti je podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů rovný kvocientu posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Tedy $\frac{a_2}{a_1} = q$ a také $\frac{a_3}{a_2} = q$, proto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Dosadíme $\left(a_1 = 2\sqrt{2}, a_2 = 4, a_3 = m\right)$:

$$\frac{m}{4} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$m = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

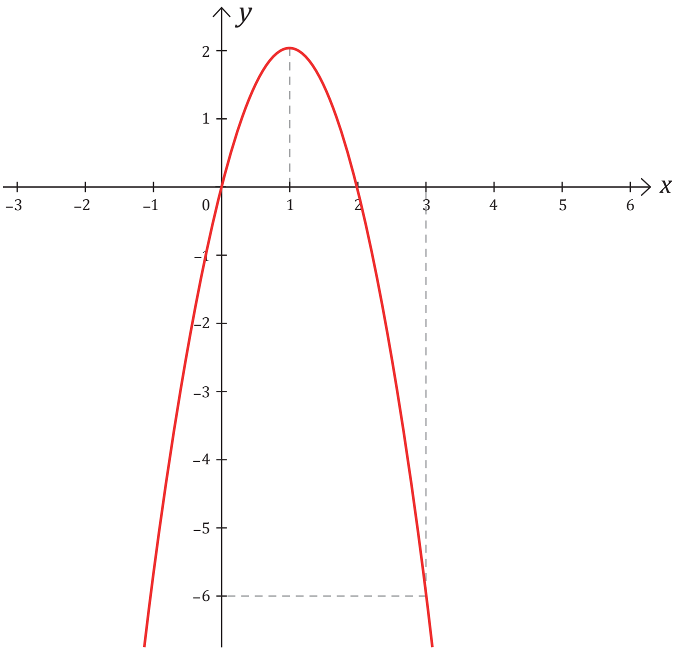
$$m = 4\sqrt{2}$$

Také jsme mohli z prvních dvou členů určit kvocient $q = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Pak $\frac{m}{4} = \sqrt{2}$; $m = 4\sqrt{2}$.

---

9 Grafem každé kvadratické funkce je parabola. Protože funkce f nabývá maxima, bude jejím grafem parabola „otevřená směrem dolů“.



Graf hledané funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy, proto $f(0) = 0$, a tedy $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, tedy $c = 0$.

Kvadratická funkce nabývá svého maxima pro $x = -\frac{b}{2a}$,

proto $-\frac{b}{2a} = 1$ ... označíme (1).

Pro $x = 3$ nabývá hledaná funkce hodnotu -6,
proto $-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ ... označíme (2).

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme $a = -2$ a $b = 4$.

$a = -2, b = 4, c = 0$

Ze souměrnosti paraboly podle její osy vyplývá, že $f(3) = f(-1)$. Úlohu pak lze řešit pomocí soustavy rovnic:

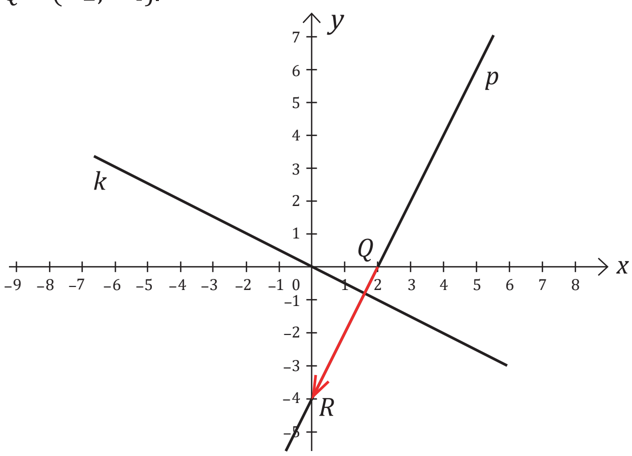
$f(0) = 0 \rightarrow$
$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$
$f(3) = -6 \rightarrow$
$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -6$
$f(-1) = -6 \rightarrow$
$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$

(Dostaneme $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$.)

Ze souměrnosti by bylo možné použít také vztah $f(2) = f(0)$.

10 Hledáme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $k\colon ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b v této rovnici jsou souřadnice normálového vektoru přímky k $\left(\vec{n}_k = (a; b)\right)$. Přímka k má být kolmá k přímce p, proto jejím normálovým vektorem je vektor $\vec{n}_k = R - Q$ (nebo jeho libovolný nenulový násobek).

Souřadnice vektoru $\vec{n}_k$ určíme jako rozdíl souřadnic bodů R a Q:
$\vec{n}_k = R - Q = (-2; -4)$.



Ze souřadnic směrového vektoru přímky p získáme $a = -2$ a $b = -4$, obecnou rovnici přímky k můžeme zapsat ve tvaru $k\colon -2x - 4y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c, k tomu využijeme údaj, že přímka k prochází počátkem souřadnicové soustavy $P\,[0; 0]$.

$P\,[0; 0] \in k \;\rightarrow\; -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c = 0 \;\rightarrow\; c = 0$

Získali jsme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $-2x - 4y = 0$, po vydělení -2 máme $k\colon x + 2y = 0$.

Řešení užitím úsekového tvaru rovnice přímky p:
Využijeme toho, že přímka p je určena svými průsečíky se souřadnicovými osami:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1,$$

případně rovnici převedeme na směrnicový tvar $y = 2x - 4$.
Vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek je

$$a' = -\frac{1}{a}.$$

Přímka k bude mít směrnici $-\frac{1}{2}$

a směrnicovou rovnici $y = -\frac{1}{2}x$.

Po úpravě získáme obecnou rovnici $x + 2y = 0$.

---

11 Označíme počet všech příkladů ve sbírce x. Pomocí proměnné x zapíšeme údaje z textu:

Počet příkladů vyřešených do konce února .... $\frac{x}{3}$

Počet zbývajících příkladů na konci února .... $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

Počet příkladů vyřešených v březnu .... $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$

Počet příkladů vyřešených do konce března .... $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x.$

Na duben a květen tedy zbyla polovina všech příkladů, z ní jednu polovinu (tedy čtvrtinu z celkového počtu příkladů) vyřešila Ema v dubnu.

Sestavíme rovnici: $\frac{x}{4} = 54$, tedy $x = 216$.

Provedeme kontrolu správnosti:

v únoru $\frac{216}{3} = 72$ příkladů, v březnu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 36$ příkladů,

v dubnu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 54$ příkladů, v květnu 54 příkladů,

$72 + 36 + 54 + 54 = 216.$

Sbírka obsahovala 216 příkladů.

Při řešení slovní úlohy nezapomeňte zapsat, jaký význam má (co označuje) zvolená neznámá, a správně formulovat odpověď na položenou otázku.

12 Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (v tomto případě $a = |BC|$ a v_a je vzdálenost bodu K od strany BC, tedy $v_a = |AB| = p$). Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku BCK, musíme znát délku strany BC a velikost výšky k této straně. Výpočty budeme provádět v centimetrech.

Označíme $v_a = |AB| = p$; $a = |BC| = p - 2$.

Jediné, co potřebujeme určit, je číslo p. K tomu využijeme údaj o obvodu obdélníku $ABCD$ a vzorec pro výpočet obvodu obdélníku.

$o = 2\big(|AB| + |BC|\big)$

$o = 2[p + (p - 2)] = 2(2p - 2) = 4p - 4$

Dosadíme $o = 48$:

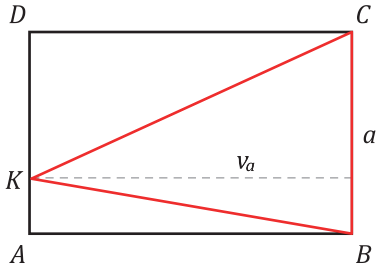
$48 = 4p - 4$

Po vyřešení rovnice $p = 13$, potom $v_a = |AB| = 13$, $a = |BC| = p - 2 = 13 - 2 = 11$.

Nyní můžeme vypočítat obsah trojúhelníku BCK: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{11 \cdot 13}{2} = 71{,}5$.

Trojúhelník má obsah 71,5 cm^2.

Všimněte si, že obsah trojúhelníku BCD nezávisí na umístění bodu K na úsečce AD, „posunutím“ bodu K po úsečce AD se velikost výšky trojúhelníku BCK na základnu BC nezmění.



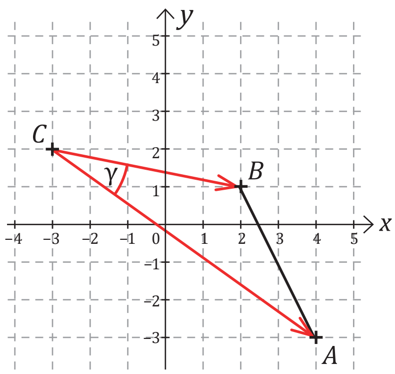
---

13 $\sqrt{9a^4 + 16\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{9a^4 + 16a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

Připomeňte si, že $\sqrt{m^2} = |m|$. Pro $\sqrt{25a^4}$ bychom měli zapsat $\sqrt{25a^4} = |5a^2|$, ale víme, že $5a^2 \geq 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Tedy $|5a^2| = 5a^2$.

---

14 **14.1** Vnitřní úhel u vrcholu C (v obrázku označen γ) je úhel sevřený vektory $\vec{u} = A - C$ a $\vec{v} = B - C$.



$\vec{u} = (7; -5)$, $\vec{v} = (5; -1)$

Použijeme vzorec pro výpočet úhlu dvou vektorů:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} =$$

$$= \frac{35 + 5}{\sqrt{49 + 25} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}911\,9$$

$\gamma = 24°\,14'$

Při výpočtu $\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}911\,9$ není vhodné poslední hodnotu zapisovat, ponecháme ji v paměti kalkulátoru a rovnou určíme γ. Je-li nutné ji zapsat (a přitom zaokrouhlit), je pro požadovanou přesnost nutné zaokrouhlit alespoň na 4 desetinná místa.

Pozn.: V analytické geometrii obvykle zapisujeme vzdálenosti bez konkrétních jednotek. V této úloze je tedy hledaná vzdálenost rovna 2,1 jednotek – rozumí se jednotky použité souřadnicové soustavy.

14.2 Velikost výšky v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC.

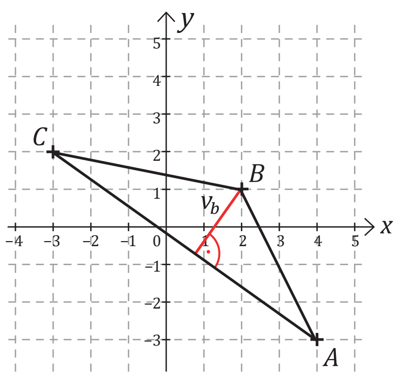
Směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{u} = A - C = (7; -5)$, přímka AC má tedy obecnou rovnici $5x + 7y + c = 0$, konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu A (případně C):

$5 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) + c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$, tedy $\leftrightarrow AC$: $5x + 7y + 1 = 0$.

Použijeme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu B od přímky:

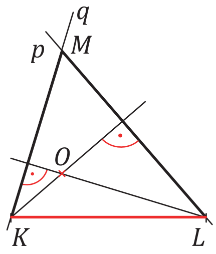
$$v_b = v(B, \leftrightarrow AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{5^2 + 7^2}} = \frac{18}{\sqrt{74}} = \frac{18\sqrt{74}}{74} = \frac{9\sqrt{74}}{37} \doteq 2{,}1$$



Výška v_b má velikost přibližně 2,1 (jednotek).

15 Předpokládáme, že existuje požadovaný trojúhelník – načrtneme ho, vyznačíme zadané prvky.



Hledáme bod M:

$M \in p$ ($p \perp \leftrightarrow KO \wedge L \in p$)

(čteme: M leží na přímce p, která je kolmá k přímce KO a prochází bodem L)

$M \in q$ ($q \perp \leftrightarrow LO \wedge K \in p$)

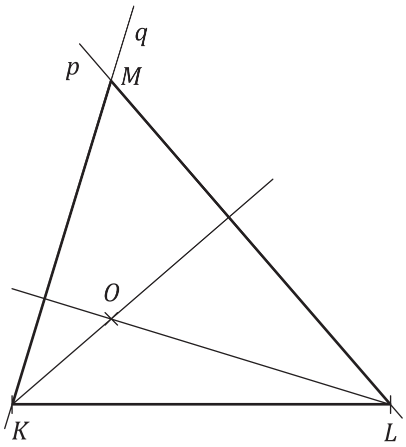
(čteme: M leží na přímce q, která je kolmá k přímce LO a prochází bodem K)

Tedy $M \in p \cap q$.

Provedeme konstrukci:

1. p; $p \perp \leftrightarrow KO \wedge L \in p$
2. q; $q \perp \leftrightarrow LO \wedge K \in p$
3. M; $M \in p \cap q$
4. $\triangle KLM$

Úloha má v rovině jedno řešení.



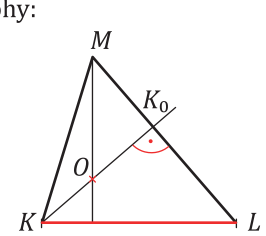
Náčrt provádíme tužkou „od ruky“. Je dobré barevně vyznačit známé prvky. Konstrukci provádíme pečlivě – ořezanou tužkou, použijeme pravítko, kružítko s ořezanou tuhou, případně úhloměr.

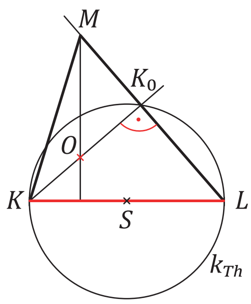
Poznámka: V „ostrých“ maturitních testech je nutné v záznamovém archu všechny čáry obtáhnout propisovací tužkou – záznamové archy se pro účely opravování skenují a na naskenovaném obrázku není obyčejná tužka dobře viditelná.

Jiný způsob řešení:

Trojúhelník načrtneme, pojmenujeme patu výšky K_0.

Rozbor úlohy:





Neznámé body jsou K_0 a M.

Určíme nejprve bod K_0:

- K_0 je pata výšky z vrcholu K, musí ležet na polopřímce KO … $K_0 \in \mapsto KO$
- Úhel u K_0 je pravý, bod K_0 musí ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou KL … $K_0 \in k_{Th}(KL)$
- $K_0 \in \mapsto KO \cap k_{Th}(KL)$

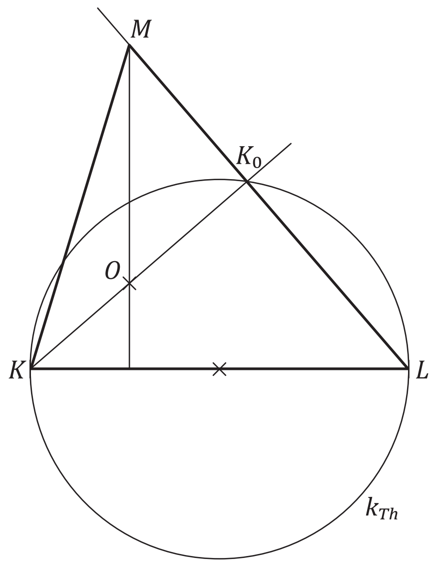
Dále hledáme bod M:

- M leží na kolmici p vedené bodem O k úsečce KL (její částí je výška v_m)
- M leží na polopřímce LK_0
- $M \in \leftrightarrow p \cap \mapsto LK_0$

Provedeme konstrukci:

1. $\mapsto KO$
2. $k_{Th}(KL)$
3. K_0; $K_0 \in \mapsto KO \cap k_{Th}(KL)$
4. p; $O \in p$, $p \perp KL$
5. $\mapsto LK_0$
6. M; $M \in p \cap \mapsto LK_0$
7. $\triangle KLM$

Úloha má v rovině jedno řešení.



16 Pro dláždění dna bazénu bude potřeba $450 : 30 = 15$ dlaždic v jedné řadě (podél delší stěny bazénu). Stejných takových řad je nutno položit $300 : 30 = 10$. Na vydláždění dna bazénu je potřeba $15 \cdot 10 = 150$ dlaždic.
Pro dláždění kratší stěny bazénu jsou potřeba $120 : 30 = 4$ řady dlaždic, v každé řadě $300 : 30 = 10$ dlaždic. Na vydláždění obou kratších stěn potřebujeme $2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$ dlaždic.

Pro dláždění delší stěny bazénu jsou potřeba $120 : 30 = 4$ řady dlaždic, v každé řadě $450 : 30 = 15$ dlaždic. Na vydláždění obou delších stěn potřebujeme $2 \cdot 4 \cdot 15 = 120$ dlaždic.

Pro celý bazén potřebujeme $150 + 80 + 120 = 350$ dlaždic.

Počet balení získáme vydělením celkové spotřeby dlaždic počtem dlaždic v jednom balení $350 : 12 = 29{,}2$, zaokrouhlíme nahoru na 30. → D)

Můžeme řešit i tak, že vypočítáme obsah dna a stěn bazénu v cm^2 a tento vydělíme obsahem jedné dlaždice.

$S = (450 \cdot 300) + 2 \cdot (300 \cdot 120) +$
$+ 2 \cdot (450 \cdot 120) = 315\,000$

$350 : (30 \cdot 30) = 350$

Při tomto způsobu výpočtu je potřeba dát pozor na to, jestli dlaždice nebude nutné řezat, tedy jestli všechny rozměry dlážděných obdélníků jsou celočíselnými násobky délky strany čtvercové dlaždice.

---

17 Upravíme výraz V: $V = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+3}{2(x+1)} = \dfrac{x+3}{2x+2}$. → B)

Čitatel rozložíme užitím Vietových vzorců. Pro kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ platí $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Snadno uhádneme (a ověříme), že $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, a proto lze trojčlen $x^2 + 2x - 3$ rozložit na součin $(x+3)(x-1)$.

---

18 Předpis A zadává lineární funkci, jejímž grafem je přímka – možnost A vyloučíme.

Předpis B zadává kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola – možnost B vyloučíme.

Předpis C zadává exponenciální funkci, která nikdy nenabývá záporných hodnot, žádná část jejího grafu nemůže ležet pod souřadnicovou osou x – možnost C vyloučíme.

Předpis E zadává lineární lomenou funkci, jejím grafem je hyperbola (se dvěma větvemi), navíc $f(0) = (0 + 1)^{-1} = 1 \neq 0$, možnost E vyloučíme.

Zbývá možnost D), pro jistotu ještě ověříme:

f: $y = \log_2(x+1)$

je definována pro $x + 1 > 0$, tedy pro $x > -1$, odpovídá funkci na obrázku

$x = 0 \ \rightarrow \ y = \log_2 1 = 0$, odpovídá funkci na obrázku
$x = 1 \ \rightarrow \ y = \log_2 2 = 1$, odpovídá funkci na obrázku
$x = 3 \ \rightarrow \ y = \log_2 4 = 2$, odpovídá funkci na obrázku

$x = -\dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ y = \log_2 \dfrac{1}{2} = -1$, odpovídá funkci na obrázku

---

19 Rovnice A) a C) mají záporný diskriminant, nemají žádný reálný kořen.

Zbývá otestovat rovnice B) a D). Můžeme to udělat dvěma způsoby:

1. Dosadíme číslo a do výrazu na levé straně rovnice:
   $L_B(a) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 4 + 4\sqrt{3} \neq 0$
   $L_D(a) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 0$
   Číslo a je kořenem rovnice D).

2. Řešíme rovnice B) a D) užitím diskriminantu:
   $D_B = 4 + 8 = 12$, $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \neq a$
   $D_D = 4 + 8 = 12$, $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$
   Číslo a je kořenem rovnice D).

Vzorec pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$.
Je-li D kladné, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

20 Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy je nutné splnit podmínku $\frac{x-3}{x} \geq 0$. Navíc číslo ve jmenovateli zlomku musí být různé od nuly, tedy $x \neq 0$.

Nerovnici $\frac{x-3}{x} \geq 0$ budeme řešit pomocí nulových bodů ($x_{01} = 0, x_{02} = 3$) a tabulky pro znaménka čitatele a jmenovatele.

Definiční oborem funkce je sjednocení intervalů $(-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$. → C)

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3\rangle$	$\langle 3; \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-3}{x}$	$+$	$-$	$+$

Jiný způsob řešení nerovnice $\frac{x-3}{x} \geq 0$:
Po stanovení podmínek ($x \neq 0$) můžeme obě strany nerovnice násobit číslem x^2, které je jistě větší než nula, znak nerovnosti se zachová. Získáme nerovnici $(x-3) \cdot x \geq 0$, kterou umíme vyřešit užitím grafu kvadratické funkce $f: y = (x-3) \cdot x$, tedy kvadratické funkce $f: y = x^2 - 3x$. Víme, že grafem je parabola „otevřená nahoru“ a protínající osu x v bodech 0 a 3, odtud $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty)$, po přihlédnutí k podmínkám $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$.

---

21 Ze vztahu $m = \frac{t}{a+b}$ chceme vyjádřit neznámou a.

$$m = \frac{t}{a+b} \quad | \cdot (a+b)$$
$$m(a+b) = t$$
$$ma + mb = t \quad | - mb$$
$$ma = t - mb \quad | : m$$
$$a = \frac{t - mb}{m}$$ → B)

Podmínka $a \neq -b$ pro existenci výrazu je splněna automaticky, protože se jedná o kladná čísla a a b, stejně tak podmínka $m \neq 0$.

---

22 Určíme, kolikrát nejvýše mohl být Mirek v posilovně. Průměrně 6 návštěv na každého z 6 kamarádů znamená, že dohromady vykonali 36 návštěv. Mirkovi by z nich připadl největší počet návštěv tehdy, když počet návštěv všech ostatních kamarádů bude co nejmenší. Protože má každý jiný počet návštěv, budou počty návštěv posilovny pro jednotlivé kamarády vyjádřeny nejmenšími přirozenými čísly: 1; 2; 3; 4; 5. Všichni kromě Mirka společně vykonali alespoň $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ návštěv, Mirek mohl vykonat maximálně $36 - 15 = 21$ návštěv a zaplatit tak maximálně 2 100 Kč. → A)

---

23 Počty uběhnutých kilometrů v jednotlivých dnech tvoří aritmetickou posloupnost (každý den navyšuje o stejnou vzdálenost), jejíž první člen je $a_1 = 3$ a šestnáctý člen $a_{16} = 6$. Diference je rovna délce jednoho oválu a vypočítáme ji ze vztahu pro n-tý (šestnáctý) člen aritmetické posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $a_{16} = a_1 + 15d$.

Dosadíme: $6 = 3 + 15d$ a vypočítáme diferenci $d = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (km).

Potřebujeme sečíst prvních 31 členů této posloupnosti, použijeme vzorec pro součet prvních n členů

$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$, tedy $s_{31} = (a_1 + a_{31}) \cdot \frac{31}{2}$.

Chybí nám člen a_{31} – vypočítáme ho podle již použitého vzorce pro n-tý člen

$$a_{31} = a_1 + 30d = 3 + 30 \cdot \frac{1}{5} = 9.$$

$$s_{31} = (3 + 9) \cdot \frac{31}{2} = 186$$

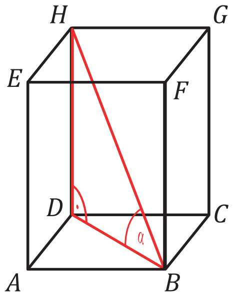
Pan Rychlý naběhal během března 186 kilometrů. → E)

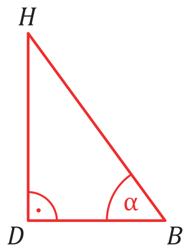
		A	N
24	**24.1** Žádná mocnina čísla 9 není rovna 0, rovnice nemá vůbec žádné řešení.	☐	☒
	24.2 $|x-5| = 4 \ \rightarrow\ x-5=4 \vee x-5=-4 \ \rightarrow\ x=9 \vee x=1$. Rovnice má dvě řešení, ani jedno z nich není záporné.	☐	☒
	24.3 $\sqrt{x+6} = 2 \ \rightarrow\ x+6=4 \ \rightarrow\ x=-2$. Kořen -2 je nutno ověřit zkouškou: $\sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2$. Rovnice má jeden záporný kořen.	☒	☐
	24.4 $5 = (x-1)^2 - x(x+3) \ \rightarrow\ 5 = x^2 - 2x + 1 - x^2 - 3x \ \rightarrow$ $5 = -5x + 1 \ \rightarrow\ 4 = -5x \ \rightarrow\ x = -\frac{4}{5}$. Rovnice má jeden záporný kořen.	☒	☐

---

25 **25.1** Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku *BHD* (s pravým úhlem při vrcholu *D*). Označíme $\alpha = \sphericalangle BHD$.

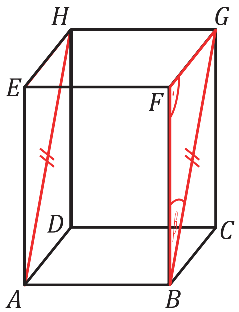
$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow\ \text{B)}$$

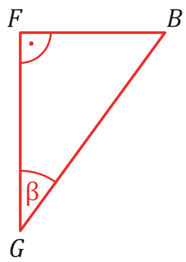




25.2 Odchylka mimoběžek $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow AH$ je rovna velikosti úhlu *FBG*, protože přímka *BF* je rovnoběžná s přímkou *AH*. Označíme $\beta = \sphericalangle FBG$ a kosinus vypočteme užitím pravoúhlého trojúhelníku *BGF*.

$$\cos\beta = \frac{|BF|}{|BG|} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \ \rightarrow\ \text{E)}$$



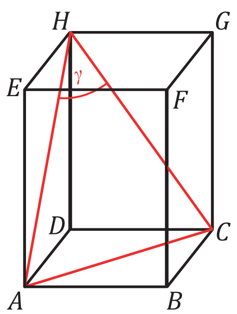


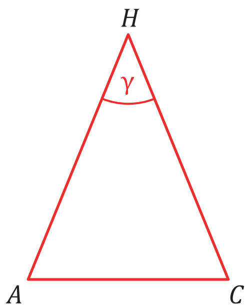
25.3 Velikost úhlu $\gamma = \sphericalangle AHC$ bychom počítali z rovnoramenného trojúhelníku *ACH* s hlavním vrcholem *H*.

Protože je požadován kosinus úhlu γ, použijeme kosinovou větu:

$|AC|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2 \cos\gamma$,

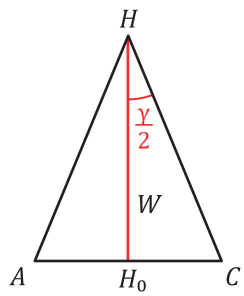
po dosazení $8 = 40 - 40 \cdot \cos\gamma$, tedy $\cos\gamma = \frac{4}{5}$. $\rightarrow$ A)





V části 3 je třeba si uvědomit, že trojúhelník *ACH* **není pravoúhlý**, nelze proto použít definici kosinu jako poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku.

V úloze **25.3** bychom samozřejmě mohli rovnoramenný trojúhelník *ACH* rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, pomocí nichž lze vypočítat velikost úhlu $\frac{\gamma}{2}$.



Tento výpočet je podstatně náročnější a nevede přímo k požadovanému kosinu, proto ho zde nebudeme uvádět.

26 **26.1** $8a - 2a^3 \geq 0$

$8a - 2a^3 = a\left(8 - 2a^2\right) = 2a\left(4 - a^2\right) = 2a(2 - a)(2 + a)$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	$(2; \infty)$
$2a$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2 - a$	$+$	$+$	$+$	$-$
$2 + a$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2a(2 - a)(2 + a)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle \ \rightarrow$ B)

Výraz rozložíme na součin užitím vzorců, určíme nulové body a posoudíme znaménko výrazu v intervalech mezi nulovými body. Krajní body příslušných intervalů zahrneme do hledané množiny, pokud je v tomto bodě výraz definován.

26.2 $\underbrace{\left(a^2 + 1\right)}_{\text{vždy kladné}} \cdot \left(a^2 + a - 2\right) \geq 0$

$$a^2 + a - 2 \geq 0$$
$$(a + 2)(a - 1) \geq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$
$$a_1 = \frac{-4}{2} = -2 \qquad a_2 = \frac{2}{2} = 1$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$a + 2$	$-$	$+$	$+$
$a - 1$	$-$	$-$	$+$
$(a + 2)(a - 1)$	$+$	$-$	$+$

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty) \ \rightarrow$ E)

26.3 $-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \geq 0$

$$-a^2 - 2a - 2 \geq 0 \qquad | : (-1)$$
$$a^2 + 2a + 2 \leq 0$$

$$\frac{-1}{2a^2 - a - 1} \geq 0$$
$$\frac{-1}{(a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)} \geq 0$$
$$\frac{1}{(a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$
$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$
$$a_1 = \frac{4}{4} = 1 \qquad a_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Připomeňte si vzorce pro rozklad výrazů na součin:

- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$
- $A^3 + B^3 = (A - B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$

Pozor u B: Výraz $1 + 2a + 4a^2$ není druhá mocnina dvojčlenu $\left((1 + 2a)^2 = 1 + 4a + 4a^2\right)$.

	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$	$(1; \infty)$
$a - 1$	$-$	$-$	$+$
$a + \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$
$(a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)$	$+$	$-$	$+$

$a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \ \rightarrow$ F) POZOR! V tištěné publikaci z roku 2024 je chybně odpověď F s hranatou závorkou.

26.4
$$\frac{a^2 - 4}{-1} \geq 0$$
$$4 - a^2 \geq 0$$
$$(2 - a)(2 + a) \geq 0$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2 - a$	$+$	$+$	$-$
$2 + a$	$-$	$+$	$+$
$(2 - a)(2 + a)$	$-$	$+$	$-$

$a \in \langle -2; 2\rangle \ \rightarrow$ C)

TEST 2

1

$$y = \frac{3}{5}x$$
$$x - y = 5{,}6$$

$$x - \frac{3}{5}x = 5{,}6$$
$$\frac{2}{5}x = 5{,}6$$
$$x = 5{,}6 \cdot \frac{5}{2} = 14$$
$$y = \frac{3}{5} \cdot 14 = \frac{42}{5} = 8,4$$
$y = 8{,}4$

Zapíšeme údaje z úlohy. Soustavu rovnic vyřešíme dosazovací metodou.

---

2 $0{,}2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$

$$0{,}2 \cdot 10^{4x-7} = 200$$
$$10^{4x-7} = \frac{200}{0{,}2}$$
$$10^{4x-7} = 1\,000$$
$$10^{4x-7} = 10^3$$
$$4x - 7 = 3$$
$$4x = 10$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Zk.:

$$L\left(\frac{5}{2}\right) = 0{,}2 \cdot 10^{4 \cdot \frac{5}{2} - 7} - 200 = 0{,}2 \cdot 10^3 - 200 = 200 - 200 = 0$$
$$\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

Lze použít substituci $t = 4x - 7$ a řešit rovnici $0{,}2 \cdot 10^t - 200 = 0$. Dostaneme $10^t = 1\,000$, $t = 3$ a po dosazení zpět do rovnice substituce $3 = 4x - 7$, tedy $x = \frac{5}{2}$.
Zkouška v tomto případě není nutnou součástí řešení, žádnou z užitých úprav jsme nemohli ztratit žádný kořen ani získat žádný navíc. Pokud by nám zkouška „nevyšla“, je nutno v řešení hledat (vlastní) chybu.

---

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$
$$-k + 28 = 0$$
$$k = 28$$

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule. Dále počítáme podle definice.

---

4 $112 \cdot 0{,}75 = 84$

$$84 \cdot \frac{2}{3} = 56$$

Vykvetlo 56 červených tulipánů.

Vypočítáme počet všech vykvetlých tulipánů. Z počtu kvetoucích připadají na červené dvě třetiny.

5 $s_8 = (a_1 + a_8) \cdot \frac{8}{2}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_8 = 11 + 28 = 39$

$s_8 = (11 + 39) \cdot 4 = 200$

V hledišti divadla je 200 sedadel.

Počty sedadel v řadách tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$, její první člen je roven $a_1 = 11$. Počet členů posloupnosti je 8. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti: $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.
Neznáme osmý člen a_8, vypočteme ho podle vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n + 1)$ a dosadíme do vzorce pro součet.

6

$$\begin{aligned} m &= xy + 2(x+y)k \\ m &= xy + 2xk + 2yk \\ m - 2yk &= xy + 2xk \\ m - 2yk &= x(y + 2k) \end{aligned}$$

$$\frac{m - 2yk}{y + 2k} = x$$

Z daného vzorce chceme vyjádřit veličinu x. Nejprve je nutné roznásobit závorku. Členy, které obsahují požadovanou veličinu, ponecháme na jedné straně rovnice, ostatní „převedeme“ na druhou stranu rovnice (odečteme od obou stran rovnice výraz $2yk$). Vytkneme požadovanou veličinu. Obě strany rovnice vydělíme výrazem v závorce. (Protože se jedná o kladné veličiny, výraz nikdy nebude roven 0, můžeme dělit bez jakýchkoli omezení).

---

7 $x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}; D \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

$$\frac{2x - 1}{3x - 1} = \frac{2x}{3x + 1}$$

$$(2x - 1)(3x + 1) = 2x(3x - 1)$$

$$6x^2 - 3x + 2x - 1 = 6x^2 - 2x$$

$$x = 1$$

$1 \in D$

$K = \{1\}$

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem obou jmenovatelů (úprava je ekvivalentní v definičním oboru rovnice). Pokud bychom na začátku podmínky nenapsali a rovnici řešili v $\mathbb{R}$, není jisté, že nenásobíme nulou a na konci bychom museli udělat zkoušku. Vypočítáme $x = 1$.
Kořen vyhovuje stanoveným podmínkám, proto může být řešením rovnice. Bez podmínek na začátku by bylo nutné provést zkoušku:

$L(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(1) = P(1) \rightarrow 1 \in K$

---

8 $p' = 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 0{,}637\,5$ (procent)

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5 = 25\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}637\,5}{100}\right)^5 = 25\,807$$

Banka by vyplatila 25 807 Kč.

Vypočítáme reálnou („čistou“) úrokovou míru p', tedy úrok po odečtení 15% daně.
Částka na účtu vzrůstá pravidelně každý rok o stálý počet procent p' – použijeme vzorec pro pravidelný růst veličiny V:
$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5$

9 x .... počet dívek ve třídě 4C
$2x$ .... počet chlapců ve třídě 4C
$x + 2x$ .... počet všech žáků třídy 4C

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{3x}{2}} = 0{,}1$$
$$\frac{x(x-1)}{3x(3x-1)} = 0{,}1$$
$$\frac{x-1}{3(3x-1)} = 0{,}1$$
$$x - 1 = 0{,}3(3x-1)$$
$$10x - 10 = 9x - 3$$
$$x = 7$$

Zkontrolujeme správnost úvah a výpočtu podle textu úlohy.
Ve třídě je 7 dívek a 14 chlapců, vypočítáme pravděpodobnost, že v náhodně vybrané dvojici budou jen dívky:

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{21}{210} = 0,1 \text{ (vyhovuje zadání).}$$

Ve třídě je 7 dívek.

Označíme počet dívek ve třídě neznámou x, pomocí ní vyjádříme i další údaje.
Vyjádříme pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvojice osob je složená jen z dívek. Jmenovatel zlomku vyjadřuje počet všech způsobů, jak vybrat dvojici osob ze třídy, ve které je x dívek a $2x$ chlapců, celkem $3x$ žáků (tvoříme neuspořádané dvojice z $3x$ žáků, tedy dvojčlenné kombinace z $3x$ prvků), těch je $\binom{3x}{2}$.
V čitateli je počet možností, jak dvojici vytvořit jen z dívek $\binom{x}{2}$.
Vypočítáme kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Vyřešíme rovnici.

---

10 **10.1** $\sin\alpha = \frac{u}{a} = \frac{7}{11}$

$\alpha = 39°\,31'$

Úhel α má velikost $39°\,31'$.

10.2 $o = 2(a + b) \quad (b = |BC| = |AD|)$

$a^2 = u^2 + b^2 \ \rightarrow\ b^2 = a^2 - u^2$

$b^2 = (121 - 49)\ \text{cm}^2 = 72\ \text{cm}^2$

$b = \sqrt{72}\ \text{cm} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$

$o = 2\left(11 + 6\sqrt{2}\right)\ \text{cm} \doteq 39{,}0\ \text{cm}$

Obvod kosodélníku je 39,0 cm.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme sinus úhlu α. K určení α použijeme kalkulačku (tlačítko většinou označeno $\sin^{-1}$ nebo arcsin podle typu kalkulátoru).
K výpočtu obvodu je nutné vypočítat délku strany AD, můžeme využít Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABC.
Pozor na správné zaokrouhlení výsledku 38,97 na jedno desetinné místo.

---

11 $x \neq 2$; $D \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\frac{x}{x-2} \le 1$$
$$\frac{x}{x-2} - 1 \le 0$$
$$\frac{x - x + 2}{x-2} \le 0$$
$$\frac{2}{x-2} \le 0$$
$$x - 2 < 0$$
$$x < 2$$

$K = (-\infty; 2)$

Nerovnice má neznámou ve jmenovateli, je nutné zapsat definiční obor nerovnice.
Nerovnici převedeme na podílový tvar s nulou na pravé straně nerovnice – od obou stran nerovnice odečteme jedničku, pak výrazy na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel. Čitatel získaného zlomku je kladný – aby zlomek mohl být menší nebo roven nule, musí jmenovatel zlomku být záporný.
Pozor – ve snaze zbavit se zlomku **není možné** v $\mathbb{R}$ **násobit nerovnici jmenovatelem** – nevíme, zda výraz $x - 2$ není záporný.

12 $\left(3a - \frac{6a-1}{3a}\right) \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2-(6a-1)}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2-6a+1}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$

$= \frac{(3a-1)^2}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{3a-1}{3a}$

Podmínky: $a \neq 0$; $a \neq \frac{1}{3}$

Závorka určuje prioritu operací – výrazy v závorce převedeme na společný jmenovatel.
V čitateli prvního zlomku odstraníme závorku a podle vzorce $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu. Závorkou $(3a-1)$ zkrátíme a zapíšeme výsledek.

Pozor – dále krátit nelze, v čitateli je rozdíl, nikoli součin. Jmenovatel žádného zlomku nesmí být roven nule, tedy $3a \neq 0$ $\rightarrow$ $a \neq 0$ a $3a - 1 \neq 0$ $\rightarrow$ $a \neq \frac{1}{3}$.

---

13 $|3x-2| = x+6$

$3x - 2 \geq 0 \ \rightarrow\ x \geq \frac{2}{3} \ \rightarrow\ x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$

$3x - 2 < 0 \ \rightarrow\ x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

1. pro x z intervalu $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$|3x-2| = -(3x-2) = -3x+2$

$-3x + 2 = x + 6$

$-4x = 4$

$x = -1$

$-1 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, $K_1 = \{-1\}$

2. V $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$:

$|3x-2| = 3x-2$

$3x - 2 = x + 6$

$2x = 8$

$x = 4$

$4 \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$, $K_2 = \{4\}$

$K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 4\}$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu v rovnici, použijeme definici absolutní hodnoty reálného čísla ($a \geq 0 \ \rightarrow\ |a| = a$, $a < 0 \ \rightarrow\ |a| = -a$).
Řešení rovnice rozdělíme do dvou intervalů podle znaménka argumentu („vnitřku“) absolutní hodnoty.
Řešíme dvě lineární rovnice již bez absolutní hodnoty. Je nutné se přesvědčit, zda vypočtený kořen patří do intervalu, v němž právě řešíme.
Množinu kořenů v $\mathbb{R}$ dostaneme jako sjednocení množin kořenů v jednotlivých intervalech.

Pozn.: Abychom získali dva intervaly, na nichž všechny kroky provádíme, hledáme vlastně nulové body výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

14 x ...... počet hodin, který potřebuje pan Novák na posekání celé zahrady
y ...... počet hodin, který potřebuje paní Nováková k posekání celé zahrady

Za jednu hodinu poseká pan Novák $\frac{1}{x}$ a paní Nováková $\frac{1}{y}$ zahrady.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$

$$3\cdot\frac{1}{x}=4\cdot\frac{1}{y}\ \rightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{4\cdot\frac{1}{y}}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{y}=\frac{4}{3y}$$

$$\frac{4}{3y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{3y}=\frac{1}{12}$$

$$y=28\ \text{(hodin)}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{3\cdot 28}=\frac{1}{21}$$

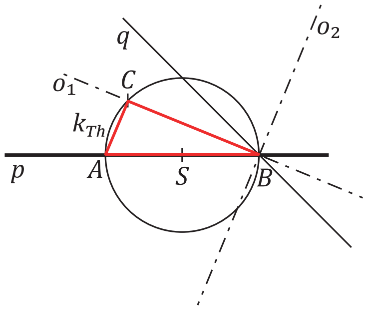
$$x=21\ \text{(hodin)}$$

Pan Novák by posekal zahradu za 21 hodin. Paní Nováková by posekala zahradu za 28 hodin.

Označíme neznámé veličiny v úloze. Sestavíme rovnice z údajů v úloze:
Budou-li pan a paní Novákovi pracovat společně jednu hodinu, posekají dohromady $\frac{1}{12}$ zahrady.
Druhá rovnice vyjadřuje rovnost posekané plochy paní Novákovou za 4 a panem Novákem za 3 hodiny.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou, z druhé rovnice stačí vyjádřit výraz $\frac{1}{x}$ a dosadit do první. Vypočítáme y, pak $\frac{1}{x}$ a odtud x. Zkontrolujeme, zda vypočtené hodnoty odpovídají textu úlohy – paní Nováková poseká zahradu za 28 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{28}$ zahrady a za 4 hodiny $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$ zahrady.
Pan Novák poseká zahradu za 21 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{21}$ zahrady a za 3 hodiny $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ zahrady.
Budou-li pracovat společně, posekají za 1 hodinu
$\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{4+3}{3\cdot4\cdot7}=\frac{1}{12}$ zahrady.
Nezapomeňte na slovní odpověď.

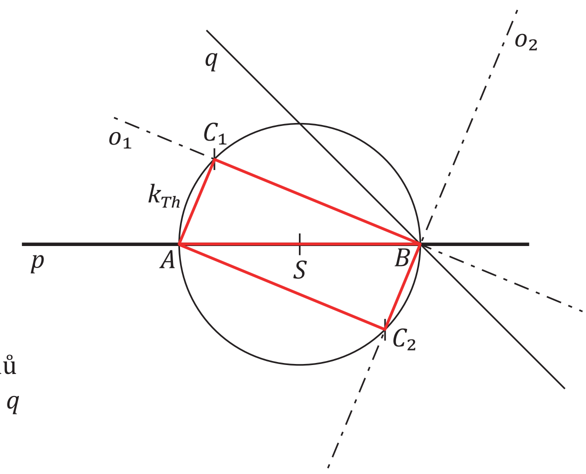
---

15 Náčrt:



Rozbor:
$|Cp|=|Cq|\ \rightarrow\ C\in o_1\cup o_2$
$|\sphericalangle ABC|=90°\ \rightarrow\ C\in k_{Th}(AB)$
$C\in k_{Th}(AB)\cap(o_1\cup o_2)$

Konstrukce:



Popis konstrukce:
1. S; S je střed AB
2. k_{Th}; $k_{Th}\left(S; r=\frac{r}{2}\right)$
3. o_1, o_2; o_1, o_2 jsou osy úhlů sevřených přímkami p a q
4. C_1; $C_1\in o_1\cap k_{Th}$
5. C_2; $C_2\in o_2\cap k_{Th}$
6. $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$

Úloha má dvě řešení.

Bod C má mít stejnou vzdálenost od dvou přímek p a q. Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek, jsou dvě přímky, na nichž leží osy úhlů sevřených těmito různoběžkami (obě přímky procházejí průsečíkem daných různoběžek a jsou na sebe kolmé).
Trojúhelník ABC má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C – proto musí bod C ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB.

Pozor – střed úsečky určíme konstrukčně pomocí dvou kružnic se stejnými poloměry a středy v bodech A a B.

16 $2x - a = 0$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = -2$$

$a = -4 \;\rightarrow\;$ D)

Zapíšeme podmínky pro existenci výrazu v předpisu funkce f:

$2x - a \neq 0$, tedy $x \neq \frac{a}{2}$.

Z uvedeného definičního oboru plyne $x \neq -2$. Porovnáme obě podmínky, tedy

$\frac{a}{2} = -2$ a zároveň $a = -4$.

---

17 $q\colon y = \frac{2}{3}x + b$

$M \in q \;\rightarrow\; -1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \;\rightarrow\; b = -\frac{7}{3}$

$q\colon y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$q\colon \frac{2}{3}x - y - \frac{7}{3} = 0$

$q\colon 2x - 3y - 7 = 0 \;\rightarrow\;$ B)

Přímka p je dána směrnicovou rovnicí, směrnice přímky p je rovna $\frac{2}{3}$.

Rovnoběžné přímky mají stejné směrnice, proto i směrnice hledané přímky q bude rovna $\frac{2}{3}$.

Přímka q bude tedy mít rovnici

$q\colon y = \frac{2}{3}x + b$.

Koeficient b určíme využitím souřadnic bodu M, který má na přímce q ležet, jeho souřadnice musí tedy vyhovovat rovnici přímky q.
Získali jsme směrnicovou rovnici přímky q, převedením rovnice na anulovaný tvar dostaneme obecnou rovnici přímky q.
Vynásobením obou stran rovnice 3 získáme všechny koeficienty celočíselné.

---

18 $a = 45$ cm, $b = 25$ cm, $v = 25$ cm, $V_1 = 18$ l $= 18$ dm^3 $= 18\,000$ cm^3

$$V_1 = a \cdot b \cdot v_1$$

$$18\,000 \text{ cm}^3 = 45 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \cdot v_1$$

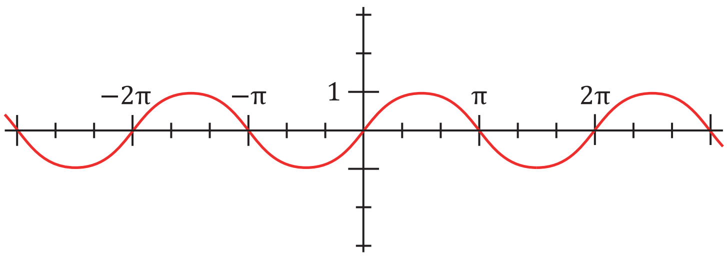
$$v_1 = \frac{18\,000}{45 \cdot 25} \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

$v - v_1 = 25 \text{ cm} - 16 \text{ cm} = 9 \text{ cm} \;\rightarrow\;$ B)

Voda po nalití do akvária bude mít tvar kvádru s rozměry a, b, v_1.
Dosazením do vzorce pro objem kvádru zjistíme neznámý třetí rozměr kvádru v_1.
Před dosazením vyjádříme objem v cm^3 podle vztahu
$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$.
Vypočítáme vzdálenost vodní hladiny od horního okraje akvária.

---

19 $\left.\begin{array}{l} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -1 \end{array}\right\}$ E)



Graf funkce $f\colon y = A \cdot \sin(Bx) + D$ sestrojíme modifikací grafu funkce $y = \sin x$.
Konstanty A a B ovlivňují „tvar“ křivky. A určuje amplitudu – „roztažení“ ve svislém směru, pro funkci f $A = 2$ (amplituda funkce $y = \sin x$ je 1).
B určuje periodu – roztažení ve vodorovném směru, perioda funkce f je $\frac{2}{3}\pi$, proto $B = 3$ (podle vztahu $p = \frac{2\pi}{B}$, perioda funkce $y = \sin x$ je 2π).
Konstanta D určuje „posun“ grafu ve směru osy y, pro funkci f je posun o 1 ve směru záporné osy y („dolů“), proto $D = -1$.

20 $y = \binom{10}{6} \cdot 6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200 \rightarrow$ C)

Nejprve vybereme („označíme“) sedadla, která turisté obsadí – vybíráme 6 sedadel z 10 nezávisle na pořadí výběru, tedy tvoříme šestičlenné kombinace z 10 prvků, jejich počet vyjadřuje kombinační číslo $\binom{10}{6}$.
Potom začneme sedadla „obsazovat“ turisty – každému sedadlu „přidělíme“ jednoho turistu (představte si vybraná sedadla v řadě a jen měníme pořadí osob) – tvoříme permutace z 6 prvků, těch je (pro každý výběr sedadel) 6!. Násobíme podle kombinatorického pravidla součinu.
Jiný způsob uvažování (pro pokročilejší):
Tvoříme permutace s opakováním z 10 prvků, z nichž 4 jsou stejné (celkem 10 sedadel, 6 z nich obsadíme „rozlišitelnými“ turisty a 4 zůstanou prázdná – nerozlišitelná).
Jejich počet je pak $\frac{10!}{4!}$.

---

21 $a_1 = k \cdot a = k \cdot 12,5$ cm
$b_1 = k \cdot b = k \cdot 10$ cm
$c_1 = k \cdot c = k \cdot 8,5$ cm

$$a_1 - c_1 = 4{,}8 \text{ cm}$$
$$k \cdot 12,5 \text{ cm} - k \cdot 8,5 \text{ cm} = 4{,}8 \text{ cm}$$
$$4k \text{ cm} = 4{,}8 \text{ cm}$$
$$k = \frac{4{,}8}{4} = \frac{6}{5}$$

$b_1 = \frac{6}{5} \cdot 10 \text{ cm} = 12 \text{ cm} \rightarrow$ D)

Pro podobné trojúhelníky platí, že odpovídající si strany jsou ve stejném poměru.
Využijeme údaj o rozdílu nejdelší a nejkratší strany, sestavíme a vyřešíme rovnici pro koeficient podobnosti k.
Dopočítáme délku prostřední strany b.

---

22 $\frac{S_4}{S_6} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow$ C)

Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit třemi úhlopříčkami (*AD*, *BE*, *CF*) na šest shodných rovnostranných trojúhelníků.
Úsečky *BD* a *DF* vždy dva z těchto trojúhelníků půlí, proto obsah trojúhelníku *BCD* i obsah trojúhelníku *DEF* je roven obsahu každého ze zmiňovaných rovnostranných trojúhelníků.
Obsah čtyřúhelníku *ABDF* je tedy rovný $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ obsahu šestiúhelníku.
Jiné řešení: Čtyřúhelník *ABDF* lze rozdělit na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky *ABF*, *BSF*, *BDS*, *FDS*. Do celého šestiúhelníku zbývají ještě dva shodné trojúhelníky (*BCD* a *DEF*), proto je poměr obsahů $\frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

23 $2s_1 - s_2 + 12 = 0$

$s_1 = -3 + 2t$

$s_2 = 1 - t$

$2(-3 + 2t) - (1 - t) + 12 = 0$

$t = -1$

$s_1 = -3 + 2t \cdot (-1) = -5$

$s_2 = 1 - (-1) = 2$

$S[-5; 2]$

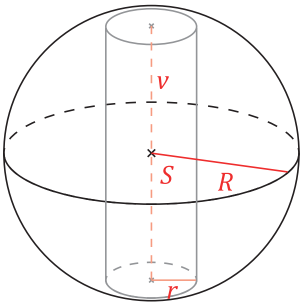
$r_k = |ST| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10} \rightarrow$ A)

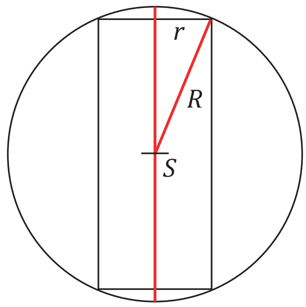
Poloměr kružnice můžeme určit jako vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu. Bod T na kružnici k známe, proto stačí najít střed kružnice k, který je průsečíkem přímek p a q.

Průsečík přímek je bod, jehož souřadnice musejí vyhovovat rovnicím obou přímek, tedy obecné rovnici přímky p i parametrickému vyjádření přímky q. Označíme jeho souřadnice $S[s_1; s_2]$ a dosadíme je do daných rovnic. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešit budeme dosazovací metodou (využijeme vyjádřené s_1 a s_2 v druhé a třetí rovnici a dosadíme do první).

Délku úsečky ST počítáme podle vzorce:
$|ST| = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2}$

24





Načrtneme osový řez koule a vepsaného válce, označíme v výšku válce.

	A	N
24.1	☒	☐
24.2	☐	☒
24.3	☐	☒
24.4	☒	☐

24.1 $R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$26^2 = 10^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$

$\frac{v}{2} = 24$

$v = 48$ cm

Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami r a $\frac{v}{2}$.

24.2 $S_{po} = \pi r^2 = \pi \cdot 100$ cm^2

$S_{pl} = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 10 \cdot 48 = 960\pi$ cm

$\frac{S_{pl}}{S_{po}} = \frac{960\pi}{100\pi} = 9{,}6$

Podstavou válce je kruh, dosazením do vzorce $S_{po} = \pi r^2$ vypočítáme její obsah.
Plášť válce je vlastně obdélník, jehož šířka je rovna obvodu podstavy ($o = 2\pi r$) a výška je rovna výšce válce.

24.3 $V_V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 10^2 \cdot 48 = 4\,800\pi$ cm^3

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 26^3 = \frac{70\,304}{3}\pi$ cm^3

$\frac{V_V}{V_K} = \frac{4\,800\,\pi}{\frac{70\,304}{3}\pi} \doteq 0{,}20$

Pro porovnání objemu válce a koule vypočteme jejich objemy podle vzorců:

$V_V = \pi r^2 \cdot v$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

Porovnáním podílů zjistíme, že válec zaujímá přibližně 20 % objemu koule.

24.4 $S_K = 4\pi R^2 = 4\pi 26^2 = 2\,704\pi$ cm^2

$\frac{S_K}{S_{pl}} = \frac{2\,704\pi}{960\pi} \doteq 2{,}8 > 2$

Povrch koule počítáme podle vzorce $S_K = 4\pi R^2$.

25 **25.1** $P = \frac{2}{5} \rightarrow$ B)

25.2 $P = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \rightarrow$ C)

25.3 $P = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25} \rightarrow$ D)

Pravděpodobnost náhodného jevu A počítáme jako poměr $P = \frac{m}{n}$, kde P je počet výsledků pokusu, při kterých jev A nastane, a n je počet všech možných výsledků pokusu.

25.1 Táhneme-li z osudí, ve kterém je 5 koulí, jednu kouli, má tento pokus 5 možných výsledků, jevu **25.1** jsou příznivé 2.

25.2 Pravděpodobnost, že první vytažená koule je černá, je $\frac{3}{5}$. Protože vytažené koule se do osudí vracejí, pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je opět černá, je také $\frac{3}{5}$.

Pravděpodobnost průniku nezávislých jevů počítáme jako součin pravděpodobností.

25.3 První dvě vytažené koule budou mít stejnou barvu. Tento případ může nastat dvěma způsoby – obě první koule budou černé, nebo obě první koule budou bílé. Jevy „první dvě vytažené koule budou černé“ a „první dvě vytažené koule budou bílé“ jsou neslučitelné, pravděpodobnost jejich sjednocení dostaneme jako součet jejich pravděpodobností.

($\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ je pravděpodobnost toho, že první dvě vytažené koule budou bílé.)

---

26 **26.1** B)

26.2 A)

26.3 C)

26.4 D)

$f_1\colon y = \frac{1}{3^x}$ je exponenciální funkce – grafem je exponenciála, základ je roven $\frac{1}{3} < 1$, proto f_1 klesá ve svém definičním oboru, vyhovuje jedině B).

$f_2\colon y = \frac{3}{x}$ je nepřímá úměrnost, grafem je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy, vyhovuje jedině A).

$f_3\colon y = \frac{x}{3}$ grafem je přímka s kladnou směrnicí $\frac{1}{3}$, vyhovuje jedině C).

$f_4\colon y = \frac{1}{x-3}$ je lineární lomená funkce, grafem je hyperbola se středem v bodě [3; 0], vyhovuje jedině D).

TEST 3

1 Pro snadnější porovnání čísel a určení, zda do intervalu patří nebo ne, zapíšeme všechna čísla ve stejném tvaru, např. jako čísla desetinná. Poté je zakreslíme na číselnou osu.

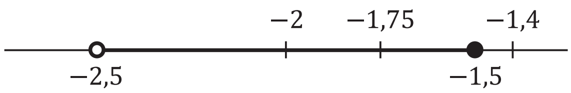
$-\frac{5}{2} = -2{,}5$

$-\frac{3}{2} = -1{,}5$

$-\frac{7}{4} = -1{,}75$

$-1\frac{1}{2} = -1{,}5$

$-\frac{7}{5} = -1{,}4$



Do zadaného intervalu tedy nepatří čísla −2,5 a −1,4. Určíme jejich součet.

$-2{,}5 + (-1{,}4) = -3{,}9$

Pro porovnání zadaných čísel bychom také mohli všechna čísla vyjádřit ve zlomcích se společným jmenovatelem.

---

2 Nejprve určíme podmínky. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, proto $x + 4 \neq 0$ a $x - 4 \neq 0$, první podmínka je pro přirozená čísla splněna vždy, druhá pro $x \neq 4$.

$$\frac{4}{x+4} - \frac{20 - x^2}{x^2 - 16} = \frac{1}{x-4} \qquad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$$4 \cdot (x-4) - \left(20 - x^2\right) = x + 4$$

$$4x - 16 - 20 + x^2 = x + 4 \qquad | - (x+4)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8) \cdot (x-5) = 0$$

$x_1 = -8 \;\rightarrow$ Kořen nepatří do množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$.

$x_2 = 5$

případně $K = \{5\}$

Protože řešíme rovnici v množině přirozených čísel, podmínku $x \neq 4$ nemusíme uvádět. Kvadratickou rovnici můžeme řešit nejen rozkladem na součinový tvar, ale také pomocí diskriminantu a vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

---

3 $3^{21} - 11 \cdot 3^{20} + 3^{22} = 3 \cdot 3^{20} - 11 \cdot 3^{20} + 3^2 \cdot 3^{20} = 3^{20} \cdot (3 - 11 + 9) = 3^{20}$

Výraz je opravdu nutné upravit na základě pravidel pro počítání s mocninami. Výpočet pomocí kalkulačky nestačí, protože se v tomto případě hodnotí celý.

---

4 Aby byla definována odmocnina a logaritmická funkce, musí být splněny podmínky.

$$2x + 5 \geq 0 \qquad \wedge \qquad 2 - 4x > 0$$

$$2x \geq -5 \qquad\qquad -4x > -2$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \qquad\qquad x > \frac{1}{2}$$

$$K_1 = \left\langle -\frac{5}{2}; \infty \right) \qquad K_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$$

Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení obou nerovnic (K_1 a K_2). Definiční obor funkce tedy je:

$\mathrm{D}(f) = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

Odmocnina se sudým exponentem je definována jen pro nezáporná reálná čísla. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná reálná čísla. U druhé nerovnosti pozor na násobení záporným číslem.

5 Při úpravě lomených výrazů je nutné rozložit čitatele i jmenovatele zlomků na součin. To se provádí vytýkáním nebo využitím vzorců. Poté můžeme krátit. Podmínky určujeme z rozložených jmenovatelů.

$$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2xy+x^2+y^2}{y}:\frac{y+x}{xy}=\frac{(x+y)^2}{y}\cdot\frac{xy}{y+x}=x(x+y)$$

$[x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y]$

---

6 **6.1** Všechny členy zapíšeme pomocí mocnin se základem 3 a upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami.

$$9^{x-2}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$
$$3^{2(x-2)}=3^{-3}\cdot 3^x$$
$$3^{2x-4}=3^{x-3}$$
$$2x-4=x-3$$
$$x=1$$

Případně $K=\{1\}$.

6.2 Nejprve určíme podmínky: $x>0$.

Členy upravíme pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu.

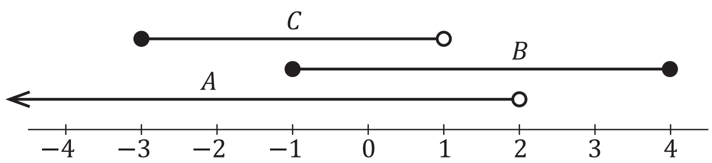
$$\log_2 x+\log_2 4=4$$
$$\log_2 4x=4$$
$$4x=16$$
$$x=4$$

Případně $K=\{4\}$.

Pokud při řešení logaritmické rovnice neurčíme podmínky, musíme alespoň zkusit dosadit vypočtený kořen do zadané rovnice a zjistit, zda jsou pro něj logaritmy definovány.
U exponenciální rovnice podmínky a zkoušku dělat nemusíme, protože jde o prostou funkci, která je definována pro všechna čísla z $\mathbb{R}$.

---

7 Intervaly A, B, C zakreslíme na číselnou osu. Okraj intervalu C zvolíme tak, aby se intervaly A, B, C překrývaly na intervalu $\langle -1; 1)$.



$c=1$

---

8 Výšky klád tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_1=15$ cm; $a_{17}-a_9=32$ cm

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci.

$a_{17}=a_9+(17-9)\cdot d$

$$d=\frac{a_{17}-a_9}{8}$$

Dosadíme a určíme d.

$d=4$ cm

Pro výpočet třináctého členu posloupnosti využijeme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti.

$a_{13}=a_1+(13-1)\cdot d$

Dosadíme a určíme a_{13}.

$a_{13}=15\text{ cm}+12\cdot 4\text{ cm}=63\text{ cm}$

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

9 Nejprve určíme dvacátý člen posloupnosti ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti.

$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot d$

Dosadíme a zjistíme a_{20}.

$a_{20} = 15\text{ cm} + 19 \cdot 4\text{ cm} = 91\text{ cm}$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

Dosadíme a zjistíme s_{15}.

$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (15\text{ cm} + 91\text{ cm})$

$s_{15} = 1\,060\text{ cm}$

Musíme přičíst ještě části, které jsou zakopané, tedy 20 · 20 = 400 cm.
Celkem to je 1 060 cm + 400 cm = 1 460 cm.

---

10 Některé výrazy s faktoriály částečně rozepíšeme na součin, vytkneme a pokrátíme.

$$\frac{500! + 499!}{499!} - \frac{501! - 500!}{500!} = \frac{500 \cdot 499! + 499!}{499!} - \frac{501 \cdot 500! - 500!}{500!} =$$

$$= \frac{499!\,(500 + 1)}{499!} - \frac{500!\,(501 - 1)}{500!} = 501 - 500 = 1$$

Při úpravě výrazů s faktoriály rozepisujeme faktoriál většího z čísel na součin. Vypíšeme tolik činitelů, abychom se dostali na úroveň menšího z čísel.

---

11 **11.1** Funkční hodnotu v bodě -2 určíme dosazením čísla -2 do předpisu funkce.

$a_2 = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

11.2 Průsečíky s osou x mají y-ovou souřadnici nulovou. Do předpisu funkce tedy dosadíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnic.

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$D < 0 \rightarrow$ Rovnice nemá reálné kořeny. Průsečíky grafu funkce f s osou x neexistují.

---

12 Celý objem nádoby je $V = -\frac{3}{2} \cdot 1\text{ l} = 1{,}5\text{ l} = 1\,500\text{ cm}^3$.

Pro objem válce platí vztah: $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$.

Výška válce je stejná jako průměr jeho podstavy, tedy $v = 2r$: $V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$.

Vyjádříme poloměr r a dosadíme: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \doteq 6{,}2\text{ cm}$.

---

13 Šest hledaných čísel se pokusíme zapsat do šesti polí tabulky tak, aby byla řada čísel uspořádána vzestupně. Protože má mít medián hodnotu 5,5, musí být ve středních polích tabulky čísla, jejichž průměr je 5,5. Ve třetím a čtvrtém poli by tedy mohla být např. čísla 5 a 6:

		5	6		

Protože má mít modus hodnotu 8, musí být toto číslo zastoupeno alespoň dvakrát. Do posledních dvou polí zapíšeme číslo 8:

		5	6	8	8

Protože má mít aritmetický průměr hodnotu 5, musí být součet všech šesti čísel 6 · 5 = 30. Součet už doplněných čísel je 27, na zbylá dvě pole zbývá součet 3. Doplníme tedy čísla 1 a 2:

1	2	5	6	8	8

Soubor hledaných čísel je tedy např: 1, 2, 5, 6, 8, 8.

Úloha má další dvě řešení:

	2	4	7	8	8
	2	3	8	8	8

14 Vrchol vysílače, pata vysílače a okno tvoří trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti $\gamma = 53°$, sevřeným stranami délky $a = 102$ m a $b = 137$ m. Trojúhelník je podle věty *sus* zadán jednoznačně.

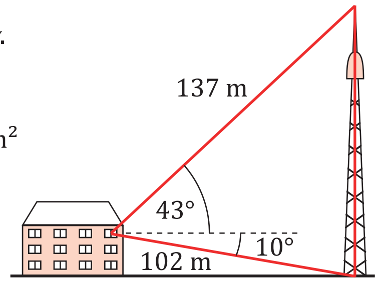
Výšku vysílače v určíme pomocí kosinové věty.

$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Dosadíme a zjistíme výšku v.

$v^2 = \left(102^2 + 137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 102 \cdot \cos 53°\right)\ \text{m}^2$

$v \doteq 111$ m



Kosinovou větu používáme pro řešení trojúhelníků zadaných podle vět sss a sus.
Naopak sinovou větu používáme tehdy, je-li trojúhelník zadán podle věty usu nebo Ssu.

Další řešení:
Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a k výpočtu použijeme goniometrické funkce ostrého úhlu.

---

15 **15.1** Pravděpodobnost jevu A počítáme jako podíl počtu výsledků m příznivých danému jevu a celkového počtu možných výsledků n.

$m = 6$ (počet dvoukorunových mincí)

$n = 16$ (počet všech mincí)

$$P(A) = \frac{6}{16} = 0{,}375 \sim 37{,}5\ \%$$

15.2 $m = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ (počet pětic mincí, ve kterých jsou 3 dvoukorunové a 2 pětikorunové mince)

$n = \binom{16}{5} = 4\,368$ (počet všech pětic mincí)

$$P = \frac{60}{4\,368} \doteq 0{,}014 \sim 1{,}4\ \%$$

Při úvahách o počtu skupin mincí, které můžeme sestavit, je lepší předpokládat, že jsou i mince stejné hodnoty vzájemně rozlišitelné. Představme si například, že je na nich uveden různý rok vyražení, což samozřejmě nemá vliv na výsledek úlohy.

---

16 Nejprve si vhodně označíme neznámé počty diod. Abychom nemuseli počítat se třemi neznámými, pokusíme se označit počty diod pomocí jediné neznámé x.

červených diod x
zelených diod........... $1{,}5x$
modrých diod .... $1{,}5x + 2$

sestavíme rovnici:

$$x + 1{,}5x + 1{,}5x + 2 = 50$$
$$4x = 48$$
$$x = 12$$

Na stromku je tedy 12 červených, 18 zelených a 20 modrých diod. → D)

Počty diod by samozřejmě bylo možné označit třemi neznámými, ale museli bychom pak sestavit soustavu tří rovnic, jejíž řešení je pracnější.

---

17 **17.1** Vrchol C získáme posunutím vrcholu B o vektor $\vec{d}$. Pro jeho souřadnice tedy platí: $C = B + \vec{d} = [8; 4] + (1; 3) = [9; 7]$. — A ☒ N ☐

17.2 Nejprve určíme souřadnice vrcholu D, který je posunutím vrcholu A o vektor $\vec{d}$: $D = A + \vec{d} = [1; 3] + (1; 3) = [2; 6]$. — A ☐ N ☒

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{BD}$ určíme ze vztahu:

$\overrightarrow{BD} = (d_1 - b_1; d_2 - b_2) = (-6; 2)$.

17.3 Souřadnice středu rovnoběžníku určíme jako aritmetický průměr souřadnic bodů A, C: — A ☒ N ☐

$$S\left[\frac{1+9}{2}; \frac{3+7}{2}\right] = [5; 5].$$

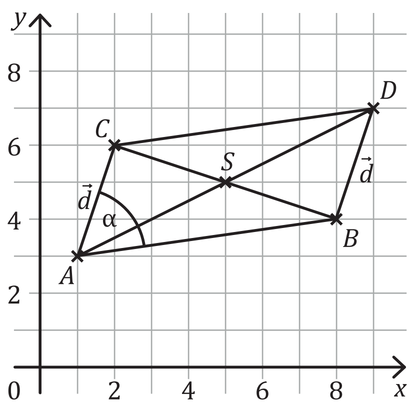
17.4 Nejprve určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$: — A ☐ N ☒

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (7; 1)$.

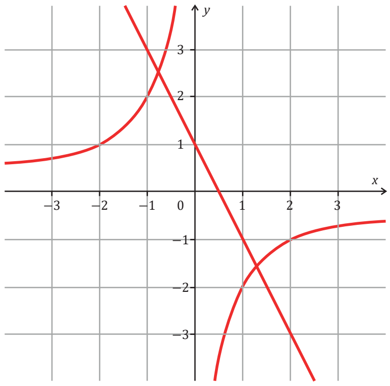
Kosinus hledaného úhlu určíme ze vztahu:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha = 63°\,26'$



18 Grafem funkce f: $y = -2x + 1$ je strmě klesající přímka protínající osu y v bodě $[0;\ 1]$. Tomu odpovídají obrázky D a E. Grafem funkce f: $y = \frac{-2}{x}$ je hyperbola, která má své větve ve II. a IV. kvadrantu. Tomu odpovídají obrázky A, C, a E. Oba grafy jsou tedy správně sestrojeny na obrázku E.



---

19 Délky hran kvádru a, b, c označme pomocí jediné neznámé a, $b = 2a$, $c = 3a$, čímž si zajistíme požadovaný poměr délek hran.

Pro povrch kvádru platí:
$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$.

Dosadíme naše délky hran:
$S = 2 \cdot (2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$.

Vyjádříme neznámou a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{22}} = \sqrt{\frac{2\,662\ \text{cm}^2}{22}} = 11\ \text{cm}.$$

Nejdelší hranou je hrana $b = 3a = 33$ cm. → E)

---

20 Z rovnosti vyjádříme rámeček a upravíme:

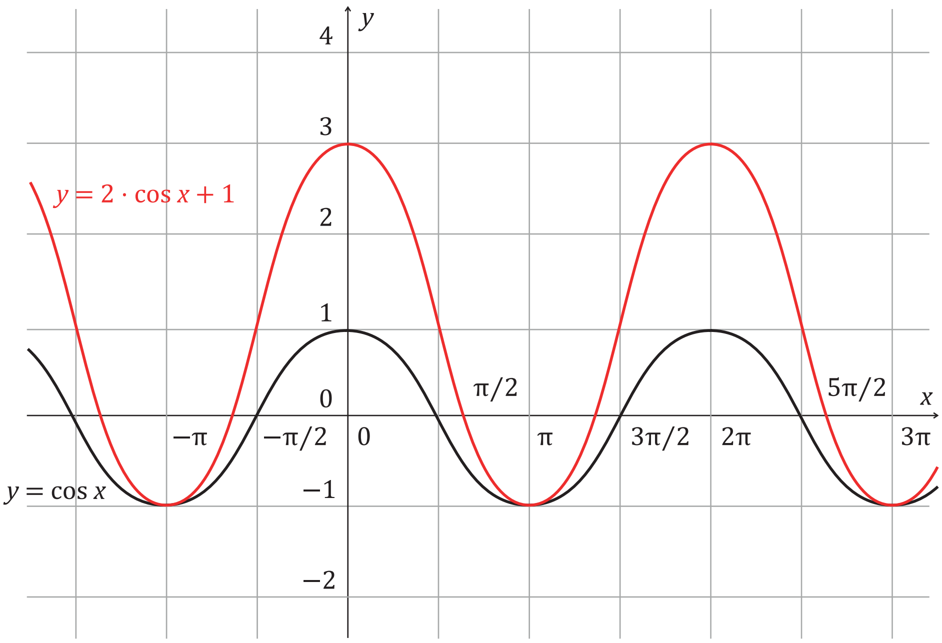
$$\boxed{} = 3(a+2)^2 - 2(a+3)^2 = 3 \cdot \left(a^2 + 4a + 4\right) - 2 \cdot \left(a^2 + 6a + 9\right) =$$
$$= 3a^2 + 12a + 12 - 2a^2 - 12a - 18 = a^2 - 6 \ \rightarrow\ \text{B)}$$

---

21 Porovnáním zadaného grafu s grafem funkce $y = \cos x$ je zřejmé, že se jedná také o funkci kosinus. Graf má ale dvojnásobnou „výšku“ a je posunut o jedna v kladném směru osy y.

Jeho předpis tedy je:
$y = 2 \cdot \cos x + 1.$ → E)

Obecně se dá říci, že graf goniometrické funkce o předpisu $y = a \cdot \cos\,(bx + c) + d$ ovlivňují jednotlivé koeficienty:
a ... ovlivňuje „výšku“ grafu
b ... ovlivňuje periodu funkce $\left(\text{ta je } \frac{2\pi}{|b|}\right)$
c ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy x
d .... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy y



22 Nejprve určíme obsah půlkruhu.

$S_1 = \dfrac{\pi c^2}{8} \doteq 353{,}43\ \mathrm{m}^2$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (podle Thaletovy věty), k určení jeho obsahu tedy stačí znát délky jeho odvěsen.

$a = c \cdot \cos\beta \doteq 24{,}57\ \mathrm{m}$

$b = c \cdot \sin\beta \doteq 17{,}21\ \mathrm{m}$

Obsah trojúhelníku ABC je tedy:

$S_2 = \dfrac{a \cdot b}{2} \doteq 211{,}42\ \mathrm{m}^2.$

Poměr obsahů je:

$\dfrac{S_1}{S_2} \doteq 0{,}60 \sim 60\%.$

Plocha záhonů tvoří doplněk do 100 %, což je 40 %. → B)

---

23 Normálovým vektorem hledané přímky p je např. vektor $\overrightarrow{BA} = (8; -4)$. Pro sestavení obecné rovnice přímky p použijeme k-násobek vektoru $\overrightarrow{AB}$ $\vec{n_p} = (2; -1)$.

Rovnice tedy bude mít tvar:

p: $2x - y + c = 0.$

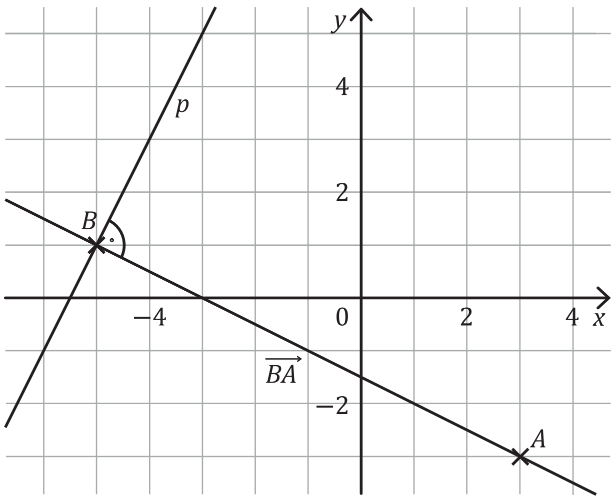
Neznámý koeficient c dopočítáme dosazením souřadnic bodu B, který na přímce p leží:

$$2(-5) - 1 + c = 0$$
$$c = 11$$

Přímka p má tedy rovnici:

p: $2x - y + 11 = 0.$ → D)

Libovolný nenulový násobek této rovnice je opět rovnicí stejné přímky. Takže pokud bychom použili přímo vektor $\overrightarrow{BA}$, dostali bychom rovnici p: $8x + 4y + 44 = 0$, která je také správným řešením.



24 $K_{10} = 3\,500\,000$ Kč (dlužná částka po deseti letech)
$p = 0{,}048$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Pro výši dlužné částky po n letech platí vztah:
$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$.

Vyjádříme počáteční výši úvěru:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}.$$

Dosadíme a zjistíme K_0.

$$K_0 = \frac{3\,500\,000 \text{ Kč}}{(1+0{,}048)^{10}} \doteq 2\,190\,000 \text{ Kč} \ \rightarrow \ \text{A)}$$

---

25 Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic koncových bodů úsečky. Pro výpočet vzdálenosti bodů A, B používáme vzorec:
$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

25.1 $a = |BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \ \rightarrow \ \text{F)}$

25.2 Nejprve určíme střed strany a.

$$S_a\left[\frac{4-4}{2}; \frac{5+3}{2}\right] = [0; 4]$$

$$t_a = |AS_a| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \ \rightarrow \ \text{A)}$$

25.3 $c = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \ \rightarrow \ \text{B)}$

25.4 $S_c\left[\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right] = [3; 3]$

$$t_c = |CS_c| = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49+0} = 7 \ \rightarrow \ \text{D)}$$

Při určování velikosti úsečky nezáleží na pořadí, ve kterém odečítáme souřadnice bodů. Ale při určování souřadnic vektoru na tomto pořadí záleží. Od souřadnic koncového bodu musíme odečítat souřadnice počátečního bodu.

---

26 Pravidelný desetiúhelník můžeme rozdělit na 10 shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Vnitřní úhel proti základně má tedy velikost $\frac{360°}{10} = 36°$.

Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180°, mají zbylé vnitřní úhly velikost 72°.

Vyznačené úhly pak mají velikost:

26.1 $\alpha = 3 \cdot 36° = 108°$, $\rightarrow$ C)
26.2 $\beta = 2 \cdot 72° = 144°$, $\rightarrow$ D)
26.3 $\gamma = 72°$. $\rightarrow$ E)

U pravidelných n-úhelníků bývá také často za úkol výpočet poloměru kružnice vepsané a opsané. V těchto typech příkladů se také vyplatí rozdělit n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků a dále pracovat s jedním z nich.

TEST 4

1 Anglicky i německy mluví 13 účastníků $\rightarrow$ jen jedním z těchto jazyků mluví $24 - 13 = 11$ účastníků.

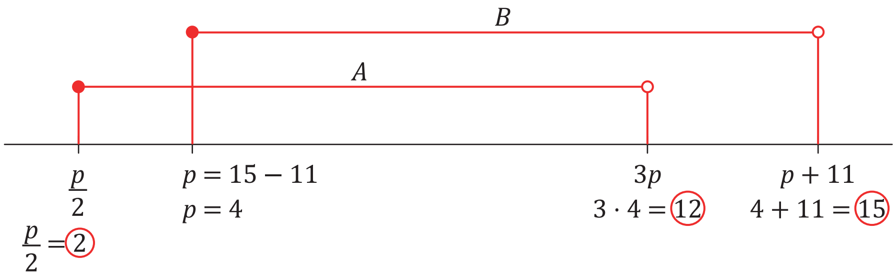
jen anglicky mluví .... x účastníků
anglicky mluví............ $x + 13$ účastníků
jen německy mluví........ $11 - x$ účastníků

$$x + 13 = 7 \cdot (11 - x)$$
$$x + 13 = 77 - 7x$$
$$8x = 64$$
$$x = 8$$

Jen anglicky mluví 8 účastníků konference.

Jako neznámou x můžeme označit také počet německy mluvících účastníků. Lidí, kteří mluví jen anglicky, je $11 - x$ a lidí, kteří mluví anglicky, je $11 - x + 13$. Pak můžeme sestavit rovnici: $11 - x - 13 = 7x$.

2



$$15 = p + 11$$
$$p = 4 \rightarrow \frac{p}{2} = 2;\ 3p = 12$$

2.1 $A \cap B = \langle 4; 12)$

2.2 $A \cup B = \langle 2; 15)$

Symbol $\cap$ je průnik množin (tedy prvky, které náleží oběma množinám). Symbol $\cup$ je sjednocení všech prvků množin. Lomená závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu patří. Kulatá závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu nepatří.

---

3 Levnější .... l kusů..................... c Kč/ks

Dražší.......... $l + \frac{1}{4}l = \frac{5}{4}l$ kusů.......... $2{,}5c$ Kč/ks

Celkem......... x Kč

$$lc + \frac{5}{4}l \cdot 2{,}5c = x$$
$$lc + \frac{25}{8}lc = x$$
$$8lc + 25lc = 8x$$
$$33lc = 8x$$
$$l = \frac{8x}{33c}$$

Sestavíme rovnici, která popisuje danou situaci. Pomocí ekvivalentních úprav rovnice z ní vyjádříme neznámou l.

4

$$\frac{1 - \frac{x^2}{x^2 - 1}}{\frac{x}{x+1} : \frac{1}{x}} + 2 : x^2 = \frac{\frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2 - 1}}{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x}{1}} + \frac{2}{x^2} = \frac{\frac{-1}{x^2 - 1}}{\frac{x^2}{x+1}} + \frac{2}{x^2} = \frac{-1}{x^2 - 1} : \frac{x^2}{x+1} + \frac{2}{x^2} =$$

$$= \frac{-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x-1)} + \frac{2}{x^2} = \frac{-1 + 2(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{-1 + 2x - 2}{x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{2x - 3}{x^2(x-1)}$$

Mnohočlen $x^2 - 1$ rozložíme podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$. Pozor na pořadí operací – součet provádíme až jako poslední.

5 $\frac{2}{x-5} - \frac{2}{x(x-5)} = \frac{3x+1}{x^2-25} \quad | \cdot x(x-5)(x+5)$

$$2x(x+5) - 2(x+5) = x(3x+1)$$
$$2x^2 + 10x - 2x - 10 = 3x^2 + x$$
$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$

$x_1 = 2;\ x_2 = 5$

Podmínky: $x \neq 5;\ x \neq -5;\ x \neq 0.\ \rightarrow\ x = 2$

Jmenovatel výrazu na pravé straně rovnice rozložíme pomocí vytýkání a vzorce pro rozdíl druhých mocnin:
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.
Kvadratickou rovnici $x^2 - 7x + 10 = 0$ řešíme buď využitím Vietových vzorců nebo přes diskriminant.
Musíme ověřit, jestli řešení rovnice splňuje podmínky, pro které mají lomené výrazy v zadání smysl.

---

6 $\frac{2}{3x-5} > 2$

$$\frac{2}{3x-5} - 2 > 0$$
$$\frac{2 - 2(3x-5)}{3x-5} > 0$$
$$\frac{2 - 6x + 10}{3x-5} > 0$$
$$\frac{-6x+12}{3x-5} > 0$$

	$\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}; 2\right)$	$(2; \infty)$
$-6x+12$	+	+	−
$3x-5$	−	+	+
výsledné znaménko	−	+	−

Nulové body: $x_1 = 2;\ x_2 = \frac{5}{3}$. Daný výraz je větší než 2 pro x z intervalu $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$

Nerovnici upravíme do podílového tvaru, aby na jedné její straně byl lomený výraz a na druhé nula. Následně nerovnici řešíme přes nulové body nebo soustavou nerovnic.
$-6x + 12 > 0\ \wedge\ 3x - 5 < 0\ \vee$
$-6x + 12 < 0\ \wedge\ 3x - 5 < 0$

---

7 Sada talířů.......... 6 po x Kč............. 7 po $(x - 100)$ Kč
Sada hrnků.......... 5 po y Kč............. 8 po $0{,}8y$ Kč
Celkem.............. 9 400 Kč............. 10 720 Kč

$$6x + 5y = 9\,400$$
$$7(x-100) + 8 \cdot 0{,}8y = 10\,720$$

$$6x + 5y = 9\,400$$
$$7x - 700 + 6{,}4y = 10\,720$$

$$6x + 5y = 9\,400 \quad | \cdot 7$$
$$7x + 6{,}4y = 11\,420 \quad | \cdot (-6)$$

$$42x + 35y = 65\,800$$
$$-42x - 38{,}4y = -68\,520$$

$$-3{,}4y = -2\,720$$
$$y = 800$$

7.1 $6x + 5 \cdot 800 = 9\,400$
$6x = 5\,400$
$x = 900$ Kč

Původní cena sady talířů je 900 Kč.

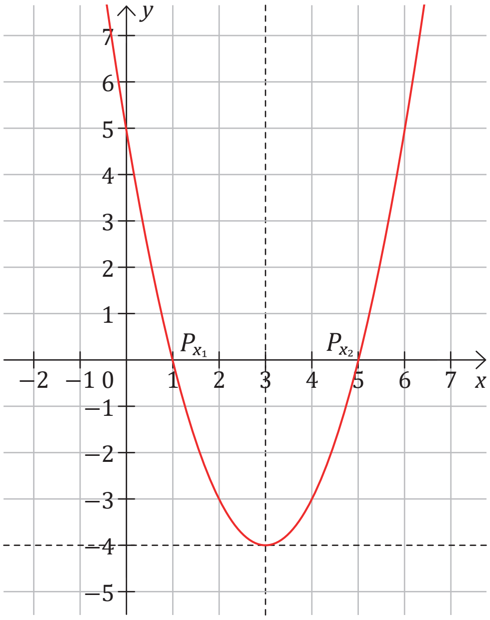
7.2 $80\ \%$ z $800 = 0{,}8 \cdot 800 = 640$ Kč

Cena sady hrnků po slevě je 640 Kč.

Soustavu rovnic můžeme řešit i dosazovací nebo porovnávací metodou (popř. i dalšími). V tomto případě však nejsou výhodné.

8 **8.1** parabola

8.2



8.3 $V\,[3; -4]$

Vrchol paraboly je průsečík kolmic na osy v bodech $x = 3$ a $y = -4$.

---

9 Průsečíky s osou x: $P_{x1}\,[1; 0]$; $P_{x2}\,[5; 0]$.

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = x^2 - 6x + 5$$

Průsečíky paraboly s osou x jsou souměrné podle osy paraboly a (podle zadání) je jejich vzdálenost 4. Ze zadání i grafu plyne, že tato parabola má koeficient a v předpisu $y = ax^2 + bx + c$ kladný.

10

$$5^x \cdot \sqrt{5} = 0{,}2$$

$$5^x \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$5^{x+\frac{1}{2}} = 5^{-1}$$

$$x + \frac{1}{2} = -1$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Všechny členy v rovnici převedeme na stejný základ a využijeme vzorce pro úpravu mocnin.
Pokud platí rovnost a jsou základy stejné, musí být stejné exponenty: $a^m = a^n \;\leftrightarrow\; m = n$.

---

11 Kód má 6 pozic: ☐☐☐☐☐☐

Na první pozici máme možnosti (A, B, C nebo D).

Číslice v kódu jsou (až na poslední) různé:

- na druhou pozici máme 10 možností (číslice 0, 1, 2, ... 9);
- na třetí pozici máme už jen 9 možností (číslic) – jednu jsme použili na předchozí pozici;
- na čtvrtou pozici máme už jen 8 možností (číslic) – dvě jsme použili na předchozí pozice;
- na pátou pozici máme už jen 7 možností (číslic) – tři jsme použili na předchozí pozice;
- na poslední pozici je stejná číslice jako na 3. pozici, takže možnost je jen jedna.

Počet možností: $4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 20\,160$.

Jiný způsob řešení:
Jde o variace (záleží na pořadí), můžeme tedy použít vzorec pro jejich výpočet.
Počet k-členných variací z n prvků:

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

První pozice $V(1, 4) = \dfrac{4!}{(4-1)!} = 4.$

Druhá až pátá pozice:

$$V(4, 10) = \frac{10!}{(10-4)!} = 5\,040.$$

Poslední pozice: 1 možnost.

Celkem: $4 \cdot 5\,040 \cdot 1 = 20\,160$.

12 $a_1 = 3a_3 \;\rightarrow\; a_3 = \frac{a_1}{3}$

$S_4 = -12$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d$$
$$\frac{a_1}{3} = a_1 + 2 \cdot d$$
$$-\frac{2}{3}a_1 = 2d \;\rightarrow\; d = \frac{-1}{3}a_1$$

$$S_4 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$-12 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4)$$
$$-12 = 2(a_1 + a_1 + 3d)$$
$$-6 = 2a_1 + 3d$$
$$-6 = 2a_1 + 3 \cdot \frac{-1}{3}a_1$$
$$-6 = 2a_1 - a_1$$
$$-6 = a_1 \;\rightarrow\; a_1 = -6$$
$$d = \frac{-1}{3}a_1 = -\frac{1}{3} \cdot (-6) = 2$$

12.1 $d = 2$

12.2 $a_1 = -6$

12.2 Jiný způsob řešení:
Z definice aritmetické posloupnosti plyne:
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$
Součet prvních 4 členů je -12, tedy:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -12$
$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = -12$
$4a_1 + 6d = -12 \;\rightarrow\; 2a_1 + 3d = -6.$
Dále platí:
$a_1 = 3a_3 \;\rightarrow\; a_1 = 3 \cdot (a_1 + 2d) \;\rightarrow$
$2a_1 + 6d = 0.$
Sestavíme soustavu rovnic, kterou vypočítáme libovolnou metodou.
$2a_1 + 3d = -6$
$2a_1 + 6d = 0$

---

13 Souřadnice vektoru $\vec{u}$ vyčteme z obrázku: $\vec{u}\,(2; -5)$.

13.1 Směrový vektor přímky p je kolmý na vektor $\vec{u}$. Směrový vektor přímky p má tedy souřadnice např. $\vec{s}\,(5; 2)$. Přímka p prochází počátkem soustavy souřadnic, tedy bodem $S\,[0; 0]$. Přímku do soustavy souřadnic narýsujeme.

13.2 Obecná rovnice přímky má tvar $ax + by + c = 0$, kde a, b jsou souřadnice normálového vektoru přímky.

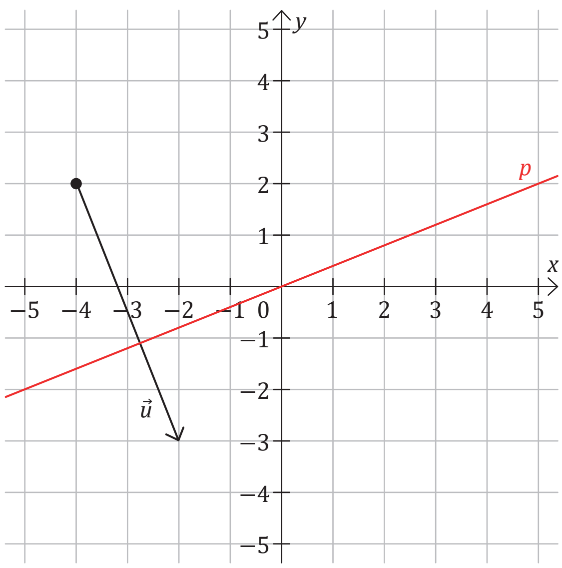
$\vec{n_p} = \vec{u} = (2; -5)$

$ax + by + c = 0$

$2x - 5y + c = 0$

$S\,[0; 0] \;\rightarrow\; 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + c = 0$

$c = 0 \;\rightarrow\; p\colon 2x - 5y = 0$



Pokud má vektor souřadnice $\vec{u}\,(a; b)$, pak vektor k němu kolmý má souřadnice $\vec{n}\,(b; -a)$ nebo $\vec{n}\,(-b; a)$.

14 Pravidelný šestiúhelník je složen ze šesti rovnostranných trojúhelníků.

obsah pravidelného šestiúhelníku: $S = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

$S_1 = 6 \cdot \dfrac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \doteq 259{,}81\ \text{cm}^2$

Obsah kruhové dutiny: $S_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 \doteq 28{,}26\ \text{cm}^2$.

Obsah podstavy jedné součástky: $S = S_1 - S_2 = 259{,}81 - 28{,}26 \doteq 231{,}55\ \text{cm}^2$.

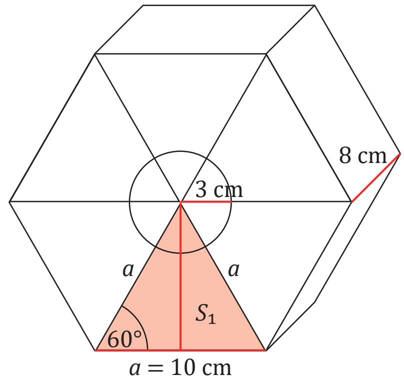
Objem jedné součástky: $V = S_p \cdot v = 231{,}55 \cdot 8 = 1\,852{,}4\ \text{cm}^3$.

Hmotnost jedné součástky: $m = 1\,852{,}4 \cdot 7{,}874 \doteq 14\,585{,}8\ \text{g} \doteq 14{,}585\,8\ \text{kg}$.

Hmotnost 100 ks součástek: $m_{100} = 100 \cdot 14{,}585\,8 = 1\,458{,}8\ \text{kg} \doteq 1\,460\ \text{kg}$.

Hmotnost součástek v bedně je 1 460 kg.

Jiný způsob výpočtu objemu součástky: Vypočítáme objem šestibokého hranolu a potom odečteme objem válce, který dutinu tvoří.



---

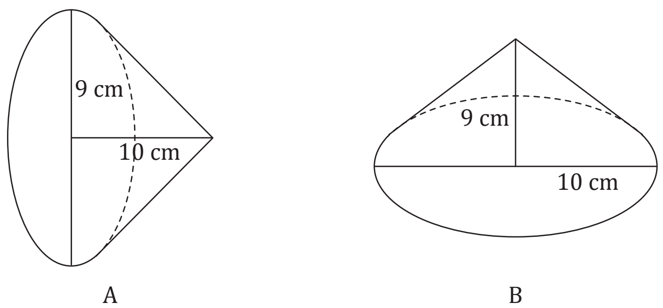
15 **15.1** Čísla na kostce, která jsou menší než 4 jsou tři: 1, 2, 3.
Čísla na kostce, která nejsou menší než 4 jsou také tři: 4, 5, 6.
Pravděpodobnost je tedy stejná.

	A	N
15.1	☒	☐
15.2	☐	☒
15.3	☐	☒

15.2 Součet 10 může padnout ve třech možnostech: 4 + 6; 5 + 5; 6 + 5.
Pravděpodobnost je tedy: $P = \dfrac{3}{6 \cdot 6} = \dfrac{1}{12} \doteq 8{,}3\ \%$.

15.3 Pravděpodobnost, že na kostce padne číslo 6 je stejná, jako pravděpodobnost, že padne jakékoli jiné číslo.
Pravděpodobnosti jsou tedy stejné.

16



Kužel A: $r = 9$ cm; $v = 10$ cm.

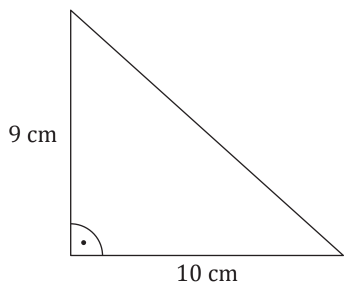
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 10 = 270\pi\ \text{cm}^3$$

Kužel B: $r = 10$ cm; $v = 9$ cm.

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 9 = 300\pi\ \text{cm}^3$$

Rozdíl objemů: $V = V_2 - V_1 = 300\pi - 270\pi = 30\pi$. → C)

Odvěsny svírají pravý úhel a je důležité si uvědomit, která je poloměrem podstavy a která je výškou kužele. Vzhledem k nabídce výsledků objem vyjádříme jako násobek čísla π.



---

17 **I.** $\log_4(x^2 + 1) = -4$

$\log_4(x^2 + 1) = \log_4 4^{-4}$

$x^2 + 1 = \dfrac{1}{256} \qquad | -1$

$x^2 = -\dfrac{255}{256}$ → rovnice nemá řešení

17.1 Musíme zapsat pravou stranu rovnice tak, aby na každé straně rovnice byl logaritmus se stejným základem. Použijeme definici logaritmu:
$y = \log_a x \quad x = a^y$.
Druhá mocnina jakéhokoli čísla nikdy není číslo záporné.

II. $\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}=0 \ \rightarrow \ x-1=0$

$x=1$

Podmínky:

$x^2+4x-5\neq 0$

$(x-1)\cdot(x+5)\neq 0$

$x_1\neq 1;\ x_2\neq -5$ → rovnice nemá řešení

III. $2^{x-1}=0$

Oborem hodnot exponenciální funkce jsou čísla větší než nula $H(f)=(0;\infty)$, číslo 0 nemůže být tedy řešením této rovnice. → rovnice nemá řešení

IV. $x-\log_2 8=0$

$x-3=0$

$x=3$ → řešením rovnice je číslo 3 → D)

17.2 Řešení rovnice $x^2+4x-5=0$ můžeme vypočítat pomocí diskriminantu.

17.3 Řešit rovnici můžeme i pomocí exponenciálního grafu, který nemá průsečík s osou x.

---

18 $A\,[2;3];\ S\,[0;1]$

Bod S je střed AC. → $s_1=\dfrac{a_1+c_1}{2}$ $\quad s_2=\dfrac{a_2+c_2}{2}$

$0=\dfrac{2+c_1}{2} \ \rightarrow \ c_1=-2$

$1=\dfrac{3+c_2}{2} \ \rightarrow \ c_2=-1 \ \rightarrow \ C\,[-2;-1]$

$\triangle ABC$ je rovnostranný, všechny strany jsou stejně dlouhé → vypočítáme délku strany AC.

$|AC|=\sqrt{(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$o=3\cdot a=3\cdot 4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ → C)

Jiný způsob řešení:
Bod S je středem strany AC, takže délka úsečky AS je polovinou délky strany tohoto rovnostranného trojúhelníka.

$|AC|=2\cdot|AS|=$

$=2\cdot\sqrt{(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2}=$

$=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=$

$=2\cdot\sqrt{8}=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

---

19 Použijeme vzorec pro pravidelný růst: $a_n=a_0\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$.

a_0 .....vstupní hodnota

a_n .....hodnota po n obdobích. V tomto příkladu $a_4=1{,}8\cdot a_0$ (zvětšení o 80 %).

p ......průměrný roční přírůstek

n ......počet období, v tomto příkladu $n=4$.

Dosadíme a vypočítáme hodnotu p.

$$a_4=a_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$$

$$1{,}8\cdot a_0=a_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$$

$$1{,}8=\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$$

$$\sqrt[4]{1{,}8}=1+\frac{p}{100} \ \rightarrow \ p\doteq 16\ \%$$ → C)

20 Celková výška všech dětí v oddíle před prázdninami byla:
$6 \cdot 1{,}25 = 7{,}5\ \text{m} = 750\ \text{cm}$.

Přes prázdniny děti vyrostly o:
$2 \cdot 3\ \text{cm} + 3 \cdot 2\ \text{cm} + 5\ \text{cm} = 17\ \text{cm}$.

Výška všech dětí po prázdninách je:
$750\ \text{cm} + 17\ \text{cm} = 767\ \text{cm}$.

Průměrná výška po prázdninách je:
$767 : 6 \doteq 127{,}8\ \text{cm} = 1{,}28\ \text{m}$. → B)

Jiné řešení:
Průměrnou výšku 1,25 m si můžeme představit tak, že každé ze šesti dětí měří 1,25 m, tedy 125 cm.
Po prázdninách měří dvě děti 125 cm + 3 cm, dvě děti měří 125 cm + 2 cm a jedno dítě měří 125 cm + 5 cm. Poslední z dětí měří stále 125 cm.
Vypočítáme průměrnou výšku po prázdninách.

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot (125+3) + 2 \cdot (125+2) + (125+5) + 125}{6} = $$
$$= 127{,}5\ \text{cm} \doteq 1{,}28\ \text{m}$$

---

21 Zakreslený graf je grafem funkce $y = \log_z x$.

Protože na grafu leží bod se souřadnicemi $[3; 1]$ → základ tohoto logaritmu je 3.
$y = \log_3 x$ → C)

Hledaný základ logaritmické funkce můžeme vypočítat pomocí rovnice. Na grafu leží bod se souřadnicemi $[3; 1]$.

$$y = \log_z x$$
$$1 = \log_z 3$$
$$\log_z z^1 = \log_z 3$$
$$z^1 = 3 \rightarrow z = 3$$

---

22 **První týden:**
Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 3$; $q = 2$; $n = 6$.

Součet dřepů v tomto týdnu vypočítáme podle vzorce: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Dosadíme a vypočítáme: $S'_6 = 3 \cdot \dfrac{2^6 - 1}{2 - 1} = 189$ dřepů v 1. týdnu.

Druhý týden:
Jde o geometrickou posloupnost, kde $q = 2$; $n = 6$.

První člen je rovem 3. členu předchozí posloupnosti, tedy
$b_1 = a_3 = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$.

Počet dřepů v tomto týdnu vypočítáme podle vzorce:
$S''_n = b \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 12 \cdot \dfrac{2^6 - 1}{2 - 1} = 756$ dřepů v 2. týdnu.

Třetí týden:
Počet dřepů v pondělí je stejný jako ve středu předchozího týdne.

Tedy: $c_1 = b_3 = b_1 \cdot q^{n-1} = 12 \cdot 2^{3-1} = 48$.

Ve třetím týdnu udělá $6 \cdot 48 = 288$ dřepů.

Celkem: $189 + 756 + 288 = 1\,233$ dřepů → D)

Jiný postup řešení:
První týden: Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 3$; $q = 2$.
Využitím definice geometrické posloupnosti spočítáme počet dřepů v jednotlivých dnech a sečteme.

$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$
$a_4 = a_3 \cdot q = 12 \cdot 2 = 24$
$a_5 = a_4 \cdot q = 24 \cdot 2 = 48$
$a_6 = a_5 \cdot q = 48 \cdot 2 = 96$

Součet:
$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$.

Obdobně spočítáme součty dřepů v dalších týdnech.

---

23 Počet dětí ve věku 4 let označíme x.

$x : 21 = 4 : 7 \rightarrow x = 3 \cdot 4 = 12$

Dětí ve věku 4 roky je 12.

Aritmetický průměr souboru je: $\bar{x} = \dfrac{3 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 4}{10 + 12 + 21 + 4} = \dfrac{207}{47} \doteq 4{,}404$.

Modus (nejčastější hodnota): mod = 5.

Medián (prostřední hodnota): med = 5.

Prostřední hodnota $47 : 2 = 23{,}5$ → prostřední je 24. člen, jeho hodnota je 5.

Platí $\bar{x} <$ mod = med. → C)

Jiný výpočet počtu dětí ve věku 4 roky. Jejich počet označíme x.

$\dfrac{x}{21} = \dfrac{4}{7} \rightarrow x = 4 \cdot 3 = 12$

nebo:

$\dfrac{x}{21} = \dfrac{4}{7} \rightarrow x = 21 \cdot \dfrac{4}{7} = 12$

24 Vypočítáme hodnoty x, y.

Z druhé rovnice vypočítáme hodnotu x.

$16 : x = 20$

$\frac{16}{x} = 20 \ \rightarrow \ x = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Dosadíme do první rovnice a vypočítáme hodnotu y.

$\frac{x^2}{2} + 2 = xy$

$\frac{0{,}8^2}{2} + 2 = 0{,}8 \cdot y$

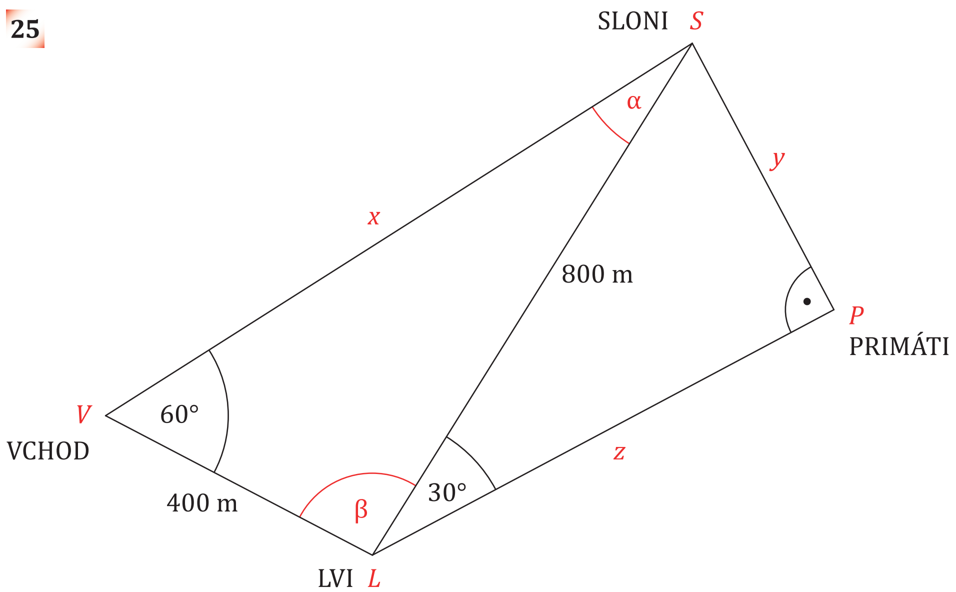
$2{,}32 = 0{,}8y \ \rightarrow \ y = \frac{29}{10} = 2{,}9$

Vypočítáme hodnotu čísla z dle zadání.

$z = 10 \cdot x - 5 \cdot y = 10 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 2{,}9 = -6{,}5$ → A)

V nabídce řešení B) je otevřený interval (kulaté závorky), krajní body do něj tedy nepatří. Číslo −6,5 tedy do tohoto intervalu nepatří.

25



V obecném trojúhelníku ABC platí sinová a kosinová věta.

25.1 $\triangle VLS$:

Vypočítáme velikost úhlu α. Trojúhelník VLS je obecný, použijeme sinovou větu.

$\frac{\sin 60°}{800} = \frac{\sin \alpha}{400}$

$\sin \alpha = \frac{\sin 60°}{800} \cdot 400 \ \rightarrow \ \alpha = 25°\,40'$

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Dopočítáme velikost úhlu β.

$\beta = 180° - \alpha - \beta = 180° - 60° - 25°\,40' = 94°\,20'$

Pomocí kosinové věty dopočítáme velikost strany x.

$x^2 = 400^2 + 800^2 - 2 \cdot 400 \cdot 800 \cdot \cos 94°\,20' \ \rightarrow \ x \doteq 921$ m → E)

25.2 $\triangle LPS$ je pravoúhlý. K výpočtu použijeme definici goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku a Pythagorovu větu.

$\sin \rho = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přepona}}$

$\sin 30° = \frac{y}{800} \ \rightarrow \ y = 400$ m → F)

25.3 $z^2 = 800^2 - 400^2 \ \rightarrow \ z \doteq 693$ m → B)

TEST 5

1 $\left(-2^6\right)\cdot\left(2^{-2}\right):(-4)^{-3}=\left(-2^4\right)\cdot\left(-4^3\right)=\left(-4^2\right)\cdot\left(-4^3\right)=4^5$

Jiný způsob řešení:
$\left(-2^6\right)\cdot\left(2^{-2}\right):(-4)^{-3}=$
$=\left(-4^3\right)\cdot\left(4^{-1}\right):(-4)^{-3}=$
$=-4^2:\left(-4^{-3}\right)=4^5.$
Pokud umocňujeme záporné číslo na lichou mocninu, je výsledek záporný, pokud na sudou, je výsledek kladný.

---

2 Objem kvádru: $V_1=\dfrac{2a^3}{3}$.

Objem krychle: $V_2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{a^3}{8}$.

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{a^3}{8}}{\frac{2a^3}{3}}=\frac{a^3}{8}\cdot\frac{3}{2a^3}=\frac{3}{16}$$

Je třeba sestavit poměr objemů krychle a kvádru v tomto pořadí a krácením upravit.

---

3 **3.1** $M\cap N=(-8;2\rangle$

3.2 $M\cup N=\langle-8;\infty)$

Symbol $\cap$ je průnik množin (tedy prvky, které náleží oběma množinám). Symbol $\cup$ je sjednocení všech prvků množin. Lomená závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu patří. Kulatá závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu nepatří.

---

4 **4.1** Po dvou směnách: 10 dělníků by pracovalo už jen 18 směn. Sestavíme trojčlenku.

10 dělníků .... 18 směn
12 dělníků .... x směn

Směny, na kterých pracovalo 12 dělníků.

Jde o nepřímou úměrnost: $\dfrac{x}{18}=\dfrac{10}{12}\ \rightarrow\ x=\dfrac{10}{12}\cdot18=15$ směn.

Směny v průběhu celé práce: $2+15=17$ směn.

4.2 10 dělníků pracuje 2 směny a 12 dělníků pracuje pak ještě 15 směn $\rightarrow$
$10\cdot2\cdot8\cdot320+12\cdot15\cdot8\cdot320=512\,000$ Kč.

4.3 10 dělníků .... 20 směn
12 dělníků .... x směn

$\dfrac{x}{20}=\dfrac{10}{12}\ \rightarrow\ x=\dfrac{10}{12}\cdot20\doteq17$ směn.

Trojčlenku „se změnou“ sestavujeme pro okamžik změny, ne od začátku děje. Jde o nepřímou úměrnost (čím víc dělníků, tím méně času).

5 $$\frac{\frac{2}{x-2}-\frac{x-1}{x^2-4}}{1+\frac{2}{x+2}}:\frac{-10-2x}{x^2-4x+4}=\frac{\frac{2}{x-2}-\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+2+2}{x+2}}:\frac{-2(5+x)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{x+4}{x+2}}\cdot\frac{(x-2)^2}{-2(x+5)}=\frac{2x+4-x+1}{(x-2)(x+2)}:\frac{x+4}{x+2}\cdot\frac{(x-2)^2}{-2(x+5)}=$$

$$=\frac{x+5}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x+2}{x+4}\cdot\frac{(x-2)^2}{-2(x+5)}=-\frac{x-2}{2(x+4)}=\frac{2-x}{2x+8}$$

Mnohočlen x^2-4 rozložíme podle vzorce po rozdíl druhých mocnin: $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. Mnohočlen x^2-4x+4 rozložíme na součin pomocí vzorce na úpravu druhé mocniny rozdílu: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

---

6 $$\frac{4}{x+3}-\frac{2x}{3-x}=\frac{3(x^2-1)}{2x^2-18}$$

$$\frac{4}{x+3}-\frac{2x}{3-x}=\frac{3(x^2-1)}{2(x^2-9)}$$

$$\frac{4}{x+3}+\frac{2x}{x-3}=\frac{3(x^2-1)}{2(x-3)(x+3)}\qquad |\cdot 2(x+3)(x-3)$$

$$8(x-3)+4x(x+3)=3x^2-3$$

$$8x-24+4x^2+12x=3x^2-3$$

$$x^2+20x-21=0$$

$$(x+21)(x-1)=0$$

$x_1=-21;\ x_2=1$

Podmínky: $x\neq-3;\ x\neq3$.

Jmenovatel výrazu na pravé straně rovnice rozložíme pomocí vytýkání a vzorce pro rozdíl druhých mocnin: $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. Kvadratickou rovnici $x^2+20x-21=0$ řešíme buď využitím Vietových vzorců nebo pomocí diskriminantu. Musíme ověřit, jestli řešení rovnice splňuje podmínky, pro které mají lomené výrazy v zadání smysl.

---

7 $$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{25}{4}\right)^{2x}=0{,}064$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{4x}=\frac{8}{125}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-4x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1-4x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$$

$$-3x-1=3$$

$$-3x=4$$

$$x=-\frac{4}{3}$$

Všechny členy rovnice převedeme na stejný základ a využijeme vzorce pro úpravu mocnin. Pokud platí rovnost a jsou základy stejné, musí být stejné exponenty: $a^m=a^n \leftrightarrow m=n$.

---

8 Cena oběda . . . . $x+160$
Cena snídaně x

$$x+160=\frac{7}{6}\cdot2\cdot x$$

$$x+160=\frac{7}{3}x$$

$$3x+480=7x$$

$$4x=480$$

$$x=120\text{ Kč}$$

Oběd . . . . $120+160=280$ Kč

Cena oběda je 280 Kč.

Jiný způsob řešení – soustavou rovnic:

Cena oběda . . . . x Kč
Cena snídaně. . . . . y Kč

$x=y+160$

$x=\frac{7}{6}\cdot2y$

Soustavu můžeme řešit kteroukoli metodou (sčítací, dosazovací, porovnávací atd.).

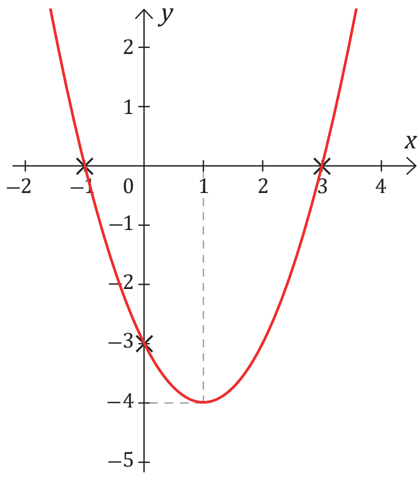
9 **9.1** $y = (x+1) \cdot (x-3)$

$y = x^2 - 3x + x - 3$

$y = x^2 - 2x - 3$

9.2 $P_y[0; y] \rightarrow y = 0^2 - 0 - 3 = -3 \rightarrow P_y[0; -3]$

9.3



9.1 Jiný způsob řešení:
Souřadnice bodů P_{x_1} a P_{x_2} do předpisu funkce a dopočítáme koeficienty a, b.
Vypočítáme souřadnice vrcholu paraboly. X-ová souřadnice vrcholu je uprostřed průsečíků paraboly s osou x. V našem případě tedy $x_V = 1$. Dosadíme do předpisu funkce a dopočítáme y-ovou souřadnici vrcholu.

---

10 $v_a = \frac{8}{5} \cdot a$

Obsah rovnoběžníků: $S = a \cdot v_a$.

$S = a \cdot \frac{8}{5} a = \frac{8}{5} a^2$

$57{,}6 = \frac{8}{5} a^2 \rightarrow a = 6\ \text{dm}$

$v_a = \frac{8}{5} \cdot 6 = 9{,}6\ \text{dm}$

$b = 220\ \%$ z $9{,}6\ \text{dm} = 2{,}2 \cdot 9{,}6 = 21{,}12\ \text{dm}$

$o = 2(a+b) = 2 \cdot (6 + 21{,}12) = 54{,}24\ \text{dm}$

11
$$\begin{aligned}
\log_2(x-3) + \log_2 2^2 &= \log_2(x-2)^2 \\
\log_2 4(x-3) &= \log_2(x-2)^2 \\
4(x-3) &= (x-2)^2 \\
4x - 12 &= x^2 - 4x + 4 \\
0 &= x^2 - 8x + 16 \\
0 &= (x-4)^2 \\
x_{1,2} &= 4
\end{aligned}$$

Podmínky: $x > 3$; $x > 2 \rightarrow x \in (3; \infty)$.

Upravíme tak, aby byl na obou stranách rovnice logaritmus se stejným základem. Pak už jen porovnáme argumenty logaritmů. Použijeme definici logaritmu a věty pro úpravy logaritmů.

$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$

$\log_z a + \log_z b = \log_z a \cdot b$

$n \cdot \log_z a = \log_z a^n$

Je třeba určit podmínky – definičním oborem logaritmické funkce jsou čísla $x \in (0; \infty)$.

12 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Součet lichých členů: $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 4$

Součet prvních čtyř členů: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -8$

$$\begin{array}{r} a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d = 4 \\ a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = -8 \\ \hline 4a_1 + 12d = 4 \\ 4a_1 + 6d = -8 \\ \hline 6d = 12 \;\rightarrow\; d = 2 \end{array}$$

$4a_1 + 12 \cdot 2 = 4 \;\rightarrow\; a_1 = -5$

$a_6 = a_1 + 5d = -5 + 5 \cdot 2 = 5$

$a_7 = 5 + 2 = 7$

$a_8 = 7 + 2 = 9 \quad \rightarrow \quad 5 + 7 + 9 = 21$

Sestavenou soustavu rovnic lze řešit i jinou, než použitou sčítací metodu (např. dosazovací nebo porovnávací).

---

13 Jde o graf nepřímé úměrnosti.

Předpis funkce nepřímá úměrnost: $f\colon y = \frac{k}{x}$.

Bod ležící na grafu funkce, např. $A\,[-2; 3]$.

Dosadíme do předpisu: $3 = \frac{k}{-2} \;\rightarrow\; k = -6$.

$f\colon y = -\frac{6}{x}$

Do předpisu funkce je možné dosadit i další vhodné body ležící na grafu, např. $B\,[-3; 2]$; $C\,[3; -2]$ nebo $A\,[2; -3]$.

---

14 3.dubna 14 580

4. dubna.................... $\frac{2}{3}$ z 14 580 $\rightarrow$ $\frac{2}{3} \cdot 14\,580 = 9\,720$.

Už další den, 4.dubna. bude počet bakterií menší než 10 020.

---

15 Obsah kružnice: $S = \pi \cdot r^2$

$20\pi = \pi \cdot r^2 \;\rightarrow\; r = \sqrt{20}$ cm

$u = 2r = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$ cm

Pythagorova věta:

$$\begin{aligned} u^2 &= a^2 + a^2 \\ \left(4\sqrt{5}\right)^2 &= 2a^2 \\ 80 &= 2a^2 \\ a^2 &= 40 \;\rightarrow\; a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm} \end{aligned}$$

Obsah čtverce $ABCD$: $S = a^2 = 40$ cm^2.

Obdélník $KLMN$: $S = k \cdot l = 40$ cm^2 a platí $k = 4l$.

$40 = 4l \cdot l$

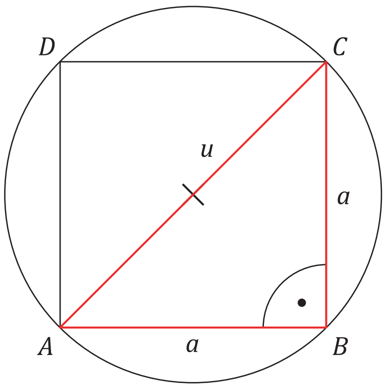
$40 = 4l^2 \;\rightarrow\; l = \sqrt{10}$ cm; $k = 4 \cdot \sqrt{10}$ cm.

15.1 $k - l = 4\sqrt{10} - \sqrt{10} \doteq 9{,}5$ cm $\rightarrow$ ano

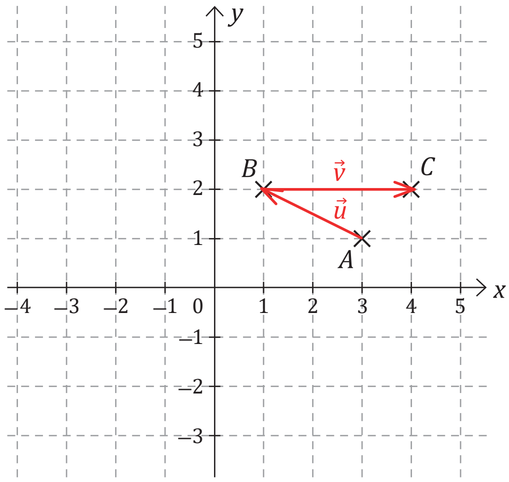
15.2 $o = 2(k + l) = 2\left(4\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 2 \cdot 5\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$ cm $\rightarrow$ ne

15.3 Čtverec: $o = 4a = 4 \cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$ cm.

$8\sqrt{10} : 10\sqrt{10} = 4 : 5 \;\rightarrow\;$ ne



16



$B\,[1;\,2]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2;\,1) \;\rightarrow\; A\,[3;\,1]$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (4;\,0) \;\rightarrow\; C\,[5;\,2]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} \;\rightarrow\;$ B)

Jiný způsob určení souřadnic bodů B, C.
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \;\rightarrow\; -\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (2;\,-1) \;\rightarrow$ souřadnice bodu A získáme ze souřadnic bodu B posunem o 2 ve směru osy x a o (-1) ve směru osy y $\rightarrow$ $A\,[1+2;\,2-1] = A\,[3;\,1]$.
$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (4;\,0) \;\rightarrow$ souřadnice bodu C získáme ze souřadnic bodu B posunem o 4 ve směru osy x a o 0 ve směru osy y $\rightarrow$ $C\,[1+4;\,2+0] = C\,[5;\,2]$.

---

17 Pravděpodobnost, že vytáhneme ze 31 lístečků právě jeden, který potřebujeme, je $\frac{1}{31}$.

Pravděpodobnost, že vytáhneme z 12 lístečků právě jeden, který potřebujeme, je $\frac{1}{12}$.

Použijeme pravidlo o výpočtu pravděpodobnosti dvou nezávislých jevů (musí platit obě současně, hledáme jejich průnik).

$$\frac{1}{31} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{372} \doteq 2{,}688 \cdot 10^{-3} = 0{,}268\,8\ \% \doteq 0{,}269\ \% \quad \rightarrow \quad \text{A)}$$

---

18 Počet děvčat................n

Jde o kombinace druhé třídy (dvojice) z n prvků. Těchto kombinací je 15.

$$C_2\,(n) = 15$$

$$\binom{n}{2} = 15$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 15$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = 15$$

$$n \cdot (n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6) \cdot (n+5) = 0$$

$n_1 = 6;\ n_2 = -5 \;\rightarrow\;$ D)

Využijeme vzorec pro úpravu kombinačního čísla a úpravy faktoriálů:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$
Kvadratickou rovnici $n^2 - n - 30 = 0$ řešíme buď využitím Vietových vzorců nebo vzorcem přes diskriminant. Počet děvčat (n) nemůže být záporné číslo.

---

19 $\triangle\, AXY$ sinová věta:

$$\frac{350}{\sin\alpha} = \frac{200}{\sin 30°}$$

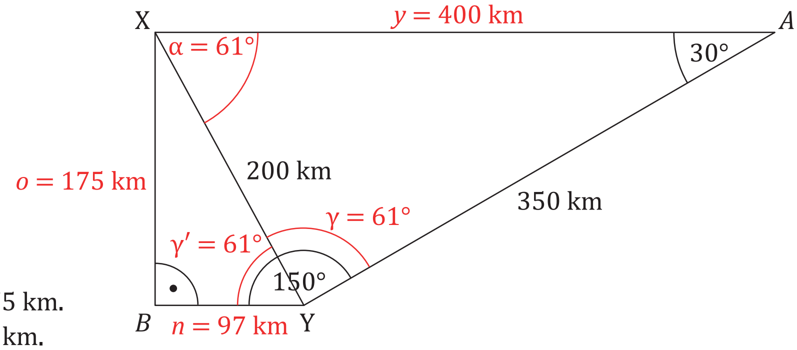
$$\sin\alpha = \frac{\sin 30°}{200} \cdot 350 \;\rightarrow\; \alpha \doteq 61°$$

$\triangle\, AXY$ součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°:
$\gamma = 180° - 61° - 30° = 89°$

$\triangle AXY$ kosinová věta:
$y^2 = 350^2 + 200^2 - 2 \cdot 350 \cdot 200 \cdot \cos 89° \;\rightarrow\; y \doteq 400$ km

$\gamma + \gamma' = 150° \;\rightarrow\; \gamma' = 150° - 89° = 61°$.
Úhly γ' a α tvoří dvojici střídavých úhlů, tudíž mají stejnou velikost.

Pravoúhlý $\triangle BYX$:



$\cos \gamma' = \dfrac{n}{m}$

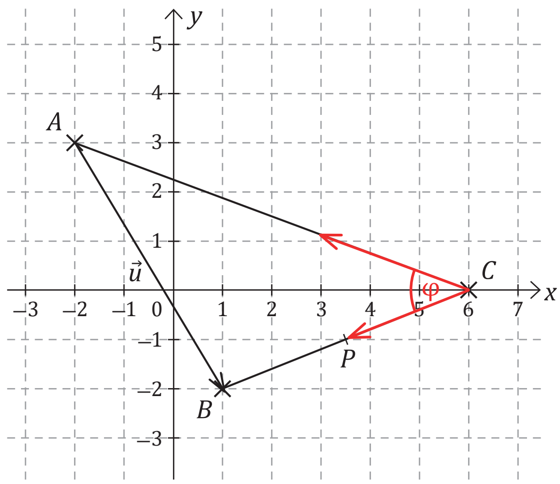
$\cos 61° = \dfrac{n}{200} \;\rightarrow\; n \doteq 97$ km

$o^2 = m^2 - n^2$
$o^2 = 200^2 - 97^2 \;\rightarrow\; o \doteq 175$ km

Trasa přes X: $y + o = 400$ km $+ 175$ km $= 575$ km.
Trasa přes Y: $x + n = 350$km $+ 97$ km $= 447$ km.
Rozdíl délek tras: 575 km − 447 km = 128 km.

Rychlost je 40 km/hod $\rightarrow$ 128 km : 40 km/hod = 3,2 hod. $\rightarrow$ E)

20



Jiný způsob určení souřadnic bodu A, C:
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \;\rightarrow\; -\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-3; 5) \;\rightarrow$ souřadnice bodu A získáme ze souřadnic bodu B posunem o (-3) ve směru osy x a o 5 ve směru osy y $\rightarrow$
$A[1-3; -2+5] = A[-2; 3]$.
Souřadnice bodu C lze také získat přímo v grafu.

$B[1; -2]$

Dopočítáme souřadnice bodu A.
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3; -5)$
$3 = 1 - x_A \;\rightarrow\; x_A = -2$
$-5 = -2 - y_A \;\rightarrow\; y_A = 3$
$A[-2; 3]$

Dopočítáme souřadnice bodu C.

Bod $P\left[\dfrac{7}{2}; -1\right]$ je středem úsečky BC.

Vzorec po výpočet středu úsečky BC: $S\left[\dfrac{x_B + x_C}{2}; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right]$.

$\dfrac{7}{2} = \dfrac{1 + x_C}{2} \;\rightarrow\; x_C = 6$

$-1 = \dfrac{-2 + y_C}{2} \;\rightarrow\; y_C = 0$

$C[6; 0]$

Zjistíme souřadnice vektorů $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$, které potřebujeme pro výpočet velikosti jejich odchylky:
$\vec{b} = \overrightarrow{CA} = A - C = (-2 - 6; 3 - 0) = (-8; 3)$,
$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = B - C = (1 - 6; -2 - 0) = (-5; -2)$.

Vypočítáme odchylku daných vektorů.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{(-8) \cdot (-5) + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{(-8)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}}$$

$\varphi \doteq 42°\,21'$ $\rightarrow$ B)

21 V PINu jsou čtyři různé číslice z výběru: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Na první pozici je prvočíslo – máme na výběr ze čtyř možností (2; 3; 5; 7).
Na druhé pozici je nejmenší přirozené číslo, tedy číslo 1 – pouze jedna možnost.
Na třetí pozici je složené číslo, které je násobkem čísla 3 – máme 2 možnosti (6; 9).
Na poslední pozici je složené sudé číslo – máme na výběr 3 možnosti (4; 6; 8).

K výpočtu počtu řešení využijeme kombinatorické pravidlo součinu.
Možností je: $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 =$ 24 možností. → D)

Prvočíslo je číslo, která má právě dva dělitele – číslo 1 a samo sebe.
Jednociferná prvočísla jsou: 2, 3, 5, 7.
Přirozená čísla jsou čísla 1; 2; 3; ...
Složené číslo má více než dva dělitele.

---

22 Aritmetická posloupnost:
$a_1 = -4$,
$a_6 = 16$.

Pro výpočet součtu prvních pěti členů použijeme vzorec:

$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$,

$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_5)$.

Je tedy třeba zjistit člen a_5. Nejprve vypočítáme diferenci této posloupnosti.
Použijeme vzorec:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \ \rightarrow\ 16 = -4 + (6-1) \cdot d \ \rightarrow\ d = 4$.
Vypočítáme 5. člen. Použijeme definici aritmetické posloupnosti.
$a_{n+1} = a_n + d \ \rightarrow\ a_6 = a_5 + 4 \ \rightarrow\ a_5 = a_6 - d \ \rightarrow\ a_5 = 16 - 4 = 12$

Dopočítáme součet: $S_5 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_5) = \frac{5}{2} \cdot (-4 + 12) = 20$.

Geometrická posloupnost:
$b_1 = -4$,
$-b_3 = 16 \ \rightarrow\ b_3 = -16$.

Pro výpočet součtu prvních pěti členů použijeme vzorec:
$S_n = b_1 \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1} \ \rightarrow\ S_5 = -4 \cdot \frac{q^{5-1}}{q-1}$.

Je tedy třeba zjistit kvocient. Použijeme vzorec $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:
$b_3 = -4 \cdot q^{3-1}$
$-16 = -4 \cdot q^2$
$q^2 = 4 \ \rightarrow\ q = 2$ ... Posloupnost je rostoucí, kvocient je kladné číslo větší než 1.

Dopočítáme součet: $S_5 = -4 \cdot \frac{2^{5-1}}{2-1} = -124$.

Vypočítáme součin obou součtů: $20 \cdot (-124) = -2\,480$. → D)

Jiný způsob výpočtu součtu – vypočítáme si všech 5 členů a sečteme je:

Aritmetická posloupnost:
$a_1 = -4;\ d = 4$
$a_2 = a_1 + d = -4 + 4 = 0$
$a_3 = a_2 + d = 0 + 4 = 4$
$a_4 = a_3 + d = 4 + 4 = 8$
$a_5 = a_4 + d = 8 + 4 = 12$
$S_5 = -4 + 0 + 4 + 8 + 12 = 20$

Geometrická posloupnost:
$b_1 = -4;\ q = 2$
$b_2 = b_1 \cdot q = -4 \cdot 2 = -8$
$b_3 = b_2 \cdot q = -8 \cdot 2 = -16$
$b_4 = b_3 \cdot q = -16 \cdot 2 = -32$
$b_5 = b_4 \cdot q = -32 \cdot 2 = -64$
$S_5 = -4 - 8 - 16 - 32 - 64 = -124$

---

23 Jedná se o nerovnici v součinovém/podílovém tvaru.
Určíme nulové body jednotlivých členů.

$x_{01} = \frac{3}{2};\ x_{02} = -\frac{1}{2};\ x_{03} = 0$

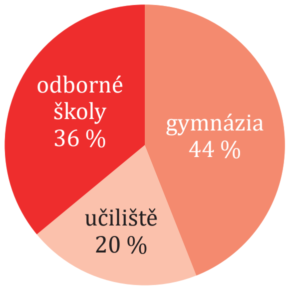
$x \neq 0$

	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left\langle -\frac{1}{2}; 0\right)$	$\left(0; \frac{3}{2}\right\rangle$	$\left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$
$(2x-3)$	−	−	−	+
$\left(x + \frac{1}{2}\right)$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
výsledné znaménko	−	+	−	+

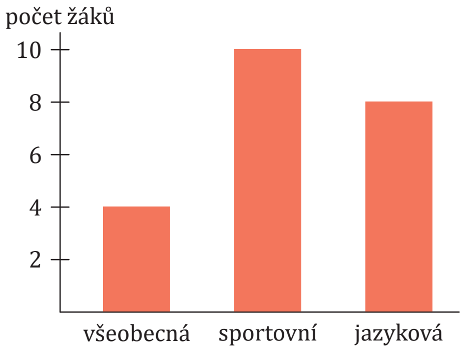
Nerovnici vyhovují intervaly $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left(0; \frac{3}{2}\right\rangle$. → D)

Nerovnici upravíme do podílového tvaru, aby na jedné její straně byl lomený výraz a na druhé nula. Následně nerovnici řešíme přes nulové body nebo soustavou nerovnic.
Pozor na podmínky. Ve jmenovateli lomeného výrazu nesmí být nula! Lomená závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu patří. Kulatá závorka intervalu znamená, že krajní bod do intervalu nepatří.

24



GRAF 1



GRAF 2

Graf 2:
Na všeobecná gymnázia byli přijati 4 žáci, na sportovní 10 a na jazyková 8. Celkem na gymnázia bylo přijato 22 žáků.

Graf 1:
Na gymnázia bylo přijato 44 % žáků, na učiliště 20 % (100 % − 44 % − 36 %).

44 % .... 22 žáků
20 % x

$x = \frac{20}{44} \cdot 22 = 10$

Na učiliště bylo přijato 10 žáků. → A)

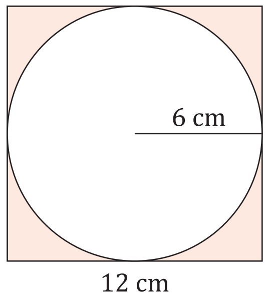
---

25 Povrch koule: $S = 4\pi r^2$.

Povrch polokoule: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2$.

Povrch polokoule s poloměrem 6 cm: $S = 2\pi \cdot 6^2 = 72\pi\ \text{cm}^2$.

Pozor na to, co tvoří povrch složeného tělesa.
V případě tělesa X nesmíme do povrchu započítat podstavu kužele a horní podstavu válce.
V případě tělesa Z je třeba dopočítat „zbytky" čtvercové horní podstavy krychle po zakrytí polokoulí.



25.1 Těleso X:

Povrch je složen z povrchu polokoule a obsahu pláště kužele.

Kužel: $r = 6$ cm; $s = 2 \cdot 6 = 12$ cm.

Povrch polokoule: $S_1 = 72\pi$.

Obsah pláště kužele: $S_2 = \pi r s = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$.

Povrch tělesa X: $S_X = 72\pi + 72\pi = 144\pi$. → B)

25.2 Těleso Y:

Povrch je složen z povrchu polokoule a obsahu pláště válce a obsahu jedné („spodní") podstavy válce.

Válec: $r = 6$ cm; $v = 2 \cdot 6 = 12$ cm.

Povrch polokoule: $S_1 = 72\pi$.

Obsah pláště válce: $S_3 = 2\pi r v = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 12 = 144\pi$.

Obsah podstavy válce: $S_4 = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$.

Povrch tělesa Y: $S_Y = 72\pi + 144\pi + 36\pi = 252\pi$. → C)

25.3 Těleso Z:

Povrch je složen z povrchu polokoule, obsahu pěti stěn krychle a „zbytku" plochy na horní podstavě, kterou nezakrývá polokoule.

Krychle: $a = 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12$ cm.

Povrch polokoule: $S_1 = 72\pi$.

Obsah pěti stěn krychle: $S_5 = 5 \cdot a^2 = 5 \cdot 12^2 = 720\ \text{cm}^2$.

Obsah nezakryté části horní podstavy vypočítáme jako rozdíl obsahu čtverce a obsahu kruhu: $S_6 = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 36\pi$.

Povrch tělesa Z: $S_Z = 72\pi + 720 + 144 - 36\pi = 864 + 36\pi$. → D)

ŘEŠENÍ

(verze 2023)

ČÍSELNÉ OBORY

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	16,4	
2	$-\frac{9}{4}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{2}$	
3	9	
4	$\frac{37}{4}$	
5	$b : c = 8 : 9$	
6	620 kg	
7	Přibližně o 53,3 %.	
8		
9	24	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $\frac{20 \cdot 72 \cdot 225}{25 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Důraz klademe na krácení, poté rozložíme na součin mocnin prvočísel a využijeme věty o počítání s mocninami.

---

2 $n\,(10, 12, 15) = 60$

Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

$60 : 10 = 6$
$60 : 12 = 5$
$60 : 15 = 4$

Do krychle se vejde $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ krabiček.

Představíme si kvádry, které jsou seskládány do krychle. Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

---

3 Součin čísel 12 a 25 je $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo *n* není dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo *n* je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo *n* není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo *n* je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo *n* je nejmenším společným násobkem čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek.
Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

4

		A	N
4.1	2 je prvočíslo.	☒	☐
4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	☒	☐
4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	☐	☒

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

5

5.1 $15 = 3 \cdot 5$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$; $n\,(15; 20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \rightarrow$ F)

5.2 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; $D\,(150; 180) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \rightarrow$ C)

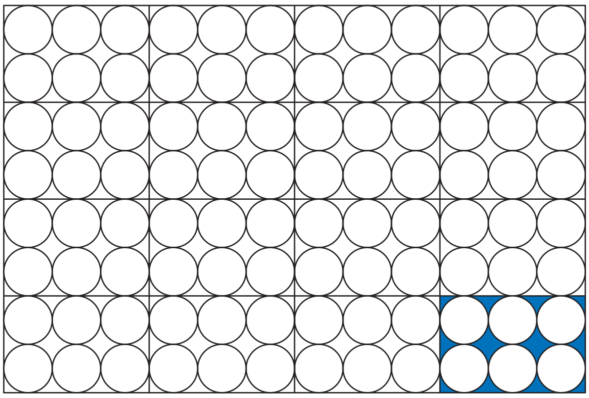
5.3 $10 = 2 \cdot 5$; $25 = 5 \cdot 5$; $n\,(10; 25) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \rightarrow$ E)

5.4 $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$; $160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $D\,(100; 160) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20 \rightarrow$ B)

Ověřujeme znalost výpočtu nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

---

6 Krabice lze na paletu umístit po celé délce i šířce (na orientaci nezáleží). Na paletě je $6 \cdot 16 = 96$ koulí.



Rozměr a počet krabic nemají pro výpočet zásadní smysl.
Slouží pouze pro upevnění koulí a vizualizaci úlohy. Určíme počet koulí, které lze umístit do jedné krabice (známe poloměr koule) a vynásobíme počtem krabic.

---

7 Průměrná hodnota $\dfrac{8 + 6 + 5 + 5 + 6}{5}\,°C = \dfrac{30}{5}\,°C = 6\,°C$

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

---

8 $\dfrac{(-1) \cdot |-2|}{(-3)} \cdot \dfrac{(-5 + 4)}{|-5 + 4|} = \dfrac{(-1) \cdot 2}{(-3)} \cdot \dfrac{(-1)}{1} = -\dfrac{2}{3} \rightarrow$ E)

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

9

		A	N
9.1	Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná.	☒	☐
9.2	Součin lichého počtu záporných čísel je záporný.	☐	☒
9.3	Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný.	☐	☒

Klademe důraz na správné přečtení zadání.
9.1 Rozlišíme pojmy kladné a nezáporné číslo (resp. záporné a nekladné číslo).
9.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

10 **10.1** $(-2) + 3 = 1 \rightarrow$ D)

10.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2 \rightarrow$ B)

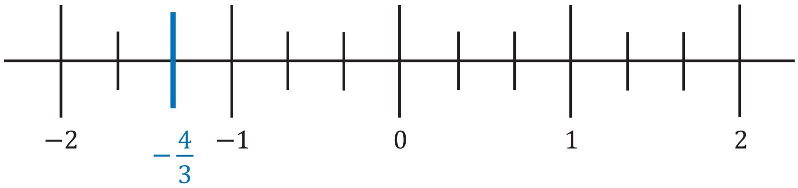
10.3 $(-2) \cdot (-1^2) = 2 \rightarrow$ E)

10.4 $(-3) - (-2) = -1 \rightarrow$ A)

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze **10.2** a **10.3** je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1)^2 = -1$.
Úlohu **10.4** lze řešit jako rozdíl dvou záporných čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

---

11 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose. Číselná osa pomáhá vyznačit správný počet třetin.

---

12 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}+2}{2} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} + \frac{\frac{2+6}{3}}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

---

13 35 ... 100 % $\rightarrow$ 50 ... 143 % $\rightarrow$ změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, co je základ. Tedy kolik je 100 %. Řešíme pomocí trojčlenky nebo také výpočtem 1 %.

		A	N
14.1	12 395 ≐ 12 000	☒	☐
14.2	na stovky 12 395 ≐ 12 400 na desítky 12 395 ≐ 12 400	☒	☐
14.3	12 395 = 12 395 – zůstane stejné	☐	☒

14

V úloze **14.2** porovnáme oba výsledky zaokrouhlení.
Úloha **14.3** může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“. Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

---

15 **15.1** $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S \rightarrow$ o 125 % $\rightarrow$ E)

15.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C \rightarrow$ C)

15.3 $l' : l = 5 : 10 \rightarrow l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l \rightarrow$ B)

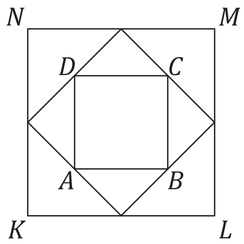
15.4 1 h = 60 min........ 100 %
75 min.............. 125 % $\rightarrow$ změna 25 % $\rightarrow$ A)

Úloha **15.1** může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah.
Úloha **15.2** je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina.
V úloze **15.4** žák nejprve převede základ 1 h na 60 minut.

---

16 Platí pro každé reálné číslo.

17 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$, poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční“, a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

---

18 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 . . . . 100 %

3 . . . . x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 % → B).

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

19

		A	N
19.1	Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění.	☐	☒
19.2	Absolutní hodnota nuly je nula. Správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná.	☐	☒
19.3	Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné.	☒	☐

Úloha **19.1** může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha **19.2** vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha **19.3** může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

20

20.1 $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$ → E)

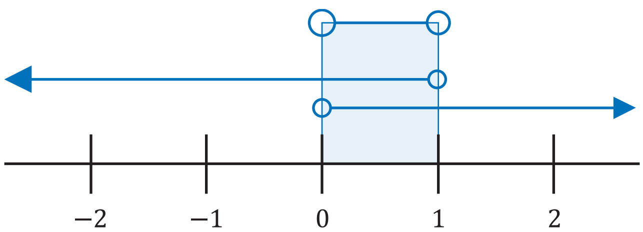
20.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ → D)

20.3 $-\sqrt{4} = -2$ → A)

20.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ → C)

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

21



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; …).

22 $A = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ nebo $A = (0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha **21**). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

---

23 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5) \rightarrow$ E)

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalu *A*, *B* a *C* na číselné ose.

24

		A	N
24.1	$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{Z}^+$	☒	☐
24.2	$(-1; 1) \subset \langle -1; 1\rangle$	☐	☒
24.3	$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	☒	☐

Úlohy **24.1** a **24.3** ověřují znalosti číselných množin. V úloze **24.2** je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

25

25.1 $\mathbb{R}^+ = (0; \infty) \rightarrow$ F)

25.2 $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset = (0; 0) \rightarrow$ B)

25.3 $\mathbb{R}_0^- \cup \mathbb{R}_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty) \rightarrow$ C)

25.4 $\mathbb{R}_0^- \setminus \{0\} = \mathbb{R}^- = (-\infty; 0) \rightarrow$ E)

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověď A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy **21** a **22**).

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$-a+3$	
2	$b^{\frac{11}{2}}$	
3		
3.1	B	
3.2	D	
3.3	A	
4	$(-a^3+5)^2 = a^6 - 10a^3 + 25$	Kvadratický člen v mnohočlenu chybí, tzn. že koeficient je roven 0.
5	$-\dfrac{18}{k(k+3)}$	
6	$(1+2\sqrt{3}-x)(1+x)$	
7	E	
8		
8.1	D	
8.2	B	
8.3	E	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\\[2ex] x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{\frac{1}{4}-1+3}{\frac{1+2}{2}} = \dfrac{\frac{1}{4}+2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{1+2\cdot 4}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{1+8}{4}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$$

2 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2-2x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve -3 a potom 1.

$$A=-\frac{4\cdot(-3)}{(-3)^2-4}=-\frac{-12}{9-4}=\frac{12}{5}$$

$$B=-\frac{4\cdot 1}{1^2-4}=-\frac{4}{1-4}=\frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku…

$\frac{4}{3}$ . . . . 100 %

$\frac{12}{5}$ . . . . x %

$x = 180$ %

… tedy o 80 % větší.

---

3 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$x^2-x-6\neq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1\neq\frac{1+5}{2}\ \rightarrow\ x_1\neq 3$$

$$x_2\neq\frac{1-5}{2}\ \rightarrow\ x_2\neq -2$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$

$$x^2-2x-3=2(x^2-x-6)$$
$$x^2-2x-3=2x^2-2x-12$$
$$-x^2=-9$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x=\pm 3$, ale hodnota $x=3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru. Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x=-3$.

---

4 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

4.1 $\frac{x}{x^2-1}\ \rightarrow\ x^2-1\neq 0\ \rightarrow\ x^2\neq 1\ \rightarrow\ x\neq\pm 1\ \rightarrow$ B)

4.2 $\dfrac{\frac{x-1}{x}}{x+1}\ \rightarrow\ x\neq 0\wedge x+1\neq 0\ \rightarrow\ x\neq 0\wedge x\neq -1\ \rightarrow$ D)

4.3 $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{x}\ \rightarrow\ x-1\neq 0\wedge x\neq 0\ \rightarrow\ x\neq 1\wedge x\neq 0\ \rightarrow$ C)

5 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\left(a^2-2\right)^2-\left(4-a^2\right)^2-4=\left[\left(a^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot 2+2^2\right]-\left[4^2-2\cdot 4\cdot a^2+\left(a^2\right)^2\right]-4=$$

$$= a^4 - 4a^2 + 4 - (16 - 8a^2 + a^4) - 4 = a^4 - 4a^2 + 4 - 16 + 8a^2 - a^4 - 4 =$$

$$= 4a^2 - 16 = 4(a^2-4) = 4(a-2)(a+2)$$

---

6 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x+0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x+0{,}5x$	$0{,}5p(x+0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x+0{,}5x)$	$0{,}2p\cdot 2(x+0{,}5x)$

$0{,}3px + 0{,}5p(x+0{,}5x) + 0{,}2p\cdot 2(x+0{,}5x) =$
$= 0{,}3px + 0{,}5px + 0{,}25px + 0{,}4px + 0{,}2px = 1{,}65px \rightarrow$ D)

---

7 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$(a+2)^3+(a-2)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3+a^3-3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2-2^3 =$
$= a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 2a^3 + 24a = 2a(a^2+12)$

---

8 $3a^2x - 6ax - 2a^2y + 4ay = 3ax(a-2) - 2ay(a-2) = (a-2)(3ax-2ay) =$
$= a(a-2)(3x-2y)$

---

9 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x) : B(x)$.

$$\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-x-6):(x^2+x-3)=x+2\\
\underline{-x^3-x^2+3x}\\
\quad 2x^2+2x-6\\
\quad \underline{-2x^2-2x+6}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

B) $A(x) = (x+2)\cdot B(x)$

		A	N
10 **10.1**	Postupujeme dle vzorce $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, kde $a = x$ a $b=\frac{1}{x}$. $x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$	☒	☐
10.2	$(3x+3)^2+(4x+4)^2=9x^2+18x+9+16x^2+32x+16=$ $=25x^2+50x+25=(5x+5)^2$	☒	☐
10.3	$(x+2)^2-(x-2)^2=x^2+4x+4-x^2+4x-4=8x$	☐	☒
10.4	$(x+2)^2+2x+5=x^2+4x+4+2x+5=x^2+6x+9=(x+3)^2$	☒	☐

11 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$
$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$
$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$
$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$
$$(x-1)^2 = A^2(x)$$
$$A(x) = x - 1 \ \rightarrow\ \text{D)}$$

---

12 $\left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2}\right)\left(x - \frac{4}{x}\right) = \frac{x(x-2) + x(x+2)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x \cdot x - 4}{x} =$

$= \frac{x^2 - 2x + x^2 + 2x}{\cancel{x^2-4}} \cdot \frac{\cancel{x^2-4}}{x} = \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 2x$

podm.: $x \neq \pm 2$; $x \neq 0$

---

13 $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \left(\frac{1}{a+1} + \frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right) \cdot \frac{1-a}{a} =$

$= \frac{a - 1 - 2a}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-a-1}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{-\cancel{(a-1)}}{a} =$

$= \frac{1}{a}$

podm.: $a \neq \pm 1$; $a \neq 0$

---

14 $\dfrac{1 + \frac{1}{a-2}}{a - \frac{1}{2-a}} = \dfrac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}} = \dfrac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}} = \dfrac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{-(a-2)}} = \dfrac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{(a-1)^2}{a-2}} =$

$= \frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}} \cdot \frac{\cancel{a-2}}{(a-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a-1}$

podm.: $a \neq 1$; $a \neq 2$

---

15 $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a-1}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{a}{a-1}} = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{a-1}{a} = 1 + \frac{a-1}{a} =$

$= \frac{a + a - 1}{a} = \frac{2a - 1}{a} \ \rightarrow\ \text{B)}$

16 Výraz není definován pro takové $x \in \mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

A) $\dfrac{x-2}{1+\dfrac{2}{x}} \to 1+\dfrac{2}{x} \neq 0 \to \dfrac{x+2}{x} \neq 0 \to x \neq -2 \wedge x \neq 0$

B) $\dfrac{x-2}{1+\dfrac{2}{x+2}} \to 1+\dfrac{2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x+2+2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x+4}{x+2} \neq 0 \to$

$x \neq -4 \wedge x \neq -2$

C) $\dfrac{x+2}{1+\dfrac{4}{x-2}} \to 1+\dfrac{4}{x-2} \neq 0 \to \dfrac{x-2+4}{x-2} \neq 0 \to \dfrac{x+2}{x-2} \neq 0 \to x \neq \pm 2$

D) $\dfrac{x-2}{1-\dfrac{2}{x+2}} \to 1-\dfrac{2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x+2-2}{x+2} \neq 0 \to \dfrac{x}{x+2} \neq 0 \to$

$x \neq 0 \wedge x \neq -2$

E) $\dfrac{x-2}{1-\dfrac{2}{x}} \to 1-\dfrac{2}{x} \neq 0 \to \dfrac{x-2}{x} \neq 0 \to x \neq 2 \wedge x \neq 0$

---

17 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

		A	N
17.1	$\dfrac{A(a)}{B(a)} = \dfrac{\dfrac{2a}{a^2-1}}{\dfrac{a}{a+1}} = \dfrac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \dfrac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \dfrac{2}{a-1}$	☐	☒
17.2	$\dfrac{B(a)}{A(a)} + 1 = \dfrac{\dfrac{a}{a+1}}{\dfrac{2a}{a^2-1}} + 1 = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \dfrac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \dfrac{a-1}{2} + 1 = \dfrac{a-1+2}{2} = \dfrac{a+1}{2}$	☒	☐
17.3	$A(a) - B(a) = \dfrac{2a}{a^2-1} - \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{2a-a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{3a-a^2}{a^2-1}$	☒	☐
17.4	$A(a) + B(a) = \dfrac{2a}{a^2-1} + \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{2a+a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \dfrac{a}{a-1}$	☐	☒

---

18 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} =$

$= \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

popř.

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}-1) + (x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

19 $\left(\sqrt{x}\right)^{-1} + \left(\sqrt{x}\right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

$= \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{x\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x}+x}{x \cdot x} = \frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{x^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$

---

20 $\sqrt{x} + \sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x} + 1 = 2 \qquad | - 1$$

$$\sqrt{2x} = 1 \qquad |\,^2$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \text{C)}$$

---

21 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$$V(a, b) = \left(a^{-16}b^4\right)^{\frac{1}{8}} = a^{-16\cdot\frac{1}{8}}\, b^{4\cdot\frac{1}{8}} = a^{-2}b^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{b}}{a^2}$$

$$V(\sqrt{5}, 25) = \frac{\sqrt{25}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{5}{5} = 1 \;\rightarrow\; \text{A)}$$

---

22 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

22.1 $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2-x}} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -1 \\ 2-x > 0 \;\rightarrow\; 2 > x \end{array}\right\} \rightarrow x \in \langle -1; 2) \;\rightarrow\; \text{E)}$

22.2 $\frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} \rightarrow 4 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 4 \rightarrow |x| < 2 \rightarrow x \in (-2; 2) \;\rightarrow\; \text{D)}$

22.3 $\sqrt{1+\frac{1}{x+1}} = \sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}} = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \rightarrow \frac{x+2}{x+1} \geq 0$

$$(x+2 \geq 0 \;\wedge\; x+1 > 0) \quad \vee \quad (x+2 \leq 0 \;\wedge\; x+1 < 0)$$

$$(x \geq -2 \;\wedge\; x > -1) \quad \vee \quad (x \leq -2 \;\wedge\; x < -1)$$

$$x \in (-1; \infty) \qquad x \in (-\infty; -2\rangle$$

$$\rightarrow x \in (-\infty; -2\rangle \;\cup\; (-1; \infty) \;\rightarrow\; \text{A)}$$

ROVNICE A NEROVNICE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	B	
2	$K = (-\infty; 10\rangle$	
3	$x \neq 3$, $K = \{0\}$	
4	Úkol bude splněn po 21 dnech.	
5		
5.1	A	
5.2	A	
5.3	A	
5.4	A	
6	D	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich x-ová a y-ová souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \ \wedge \ [x, y] = [3; a] \ \rightarrow \ 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \ \rightarrow \ 9 + 2a = 5 \ \rightarrow \ 2a = -4 \ \rightarrow \ a = -2$

$3x + 2y = 5 \ \wedge \ [x, y] = [b; 4] \ \rightarrow \ 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \ \rightarrow \ 3b + 8 = 5 \ \rightarrow \ 3b = -3 \ \rightarrow \ b = -1$

$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

---

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

A) $$x = 10 \left\{ \begin{aligned} & L(x = 10)\text{: } \frac{10^2 - 3}{\sqrt{10 - 1}} = \frac{100 - 3}{\sqrt{9}} = \frac{97}{3} = 32\frac{1}{3} \\ & \mathrm{P}(x = 10)\text{: } \frac{10}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow L(x = 10) \neq P(x = 10)$$

B) $$x = 5 \left\{ \begin{aligned} & L(x = 5)\text{: } \frac{5^2 - 3}{\sqrt{5 - 1}} = \frac{25 - 3}{\sqrt{4}} = \frac{22}{2} = 11 \\ & \mathrm{P}(x = 5)\text{: } \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned} \right\} \rightarrow L(x = 5) \neq P(x = 5)$$

C) $$x = 4 \left\{ \begin{aligned} & L(x = 4)\text{: } \frac{4^2 - 3}{\sqrt{4 - 1}} = \frac{16 - 3}{\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}} \\ & \mathrm{P}(x = 4)\text{: } \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow L(x = 4) \neq P(x = 4)$$

D) $x = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} L(x=2)\colon \dfrac{2^2-3}{\sqrt{2-1}} = \dfrac{4-3}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ P(x=2)\colon \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow L(x=2) = P(x=2)$

E) $x = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} L(x=1)\colon \dfrac{1^2-3}{\sqrt{1-1}} = \dfrac{1-3}{\sqrt{0}} \text{ výraz není definován} \\ P(x=1)\colon \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array} \right\} \rightarrow$ pro $x = 1$ rovnice není definována

---

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$$\begin{aligned} 32 + x &= 0{,}96(x + 35) && \\ 32 + x &= 0{,}96x + 33{,}6 && |\ -0{,}96x;\ -32 \\ 0{,}04x &= 1{,}6 && |\ :0{,}04 \\ x &= 40 && \end{aligned}$$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

---

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. Po odčerpání 20 % vody ($0{,}2x$) a třetiny zbytku vody $\left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}8x\right)$ klesne jeho hmotnost na 79 kg.

hmotnost vody v sudu x

$$\begin{aligned} 135 - 0{,}2x - \frac{1}{3} \cdot 0{,}8x &= 79 && |\ \cdot 3 \\ 405 - 0{,}6x - 0{,}8x &= 237 && |\ -405 \\ -1{,}4x &= -168 && |\ :(-1{,}4) \\ x &= 120 && \end{aligned}$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

---

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$\begin{aligned} p &= p_1[1 + \alpha(t - t_1)] && \\ p &= p_1 + p_1\alpha(t - t_1) && \\ p &= p_1 + p_1\alpha t - p_1\alpha t_1 && |\ -p_1;\ +p_1\alpha t_1 \\ p - p_1 + p_1\alpha t_1 &= p_1\alpha t && |\ :p_1\alpha \\ \frac{p - p_1 + p_1\alpha t_1}{p_1\alpha} &= t && \end{aligned}$$

A N

6 **6.1** Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in \mathbb{R}$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$. Tvrzení tedy pravdivé není. ☐ ☒

6.2 Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

$$\frac{x^2-4}{x+2} = 1$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = 1$$

$$x - 2 = 1 \qquad | +2$$

$$x = 3$$

6.3 Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

6.4 Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnici a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a -2. Tvrzení je tedy pravdivé. ☒ ☐

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad | -x; -2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

7

$$\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} = 2x - 4 \qquad | \cdot 6$$

$$3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) = 12x - 24$$

$$3x + 2x + \frac{2x+4}{3} = 12x - 24 \qquad | \cdot 3$$

$$9x + 6x + 2x + 4 = 36x - 72$$

$$17x + 4 = 36x - 72 \qquad | -36x; -4$$

$$-19x = -76 \qquad | : (-19)$$

$$x = 4$$

---

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$2x + y = -3$$

$$x - 2y = -4 \qquad | \cdot 2$$

$$2x + y = -3$$

$$2x - 4y = -8$$

$$4x - 3y = -11 \rightarrow \text{D)}$$

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$\begin{aligned}
(x+3)^2 - 4(x-1)^2 - 2x &= -3(x-2)^2 + 6x - 1 \\
x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1) - 2x &= -3(x^2 - 4x + 4) + 6x - 1 \\
x^2 + 6x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 - 2x &= -3x^2 + 12x - 12 + 6x - 1 \\
-3x^2 + 12x + 5 &= -3x^2 + 18x - 13 && | + 3x^2; - 18x; - 5 \\
12x - 18x &= -13 - 5 \\
-6x &= -18 && | : (-6) \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. → C)

---

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} &= \frac{3x+2}{x^2+x} - 1 && \text{podm.: } x \neq 0;\ x \neq -1 \\
\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} &= \frac{3x+2}{x(x+1)} - 1 && | \cdot x(x+1) \\
2(x+1) - x \cdot x &= 3x + 2 - x(x+1) \\
2x + 2 - x^2 &= 3x + 2 - x^2 - x \\
-x^2 + 2x + 2 &= -x^2 + 2x + 2 && | + x^2 - 2x - 2 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

---

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím kratší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci .... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků .... x hodin

$$\begin{aligned}
\frac{6}{4} &= \frac{x+2{,}5}{x} && | \cdot 4x \\
6x &= 4(x+2{,}5) \\
6x &= 4x + 10 && | - 4x \\
2x &= 10 && | : 2 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků .... 5 hodin
10 soustružníků .... y hodin

$$\begin{aligned}
\frac{10}{6} &= \frac{5}{y} && | \cdot 6y \\
10y &= 30 && | : 10 \\
y &= 3
\end{aligned}$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice, její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, $0{,}75x$. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku .... $0{,}75x$
jmenovatel zlomku x

$$\begin{aligned}
\frac{0{,}75x + 2}{x + 2} &= 0{,}8 && | \cdot (x + 2)\\
0{,}75x + 2 &= 0{,}8(x + 2)\\
0{,}75x + 2 &= 0{,}8x + 1{,}6 && | - 0{,}8x - 2\\
-0{,}05x &= -0{,}4 && | : (-0{,}05)\\
x &= 8
\end{aligned}$$

Jmenovatel původního zlomku je roven 8, čitatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. $0{,}75 \cdot 8 = 6$.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

---

13 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} &= \frac{3}{x^2-4} + 2 && \text{podm.: } x \neq \pm 2\\
\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} &= \frac{3}{(x-2)(x+2)} + 2 && | \cdot (x-2)(x+2)\\
2(x+2) + x(x-2) &= 3 + 2(x-2)(x+2)\\
2x + 4 + x^2 - 2x &= 3 + 2(x^2 - 4)\\
x^2 + 4 &= 3 + 2x^2 - 8\\
x^2 + 4 &= 2x^2 - 5 && | - 2x^2; - 4\\
-x^2 &= -9 && | \cdot (-1)\\
x^2 &= 9\\
x &= \pm 3\\
K &= \{\pm 3\}
\end{aligned}$$

---

14 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x+3} &= \frac{x-1}{x+9} && | \cdot (x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x \neq -3;\ x \neq -9\\
(x-2)(x+9) &= (x-1)(x+3)\\
x^2 + 9x - 2x - 18 &= x^2 + 3x - x - 3\\
x^2 + 7x - 18 &= x^2 + 2x - 3 && | - x^2 - 2x + 18\\
5x &= 15 && | : 5\\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y-3}{y+3} &= \frac{y-4}{y-1} && | \cdot (y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y \neq -3;\ y \neq 1\\
(y-1)(y-3) &= (y-4)(y+3)\\
y^2 - 3y - y + 3 &= y^2 + 3y - 4y - 12\\
y^2 - 4y + 3 &= y^2 - y - 12 && | - y^2 + y - 3\\
-3y &= -15 && | : (-3)\\
y &= 5
\end{aligned}$$

Řešením rovnic jsou čísla $x = 3$ a $y = 5$. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15. → B)

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

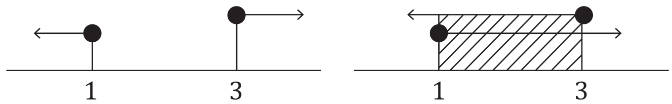
$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, jestliže $(x - 3 \geq 0 \land x - 1 \leq 0) \lor (x - 3 \leq 0 \land x - 1 \geq 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \geq 0 \ \land \ x - 1 \leq 0) \quad \lor \quad (x - 3 \leq 0 \ \land \ x - 1 \geq 0)$$
$$(x \geq 3 \ \land \ x \leq 1) \quad \lor \quad (x \leq 3 \ \land \ x \geq 1)$$
$$x \in \emptyset \quad \lor \quad x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

---

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku . . . . $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$x(x + 17{,}5) = 375$

$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1\,500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1\,806{,}25}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \ \rightarrow \ \text{nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka $12{,}5 + 17{,}5 = 30$ cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1\,056{,}25} = 32{,}5$ cm. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

---

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x + 1$ (druhá mocnina je $(x + 1)^2$) a největší $x + 2$ (druhá mocnina je $(x + 2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo . . . . $x + 1$
třetí číslo . . . . $x + 2$

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 10(x + 2)$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 20$

$3x^2 + 6x + 5 = 10x + 20 \qquad | -10x - 20$

$3x^2 - 4x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = \frac{4 + 14}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 14}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \ \rightarrow \ \text{nevyhovuje (} x \text{ je přirozené číslo)}$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je $3 + 4 + 5 = 12$.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$\begin{aligned}(x+3)^2-(3x-1)^2&=0\\ x^2+6x+9-(9x^2-6x+1)&=0\\ x^2+6x+9-9x^2+6x-1&=0\\ -8x^2+12x+8&=0 \qquad |:(-4)\\ 2x^2-3x-2&=0\end{aligned}$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ |x_1|=\frac{1}{2}\\ x_2&=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2\ \rightarrow\ |x_2|=2\end{aligned}\right\}\rightarrow\ |x_2|=4|x_1|\ \rightarrow\ \text{E)}$$

---

19 Je-li $x_1=3$ řešením rovnice $x^2-x-b^2+5b=0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{aligned}x^2-x-b^2+5b&=0\\ x_1&=3\end{aligned}\right\}3^2-3-b^2+5b=0\ \rightarrow\ b^2-5b-6=0$$

$$b_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm7}{2}$$

$$b_1=\frac{5-7}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$b_2=\frac{5+7}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Nyní do původní rovnice $x^2-x-b^2+5b=0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{aligned}x^2-x-b^2+5b&=0\\ b_1&=-1\end{aligned}\right\}x^2-x-(-1)^2+5(-1)=0\ \rightarrow\ x^2-x-6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

$$x_2=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven -2. → B)

---

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2}=|x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x-a|\leq b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a-b;\ a+b\rangle$.

20.1 $(x-1)^2\leq1\ \rightarrow\ |x-1|\leq1\ \rightarrow\ x\in\langle0;\ 2\rangle\ \rightarrow$ C)

20.2 $(x+1)^2\leq4\ \rightarrow\ |x-(-1)|\leq2\ \rightarrow\ x\in\langle-3;\ 1\rangle\ \rightarrow$ A)

20.3 $(x+1)^2\leq9\ \rightarrow\ |x-(-1)|\leq3\ \rightarrow\ x\in\langle-4;\ 2\rangle\ \rightarrow$ D)

21 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 3(2x-1)-2(x+3) &\leq 5x-1 \\ 6x-3-2x-6 &\leq 5x-1 \\ 4x-9 &\leq 5x-1 && |-5x+9 \\ 4x-5x &\leq -1+9 \\ -x &\leq 8 && |:(-1) \\ x &\geq -8 \;\rightarrow\; x \in \langle -8; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4x-3)-5(x+2) &\geq 4x-13 \\ 8x-6-5x-10 &\geq 4x-13 \\ 3x-16 &\geq 4x-13 && |-4x+16 \\ 3x-4x &\geq -13+16 \\ -x &\geq 3 && |:(-1) \\ x &\leq -3 \;\rightarrow\; x \in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x &\in \langle -8; \infty) \\ x &\in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}\right\} \rightarrow x \in \langle -8; -3\rangle$$

---

22 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x-1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} \leq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 0$$

$1 \geq 0 \;\rightarrow\; x-1 < 0 \;\rightarrow\; x < 1 \;\rightarrow\; x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$

---

23 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 2(3x-1)-3[2(x+4)-3(x-2)] &\leq 7(x-5)+1 \\ 6x-2-3[2x+8-3x+6] &\leq 7x-35+1 \\ 6x-2-3[-x+14] &\leq 7x-34 \\ 6x-2+3x-42 &\leq 7x-34 \\ 9x-44 &\leq 7x-34 && |-7x+44 \\ 9x-7x &\leq -34+44 \\ 2x &\leq 10 && |:2 \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \leq 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1+2+3+4+5 = 15$. → D)

---

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\frac{2x-\frac{1}{3}(x+4)}{4} + \frac{3x-\frac{1}{4}(x-2)}{3} \leq \frac{3x+1}{2} \qquad |\cdot 12$$

$$3\left[2x-\frac{1}{3}(x+4)\right] + 4\left[3x-\frac{1}{4}(x-2)\right] \leq 6(3x+1)$$

$$\begin{aligned} 6x-(x+4)+12x-(x-2) &\leq 18x+6 \\ 6x-x-4+12x-x+2 &\leq 18x+6 \\ 16x-2 &\leq 18x+6 && |-18x+2 \\ -2x &\leq 8 && |:(-2) \\ x &\geq -4 \;\rightarrow\; x \in \langle -4; \infty) \;\rightarrow\; \text{A)} \end{aligned}$$

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

25.1
$$
\begin{aligned}
2(3x-1)-3(x+2) &\le 4x-6 \\
6x-2-3x-6 &\le 4x-6 \\
3x-8 &\le 4x-6 \qquad |-4x+8 \\
3x-4x &\le -6+8 \\
-x &\le 2 \qquad |:(-1) \\
x &\ge -2 \;\rightarrow\; x \in \langle -2; \infty) \;\rightarrow\; \text{B)}
\end{aligned}
$$

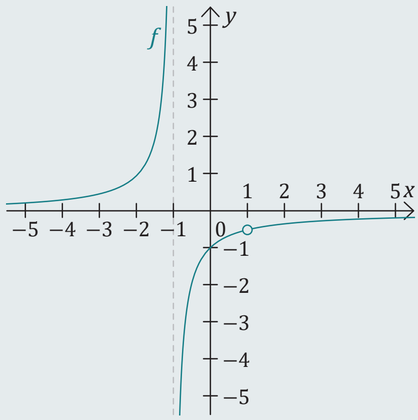
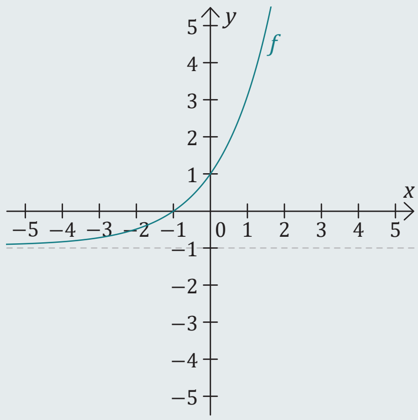
25.2
$$
\begin{aligned}
4(2x-3)-2(x+1) &\le 7x-8 \\
8x-12-2x-2 &\le 7x-8 \\
6x-14 &\le 7x-8 \qquad |-7x+14 \\
6x-7x &\le -8+14 \\
-x &\le 6 \qquad |:(-1) \\
x &\ge -6 \;\rightarrow\; x \in \langle -6; \infty) \;\rightarrow\; \text{E)}
\end{aligned}
$$

25.3
$$
\begin{aligned}
4(3x-2)-6(x-3) &\le 7x+15 \\
12x-8-6x+18 &\le 7x+15 \\
6x+10 &\le 7x+15 \qquad |-7x-10 \\
6x-7x &\le 15-10 \\
-x &\le 5 \qquad |:(-1) \\
x &\ge -5 \;\rightarrow\; x \in \langle -5; \infty) \;\rightarrow\; \text{D)}
\end{aligned}
$$

FUNKCE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	C	
2	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ Grafem je hyperbola s výjimkou jednoho bodu ($x = 1$). 	
3	$K = \{4\}$	
4	$P_x[-1; 0]$, $P_y[0; 1]$ 	
5	$K = \{1\}$	
6	$a = -4$	
7	$\log_5 6 = \frac{p}{3} + \frac{q}{2}$	
8	$K = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

---

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule. Proto musí platit, že:

$$\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \ \rightarrow \ x > 3 \end{array}\right\} \rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \ \rightarrow \ x \in (3; 5\rangle$$

---

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$. Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f\colon y = \frac{|x-3|}{2x} \ \rightarrow \left(\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

		A	N
4 **4.1**	$f_1\colon y = \dfrac{2}{\lvert x\rvert - 3} \rightarrow \lvert x\rvert - 3 \neq 0 \rightarrow \lvert x\rvert \neq 3 \rightarrow x \neq \pm 3$	☐	☒
4.2	$f_2\colon y = \dfrac{x}{x^2 + 3} \rightarrow x^2 + 3 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in \mathbb{R}$	☒	☐
4.3	$f_3\colon y = \dfrac{2x + 2}{x + 1} \rightarrow x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$	☐	☒
4.4	$f_4\colon y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{2}} \rightarrow \dfrac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in \mathbb{R}$	☒	☐

---

5 $A\,[0; 0]$: $\dfrac{0^2 + 0}{0 - 1} = 0 \ \rightarrow$ bod $A\,[0; 0]$ leží

$B\,[-1; 0]$: $\dfrac{(-1)^2 + (-1)}{(-1) - 1} = \dfrac{1 - 1}{-2} = 0 \ \rightarrow$ bod $B\,[-1; 0]$ leží

$C\,[2; 6]$: $\dfrac{2^2 + 2}{2 - 1} = \dfrac{4 + 2}{1} = 6 \ \rightarrow$ bod $C\,[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $\dfrac{(-3)^2 + (-3)}{(-3) - 1} = \dfrac{9 - 3}{-4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \ \rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

Na grafu funkce f leží 3 body A, B a C. $\rightarrow$ D)

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6{,}3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k, vyjádříme pomocí lineární funkce:

$$p = 55 - \frac{6{,}3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0{,}063k + 55$.

---

7 $v = at + b \rightarrow \left\{\begin{matrix} v_1 = at_1 + b \rightarrow 337{,}92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \rightarrow 350{,}12 = 30a + b \end{matrix}\right\}$

Řešením soustavy je $a = 0{,}61$ a $b = 331{,}82$.
Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0{,}61t + 331{,}82$.

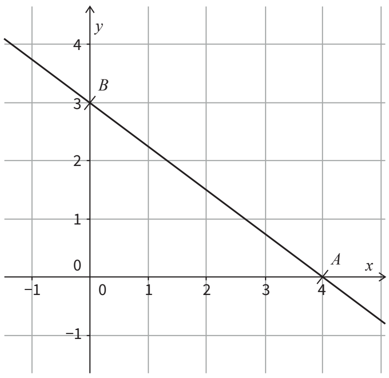
---

8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A\,[x; 0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B\,[0; y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge y = 0) \rightarrow 0 = -0{,}75x + 3 \rightarrow x = \frac{3}{0{,}75} = 4 \rightarrow A\,[4; 0]$

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge x = 0) \rightarrow y = -0{,}75 \cdot 0 + 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow B\,[0; 3]$

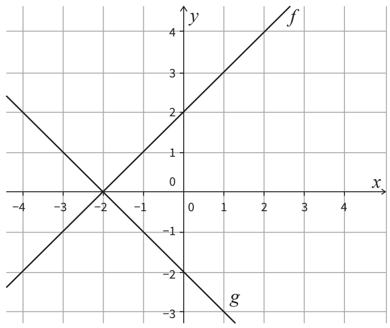
Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.
$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



---

9 Grafem funkce f je přímka, která se v osové souměrnosti podle osy x zobrazí opět na přímku. V osové souměrnosti podle osy x se funkční hodnoty původní funkce změní na hodnoty opačné, tzn. $g(x) = -f(x)$.

Proto g: $y = -x - 2$. → D)



---

10 **10.1** $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ → D)

10.2 $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ → B)

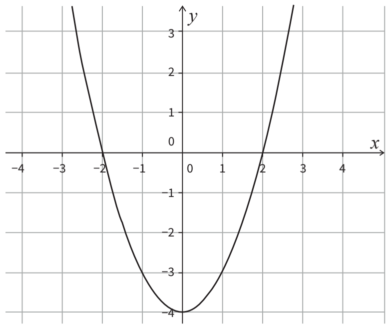
10.3 $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ → E)

---

11 f: $y = x - 2 \wedge P\,[x; 1] \in f \rightarrow 1 = x - 2 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ funkce se protínají v bodě $P\,[3; 1]$

g: $y = ax + 4 \wedge P\,[3; 1] \in g \rightarrow 1 = 3a + 4 \rightarrow -3 = 3a \rightarrow a = -1 \rightarrow$ B)

12 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je -4, potom funkce prochází bodem $V[0; -4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice $[2; 0]$, potom druhý má souřadnice $[-2; 0]$.



Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}\,[2; 0]$ a $P_{x2}\,[-2; 0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f\colon y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

$V \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\rightarrow\; c = -4$

$P_{x1} \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \;\rightarrow\; 0 = 4a + 2b + c$

$P_{x2} \in f\colon y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \;\rightarrow\; 0 = 4a - 2b + c$

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je $a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.

Pro funkci f tedy platí: $f\colon y = x^2 - 4$.

Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

---

13 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \quad \wedge \quad f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) + 3 =$

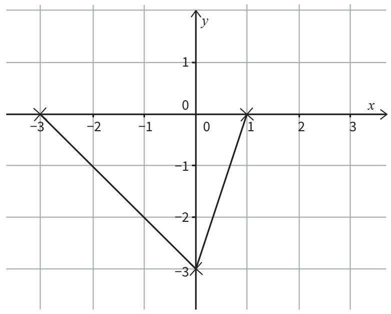
$= a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$$f(a+1) \geq f(a)$$
$$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$$
$$2a \geq -3$$
$$a \geq -\frac{3}{2}$$

$a \in \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)$

---

14 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu $f\colon y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu $f\colon y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.



$(f\colon y = x^2 + 2x - 3 \;\wedge\; x = 0) \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; P_1[0; -3]$

$(f\colon y = x^2 + 2x - 3 \;\wedge\; y = 0) \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; (x+3)(x-1) = 0 \;\rightarrow$

$(x = -3 \;\vee\; x = 1) \;\rightarrow\; P_2[-3; 0] \;\wedge\; P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

---

15 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj.

$f\colon y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$.

V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí $g\colon y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$. $\rightarrow$ B)

---

16 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f\colon y = a^{x+1} + b \;\rightarrow\; 4 = a^{-1+1} + b \;\rightarrow\; 4 = a^0 + b \;\rightarrow\; 4 = 1 + b \;\rightarrow\; b = 3$

$B[2; 11] \in f\colon y = a^{x+1} + b \;\rightarrow\; 11 = a^{2+1} + b \;\rightarrow\; 11 = a^3 + 3 \;\rightarrow\; 8 = a^3 \;\rightarrow\; a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

17 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\dfrac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$
$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$
$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$
$$\frac{2}{a-1} > 0 \;\rightarrow\; a-1>0 \;\rightarrow\; a>1$$

$a \in (1; \infty)$

---

18 Exponenciální funkce $y = a^x$ je definována pro všechna $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. U uvedených funkcí ověříme, zda základ a vyhovuje příslušné podmínce.

$f\colon y = (\cos 2\pi)^{x+1} \;\rightarrow\; a = \cos 2\pi = 1 \;\rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$g\colon y = \left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{2x+1} \;\rightarrow\; a = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$ vyhovuje podmínce, je exp. fce

$h\colon y = (\log_{\frac{1}{2}} 4)^{x-1} \;\rightarrow\; a = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \;\rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$l\colon y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{x+3} \;\rightarrow\; a = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \;\rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

Z uvedených funkcí je exponenciální pouze jedna. → B)

19

$$2^{3-x} + 2^{1-x} = 40$$
$$2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} = 40$$
$$2^{-x}(2^3 + 2^1) = 40$$
$$2^{-x}(8+2) = 40$$
$$2^{-x} \cdot 10 = 40$$
$$2^{-x} = 4$$
$$2^{-x} = 2^2$$
$$x = -2 \;\rightarrow\; x \in (-3; -1) \;\rightarrow\; \text{B)}$$

---

20 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$$\log_2(x-3) = \log_3 9$$
$$\log_2(x-3) = 2$$
$$2^2 = x - 3$$
$$4 = x - 3$$
$$x = 7$$

21

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{3(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{3} = \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 6$$

22 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být vetší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \;\wedge\; \sin x \geq 0) \;\rightarrow\; \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi;\, \pi + 2k\pi),\, k \in \mathbb{Z}$.

---

23 $$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1}{-(1 - \sin^2 x)} =$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x\cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 2\sin x\cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{-\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\operatorname{tg} x$$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \sin^2 x \neq 1 \;\rightarrow\; \sin x \neq \pm 1 \;\rightarrow\; x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\wedge$

$$x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;\rightarrow\; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}$$

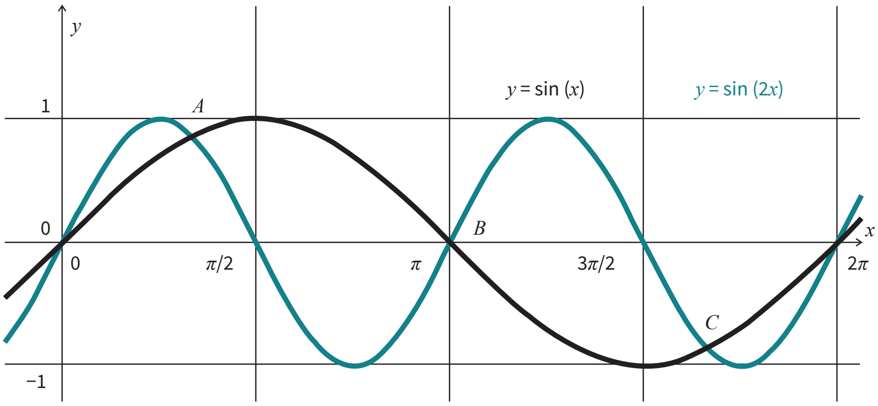
---

24 Využijeme grafické řešení.

Z obrázku jsou patrné příslušné tři průsečíky. $\rightarrow$ D) 3 řešení

Průsečíky v bodech $x = 0$ a $x = 2\pi$ nevyhovují intervalu, na kterém řešení hledáme.

Využijte grafů obou funkcí.



25

25.1 $y = 2\sin x - 1 \rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \;\rightarrow\; D\left[\frac{\pi}{3};\, \sqrt{3} - 1\right] \end{cases}$

25.2 $y = \cos x + 2 \rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3} + 4}{2} \;\rightarrow\; B\left[\frac{\pi}{6};\, \frac{\sqrt{3} + 4}{2}\right] \\ \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

25.3 $y = \operatorname{tg} x - 3 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{\sqrt{3} - 9}{3} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \;\rightarrow\; C\left[\frac{\pi}{3};\, \sqrt{3} - 3\right] \end{cases}$

---

26 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},\, x_2 = \frac{3\pi}{4} \;\rightarrow\; x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi \;\rightarrow\; \text{C)}$$

POSLOUPNOSTI A FINANČNÍ MATEMATIKA

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$a_1 = 3$	
2	7 975	
3	98 550	
4	$a_1 = 1\,300$ Kč, $a_2 = 2\,100$ Kč, $a_3 = 2\,900$ Kč, $a_4 = 3\,700$ Kč	
5	855	
6	$s_8 = \frac{6\,305}{243} \doteq 25$	
7	$a_{10} \doteq 0{,}04$ cm, $s_{15} \doteq 23{,}38$ cm^2	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.
V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

1 A) $a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \ \rightarrow$ posloupnost není aritmetická

D) $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2} \ \rightarrow$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} + \frac{4^2 - 3 \cdot 4}{5} = 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

---

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5) \cdot d$

$d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení: $d = 0{,}08$ m.

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5) \cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14 \cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$d = \dfrac{9 - 2a_1}{10}$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

---

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12$; $a_n = 96$; $d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$
$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_{15} = \dfrac{15}{2} \cdot (12 + 96)$

$s_{15} = 810$

---

5 **5.1** Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20$; $d = 3$; $n = 9$

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9 - 1) \cdot 3$
$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot d)$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\dfrac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 **6.1** Počty kostek v šedých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet šedých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n-1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma. Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98 \rightarrow$ B)

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n-1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Po dosazení:

$$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144 \rightarrow$ E)

---

7 $K_0 = 400\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}08$ (úroková míra,vyjádřená desetinným číslem)
$n = 3$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient,v tomto případě se nemusí uvádět)

A ☐ N ☒

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí ($k = 1$). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % ($k = 0{,}85$).

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$

Po dosazení:

$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč $\doteq 503\,885$ Kč

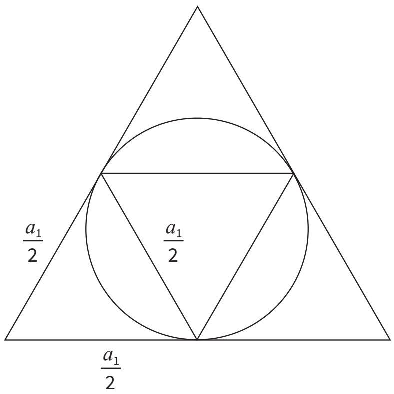
			A	N
8	8.1	$q = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$	☐	☒
	8.2	$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$	☒	☐
	8.3	$a_3 + a_4 + a_5 = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{38}{81}$	☒	☐
	8.4	$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$	☐	☒

Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

---

9 **9.1** Délky stran jednotlivých trojúhelníků tvoří členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 1$ m.

Abychom si lépe představili hodnotu kvocientu, je vhodné si druhý největší trojúhelník pootočit tak, aby jeho vrcholy ležely ve středech stran největšího trojúhelníku.



Geometrická posloupnost má tedy kvocient $q = \frac{1}{2}$. Čtvrtý člen posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Po dosazení:

$$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ m} = 0{,}125 \text{ m}$$

Pro obvod trojúhelníku platí:

$$o_4 = 3 \cdot a_4 = 0{,}375 \text{ m}$$

9.2 $S_n = \frac{\sqrt{3}}{32}\text{ m}^2$

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí vztah:

$$S_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Z tohoto vztahu vyjádříme strany trojúhelníku:

$$a_n = \sqrt{\frac{4S_n}{\sqrt{3}}}$$

Po dosazení:

$$a_n = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}} \text{ m} = 0{,}25 \text{ m}$$

Pořadí hledaného členu posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Po dosazení:

$$0{,}25 \text{ m} = 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$n = 3$$

Daný obsah má třetí největší trojúhelník.

Podle Pythagorovy věty má výška rovnostranného trojúhelníku velikost $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Pro obsah rovnostranného trojúhelníku pak dostáváme vztah $S = \frac{a \cdot v}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Úlohu bychom mohli řešit taky pomocí posloupnosti obsahů trojúhelníků. Ta je taky geometrická a její kvocient je druhou mocninou kvocientu posloupnosti délek stran trojúhelníků.

Kvocient posloupnosti obsahů je tedy $\frac{1}{4}$ a první člen $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$.

10 $K_0 = 40\,000$ Kč (počáteční vklad)
$p_1 = 0{,}02$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$p_2 = 0{,}013$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n_1 = 3$ (počet úrokovacích období)
$n_2 = 2$ (počet úrokovacích období)
$k = 0{,}85$ (zdaňovací koeficient)

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} = 42\,075$ Kč

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$
$K_5 = 43\,010$ Kč $\doteq 43\,000$ Kč $\rightarrow$ B)

---

11 $K_0 = 1\,500\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}055$ (úroková míra,vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient,v tomto případě se nemusí uvádět)

11.1 Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:
$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10} \doteq 2\,562\,000$ Kč

11.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Po dosazení:

$$p = \sqrt[10]{\frac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq 5{,}2\ \%$$

PLANIMETRIE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$135°$	
2	$S = 90\ \text{cm}^2$	
3	$4\ \text{cm},\ \left(80 - 32\sqrt{3}\right)\ \text{cm}$	
4	$\frac{64}{25}$	
5	$\cos\alpha = -\frac{1}{6},\ \alpha \doteq 99°\,36'$	
6	C	
7	$\lvert DE\rvert = 2\sqrt{6}\ \text{cm},\ \lvert GH\rvert : \lvert HF\rvert = 2 : 5$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1.1** D)
1.2 B)
1.3 E)
1.4 A)

Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

---

2 **2.1** C)
2.2 A)
2.3 B)
2.4 F)

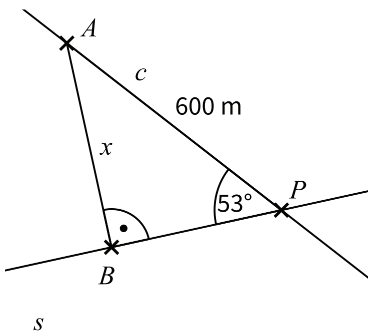
2.1 Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou *p*, ale obě, tedy přímky *q* i *r*.
2.3 Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem *AB* (tedy *k*) bez krajních bodů *A* a *B*.
2.4 Jde o osu úsečky *AB*, což je přímka *p*, protože je na *AB* kolmá a prochází jejím středem.

---

3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}\ \text{km} = 0{,}6\ \text{km} = 600\ \text{m}.$

Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka *s*, lesní cesta jako přímka *c*. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu *P* do bodu *A*. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice *x* vedené z bodu *A* na přímku *s*.



V pravoúhlém trojúhelníku *ABP* platí: $\frac{x}{\lvert AP\rvert} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\ \text{m} \doteq 480\ \text{m} \ \rightarrow\ \text{A)}$

4 **4.1** V pravoúhlém trojúhelníku *ACD* s odvěsnami *AC* a *CD* platí:

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\ \text{cm}^2$$

$$S = 7\ \text{cm}^2$$

4.2 Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany *a*, *b*).

Protože máme zadány strany *b* a *c* a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako

$\text{S} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. A dosadíme známé hodnoty.

$$\text{S} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$$

$$\text{S} = 7{,}66\ \text{cm}^2$$

$$\text{S} \doteq 8\ \text{cm}^2$$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

---

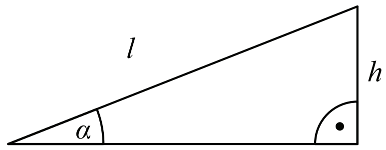
5 Pomůže nám obrázek vpravo.

Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin \alpha = \frac{h}{l}$;

kde *h* se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy *h* = (630 − 440) m = 190 m

$$\sin \alpha = \frac{190}{2\,100} = 0{,}905$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0{,}905) = 5{,}19° \ \rightarrow\ \text{A)}$$



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

---

6 **6.1** $v = 8 \cdot \text{tg}\ 35° = 5{,}6\ \text{m} \ \rightarrow\ \text{B)}$

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \text{m} \ \rightarrow\ \text{A)}$

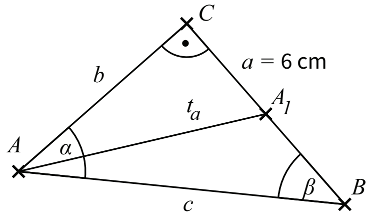
6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

$v = 5{,}9\ \text{cm} \ \rightarrow\ \text{C)}$

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

		A	N
7.1	Je-li α = 30°, pak *c* = 12 cm.	☒	☐
7.2	Je-li *b* = 4 cm, pak t_a = 5 cm.	☒	☐
7.3	Je-li *b* = 4 cm, pak *c* = 8 cm.	☐	☒
7.4	Je-li β = 50°, pak je trojúhelník *ABC* rovnoramenný.	☐	☒



7.1 $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2} \rightarrow c = 2a = 12\ \text{cm}$

7.2 Těžnice t_a spojuje vrchol *A* se středem strany *a*, tedy bodem A_1.

$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3\ \text{cm}$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 platí

$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ \rightarrow\ t_a^2 = 4^2 + 3^2$

$t_a = 5\ \text{cm}$

7.3 $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{52}\ \text{cm} \doteq 7{,}21\ \text{cm} \neq 8\ \text{cm}$

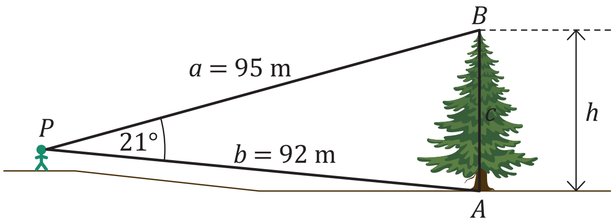
7.4 Je-li β = 50°, pak je α = 90° − 50° = 40°. Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musí mít dva vnitřní úhly shodné.

8 Pomůžeme si obrázkem.

Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.

V trojúhelníku ABP známe dvě strany a úhel, který svírají. Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m → D)



---

9 **9.1** Protože skutečná délka arboreta je 7 500krát větší než na plánu a skutečná šířka je také 7 500krát větší než na plánu, je skutečná rozloha $7\,500^2$krát větší než rozloha na plánu.

$S = 3{,}84 \cdot 7\,500^2\ \text{cm}^2 = 2{,}16 \cdot 10^8\ \text{cm}^2 = 21\,600\ \text{m}^2$
$S = 2{,}16$ ha

9.2 Označme délku arboreta jako a, šířku jako b. Protože má být délka o polovinu větší než šířka, platí $a = 1{,}5b$.

$S = a \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$1{,}5b \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$b^2 = 14\,400\ \text{m}^2$
$b = 120$ m
$a = 180$ m

---

10 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten je zmenšený. Budeme muset obě délky vypočítat.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{|AC|}{8\ \text{cm}} = \cos 60°$$
$$|AC| = 4\ \text{cm}$$

Stranu BD vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu A, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.

$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$

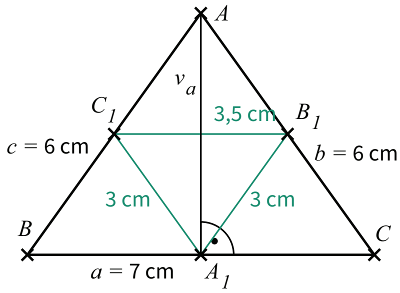
Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}797\,95\ldots$ cm

Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi:

$9{,}798 : 4 = 2{,}449\,48\ldots : 1$

Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$. → C)

11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný. Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$

Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.

$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$

$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm

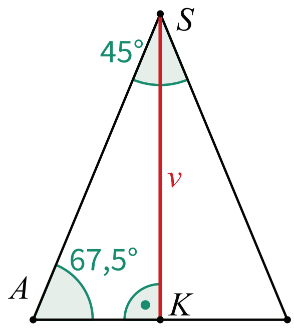
Dosadíme do vzorce: $S = \dfrac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057$ cm^2.

$S \doteq 17$ cm^2 $\rightarrow$ A)

---

12 **12.1** Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost $360° : 8 = 45°$, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

12.2 Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$\dfrac{v}{|AK|} = \text{tg } 67{,}5°$

$v = 2{,}5 \text{ m} \cdot \text{tg } 67{,}5° = 6{,}036 \text{ m}$

Obsah trojúhelníku $S = \dfrac{a \cdot v}{2} = \dfrac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09 \text{ m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy $3 \cdot 15{,}09 \text{ m}^2 = 45{,}27 \text{ m}^2 = 45 \text{ m}^2$.

---

13 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2}$.

Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$$2S = (a + c) \cdot v \qquad | : v$$

$$\frac{2S}{v} = a + c \qquad | - c$$

$$\frac{2S}{v} - c = a$$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm. $\rightarrow$ E)

---

14 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

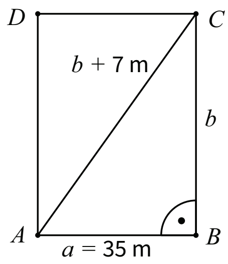
$S = a \cdot v$; $S = \dfrac{e \cdot f}{2}$. $\rightarrow$ Platí tedy $a \cdot v = \dfrac{e \cdot f}{2}$.

Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$a = \dfrac{e \cdot f}{2v}$

$a \doteq 11$ cm $\rightarrow$ A)

15 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.



Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.

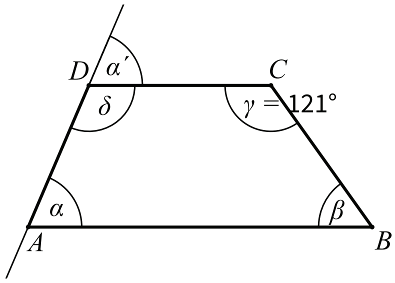
Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.

Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84\ \text{m}^2$.

$S = 2\,940\ \text{m}^2$

---

16 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α′ (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α′, proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.



Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.

Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\frac{2}{3}\delta$:

$$\frac{2}{3}\delta + \delta = 180°$$

$$\delta = 108°$$

$$\alpha = 72°$$

Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy $72° - 59° = 13°$.

---

17 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem $(400 - 2 \times 80)$ m = = 240 m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce $o = 240$ m.

$$o = 2\pi r$$

$$r = \frac{o}{2\pi}$$

$$r = 38{,}197\ \text{m} \doteq 38\ \text{m}$$

---

18 **18.1** Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$$S = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$$

$$S = \pi \cdot (11^2 - 8^2)$$

$$S = 57\pi \;\rightarrow\; \text{E)}$$

18.2 Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$$

$$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\,\pi \;\rightarrow\; \text{C)}$$

18.3 Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu $r_1 = 15$, poloměr většího kruhu $r_2 = (15 + 10) = 25$.

$$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2)$$

$$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2)$$

$$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi \;\rightarrow\; \text{D)}$$

19 Délku oběžné dráhy vypočítáme jako délku kružnice s poloměrem 384 400 km:

$o = 2\pi r = 2\,415\,256$ km.

Tuto dráhu vykoná Měsíc za 27,3 dne. Za jeden den tedy urazí dráhu 27,3× kratší.

$s = 88\,471$ km ≐ 88 000 km → E)

---

20 **20.1** F)

20.2 C)

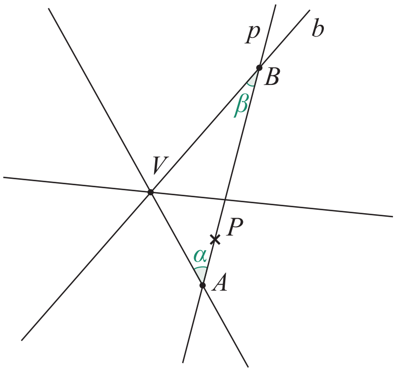
20.3 A)

20.4 D)

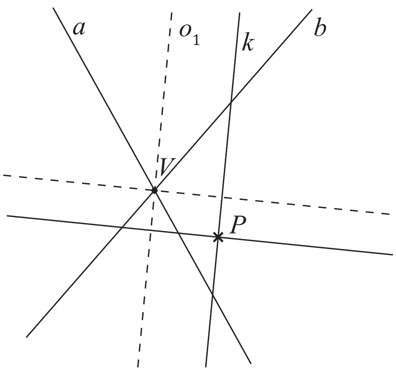
20.1 Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu $S\,[1; 1]$ o 90° v záporném smyslu, již to vychází.
20.2 Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.
20.3 Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.
20.4 Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor $u = (-2; 1)$.

---

21 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.



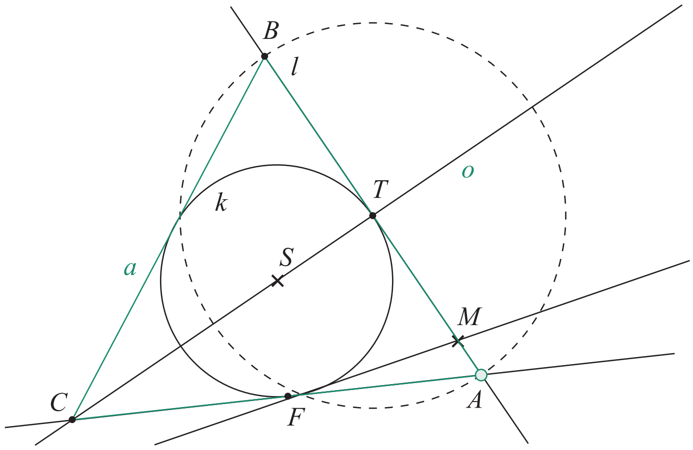
Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

22 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



STEREOMETRIE

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	A	
2	Přibližně 2,06 cm od podstavy.	
3	A	
4	$v \doteq 14{,}2$ cm	
5	492,4 cm^3	
6	Povrch se zvětší o $(3x^2 + 18)$ cm^2.	
7	216°	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle. Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je

$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je

$S' = 6 \cdot (0{,}75a)^2 = 6 \cdot 0{,}75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}562\,5$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25 % původního povrchu.

Změní-li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch o 43,75 %.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}562\,5 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch...? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je 100 % − 56,25 % = 43,75 %.

---

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$. S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu $\sin 390° = \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$

$V = 18 \cdot 24 \cdot 8 =$ 3 456 cm^2. → E)

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268{,}1\ \text{cm}^3$.

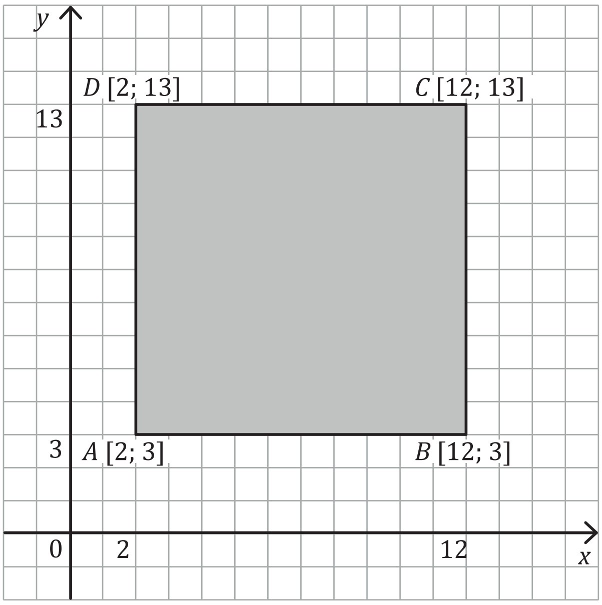
Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268{,}1\ \text{cm}^3 = 804{,}25\ \text{cm}^3$ a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804{,}25\ \text{cm}^3$, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule $S = 4\pi \cdot R^2 = 418\ \text{cm}^2$.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

---

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

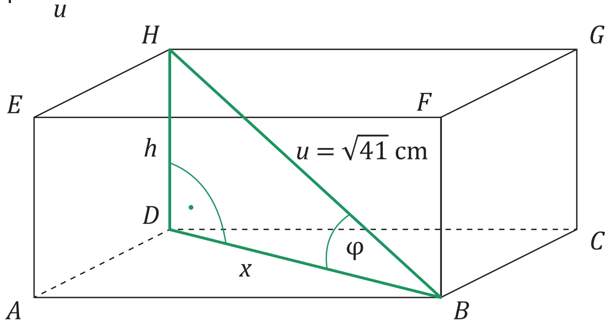
Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3}a^2v = 433{,}3\ \text{j}^3$.

Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ \text{j}^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13$ j. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

---

5 **5.1** Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin\varphi = \frac{h}{u} \;\rightarrow\; h = u \cdot \sin 28° \doteq 3$ cm



5.2 Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos\varphi = \frac{x}{u} \;\rightarrow\; x = u \cdot \cos 28° \doteq 5,65$ cm

Navíc podstava je čtverec: $x = \sqrt{2} \cdot |AB| \;\rightarrow\; |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

Povrch celého kvádru je: $S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq 80\ \text{cm}^2$.

K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.

6 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavy válečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě: Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.

Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ .... 35 %

$\pi \cdot r^2$ .... 100 %

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28 \text{ cm}.$$

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

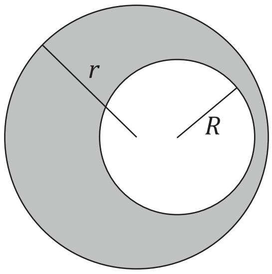
Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

$$S = 2 \cdot \left(\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2\right) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$$

$$S = 2\pi\left(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v\right)$$

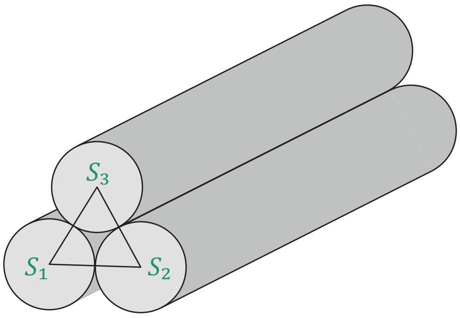
$$S \doteq 8\,080 \text{ cm}^2$$

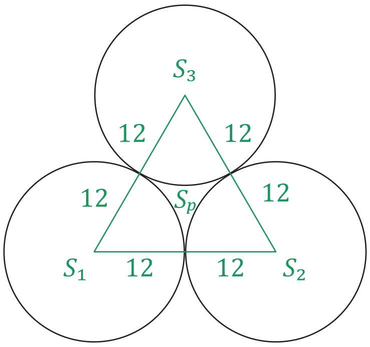
Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.



---

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný.





Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \doteq 249{,}4 \text{ cm}^2$$

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226{,}1 \text{ cm}^2$$

Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$$S_p = S - S_1 = 23{,}3 \text{ cm}^2$$

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu $v = 300$ cm:

$$V = S_p \cdot v = 6\,990 \text{ cm}^3 \doteq 7 \text{ dm}^3$$

Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru. K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů.
Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

---

8 $u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ m}$

$r = 0{,}65$ m

$60 \text{ hl} = 6\,000 \text{ l} = 6\,000 \text{ dm}^3 = 6 \text{ m}^3$

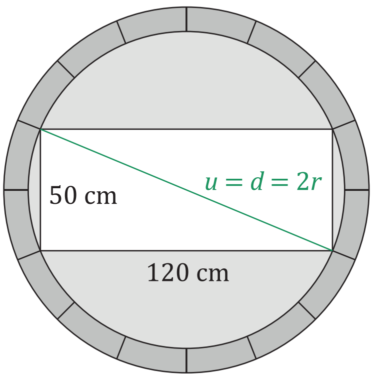
$0{,}74 \cdot V = 6$

$V \doteq 8{,}1 \text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$

$v \doteq 6{,}1 \text{ m} \rightarrow$ A)



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce“, což odpovídá 74 % hloubky studně.

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729\ \text{cm}^2 = 12\pi\ \text{cm}^2$.
Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.
Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:
$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.
Pro délku hrany krychle platí: $a = \dfrac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.
Objem krychle je potom: $V = a^3 = 8\ \text{cm}^3$.

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

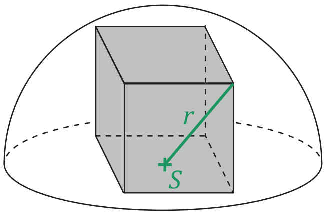
---

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.
Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm, poloměr horní podstavy je $r_1 = 12$ cm a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot v \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$.
Objem kyblíku je tedy: $V = 7\,671{,}77\ \text{cm}^3$,
tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7\,671{,}77\ \text{cm}^3 = 92\,061\ \text{cm}^3 \doteq 92$ litrů.

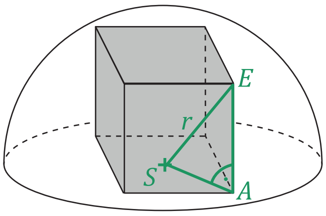
V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

---

11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle. Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAE:
$r^2 = 8^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2 \ \rightarrow\ r = \sqrt{96}\ \text{cm} = 4 \cdot \sqrt{6}$ cm
Pro délku vnitřního průměru misky platí: $d = 8 \cdot \sqrt{6}$ cm.

Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

		A	N
12	**12.1**	☒	☐
	12.2	☒	☐
	12.3	☐	☒

12 **12.1** $S_{koule} = S_{krychle}$
$4\pi r^2 = 6a^2$
$$r^2 = \frac{3a^2}{2\pi}$$
$$r = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$
$$\left.\begin{aligned} V_{koule} &= \frac{4}{3}\pi\left(a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq 1{,}38a^3 \\ V_{krychle} &= a^3 \end{aligned}\right\} V_{krychle} < V_{koule}$$

12.2 $3 \cdot 10^8\ \text{cm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = 3 \cdot 10^5\ \text{dm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 =$
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{l} = 43\,000\ \text{hl}$

12.3 $V = 1{,}5$ l
$\dfrac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\ \text{l} = 900\ \text{ml}$

12.1 V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2 Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3 Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

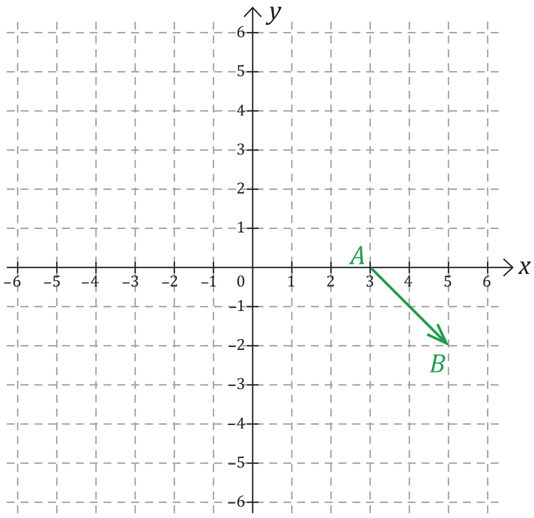
DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	$A = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$	
2	$D\,[-8; 1]$	
3	$o\colon x + 2y - 6 = 0$	
4	$c = \pm 5\sqrt{2}$	
5	Přímky jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod.	
6	$\alpha \doteq 36°\,52'$	
7	$m\colon y + 3 = 0$	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $A\,[3; 0]$, $B\,[5; -2]$



Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

$\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky → C)

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru $(3; -4)$. Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

			A	N
2	**2.1**	Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé.	☐	☒
	2.2	Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k-násobkem jeden druhého.	☐	☒
	2.3	Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p.	☒	☐

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \rightarrow q\colon 3x - y + c = 0$

$B \in q\colon 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = -15$

$q\colon 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

---

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \rightarrow r\colon x + 3y + c = 0$

$A \in r\colon 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \rightarrow c = 11$

$r\colon x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky *p* zapíše normálový nebo směrový vektor přímky *r* a rovnici přímky *r*. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce *p*.

---

5 $\overrightarrow{n_{o_{AB}}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \rightarrow o_{AB}\colon 4x + 4y + c = 0 \quad |:4$

$x + y + c = 0$

$S_{AB}\,[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}\colon 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + c = 0$

$3 - 2 + c = 0$

$c = -1$

$o_{AB}\colon x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu *S* úsečky *AB* napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce *AB* procházející bodem *S*.

---

6 $\overrightarrow{AC} = (1; 7) = \overrightarrow{s_{AC}}$

$\overrightarrow{n_{AC}} = (7; -1)$

$\leftrightarrow AC\colon\ 7 \cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC\colon\ 7 \cdot 1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

$7x - y - 5 = 0 \rightarrow$ D)

$\overrightarrow{BD} = (-7; 1) = \overrightarrow{s_{BD}}$

$\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 7)$

vyhovuje úhlopříčka *AC*

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku *AC*, nebo *BD*. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

7

7.1 $\vec{u_p} = (1; -1) \rightarrow \vec{n_p} = (1; 1) \rightarrow$ F)

7.2 $\vec{u_q} = (1; 0) \rightarrow \vec{n_q} = (0; -1)$, resp. $\vec{n_q} = (0; 1) \rightarrow$ B)

7.3 $\vec{u_r} = (1; 1) \rightarrow \vec{n_r} = (1; -1) \rightarrow$ E)

7.4 $\vec{u_s} = (0; 1) \rightarrow \vec{n_s} = (-1; 0)$, resp. $\vec{n_s} = (1; 0) \rightarrow$ A)

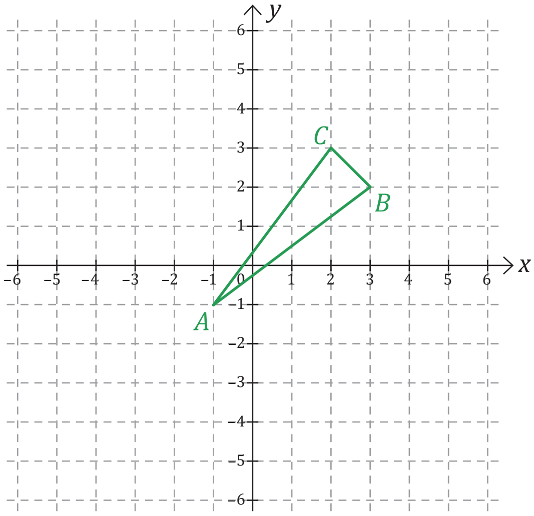
Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky *q* a *s*, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

8

		A	N
8.1	vektor $\overrightarrow{BA} = (2; 1)$	☐	☒
8.2	vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$	☐	☒
8.3	vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1) \rightarrow 3 \cdot AB = (-6; -3)$	☒	☐

Žák může chybně počítat v úloze **8.1** se souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{AB}$ a ne vektoru $\overrightarrow{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy **8.2** a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy **8.1**. V úloze **8.3** se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\overrightarrow{AB}$.

9



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

---

10 $a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

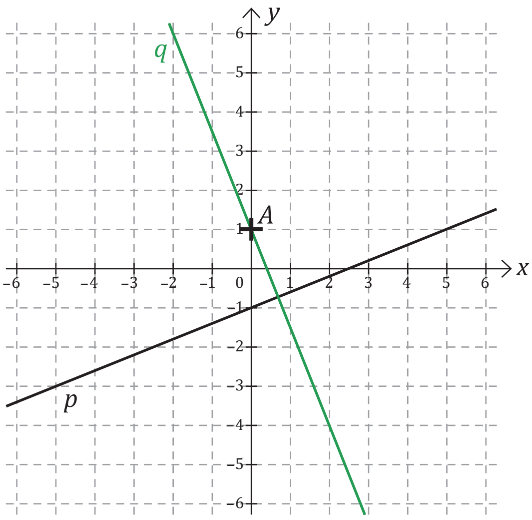
Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

---

11 $\cos \alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \dfrac{24}{25} \rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

12



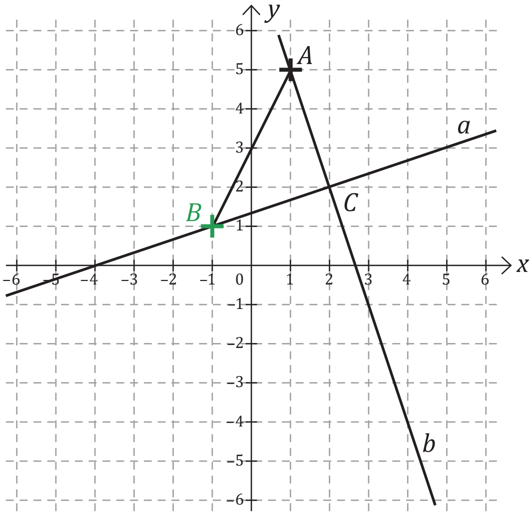
$\vec{u_p} = (5; 2) = \vec{n_q} \rightarrow q: 5x + 2y + c = 0$

$A \in q: 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + c = 0 \rightarrow c = -2$

$q: 5x + 2y - 2 = 0$

Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

13



$B = [-1; 1] \rightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{u}_c = (2; 4)$

$\vec{n}_c = (4; -2) \rightarrow c{:}\ 4x - 2y + c = 0 \qquad |:2$

$A \in c{:}\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + c = 0 \rightarrow c = 3$

$c{:}\ 2x - y + 3 = 0$

Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu *B* lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě *C*, poloměr *CA* je přenesen na přímku *a*. Z obrázku žák určí souřadnice bodu *B*. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky *AB*.

---

14 $B\,[0; 0],\ D\,[-3; 3] \rightarrow \overrightarrow{BD} = (-3; 3)$

$u_{BD}{:}\quad x = -3t, \qquad$ resp. $\quad x = t$

$\qquad y = 3t;\ t \in \mathbb{R} \qquad\qquad y = -t;\ t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů *B* a *D*. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\overrightarrow{AC}$ a z normálového vektoru $\overrightarrow{AC}$ vypočítat směrový vektor.

---

15 $\vec{n}_o = \overrightarrow{AB} = (2; -4) \rightarrow o{:}\ 2x - 4y + c = 0 \qquad |:2$

$S_{AB}\,[2; 0] \in o{:}\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = -2$

$o{:}\ x - 2y - 2 = 0$

$P_x\,[x; 0] \rightarrow P_x = S_{AB}\,[2; 0]$

$P_y\,[0; y]{:}\ 0 - 2y - 2 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow P_y\,[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou *x* a *y* jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

---

16 $\vec{n}_p = (2; -3) \rightarrow \vec{u}_p = (3; 2)$

$\vec{u}_q = (2; -3) \rightarrow \vec{n}_q = (3; 2)$

$\vec{n}_p = \vec{u}_q = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky *p* a parametrické rovnice přímky *q* žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

---

17 **17.1** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \rightarrow$ F)

17.2 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \rightarrow$ C)

17.3 $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \rightarrow$ A)

17.4 $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \rightarrow$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$

a: $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

---

19 Body A a B jsou osově souměrné podle osy o $\rightarrow$ $B\,[4; 3]$

$\vec{u_o} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; -3)$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0$ $\rightarrow$ $c = 1$

$\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

---

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a -2.

Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A\,[3; 0]$ a koncovým bodem $B\,[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

NEŘEŠENÉ ÚLOHY

ÚLOHA	SPRÁVNÉ ŘEŠENÍ	POZNÁMKY
1	200 čísel	
2	6 týmů	
3	$-2p^2 + 13p - 36$; podmínky: $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 8$	
4	$P = \frac{1}{32}$	
5	697 680 způsobů; $P = \frac{1}{45}$	
6	16 bodů	
7	8 dětí	

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1. způsob** – s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**.
Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

pro rozpis faktoriálu n! = n · (n − 1) · (n − 2) · ... · 2 · 1

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!} =$$

$$= \frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!} - \cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}} + \cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}} + \frac{8!}{5!\cdot 3!} - \cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}} + \cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1+56}{120-6} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály.
Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**.
Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ proto platí: } \binom{8}{0} = 1$$

$$\frac{\binom{8}{0} - \cancel{\binom{8}{1}} + \cancel{\binom{8}{2}} + \binom{8}{5} - \cancel{\binom{8}{6}} + \cancel{\binom{8}{7}}}{5! - 3!} = \frac{1+56}{120-6} = \frac{57}{114} = \frac{1}{2}$$

---

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)!}{(x-1)!} - 2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} =$

$= \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)\cdot x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} - \frac{2 \cdot x \cdot (x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!} =$

$= (x+3)\cdot(x+2) + (x+1)\cdot x - 2x(x-1) = x^2 + 2x + 3x + 6 + x^2 + x - 2x^2 + 2x =$

$= 8x + 6 \;\rightarrow\;$ A)

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou x. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

---

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi. Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

	A	N
3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$	☒	☐
3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$	☒	☐
3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$	☒	☐
3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$	☐	☒

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \frac{20!}{17! \cdot (20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!}$

proto rovnost platí: $1\,140 = 1\,140$

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$

platí: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \rightarrow 2 = 22$

4 Jedná se o kombinace bez opakování.

4.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$$K(3, 7) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

4.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$$K(3, 6) + K(3, 9) = \binom{6}{3} + \binom{9}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 104$$

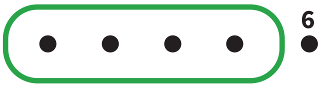
4.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$$K(3, 9) + K(3, 5) = \binom{9}{3} + \binom{5}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 94$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce. Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací muže být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích. Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

---

5 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o variace bez opakování, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:



zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

$V(4, 8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680 \rightarrow$ D)

K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici. Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

---

6 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu. Jedná se tedy o kombinace bez opakování.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2, 6) \cdot K(1, 6) = \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1} = 15 \cdot 6 = 90 \rightarrow \text{B)}$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace. Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací. Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) muže být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací muže být jiný počet mužů a žen.

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

	A	N
7.1	☒	☐
7.2	☒	☐
7.3	☐	☒
7.4	☒	☐

7.1 Příznivé výsledky jsou součty: 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Příznivé výsledky jsou součty: 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti opačného jevu C'.
Platí $P(C) = 1 - P(C')$.
Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, proto celkový počet příznivých výsledků je m = 5.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz výše), pro součet 6 je $m = 5$ (viz výše).

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

---

8 **8.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen. To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:
$V'(6, 8) = 8^6 = 262\,144$

8.2 $6! = 720$

---

9 **9.1** Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \% \ \rightarrow \ \text{D)}$$

9.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí. Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \% \ \rightarrow \ \text{A)}$$

9.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka. Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \% \ \rightarrow \ \text{C)}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

10 **10.1** Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93. Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.

Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 = 0{,}86$, proto 86 % → C)

10.2 Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.

Pravděpodobnost, že Ferrari nedokončí závod, vypočítáme jako pravděpodobnost jevu opačného:

$P(B) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$, proto 19 % → E)

10.3 Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. → že nedokončí závod je 0,24.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. → že nedokončí závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 = 0{,}06$, proto 6 % → B)

10.4 Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86 a tudíž že ho nedokončí je 0,14.

Závod dokončí Williams, ale nedokončí Force India:

P (D) = $0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}12$, a to je 12 % → F)

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáku pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

---

11 Víme, že průměr dosažených bodů je 78 (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.

Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.

Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmů:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{496} = 78 \quad | \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1\,092$$

$$3x = 165 \quad | : 3$$

$$x = 55$$

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

---

12 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky. Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno.

Pro medián platí, že soubor hodnot musí být uspořádaný podle velikosti!

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$), tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\bar{x} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

WTA 2016	průměr	modus	medián
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	průměr	modus	medián
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	průměr	modus	medián
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

Proto je správná varianta D).

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu. Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti. Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu. Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

TEST 1

1 Vyjádříme všechna čísla jako zlomky se jmenovatelem 42, protože 42 je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 6, 7.

$-\frac{17}{6} = -\frac{119}{42}$ $\quad -\frac{7}{3} = -\frac{98}{42}$ $\quad \frac{2}{7} = \frac{12}{42}$ $\quad \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$

Do intervalu $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{105}{42}; \frac{28}{42}\right)$ tedy patří čísla $-\frac{98}{42} = -\frac{7}{3}$ a $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

$-\frac{7}{3} + \frac{2}{7} = -\frac{98}{42} + \frac{12}{42} = -\frac{86}{42} = -\frac{43}{21}$

Není vhodné převádět zlomky na desetinná čísla.
$-\frac{43}{21}$ případně lze vyjádřit jako smíšené číslo $-2\frac{1}{21}$.

---

2 Přímý úhel má velikost 180° nebo π radiánů. Tento vztah využijeme k vyjádření úhlu $\frac{7}{10}\pi$ radiánů ve stupňové míře.

$\frac{7}{10}\pi \text{ rad} = \frac{7}{10} \cdot 180° = 126°$

$\alpha = 180° - 126° = 54°$

$\alpha = 54°$

Druhá možnost řešení:
Vypočítáme nejprve velikost úhlu α v obloukové míře:
$\alpha = \left(\pi - \frac{7}{10}\pi\right) \text{ rad} = \frac{3}{10}\pi \text{ rad}$
a výsledek převedeme na stupňovou míru:
$\alpha = \frac{3}{10}\pi \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$.

---

3 Dosazovací metodou (využijeme toho, že v druhé rovnici je vyjádřena neznámá y, dosadíme za y do první rovnice, vyřešíme rovnici s jednou neznámou x):

$$\begin{aligned} x &= 2(2x + 7) + 4 \\ x &= 4x + 14 + 4 \\ -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $y = 2x + 7$ hodnotu x a vypočítáme y: $y = 2 \cdot (-6) + 7 = -5$

$K = \{[-6; -5]\}$

Použili jsme jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, proto provádět zkoušku není nutné.
Bylo možné využít x vyjádřené z první rovnice pro dosazení do druhé rovnice:
$y = 2(2y + 4) + 7$, pak $y = -5$ a dopočítáme $x = -6$.
Je možné použít též sčítací metodu (uspořádáme umístění neznámých v obou rovnicích, druhou rovnici vynásobíme dvěma a obě rovnice sečteme, vyřešíme rovnici s jedinou neznámou x):

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + y &= 7 \\ \hline -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme $y = -5$.

---

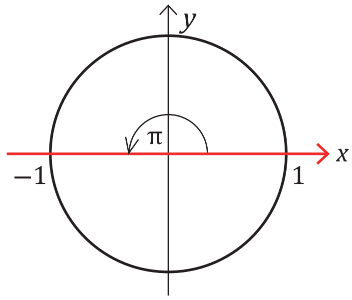
4 Funkce $y = \cos x$ nabývá hodnoty -1 pro všechna $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Použijeme substituci $x = \frac{\pi}{3} + t$; řešíme tedy rovnici $\frac{\pi}{3} + t = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z této rovnice vyjádříme $t = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

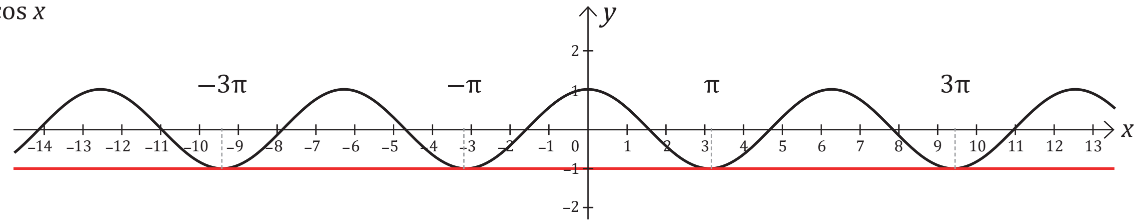
Hledáme řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi)$: pro $k = 0$ je $t = \frac{2\pi}{3}$ a pro žádné jiné celé číslo k nepatří t do intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

$t = \frac{2\pi}{3}$

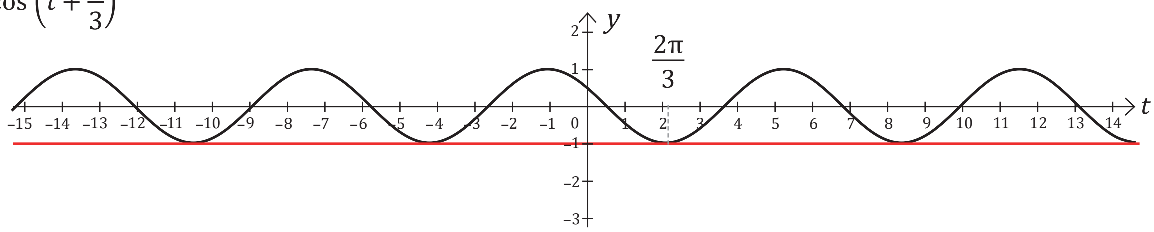
Lze ilustrovat na grafu funkce (viz následující strana), případně na jednotkové kružnici.



$y = \cos x$



$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$



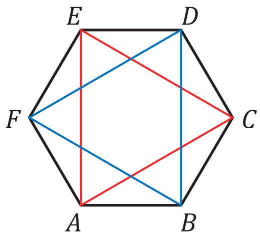
5 Pravděpodobnost náhodného jevu počítáme jako poměr počtu výsledků pokusu jevu příznivých m a počtu všech možných výsledků pokusu n. Náhodným pokusem se v tomto případě rozumí výběr tří vrcholů ze šesti vrcholů šestiúhelníku.

$n = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

Rovnostranný trojúhelník lze sestrojit právě dvěma způsoby (červený trojúhelník ACE a modrý trojúhelník FBD), $m = 2$.

Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Nezáleží na pořadí výběru vrcholů trojúhelníku.



6 $\frac{1}{2} - 3x \geq -2 + x$

Od obou stran nerovnice odečteme x a $\frac{1}{2}$:

$-4x \geq -2 - \frac{1}{2}$

$-4x \geq -\frac{5}{2}$

Obě strany nerovnice dělíme číslem -4:

$x \leq -\frac{5}{2} : (-4)$

$x \leq \frac{5}{8}$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší nebo rovna $\frac{5}{8}$, tedy všechna čísla z intervalu $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Při dělení záporným číslem se obrací znak nerovnosti.
Mohli bychom postupovat i takto:
K oběma stranám nerovnice přičteme výraz $3x + 2$, dostaneme nerovnici

$\frac{1}{2} + 2 \geq x + 3x$, tedy $\frac{5}{2} \geq 4x$.

Dělíme obě strany rovnice kladným číslem 4 (bez obracení znaku nerovnosti) a dostaneme

$\frac{5}{8} \geq x$.

Je nutno dát pozor na správné přečtení této nerovnosti – vyjadřuje pořád skutečnost, že x je **menší nebo rovno** $\frac{5}{8}$, tedy $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

7 Mezi množstvím těsta a počtem rohlíčků je přímá úměrnost, tedy Katka bude potřebovat $240 \cdot \frac{90}{60}$ g těsta.

360 rozdělíme v poměru 4 : 2 : 5 : 5, na máslo připadá 90 g.

Katka bude potřebovat 90 g másla.

Dělení hmotnosti 360 g v daném poměru: $4 + 2 + 5 + 5 = 16$,

$\frac{360}{16} \cdot 4\ \text{g} = 90\ \text{g}$.

Jiná možnost:
Určíme nejdříve hmotnost másla při pečení 60 rohlíčků:

$\frac{240}{16} \cdot 4\ \text{g} = 60\ \text{g}$.

Proto pro 90 rohlíčků bude třeba 90 g másla.

8 V geometrické posloupnosti je podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů rovný kvocientu posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Tedy $\frac{a_2}{a_1} = q$ a také $\frac{a_3}{a_2} = q$, proto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Dosadíme $\left(a_1 = 2\sqrt{2}, a_2 = 4, a_3 = m\right)$:

$$\frac{m}{4} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$m = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$m = 4\sqrt{2}$$

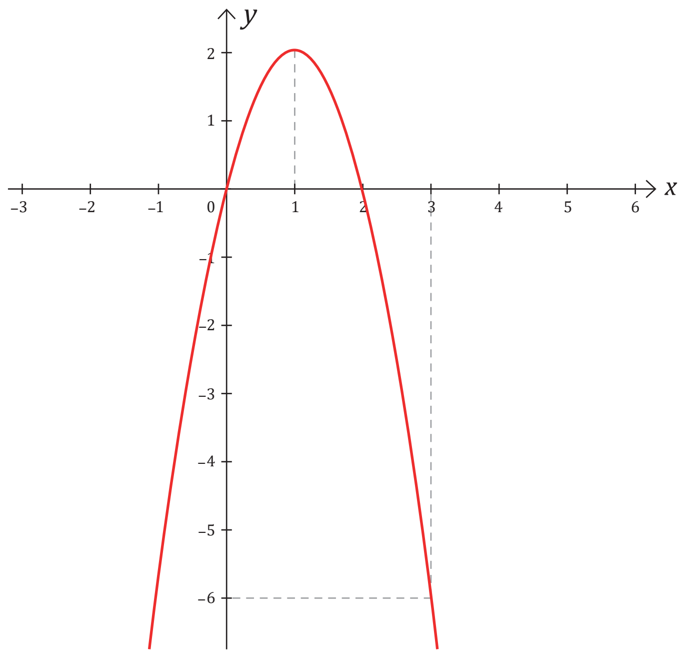
Také jsme mohli z prvních dvou členů určit kvocient

$q = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Pak $\frac{m}{4} = \sqrt{2}$; $m = 4\sqrt{2}$.

---

9 Grafem každé kvadratické funkce je parabola. Protože funkce f nabývá maxima, bude jejím grafem parabola „otevřená směrem dolů“.



Graf hledané funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy, proto $f(0) = 0$, a tedy $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, tedy $c = 0$.

Kvadratická funkce nabývá svého maxima pro $x = -\frac{b}{2a}$,

proto $-\frac{b}{2a} = 1$ ... označíme (1).

Pro $x = 3$ nabývá hledaná funkce hodnotu -6,

proto $-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ ... označíme (2).

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme $a = -2$ a $b = 4$.

$a = -2, b = 4, c = 0$

Ze souměrnosti paraboly podle její osy vyplývá, že $f(3) = f(-1)$. Úlohu pak lze řešit pomocí soustavy rovnic:

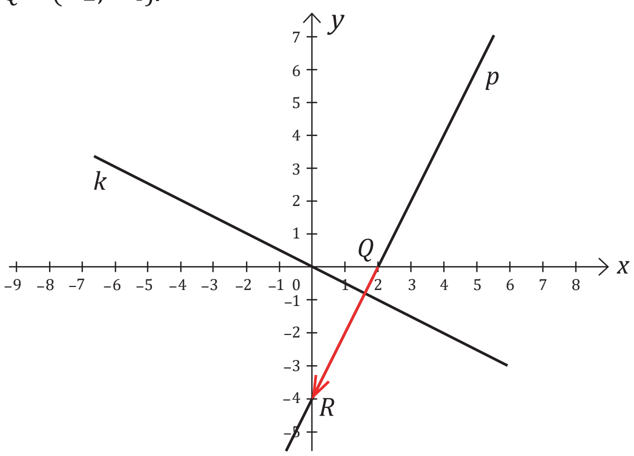
$f(0) = 0 \rightarrow$
$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$
$f(3) = -6 \rightarrow$
$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -6$
$f(-1) = -6 \rightarrow$
$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$

(Dostaneme $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$.)

Ze souměrnosti by bylo možné použít také vztah $f(2) = f(0)$.

10 Hledáme obecnou rovnici přímky k ve tvaru k: $ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b v této rovnici jsou souřadnice normálového vektoru přímky k $\left(\vec{n}_k = (a; b)\right)$. Přímka k má být kolmá k přímce p, proto jejím normálovým vektorem je vektor $\vec{n}_k = R - Q$ (nebo jeho libovolný nenulový násobek).

Souřadnice vektoru $\vec{n}_k$ určíme jako rozdíl souřadnic bodů R a Q:
$\vec{n}_k = R - Q = (-2; -4)$.



Ze souřadnic směrového vektoru přímky p získáme $a = -2$ a $b = -4$, obecnou rovnici přímky k můžeme zapsat ve tvaru k: $-2x - 4y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c, k tomu využijeme údaj, že přímka k prochází počátkem souřadnicové soustavy $P\,[0; 0]$.

$P\,[0; 0] \in k \;\rightarrow\; -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c = 0 \;\rightarrow\; c = 0$

Získali jsme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $-2x - 4y = 0$, po vydělení -2 máme k: $x + 2y = 0$.

Řešení užitím úsekového tvaru rovnice přímky p:
Využijeme toho, že přímka p je určena svými průsečíky se souřadnicovými osami:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1,$$

případně rovnici převedeme na směrnicový tvar $y = 2x - 4$.
Vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek je

$$a' = -\frac{1}{a}.$$

Přímka k bude mít směrnici $-\frac{1}{2}$ a směrnicovou rovnici $y = -\frac{1}{2}x$.

Po úpravě získáme obecnou rovnici $x + 2y = 0$.

---

11 Označíme počet všech příkladů ve sbírce x. Pomocí proměnné x zapíšeme údaje z textu:

Počet příkladů vyřešených do konce února . . . . $\frac{x}{3}$

Počet zbývajících příkladů na konci února . . . . $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

Počet příkladů vyřešených v březnu . . . . $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$

Počet příkladů vyřešených do konce března . . . . $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x.$

Na duben a květen tedy zbyla polovina všech příkladů, z ní jednu polovinu (tedy čtvrtinu z celkového počtu příkladů) vyřešila Ema v dubnu.

Sestavíme rovnici: $\frac{x}{4} = 54$, tedy $x = 216$.

Provedeme kontrolu správnosti:

v únoru $\frac{216}{3} = 72$ příkladů, v březnu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 36$ příkladů,

v dubnu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 54$ příkladů, v květnu 54 příkladů,

$72 + 36 + 54 + 54 = 216.$

Sbírka obsahovala 216 příkladů.

Při řešení slovní úlohy nezapomeňte zapsat, jaký význam má (co označuje) zvolená neznámá, a správně formulovat odpověď na položenou otázku.

12 Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (v tomto případě $a = |BC|$ a v_a je vzdálenost bodu K od strany BC, tedy $v_a = |AB| = p$). Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku BCK, musíme znát délku strany BC a velikost výšky k této straně. Výpočty budeme provádět v centimetrech.

Označíme $v_a = |AB| = p$; $a = |BC| = p - 2$.

Jediné, co potřebujeme určit, je číslo p. K tomu využijeme údaj o obvodu obdélníku $ABCD$ a vzorec pro výpočet obvodu obdélníku.

$o = 2\big(|AB| + |BC|\big)$

$o = 2[p + (p-2)] = 2(2p-2) = 4p - 4$

Dosadíme $o = 48$:

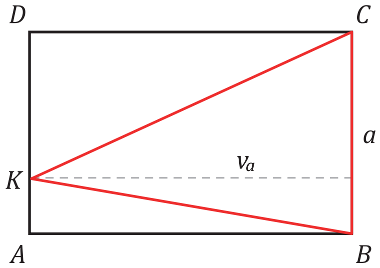
$48 = 4p - 4$

Po vyřešení rovnice $p = 13$, potom $v_a = |AB| = 13$, $a = |BC| = p - 2 = 13 - 2 = 11$.

Nyní můžeme vypočítat obsah trojúhelníku BCK: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{11 \cdot 13}{2} = 71{,}5$.

Trojúhelník má obsah 71,5 cm^2.

Všimněte si, že obsah trojúhelníku BCD nezávisí na umístění bodu K na úsečce AD, „posunutím“ bodu K po úsečce AD se velikost výšky trojúhelníku BCK na základnu BC nezmění.



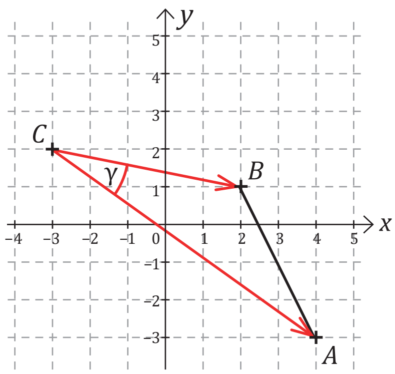
---

13 $\sqrt{9a^4 + 16\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{9a^4 + 16a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

Připomeňte si, že $\sqrt{m^2} = |m|$. Pro $\sqrt{25a^4}$ bychom měli zapsat $\sqrt{25a^4} = |5a^2|$, ale víme, že $5a^2 \geq 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Tedy $|5a^2| = 5a^2$.

---

14 **14.1** Vnitřní úhel u vrcholu C (v obrázku označen γ) je úhel sevřený vektory $\vec{u} = A - C$ a $\vec{v} = B - C$.



$\vec{u} = (7; -5)$, $\vec{v} = (5; -1)$

Použijeme vzorec pro výpočet úhlu dvou vektorů:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} =$$

$$= \frac{35 + 5}{\sqrt{49 + 25} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}911\,9$$

$\gamma = 24°\,14'$

Při výpočtu $\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}911\,9$ není vhodné poslední hodnotu zapisovat, ponecháme ji v paměti kalkulátoru a rovnou určíme γ. Je-li nutné ji zapsat (a přitom zaokrouhlit), je pro požadovanou přesnost nutné zaokrouhlit alespoň na 4 desetinná místa.

Pozn.: V analytické geometrii obvykle zapisujeme vzdálenosti bez konkrétních jednotek. V této úloze je tedy hledaná vzdálenost rovna 2,1 jednotek – rozumí se jednotky použité souřadnicové soustavy.

14.2 Velikost výšky v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC.

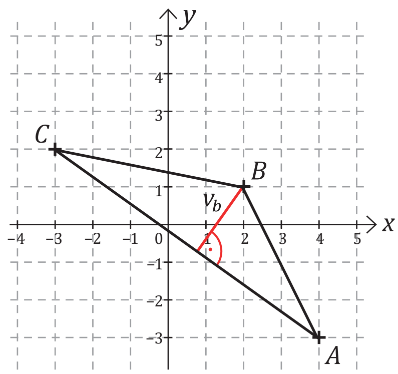
Směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{u} = A - C = (7; -5)$, přímka AC má tedy obecnou rovnici $5x + 7y + c = 0$, konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu A (případně C):

$5 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) + c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$, tedy $\leftrightarrow AC$: $5x + 7y + 1 = 0$.

Použijeme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu B od přímky:

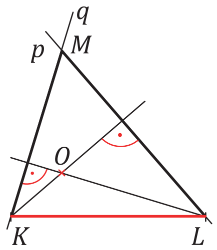
$$v_b = v(B, \leftrightarrow AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{5^2 + 7^2}} = \frac{18}{\sqrt{74}} = \frac{18\sqrt{74}}{74} = \frac{9\sqrt{74}}{37} \doteq 2{,}1$$



Výška v_b má velikost přibližně 2,1 (jednotek).

15 Předpokládáme, že existuje požadovaný trojúhelník – načrtneme ho, vyznačíme zadané prvky.



Hledáme bod M:

$M \in p\ (p \perp \leftrightarrow KO \wedge L \in p)$

(čteme: M leží na přímce p, která je kolmá k přímce KO a prochází bodem L)

$M \in q\ (q \perp \leftrightarrow LO \wedge K \in p)$

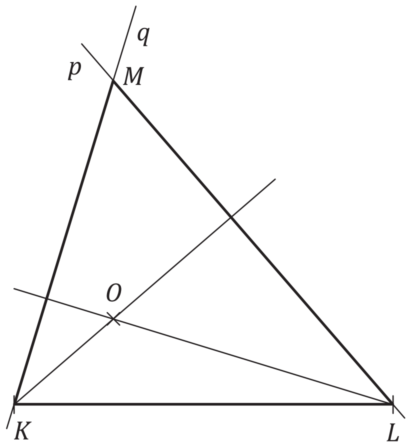
(čteme: M leží na přímce q, která je kolmá k přímce LO a prochází bodem K)

Tedy $M \in p \cap q$.

Provedeme konstrukci:

1. $p;\ p \perp \leftrightarrow KO \wedge L \in p$
2. $q;\ q \perp \leftrightarrow LO \wedge K \in p$
3. $M;\ M \in p \cap q$
4. $\triangle KLM$

Úloha má v rovině jedno řešení.



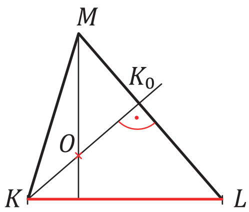
Náčrt provádíme tužkou „od ruky“. Je dobré barevně vyznačit známé prvky. Konstrukci provádíme pečlivě – ořezanou tužkou, použijeme pravítko, kružítko s ořezanou tuhou, případně úhloměr.

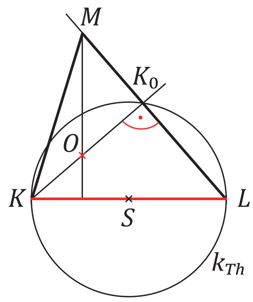
Poznámka: V „ostrých“ maturitních testech je nutné v záznamovém archu všechny čáry obtáhnout propisovací tužkou – záznamové archy se pro účely opravování skenují a na naskenovaném obrázku není obyčejná tužka dobře viditelná.

Jiný způsob řešení:

Trojúhelník načrtneme, pojmenujeme patu výšky K_0.

Rozbor úlohy:





Neznámé body jsou K_0 a M.

Určíme nejprve bod K_0:

- K_0 je pata výšky z vrcholu K, musí ležet na polopřímce KO ... $K_0 \in \mapsto KO$
- Úhel u K_0 je pravý, bod K_0 musí ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou KL ... $K_0 \in k_{Th}(KL)$
- $K_0 \in \mapsto KO \cap k_{Th}(KL)$

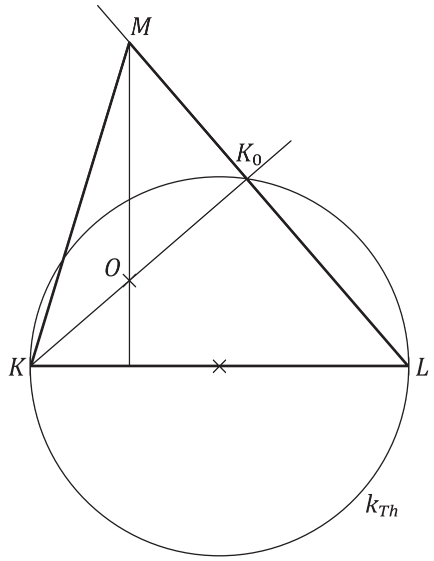
Dále hledáme bod M:

- M leží na kolmici p vedené bodem O k úsečce KL (její částí je výška v_m)
- M leží na polopřímce LK_0
- $M \in \leftrightarrow p \cap \mapsto LK_0$

Provedeme konstrukci:

1. $\mapsto KO$
2. $k_{Th}(KL)$
3. $K_0;\ K_0 \in \mapsto KO \cap k_{Th}(KL)$
4. $p;\ O \in p,\ p \perp KL$
5. $\mapsto LK_0$
6. $M;\ M \in p \cap \mapsto LK_0$
7. $\triangle KLM$

Úloha má v rovině jedno řešení.



16 Pro dláždění dna bazénu bude potřeba 450 : 30 = 15 dlaždic v jedné řadě (podél delší stěny bazénu). Stejných takových řad je nutno položit 300 : 30 = 10. Na vydláždění dna bazénu je potřeba 15 · 10 = 150 dlaždic.
Pro dláždění kratší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 300 : 30 = 10 dlaždic. Na vydláždění obou kratších stěn potřebujeme 2 · 4 · 10 = 80 dlaždic.

Pro dláždění delší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 450 : 30 = 15 dlaždic. Na vydláždění obou delších stěn potřebujeme 2 · 4 · 15 = 120 dlaždic.

Pro celý bazén potřebujeme 150 + 80 + 120 = 350 dlaždic.

Počet balení získáme vydělením celkové spotřeby dlaždic počtem dlaždic v jednom balení 350 : 12 = 29,2, zaokrouhlíme nahoru na 30. → D)

Můžeme řešit i tak, že vypočítáme obsah dna a stěn bazénu v cm^2 a tento vydělíme obsahem jedné dlaždice.

$S = (450 \cdot 300) + 2 \cdot (300 \cdot 120) + 2 \cdot (450 \cdot 120) = 315\,000$

$350 : (30 \cdot 30) = 350$

Při tomto způsobu výpočtu je potřeba dát pozor na to, jestli dlaždice nebude nutné řezat, tedy jestli všechny rozměry dlážděných obdélníků jsou celočíselnými násobky délky strany čtvercové dlaždice.

---

17 Upravíme výraz V: $V = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2} = \frac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{x+3}{2x+2}$. → B)

Čitatel rozložíme užitím Vietových vzorců. Pro kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ platí $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Snadno uhádneme (a ověříme), že $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, a proto lze trojčlen $x^2 + 2x - 3$ rozložit na součin $(x+3)(x-1)$.

---

18 Předpis A zadává lineární funkci, jejímž grafem je přímka – možnost A vyloučíme.

Předpis B zadává kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola – možnost B vyloučíme.

Předpis C zadává exponenciální funkci, která nikdy nenabývá záporných hodnot, žádná část jejího grafu nemůže ležet pod souřadnicovou osou x – možnost C vyloučíme.

Předpis E zadává lineární lomenou funkci, jejím grafem je hyperbola (se dvěma větvemi), navíc $f(0) = (0+1)^{-1} = 1 \neq 0$, možnost E vyloučíme.

Zbývá možnost D), pro jistotu ještě ověříme:

$f\colon y = \log_2(x+1)$

je definována pro $x + 1 > 0$, tedy pro $x > -1$, odpovídá funkci na obrázku

$x = 0 \;\rightarrow\; y = \log_2 1 = 0$, odpovídá funkci na obrázku
$x = 1 \;\rightarrow\; y = \log_2 2 = 1$, odpovídá funkci na obrázku
$x = 3 \;\rightarrow\; y = \log_2 4 = 2$, odpovídá funkci na obrázku

$x = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$, odpovídá funkci na obrázku

---

19 Rovnice A) a C) mají záporný diskriminant, nemají žádný reálný kořen.

Zbývá otestovat rovnice B) a D). Můžeme to udělat dvěma způsoby:

1. Dosadíme číslo a do výrazu na levé straně rovnice:
   $L_B(a) = (1+\sqrt{3})^2 + 2(1+\sqrt{3}) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 4 + 4\sqrt{3} \neq 0$
   $L_D(a) = (1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3}) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 0$
   Číslo a je kořenem rovnice D).

2. Řešíme rovnice B) a D) užitím diskriminantu:
   $D_B = 4 + 8 = 12$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \neq a$
   $D_D = 4 + 8 = 12$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$
   Číslo a je kořenem rovnice D).

Vzorec pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$.
Je-li D kladné, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

20 Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy je nutné splnit podmínku $\frac{x-3}{x} \geq 0$. Navíc číslo ve jmenovateli zlomku musí být různé od nuly, tedy $x \neq 0$.

Nerovnici $\frac{x-3}{x} \geq 0$ budeme řešit pomocí nulových bodů ($x_{01} = 0$, $x_{02} = 3$) a tabulky pro znaménka čitatele a jmenovatele.

Definiční oborem funkce je sjednocení intervalů $(-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$. → C)

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3\rangle$	$\langle 3; \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-3}{x}$	$+$	$-$	$+$

Jiný způsob řešení nerovnice $\frac{x-3}{x} \geq 0$:
Po stanovení podmínek ($x \neq 0$) můžeme obě strany nerovnice násobit číslem x^2, které je jistě větší než nula, znak nerovnosti se zachová. Získáme nerovnici $(x-3) \cdot x \geq 0$, kterou umíme vyřešit užitím grafu kvadratické funkce f: $y = (x-3) \cdot x$, tedy kvadratické funkce f: $y = x^2 - 3x$. Víme, že grafem je parabola „otevřená nahoru" a protínající osu x v bodech 0 a 3, odtud $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty)$, po přihlédnutí k podmínkám $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$.

---

21 Ze vztahu $m = \frac{t}{a+b}$ chceme vyjádřit neznámou a.

$$m = \frac{t}{a+b} \quad | \cdot (a+b)$$
$$m(a+b) = t$$
$$ma + mb = t \quad | - mb$$
$$ma = t - mb \quad | : m$$
$$a = \frac{t - mb}{m}$$ → B)

Podmínka $a \neq -b$ pro existenci výrazu je splněna automaticky, protože se jedná o kladná čísla a a b, stejně tak podmínka $m \neq 0$.

---

22 Určíme, kolikrát nejvýše mohl být Mirek v posilovně. Průměrně 6 návštěv na každého z 6 kamarádů znamená, že dohromady vykonali 36 návštěv. Mirkovi by z nich připadl největší počet návštěv tehdy, když počet návštěv všech ostatních kamarádů bude co nejmenší. Protože má každý jiný počet návštěv, budou počty návštěv posilovny pro jednotlivé kamarády vyjádřeny nejmenšími přirozenými čísly: 1; 2; 3; 4; 5. Všichni kromě Mirka společně vykonali alespoň $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ návštěv, Mirek mohl vykonat maximálně $36 - 15 = 21$ návštěv a zaplatit tak maximálně 2 100 Kč. → A)

---

23 Počty uběhnutých kilometrů v jednotlivých dnech tvoří aritmetickou posloupnost (každý den navyšuje o stejnou vzdálenost), jejíž první člen je $a_1 = 3$ a šestnáctý člen $a_{16} = 6$. Diference je rovna délce jednoho oválu a vypočítáme ji ze vztahu pro n-tý (šestnáctý) člen aritmetické posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $a_{16} = a_1 + 15d$.

Dosadíme: $6 = 3 + 15d$ a vypočítáme diferenci $d = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (km).

Potřebujeme sečíst prvních 31 členů této posloupnosti, použijeme vzorec pro součet prvních n členů

$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$, tedy $s_{31} = (a_1 + a_{31}) \cdot \frac{31}{2}$.

Chybí nám člen a_{31} – vypočítáme ho podle již použitého vzorce pro n-tý člen

$a_{31} = a_1 + 30d = 3 + 30 \cdot \frac{1}{5} = 9$.

$s_{31} = (3 + 9) \cdot \frac{31}{2} = 186$

Pan Rychlý naběhal během března 186 kilometrů. → E)

A N

24 **24.1** Žádná mocnina čísla 9 není rovna 0, rovnice nemá vůbec žádné řešení. ☐ ☒

24.2 $|x-5|=4 \;\rightarrow\; x-5=4 \vee x-5=-4 \;\rightarrow\; x=9 \vee x=1.$ ☐ ☒
Rovnice má dvě řešení, ani jedno z nich není záporné.

24.3 $\sqrt{x+6}=2 \;\rightarrow\; x+6=4 \;\rightarrow\; x=-2.$ ☒ ☐
Kořen -2 je nutno ověřit zkouškou: $\sqrt{-2+6}=\sqrt{4}=2.$
Rovnice má jeden záporný kořen.

24.4 $5=(x-1)^2-x(x+3) \;\rightarrow\; 5=x^2-2x+1-x^2-3x \;\rightarrow$ ☒ ☐

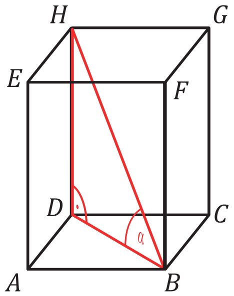
$5=-5x+1 \;\rightarrow\; 4=-5x \;\rightarrow\; x=-\dfrac{4}{5}.$

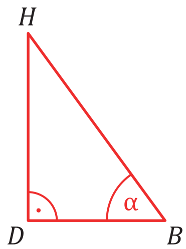
Rovnice má jeden záporný kořen.

---

25 **25.1** Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku BHD (s pravým úhlem při vrcholu D).
Označíme $\alpha = \sphericalangle BHD$.

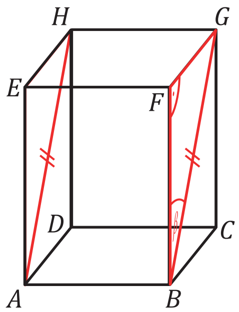
$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \text{B)}$$

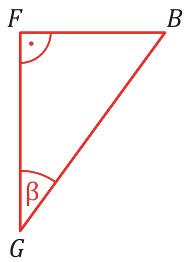




25.2 Odchylka mimoběžek $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow AH$ je rovna velikosti úhlu FBG, protože přímka BF je rovnoběžná s přímkou AH. Označíme $\beta = \sphericalangle FBG$ a kosinus vypočteme užitím pravoúhlého trojúhelníku BGF.

$$\cos\beta = \frac{|BF|}{|BG|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; \text{E)}$$



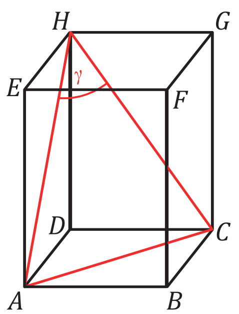


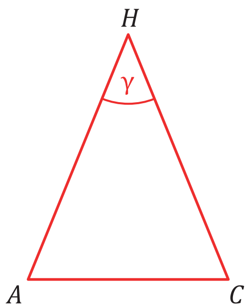
25.3 Velikost úhlu $\gamma = \sphericalangle AHC$ bychom počítali z rovnoramenného trojúhelníku ACH s hlavním vrcholem H.

Protože je požadován kosinus úhlu γ, použijeme kosinovou větu:

$|AC|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2\cos\gamma,$

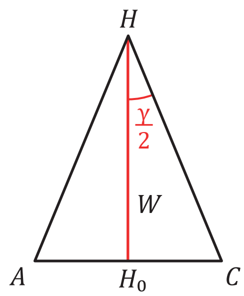
po dosazení $8 = 40 - 40\cdot\cos\gamma$, tedy $\cos\gamma = \dfrac{4}{5}. \;\rightarrow\;$ A)





V části 3 je třeba si uvědomit, že trojúhelník ACH **není pravoúhlý**, nelze proto použít definici kosinu jako poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku.

V úloze **25.3** bychom samozřejmě mohli rovnoramenný trojúhelník ACH rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, pomocí nichž lze vypočítat velikost úhlu $\frac{\gamma}{2}$.



Tento výpočet je podstatně náročnější a nevede přímo k požadovanému kosinu, proto ho zde nebudeme uvádět.

26 **26.1** $8a - 2a^3 \geq 0$

$8a - 2a^3 = a(8 - 2a^2) = 2a(4 - a^2) = 2a(2 - a)(2 + a)$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2a$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2 - a$	$+$	$+$	$+$	$-$
$2 + a$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2a(2 - a)(2 + a)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle \;\rightarrow\;$ B)

Výraz rozložíme na součin užitím vzorců, určíme nulové body a posoudíme znaménko výrazu v intervalech mezi nulovými body. Krajní body příslušných intervalů zahrneme do hledané množiny, pokud je v tomto bodě výraz definován.

26.2 $\underbrace{(a^2 + 1)}_{\text{vždy kladné}} \cdot (a^2 + a - 2) \geq 0$

$$a^2 + a - 2 \geq 0$$
$$(a + 2)(a - 1) \geq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$
$$a_1 = \frac{-4}{2} = -2 \qquad a_2 = \frac{2}{2} = 1$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$a + 2$	$-$	$+$	$+$
$a - 1$	$-$	$-$	$+$
$(a + 2)(a - 1)$	$+$	$-$	$+$

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty) \;\rightarrow\;$ E)

26.3 $-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \geq 0$

$$-a^2 - 2a - 2 \geq 0 \qquad |:(-1)$$
$$a^2 + 2a + 2 \leq 0$$

$$\frac{-1}{2a^2 - a - 1} \geq 0$$
$$\frac{-1}{(a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)} \geq 0$$
$$\frac{1}{(a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$
$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$
$$a_1 = \frac{4}{4} = 1 \qquad a_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Připomeňte si vzorce pro rozklad výrazů na součin:

- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A - B)(A^2 - AB + B^2)$

Pozor u B: Výraz $1 + 2a + 4a^2$ není druhá mocnina dvojčlenu ($(1 + 2a)^2 = 1 + 4a + 4a^2$).

	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$	$(1; \infty)$
$a - 1$	$-$	$-$	$+$
$a + \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$
$(a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)$	$+$	$-$	$+$

$a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \;\rightarrow\;$ F)

26.4 $\frac{a^2 - 4}{-1} \geq 0$

$$4 - a^2 \geq 0$$
$$(2 - a)(2 + a) \geq 0$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2 - a$	$+$	$+$	$-$
$2 + a$	$-$	$+$	$+$
$(2 - a)(2 + a)$	$-$	$+$	$-$

$a \in \langle -2; 2\rangle \;\rightarrow\;$ C)

TEST 2

1

$$y = \frac{3}{5}x$$
$$x - y = 5{,}6$$

$$x - \frac{3}{5}x = 5{,}6$$
$$\frac{2}{5}x = 5{,}6$$
$$x = 5{,}6 \cdot \frac{5}{2} = 14$$
$$y = \frac{3}{5} \cdot 14 = \frac{42}{5} = 8,4$$

$y = 8{,}4$

Zapíšeme údaje z úlohy. Soustavu rovnic vyřešíme dosazovací metodou.

2

$$0{,}2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$$
$$0{,}2 \cdot 10^{4x-7} = 200$$
$$10^{4x-7} = \frac{200}{0{,}2}$$
$$10^{4x-7} = 1\,000$$
$$10^{4x-7} = 10^3$$
$$4x - 7 = 3$$
$$4x = 10$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Zk.:

$$L\left(\frac{5}{2}\right) = 0{,}2 \cdot 10^{4\cdot\frac{5}{2}-7} - 200 = 0{,}2 \cdot 10^3 - 200 = 200 - 200 = 0$$
$$P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

Lze použít substituci $t = 4x - 7$ a řešit rovnici $0{,}2 \cdot 10^t - 200 = 0$. Dostaneme $10^t = 1\,000$, $t = 3$ a po dosazení zpět do rovnice substituce $3 = 4x - 7$, tedy $x = \frac{5}{2}$.
Zkouška v tomto případě není nutnou součástí řešení, žádnou z užitých úprav jsme nemohli ztratit žádný kořen ani získat žádný navíc. Pokud by nám zkouška „nevyšla“, je nutno v řešení hledat (vlastní) chybu.

3

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$
$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$
$$-k + 28 = 0$$
$$k = 28$$

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule. Dále počítáme podle definice.

4

$$112 \cdot 0{,}75 = 84$$
$$84 \cdot \frac{2}{3} = 56$$

Vykvetlo 56 červených tulipánů.

Vypočítáme počet všech vykvetlých tulipánů. Z počtu kvetoucích připadají na červené dvě třetiny.

5 $s_8 = (a_1 + a_8) \cdot \frac{8}{2}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_8 = 11 + 28 = 39$

$s_8 = (11 + 39) \cdot 4 = 200$

V hledišti divadla je 200 sedadel.

Počty sedadel v řadách tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$, její první člen je roven $a_1 = 11$. Počet členů posloupnosti je 8. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti: $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.
Neznáme osmý člen a_8, vypočteme ho podle vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n + 1)$ a dosadíme do vzorce pro součet.

6

$$m = xy + 2(x + y)k$$
$$m = xy + 2xk + 2yk$$
$$m - 2yk = xy + 2xk$$
$$m - 2yk = x(y + 2k)$$
$$\frac{m - 2yk}{y + 2k} = x$$

Z daného vzorce chceme vyjádřit veličinu x. Nejprve je nutné roznásobit závorku. Členy, které obsahují požadovanou veličinu, ponecháme na jedné straně rovnice, ostatní „převedeme“ na druhou stranu rovnice (odečteme od obou stran rovnice výraz $2yk$). Vytkneme požadovanou veličinu. Obě strany rovnice vydělíme výrazem v závorce. (Protože se jedná o kladné veličiny, výraz nikdy nebude roven 0, můžeme dělit bez jakýchkoli omezení).

---

7 $x \neq \frac{1}{3};\, x \neq -\frac{1}{3};\, D \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

$$\frac{2x - 1}{3x - 1} = \frac{2x}{3x + 1}$$
$$(2x - 1)(3x + 1) = 2x(3x - 1)$$
$$6x^2 - 3x + 2x - 1 = 6x^2 - 2x$$
$$x = 1$$

$1 \in D$

$K = \{1\}$

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem obou jmenovatelů (úprava je ekvivalentní v definičním oboru rovnice). Pokud bychom na začátku podmínky nenapsali a rovnici řešili v $\mathbb{R}$, není jisté, že nenásobíme nulou a na konci bychom museli udělat zkoušku.
Vypočítáme $x = 1$.
Kořen vyhovuje stanoveným podmínkám, proto může být řešením rovnice. Bez podmínek na začátku by bylo nutné provést zkoušku:

$L(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(1) = P(1) \;\rightarrow\; 1 \in K$

---

8 $p' = 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 0{,}637\,5$ (procent)

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5 = 25\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}637\,5}{100}\right)^5 = 25\,807$$

Banka by vyplatila 25 807 Kč.

Vypočítáme reálnou („čistou“) úrokovou míru p', tedy úrok po odečtení 15% daně.
Částka na účtu vzrůstá pravidelně každý rok o stálý počet procent p' – použijeme vzorec pro pravidelný růst veličiny V:
$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5$

9 x .... počet dívek ve třídě 4C
$2x$ .... počet chlapců ve třídě 4C
$x + 2x$ .... počet všech žáků třídy 4C

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{3x}{2}} = 0{,}1$$

$$\frac{x(x-1)}{3x(3x-1)} = 0{,}1$$

$$\frac{x-1}{3(3x-1)} = 0{,}1$$

$$x - 1 = 0{,}3(3x-1)$$

$$10x - 10 = 9x - 3$$

$$x = 7$$

Zkontrolujeme správnost úvah a výpočtu podle textu úlohy.
Ve třídě je 7 dívek a 14 chlapců, vypočítáme pravděpodobnost, že v náhodně vybrané dvojici budou jen dívky:

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{21}{210} = 0,1 \text{ (vyhovuje zadání).}$$

Ve třídě je 7 dívek.

Označíme počet dívek ve třídě neznámou x, pomocí ní vyjádříme i další údaje.
Vyjádříme pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvojice osob je složená jen z dívek. Jmenovatel zlomku vyjadřuje počet všech způsobů, jak vybrat dvojici osob ze třídy, ve které je x dívek a $2x$ chlapců, celkem $3x$ žáků (tvoříme neuspořádané dvojice z $3x$ žáků, tedy dvojčlenné kombinace z $3x$ prvků), těch je $\binom{3x}{2}$.
V čitateli je počet možností, jak dvojici vytvořit jen z dívek $\binom{x}{2}$.
Vypočítáme kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Vyřešíme rovnici.

---

10 **10.1** $\sin\alpha = \frac{u}{a} = \frac{7}{11}$

$\alpha = 39°\,31'$

Úhel α má velikost $39°\,31'$.

10.2 $o = 2(a + b) \quad (b = |BC| = |AD|)$

$a^2 = u^2 + b^2 \;\rightarrow\; b^2 = a^2 - u^2$

$b^2 = (121 - 49)\ \text{cm}^2 = 72\ \text{cm}^2$

$b = \sqrt{72}\ \text{cm} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$

$o = 2\left(11 + 6\sqrt{2}\right)\ \text{cm} \doteq 39{,}0\ \text{cm}$

Obvod kosodélníku je 39,0 cm.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme sinus úhlu α. K určení α použijeme kalkulačku (tlačítko většinou označeno $\sin^{-1}$ nebo arcsin podle typu kalkulátoru).
K výpočtu obvodu je nutné vypočítat délku strany AD, můžeme využít Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABC.
Pozor na správné zaokrouhlení výsledku 38,97 na jedno desetinné místo.

---

11 $x \neq 2$; $D \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\frac{x}{x-2} \leq 1$$

$$\frac{x}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x - x + 2}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{2}{x-2} \leq 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

$K = (-\infty; 2)$

Nerovnice má neznámou ve jmenovateli, je nutné zapsat definiční obor nerovnice.
Nerovnici převedeme na podílový tvar s nulou na pravé straně nerovnice – od obou stran nerovnice odečteme jedničku, pak výrazy na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel. Čitatel získaného zlomku je kladný – aby zlomek mohl být menší nebo roven nule, musí jmenovatel zlomku být záporný.
Pozor – ve snaze zbavit se zlomku **není možné** v $\mathbb{R}$ **násobit nerovnici jmenovatelem** – nevíme, zda výraz $x - 2$ není záporný.

12 $\left(3a - \frac{6a-1}{3a}\right) \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2-(6a-1)}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2-6a+1}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$

$= \frac{(3a-1)^2}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{3a-1}{3a}$

Podmínky: $a \neq 0$; $a \neq \frac{1}{3}$

Závorka určuje prioritu operací – výrazy v závorce převedeme na společný jmenovatel.
V čitateli prvního zlomku odstraníme závorku a podle vzorce $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu. Závorkou $(3a-1)$ zkrátíme a zapíšeme výsledek.

Pozor – dále krátit nelze, v čitateli je rozdíl, nikoli součin.
Jmenovatel žádného zlomku nesmí být roven nule, tedy $3a \neq 0$ $\rightarrow$ $a \neq 0$ a $3a - 1 \neq 0$ $\rightarrow$ $a \neq \frac{1}{3}$.

---

13 $|3x-2| = x+6$

$3x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{2}{3} \rightarrow x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$

$3x - 2 < 0 \rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

1. pro x z intervalu $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$|3x-2| = -(3x-2) = -3x+2$

$-3x + 2 = x + 6$

$-4x = 4$

$x = -1$

$-1 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, $K_1 = \{-1\}$

2. V $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$:

$|3x-2| = 3x-2$

$3x - 2 = x + 6$

$2x = 8$

$x = 4$

$4 \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$, $K_2 = \{4\}$

$K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 4\}$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu v rovnici, použijeme definici absolutní hodnoty reálného čísla ($a \geq 0 \rightarrow |a| = a$, $a < 0 \rightarrow |a| = -a$).
Řešení rovnice rozdělíme do dvou intervalů podle znaménka argumentu („vnitřku“) absolutní hodnoty.
Řešíme dvě lineární rovnice již bez absolutní hodnoty. Je nutné se přesvědčit, zda vypočtený kořen patří do intervalu, v němž právě řešíme.
Množinu kořenů v $\mathbb{R}$ dostaneme jako sjednocení množin kořenů v jednotlivých intervalech.

Pozn.: Abychom získali dva intervaly, na nichž všechny kroky provádíme, hledáme vlastně nulové body výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

14 x ...... počet hodin, který potřebuje pan Novák na posekání celé zahrady
y ...... počet hodin, který potřebuje paní Nováková k posekání celé zahrady

Za jednu hodinu poseká pan Novák $\frac{1}{x}$ a paní Nováková $\frac{1}{y}$ zahrady.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$3\cdot\frac{1}{x}=4\cdot\frac{1}{y} \rightarrow \frac{1}{x}=\frac{4\cdot\frac{1}{y}}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{y}=\frac{4}{3y}$$

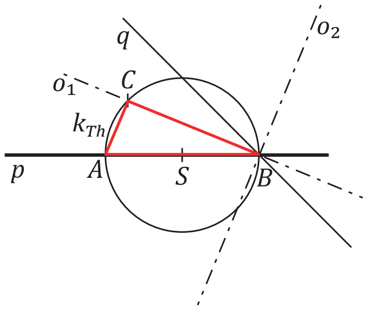
$$\frac{4}{3y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{7}{3y}=\frac{1}{12}$$
$$y=28 \text{ (hodin)}$$
$$\frac{1}{x}=\frac{4}{3\cdot 28}=\frac{1}{21}$$
$$x=21 \text{ (hodin)}$$

Pan Novák by posekal zahradu za 21 hodin. Paní Nováková by posekala zahradu za 28 hodin.

Označíme neznámé veličiny v úloze. Sestavíme rovnice z údajů v úloze:
Budou-li pan a paní Novákovi pracovat společně jednu hodinu, posekají dohromady $\frac{1}{12}$ zahrady.
Druhá rovnice vyjadřuje rovnost posekané plochy paní Novákovou za 4 a panem Novákem za 3 hodiny.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou, z druhé rovnice stačí vyjádřit výraz $\frac{1}{x}$ a dosadit do první. Vypočítáme y, pak $\frac{1}{x}$ a odtud x. Zkontrolujeme, zda vypočtené hodnoty odpovídají textu úlohy – paní Nováková poseká zahradu za 28 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{28}$ zahrady a za 4 hodiny $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$ zahrady.
Pan Novák poseká zahradu za 21 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{21}$ zahrady a za 3 hodiny $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ zahrady.
Budou-li pracovat společně, posekají za 1 hodinu $\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{4+3}{3\cdot 4\cdot 7}=\frac{1}{12}$ zahrady.
Nezapomeňte na slovní odpověď.

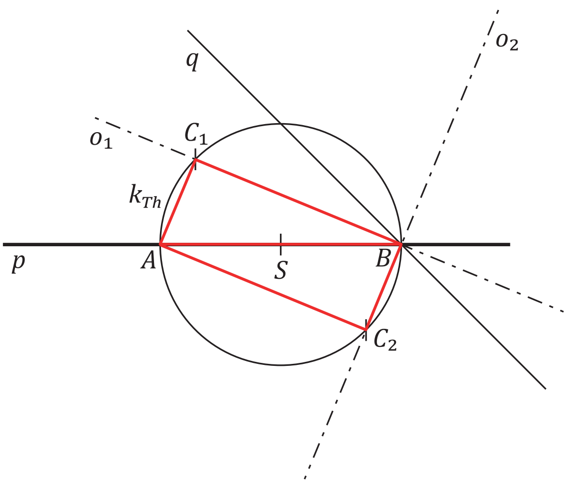
---

15 Náčrt:



Rozbor:
$|Cp|=|Cq| \rightarrow C\in o_1\cup o_2$
$|\sphericalangle ABC|=90° \rightarrow C\in k_{Th}(AB)$
$C\in k_{Th}(AB)\cap(o_1\cup o_2)$

Konstrukce:



Popis konstrukce:
1. S; S je střed AB
2. k_{Th}; $k_{Th}\left(S; r=\frac{r}{2}\right)$
3. o_1, o_2; o_1, o_2 jsou osy úhlů sevřených přímkami p a q
4. C_1; $C_1\in o_1\cap k_{Th}$
5. C_2; $C_2\in o_2\cap k_{Th}$
6. $\triangle ABC_1, \triangle ABC_2$

Úloha má dvě řešení.

Bod C má mít stejnou vzdálenost od dvou přímek p a q. Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek, jsou dvě přímky, na nichž leží osy úhlů sevřených těmito různoběžkami (obě přímky procházejí průsečíkem daných různoběžek a jsou na sebe kolmé).
Trojúhelník ABC má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C – proto musí bod C ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB.

Pozor – střed úsečky určíme konstrukčně pomocí dvou kružnic se stejnými poloměry a středy v bodech A a B.

16 $2x - a = 0$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = -2$$

$a = -4 \ \rightarrow\ $ D)

Zapíšeme podmínky pro existenci výrazu v předpisu funkce f:

$2x - a \neq 0$, tedy $x \neq \frac{a}{2}$.

Z uvedeného definičního oboru plyne $x \neq -2$. Porovnáme obě podmínky, tedy

$\frac{a}{2} = -2$ a zároveň $a = -4$.

---

17 $q\colon y = \frac{2}{3}x + b$

$M \in q \ \rightarrow\ -1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \ \rightarrow\ b = -\frac{7}{3}$

$q\colon y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$q\colon \frac{2}{3}x - y - \frac{7}{3} = 0$

$q\colon 2x - 3y - 7 = 0 \ \rightarrow\ $ B)

Přímka p je dána směrnicovou rovnicí, směrnice přímky p je rovna $\frac{2}{3}$.
Rovnoběžné přímky mají stejné směrnice, proto i směrnice hledané přímky q bude rovna $\frac{2}{3}$.
Přímka q bude tedy mít rovnici

$q\colon y = \frac{2}{3}x + b$.

Koeficient b určíme využitím souřadnic bodu M, který má na přímce q ležet, jeho souřadnice musí tedy vyhovovat rovnici přímky q.
Získali jsme směrnicovou rovnici přímky q, převedením rovnice na anulovaný tvar dostaneme obecnou rovnici přímky q.
Vynásobením obou stran rovnice 3 získáme všechny koeficienty celočíselné.

---

18 $a = 45$ cm, $b = 25$ cm, $v = 25$ cm, $V_1 = 18\ \text{l} = 18\ \text{dm}^3 = 18\,000\ \text{cm}^3$

$$V_1 = a \cdot b \cdot v_1$$

$$18\,000\ \text{cm}^3 = 45\ \text{cm} \cdot 25\ \text{cm} \cdot v_1$$

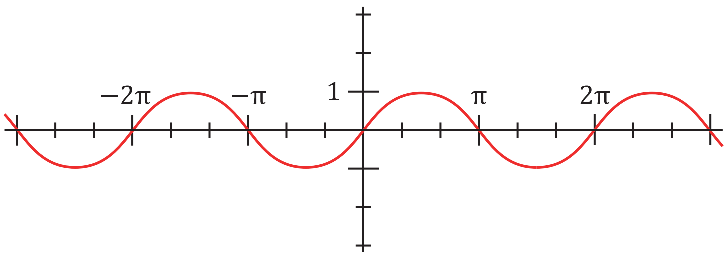
$$v_1 = \frac{18\,000}{45 \cdot 25}\ \text{cm} = 16\ \text{cm}$$

$v - v_1 = 25\ \text{cm} - 16\ \text{cm} = 9\ \text{cm} \ \rightarrow\ $ B)

Voda po nalití do akvária bude mít tvar kvádru s rozměry a, b, v_1.
Dosazením do vzorce pro objem kvádru zjistíme neznámý třetí rozměr kvádru v_1.
Před dosazením vyjádříme objem v cm^3 podle vztahu
$1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.
Vypočítáme vzdálenost vodní hladiny od horního okraje akvária.

---

19 $\left.\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 3 \\ C &= -1 \end{aligned}\right\}$ E)



Graf funkce $f\colon y = A \cdot \sin(Bx) + D$ sestrojíme modifikací grafu funkce $y = \sin x$.
Konstanty A a B ovlivňují „tvar“ křivky. A určuje amplitudu – „roztažení“ ve svislém směru, pro funkci f $A = 2$ (amplituda funkce $y = \sin x$ je 1).
B určuje periodu – roztažení ve vodorovném směru, perioda funkce f je $\frac{2}{3}\pi$, proto $B = 3$ (podle vztahu $p = \frac{2\pi}{B}$, perioda funkce $y = \sin x$ je 2π).
Konstanta D určuje „posun“ grafu ve směru osy y, pro funkci f je posun o 1 ve směru záporné osy y („dolů“), proto $D = -1$.

20 $y = \binom{10}{6} \cdot 6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200 \rightarrow$ C)

Nejprve vybereme („označíme“) sedadla, která turisté obsadí – vybíráme 6 sedadel z 10 nezávisle na pořadí výběru, tedy tvoříme šestičlenné kombinace z 10 prvků, jejich počet vyjadřuje kombinační číslo $\binom{10}{6}$.

Potom začneme sedadla „obsazovat“ turisty – každému sedadlu „přidělíme“ jednoho turistu (představte si vybraná sedadla v řadě a jen měníme pořadí osob) – tvoříme permutace z 6 prvků, těch je (pro každý výběr sedadel) 6!. Násobíme podle kombinatorického pravidla součinu.

Jiný způsob uvažování (pro pokročilejší):
Tvoříme permutace s opakováním z 10 prvků, z nichž 4 jsou stejné (celkem 10 sedadel, 6 z nich obsadíme „rozlišitelnými“ turisty a 4 zůstanou prázdná – nerozlišitelná).
Jejich počet je pak $\frac{10!}{4!}$.

---

21 $a_1 = k \cdot a = k \cdot 12,5$ cm
$b_1 = k \cdot b = k \cdot 10$ cm
$c_1 = k \cdot c = k \cdot 8,5$ cm

$$a_1 - c_1 = 4{,}8 \text{ cm}$$
$$k \cdot 12,5 \text{ cm} - k \cdot 8,5 \text{ cm} = 4{,}8 \text{ cm}$$
$$4k \text{ cm} = 4{,}8 \text{ cm}$$
$$k = \frac{4{,}8}{4} = \frac{6}{5}$$

$b_1 = \frac{6}{5} \cdot 10 \text{ cm} = 12 \text{ cm} \rightarrow$ D)

Pro podobné trojúhelníky platí, že odpovídající si strany jsou ve stejném poměru.
Využijeme údaj o rozdílu nejdelší a nejkratší strany, sestavíme a vyřešíme rovnici pro koeficient podobnosti *k*.
Dopočítáme délku prostřední strany *b*.

---

22 $\frac{S_4}{S_6} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow$ C)

Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit třemi úhlopříčkami (AD, BE, CF) na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Úsečky BD a DF vždy dva z těchto trojúhelníků půlí, proto obsah trojúhelníku BCD i obsah trojúhelníku DEF je roven obsahu každého ze zmiňovaných rovnostranných trojúhelníků.
Obsah čtyřúhelníku $ABDF$ je tedy rovný $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ obsahu šestiúhelníku.
Jiné řešení: Čtyřúhelník $ABDF$ lze rozdělit na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABF, BSF, BDS, FDS. Do celého šestiúhelníku zbývají ještě dva shodné trojúhelníky (BCD a DEF), proto je poměr obsahů
$\frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

23 $2s_1 - s_2 + 12 = 0$

$$s_1 = -3 + 2t$$
$$s_2 = 1 - t$$

$$2(-3 + 2t) - (1 - t) + 12 = 0$$
$$t = -1$$

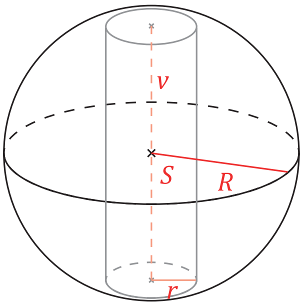
$$s_1 = -3 + 2t \cdot (-1) = -5$$
$$s_2 = 1 - (-1) = 2$$
$$S\,[-5;\,2]$$
$$r_k = |ST| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10} \ \rightarrow \ \text{A)}$$

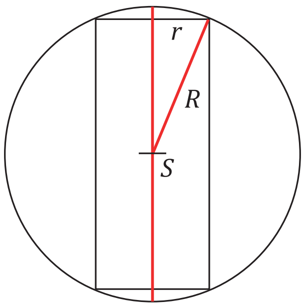
Poloměr kružnice můžeme určit jako vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu. Bod T na kružnici k známe, proto stačí najít střed kružnice k, který je průsečíkem přímek p a q.

Průsečík přímek je bod, jehož souřadnice musejí vyhovovat rovnicím obou přímek, tedy obecné rovnici přímky p i parametrickému vyjádření přímky q. Označíme jeho souřadnice $S\,[s_1;\,s_2]$ a dosadíme je do daných rovnic. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešit budeme dosazovací metodou (využijeme vyjádřené s_1 a s_2 v druhé a třetí rovnici a dosadíme do první).

Délku úsečky ST počítáme podle vzorce:
$|ST| = \sqrt{(x_s - x_T)^2 + (y_s - y_T)^2}$

24





Načrtneme osový řez koule a vepsaného válce, označíme v výšku válce.

	A	N
24.1	☒	☐
24.2	☒	☐
24.3	☐	☒
24.4	☒	☐

24.1 $R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$$26^2 = 10^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$$
$$\frac{v}{2} = 24$$
$$v = 48 \text{ cm}$$

Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami r a $\frac{v}{2}$.

24.2 $S_{po} = \pi r^2 = \pi \cdot 100 \text{ cm}^2$

$$S_{pl} = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 10 \cdot 48 = 960\pi \text{ cm}$$
$$\frac{S_{pl}}{S_{po}} = \frac{960\pi}{100\pi} = 9{,}6$$

Podstavou válce je kruh, dosazením do vzorce $S_{po} = \pi r^2$ vypočítáme její obsah.
Plášť válce je vlastně obdélník, jehož šířka je rovna obvodu podstavy ($o = 2\pi r$) a výška je rovna výšce válce.

24.3 $V_V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 10^2 \cdot 48 = 4\,800\pi \text{ cm}^3$

$$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 26^3 = \frac{70\,304}{3}\pi \text{ cm}^3$$
$$\frac{V_V}{V_K} = \frac{4\,800\,\pi}{\frac{70\,304}{3}\pi} \doteq 0{,}20$$

Pro porovnání objemu válce a koule vypočteme jejich objemy podle vzorců:
$V_V = \pi r^2 \cdot v$
$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$
Porovnáním podílů zjistíme, že válec zaujímá přibližně 20 % objemu koule.

24.4 $S_K = 4\pi R^2 = 4\pi 26^2 = 2\,704\pi \text{ cm}^2$

$$\frac{S_K}{S_{pl}} = \frac{2\,704\pi}{960\pi} \doteq 2{,}8 > 2$$

Povrch koule počítáme podle vzorce $S_K = 4\pi R^2$.

25 **25.1** $P = \frac{2}{5} \rightarrow$ B)

25.2 $P = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \rightarrow$ C)

25.3 $P = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25} \rightarrow$ D)

Pravděpodobnost náhodného jevu A počítáme jako poměr $P = \frac{m}{n}$, kde P je počet výsledků pokusu, při kterých jev A nastane, a n je počet všech možných výsledků pokusu.

25.1 Táhneme-li z osudí, ve kterém je 5 koulí, jednu kouli, má tento pokus 5 možných výsledků, jevu **25.1** jsou příznivé 2.

25.2 Pravděpodobnost, že první vytažená koule je černá, je $\frac{3}{5}$. Protože vytažené koule se do osudí vracejí, pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je opět černá, je také $\frac{3}{5}$.

Pravděpodobnost průniku nezávislých jevů počítáme jako součin pravděpodobností.

25.3 První dvě vytažené koule budou mít stejnou barvu. Tento případ může nastat dvěma způsoby – obě první koule budou černé, nebo obě první koule budou bílé. Jevy „první dvě vytažené koule budou černé“ a „první dvě vytažené koule budou bílé“ jsou neslučitelné, pravděpodobnost jejich sjednocení dostaneme jako součet jejich pravděpodobností.

($\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ je pravděpodobnost toho, že první dvě vytažené koule budou bílé.)

---

26 **26.1** B)

26.2 A)

26.3 C)

26.4 D)

$f_1\colon y = \frac{1}{3^x}$ je exponenciální funkce – grafem je exponenciála, základ je roven $\frac{1}{3} < 1$, proto f_1 klesá ve svém definičním oboru, vyhovuje jedině B).

$f_2\colon y = \frac{3}{x}$ je nepřímá úměrnost, grafem je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy, vyhovuje jedině A).

$f_3\colon y = \frac{x}{3}$ grafem je přímka s kladnou směrnicí $\frac{1}{3}$, vyhovuje jedině C).

$f_4\colon y = \frac{1}{x-3}$ je lineární lomená funkce, grafem je hyperbola se středem v bodě [3; 0], vyhovuje jedině D).

TEST 3

1 Pro snadnější porovnání čísel a určení, zda do intervalu patří nebo ne, zapíšeme všechna čísla ve stejném tvaru, např. jako čísla desetinná. Poté je zakreslíme na číselnou osu.

> Pro porovnání zadaných čísel bychom také mohli všechna čísla vyjádřit ve zlomcích se společným jmenovatelem.

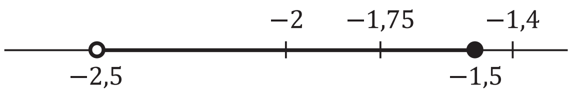
$-\frac{5}{2} = -2{,}5$

$-\frac{3}{2} = -1{,}5$

$-\frac{7}{4} = -1{,}75$

$-1\frac{1}{2} = -1{,}5$

$-\frac{7}{5} = -1{,}4$



Do zadaného intervalu tedy nepatří čísla $-2{,}5$ a $-1{,}4$. Určíme jejich součet.

$-2{,}5 + (-1{,}4) = -3{,}9$

---

2 Nejprve určíme podmínky. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, proto $x + 4 \neq 0$ a $x - 4 \neq 0$, první podmínka je pro přirozená čísla splněna vždy, druhá pro $x \neq 4$.

> Protože řešíme rovnici v množině přirozených čísel, podmínku $x \neq 4$ nemusíme uvádět. Kvadratickou rovnici můžeme řešit nejen rozkladem na součinový tvar, ale také pomocí diskriminantu a vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

$$\frac{4}{x+4} - \frac{20 - x^2}{x^2 - 16} = \frac{1}{x-4} \qquad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$$4 \cdot (x-4) - \left(20 - x^2\right) = x + 4$$

$$4x - 16 - 20 + x^2 = x + 4 \qquad | - (x+4)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8) \cdot (x-5) = 0$$

$x_1 = -8 \rightarrow$ Kořen nepatří do množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$.

$x_2 = 5$

případně $K = \{5\}$

---

3 $3^{21} - 11 \cdot 3^{20} + 3^{22} = 3 \cdot 3^{20} - 11 \cdot 3^{20} + 3^2 \cdot 3^{20} = 3^{20} \cdot (3 - 11 + 9) = 3^{20}$

> Výraz je opravdu nutné upravit na základě pravidel pro počítání s mocninami. Výpočet pomocí kalkulačky nestačí, protože se v tomto případě hodnotí celý.

---

4 Aby byla definována odmocnina a logaritmická funkce, musí být splněny podmínky.

> Odmocnina se sudým exponentem je definována jen pro nezáporná reálná čísla. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná reálná čísla. U druhé nerovnosti pozor na násobení záporným číslem.

$2x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - 4x > 0$

$2x \geq -5 \qquad -4x > -2$

$x \geq -\frac{5}{2} \qquad x > \frac{1}{2}$

$K_1 = \left\langle -\frac{5}{2}; \infty \right) \qquad K_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$

Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení obou nerovnic (K_1 a K_2). Definiční obor funkce tedy je:

$\mathrm{D}(f) = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

5 Při úpravě lomených výrazů je nutné rozložit čitatele i jmenovatele zlomků na součin. To se provádí vytýkáním nebo využitím vzorců. Poté můžeme krátit. Podmínky určujeme z rozložených jmenovatelů.

$$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2xy+x^2+y^2}{y}:\frac{y+x}{xy}=\frac{(x+y)^2}{y}\cdot\frac{xy}{y+x}=x(x+y)$$

$[x \neq 0, y \neq 0]$

---

6 **6.1** Všechny členy zapíšeme pomocí mocnin se základem 3 a upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami.

$$9^{x-2}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$
$$3^{2(x-2)}=3^{-3}\cdot 3^x$$
$$3^{2x-4}=3^{x-3}$$
$$2x-4=x-3$$
$$x=1$$

Případně $K=\{1\}$.

6.2 Nejprve určíme podmínky: $x>0$.

Členy upravíme pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu.

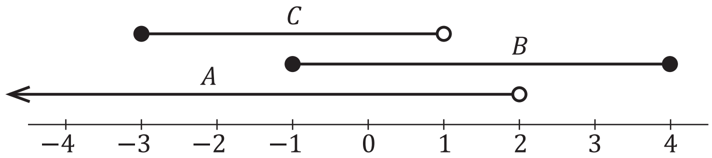
$$\log_2 x+\log_2 4=4$$
$$\log_2 4x=4$$
$$4x=16$$
$$x=4$$

Případně $K=\{4\}$.

Pokud při řešení logaritmické rovnice neurčíme podmínky, musíme alespoň zkusit dosadit vypočtený kořen do zadané rovnice a zjistit, zda jsou pro něj logaritmy definovány.
U exponenciální rovnice podmínky a zkoušku dělat nemusíme, protože jde o prostou funkci, která je definována pro všechna čísla z $\mathbb{R}$.

---

7 Intervaly A, B, C zakreslíme na číselnou osu. Okraj intervalu C zvolíme tak, aby se intervaly A, B, C překrývaly na intervalu $\langle -1; 1)$.



$c=1$

---

8 Výšky klád tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_1 = 15$ cm; $a_{17}-a_9=32$ cm

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci.

$a_{17}=a_9+(17-9)\cdot d$

$d=\frac{a_{17}-a_9}{8}$

Dosadíme a určíme d.

$d=4$ cm

Pro výpočet třináctého členu posloupnosti využijeme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti.

$a_{13}=a_1+(13-1)\cdot d$

Dosadíme a určíme a_{13}.

$a_{13}=15\text{ cm}+12\cdot 4\text{ cm}=63\text{ cm}$

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

9 Nejprve určíme dvacátý člen posloupnosti ze vzorce pro *n*-tý člen aritmetické posloupnosti.

$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot d$

Dosadíme a zjistíme a_{20}.

$a_{20} = 15\text{ cm} + 19 \cdot 4\text{ cm} = 91\text{ cm}$

Pro součet *n* členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

Dosadíme a zjistíme s_{15}.

$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (15\text{ cm} + 91\text{ cm})$

$s_{15} = 1\,060\text{ cm}$

---

10 Některé výrazy s faktoriály částečně rozepíšeme na součin, vytkneme a pokrátíme.

$$\frac{500! + 499!}{499!} - \frac{501! - 500!}{500!} = \frac{500 \cdot 499! + 499!}{499!} - \frac{501 \cdot 500! - 500!}{500!} =$$

$$= \frac{499!\,(500 + 1)}{499!} - \frac{500!\,(501 - 1)}{500!} = 501 - 500 = 1$$

Při úpravě výrazů s faktoriály rozepisujeme faktoriál většího z čísel na součin. Vypíšeme tolik činitelů, abychom se dostali na úroveň menšího z čísel.

---

11 **11.1** Funkční hodnotu v bodě −2 určíme dosazením čísla −2 do předpisu funkce.

$a_2 = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

11.2 Průsečíky s osou *x* mají *y*-ovou souřadnici nulovou. Do předpisu funkce tedy dosadíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnic.

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$D < 0 \;\rightarrow$ Rovnice nemá reálné kořeny. Průsečíky grafu funkce *f* s osou *x* neexistují.

---

12 Celý objem nádoby je $V = -\frac{3}{2} \cdot 1\text{ l} = 1{,}5\text{ l} = 1\,500\text{ cm}^3$.

Pro objem válce platí vztah: $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$.

Výška válce je stejná jako průměr jeho podstavy, tedy $v = 2r$: $V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$.

Vyjádříme poloměr *r* a dosadíme: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \doteq 6{,}2\text{ cm}$.

---

13 Šest hledaných čísel se pokusíme zapsat do šesti polí tabulky tak, aby byla řada čísel uspořádána vzestupně. Protože má mít medián hodnotu 5,5, musí být ve středních polích tabulky čísla, jejichž průměr je 5,5. Ve třetím a čtvrtém poli by tedy mohla být např. čísla 5 a 6:

		5	6		

Protože má mít modus hodnotu 8, musí být toto číslo zastoupeno alespoň dvakrát. Do posledních dvou polí zapíšeme číslo 8:

		5	6	8	8

Protože má mít aritmetický průměr hodnotu 5, musí být součet všech šesti čísel $6 \cdot 5 = 30$. Součet už doplněných čísel je 27, na zbylá dvě pole zbývá součet 3. Doplníme tedy čísla 1 a 2:

1	2	5	6	8	8

Soubor hledaných čísel je tedy např.: 1, 2, 5, 6, 8, 8.

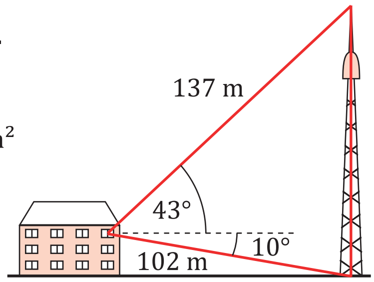
Úloha má další dvě řešení:

	2	4	7	8	8

	2	3	8	8	8

14 Vrchol vysílače, pata vysílače a okno tvoří trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti $\gamma = 53°$, sevřeným stranami délky $a = 102$ m a $b = 137$ m. Trojúhelník je podle věty *sus* zadán jednoznačně.

Výšku vysílače v určíme pomocí kosinové věty.
$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$
Dosadíme a zjistíme výšku v.
$v^2 = \left(102^2 + 137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 102 \cdot \cos 53°\right)\ \mathrm{m}^2$
$v \doteq 111$ m



Kosinovou větu používáme pro řešení trojúhelníků zadaných podle vět sss a sus.
Naopak sinovou větu používáme tehdy, je-li trojúhelník zadán podle věty usu nebo Ssu.
Další řešení:
Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a k výpočtu použijeme goniometrické funkce ostrého úhlu.

---

15 **15.1** Pravděpodobnost jevu A počítáme jako podíl počtu výsledků m příznivých danému jevu a celkového počtu možných výsledků n.

$m = 6$ (počet dvoukorunových mincí)
$n = 16$ (počet všech mincí)

$$P(A) = \frac{6}{16} = 0{,}375 \sim 37{,}5\ \%$$

15.2 $m = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ (počet pětic mincí, ve kterých jsou 3 dvoukorunové a 2 pětikorunové mince)

$n = \binom{16}{5} = 4\,368$ (počet všech pětic mincí)

$$P = \frac{60}{4\,368} \doteq 0{,}014 \sim 1{,}4\ \%$$

Při úvahách o počtu skupin mincí, které můžeme sestavit, je lepší předpokládat, že jsou i mince stejné hodnoty vzájemně rozlišitelné. Představme si například, že je na nich uveden různý rok vyražení, což samozřejmě nemá vliv na výsledek úlohy.

---

16 Nejprve si vhodně označíme neznámé počty diod. Abychom nemuseli počítat se třemi neznámými, pokusíme se označit počty diod pomocí jediné neznámé x.

červených diod x
zelených diod........... $1{,}5x$
modrých diod .... $1{,}5x + 2$

sestavíme rovnici:
$x + 1{,}5x + 1{,}5x + 2 = 50$
$4x = 48$
$x = 12$

Na stromku je tedy 12 červených, 18 zelených a 20 modrých diod. → D)

Počty diod by samozřejmě bylo možné označit třemi neznámými, ale museli bychom pak sestavit soustavu tří rovnic, jejíž řešení je pracnější.

---

17 **A N**

17.1 Vrchol C získáme posunutím vrcholu B o vektor $\vec{d}$. Pro jeho souřadnice tedy platí: $C = B + \vec{d} = [8; 4] + (1; 3) = [9; 7]$. ☒ ☐

17.2 Nejprve určíme souřadnice vrcholu D, který je posunutím vrcholu A o vektor $\vec{d}$: $D = A + \vec{d} = [1; 3] + (1; 3) = [2; 6]$. ☐ ☒
Souřadnice vektoru $\overrightarrow{BD}$ určíme ze vztahu:
$\overrightarrow{BD} = (d_1 - b_1; d_2 - b_2) = (-6; 2)$.

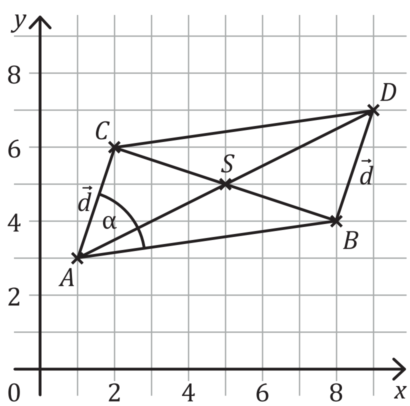
17.3 Souřadnice středu rovnoběžníku určíme jako aritmetický průměr souřadnic bodů A, C: ☒ ☐

$$S\left[\frac{1+9}{2}; \frac{3+7}{2}\right] = [5; 5].$$

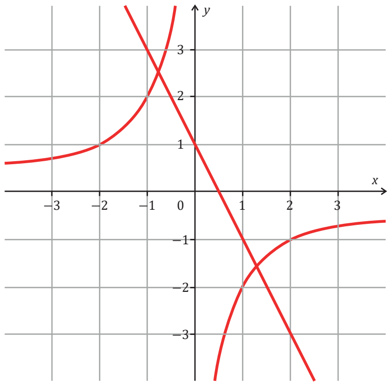
17.4 Nejprve určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$: ☐ ☒
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (7; 1)$.
Kosinus hledaného úhlu určíme ze vztahu:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha = 63°\,26'$



18 Grafem funkce f: $y = -2x + 1$ je strmě klesající přímka protínající osu y v bodě $[0;\ 1]$. Tomu odpovídají obrázky D a E. Grafem funkce f: $y = \frac{-2}{x}$ je hyperbola, která má své větve ve II. a IV. kvadrantu. Tomu odpovídají obrázky A, C, a E. Oba grafy jsou tedy správně sestrojeny na obrázku E.



---

19 Délky hran kvádru a, b, c označme pomocí jediné neznámé a, $b = 2a$, $c = 3a$, čímž si zajistíme požadovaný poměr délek hran.

Pro povrch kvádru platí:
$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$.

Dosadíme naše délky hran:
$S = 2 \cdot (2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$.

Vyjádříme neznámou a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{22}} = \sqrt{\frac{2\,662\ \text{cm}^2}{22}} = 11\ \text{cm}.$$

Nejdelší hranou je hrana $b = 3a =$ 33 cm. → E)

---

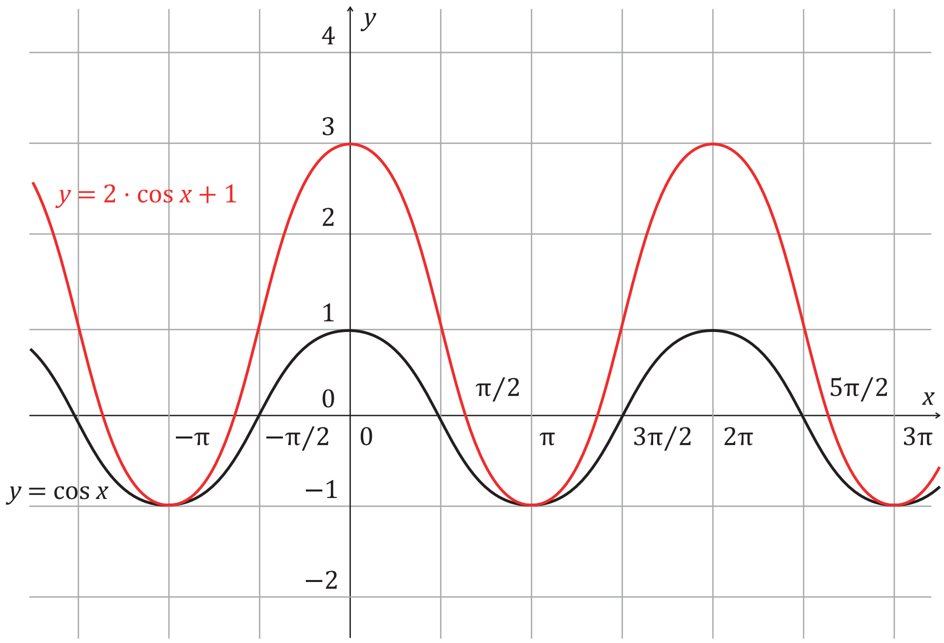
20 Z rovnosti vyjádříme rámeček a upravíme:

$$\boxed{} = 3(a+2)^2 - 2(a+3)^2 = 3 \cdot \left(a^2 + 4a + 4\right) - 2 \cdot \left(a^2 + 6a + 9\right) =$$
$$= 3a^2 + 12a + 12 - 2a^2 - 12a - 18 = a^2 - 6 \ \rightarrow\ \text{B)}$$

---

21 Porovnáním zadaného grafu s grafem funkce $y = \cos x$ je zřejmé, že se jedná také o funkci kosinus. Graf má ale dvojnásobnou „výšku“ a je posunut o jedna v kladném směru osy y.

Jeho předpis tedy je:
$y = 2 \cdot \cos x + 1$. → E)



Obecně se dá říci, že graf goniometrické funkce o předpisu $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ ovlivňují jednotlivé koeficienty:
a ... ovlivňuje „výšku“ graf
b ... ovlivňuje periodu funkce $\left(\text{ta je } \frac{2\pi}{|b|}\right)$
c ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy x
d .... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy y

22 Nejprve určíme obsah půlkruhu.

$S_1 = \frac{\pi c^2}{8} \doteq 353{,}43\ \text{m}^2$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (podle Thaletovy věty), k určení jeho obsahu tedy stačí znát délky jeho odvěsen.

$a = c \cdot \cos\beta \doteq 24{,}57$ m

$b = c \cdot \sin\beta \doteq 17{,}21$ m

Obsah trojúhelníku ABC je tedy:

$S_2 = \frac{a \cdot b}{2} \doteq 211{,}42\ \text{m}^2.$

Poměr obsahů je:

$\frac{S_1}{S_2} \doteq 0{,}60 \sim 60\%.$

Plocha záhonů tvoří doplněk do 100 %, což je 40 %. → B)

---

23 Normálovým vektorem hledané přímky p je např. vektor $\overrightarrow{BA} = (8; -4)$. Pro sestavení obecné rovnice přímky p použijeme k-násobek vektoru $\overrightarrow{AB}$ $\vec{n_p} = (2; -1)$.

Rovnice tedy bude mít tvar:

p: $2x - y + c = 0$.

Neznámý koeficient c dopočítáme dosazením souřadnic bodu B, který na přímce p leží:

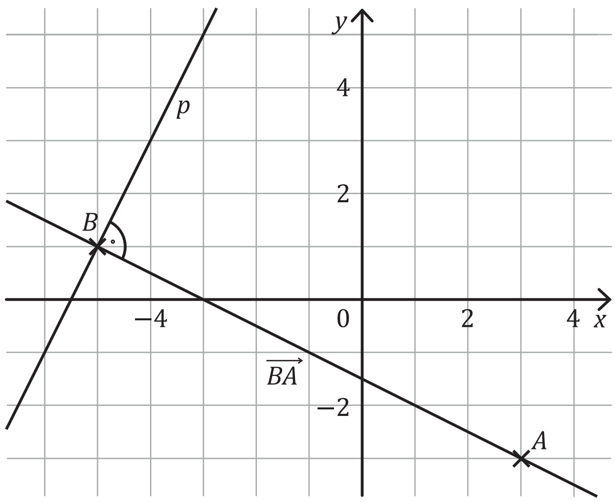
$2(-5) - 1 + c = 0$

$c = 11$

Přímka p má tedy rovnici:

p: $2x - y + 11 = 0$. → D)

Libovolný nenulový násobek této rovnice je opět rovnicí stejné přímky. Takže pokud bychom použili přímo vektor $\overrightarrow{BA}$, dostali bychom rovnici p: $8x + 4y + 44 = 0$, která je také správným řešením.



24 $K_{10} = 3\,500\,000$ Kč (dlužná částka po deseti letech)
$p = 0{,}048$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Pro výši dlužné částky po n letech platí vztah:
$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$.

Vyjádříme počáteční výši úvěru:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}.$$

Dosadíme a zjistíme K_0.

$$K_0 = \frac{3\,500\,000\text{ Kč}}{(1+0{,}048)^{10}} \doteq 2\,190\,000\text{ Kč} \rightarrow \text{A)}$$

---

25 Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic koncových bodů úsečky. Pro výpočet vzdálenosti bodů A, B používáme vzorec:
$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

25.1 $a = |BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \rightarrow$ F)

25.2 Nejprve určíme střed strany a.

$$S_a\left[\frac{4-4}{2}; \frac{5+3}{2}\right] = [0; 4]$$

$$t_a = |AS_a| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \rightarrow \text{A)}$$

25.3 $c = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \rightarrow$ B)

25.4 $S_c\left[\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right] = [3; 3]$

$$t_c = |CS_c| = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49+0} = 7 \rightarrow \text{D)}$$

Při určování velikosti úsečky nezáleží na pořadí, ve kterém odečítáme souřadnice bodů. Ale při určování souřadnic vektoru na tomto pořadí záleží. Od souřadnic koncového bodu musíme odečítat souřadnice počátečního bodu.

---

26 Pravidelný desetiúhelník můžeme rozdělit na 10 shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Vnitřní úhel proti základně má tedy velikost $\frac{360°}{10} = 36°$.

Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180°, mají zbylé vnitřní úhly velikost 72°.

Vyznačené úhly pak mají velikost:

26.1 $\alpha = 3 \cdot 36° = 108°$, $\rightarrow$ C)

26.2 $\beta = 2 \cdot 72° = 144°$, $\rightarrow$ D)

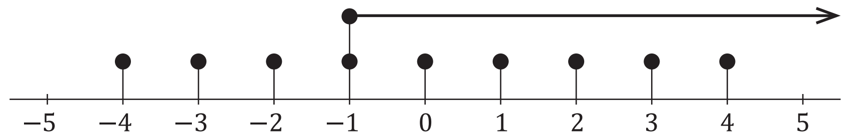
26.3 $\gamma = 72°$. $\rightarrow$ E)

U pravidelných n-úhelníků bývá také často za úkol výpočet poloměru kružnice vepsané a opsané. V těchto typech příkladů se také vyplatí rozdělit n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků a dále pracovat s jedním z nich.

TEST 4

1 Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, tj.:
$A = \{x \in \mathbb{Z}\}; |x| < 5 = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu -1, tj.:
$B = \{x \in \mathbb{R}\}; x \geq -1 = \langle -1; \infty)$.



Průnik množiny A a B bude obsahovat čísla, která mají obě množiny společné, tj. čísla, která patří jak do množiny A, tak do množiny B. Průnik těchto dvou množin obsahuje pouze 6 čísel.

$A \cap B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, obsahuje pouze 9 čísel. Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu -1, obsahuje tedy nekonečně mnoho čísel v intervalu $\langle 1; \infty)$. Špatně by bylo, kdybychom zapsali výsledek jako interval, tj. $\langle 1; 4 \rangle$.

---

2 Litry si převedeme na cm^3: 829 litrů = 829 dm^3 = 829 000 cm^3.

Číslo a, které splňuje podmínku $1 \leq a < 10$ je 8,29.

Abychom dostali číslo 829 000, musíme 8,29 vynásobit číslem 100 000, tj. číslem 10^5, proto je 829 000 cm^3 = $8{,}29 \cdot 10^5$ cm^3.

---

3 $$\frac{x^2-5}{x-5} - 1 = \frac{x^2-5-(x-5)}{x-5} = \frac{x^2-5-x+5}{x-5} = \frac{x^2-x}{x-5}$$

Žáci zde často dělají chybu, že ve zlomku krátí x^2 v čitateli s x ve jmenovateli a -5 v čitateli i jmenovateli. Případně by se mohlo stát, že žák v euforii, že je v čitateli jasný vzorec, rozloží čitatel chybně na součin $(x-5)(x+5)$ a poté krátí čitatel a jmenovatel, k čemuž tato úloha opravdu svádí.

V zadání není uvedeno, že máme určit podmínky. Proto je zde neurčujme! V případě, že je určíme a budou správné (tj. $x \neq 5$), nic se neděje. V případě, že je určíme chybně, pravděpodobně za ně bude odečten bod, tj. i když máme správně výsledek, získáme za úlohu jen 1 bod, protože u široce otevřených úloh se hodnotí vše, co žák do záznamového archu napíše.

Pozor: u rovnice s neznámou ve jmenovateli je naopak důležité podmínky určit, i když to v zadání není napsané. Můžeme tím zjistit, že výsledek, který nám vyšel, není v souladu s podmínkami a řešením rovnice tedy není.

4 Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Jestliže druhý den přišlo na výstavu o 50 osob více, bylo tam tedy $(k + 50)$ osob a ty zaplatily $\frac{m}{k}$(k + 50) korun.

Výraz se dá upravit a roznásobit do tvaru: $m + 50\frac{m}{k}$.

Jiný postup řešení:

Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun. Pokladní tedy druhý večer vybrala opět m korun, ale navíc ještě od 50 osob $50\frac{m}{k}$ korun.

Tedy celkem za druhý večer vybrala $\left(m + 50\frac{m}{k}\right)$ korun.

---

5 $\frac{2x^2 - 9x + 9}{2x - 3} = 1$

Podmínky: jmenovatel se nesmí rovnat 0, tj. $2x - 3 \neq 0$, z toho plyne, že $x \neq \frac{3}{2}$.

Dále budeme řešit samotnou rovnici. Celou rovnici vynásobíme výrazem $2x - 3$.
$2x^2 - 9x + 9 = 2x - 3$

Převedeme si všechny členy na levou stranu.
$2x^2 - 9x + 9 - 2x + 3 = 0$

Získáme kvadratickou rovnici:
$2x^2 - 11x + 12 = 0$.

Koeficienty této rovnice jsou: $a = 2$, $b = -11$, $c = 12$.

Pro diskriminant kvadratické rovnice platí vztah: $D = b^2 - 4ac$. Dosadíme koeficienty a získáme
$\mathrm{D} = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$.

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Po dosazení získáme:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}$.

Pro jednotlivé kořeny platí:

$x_1 = \frac{11 + 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$,

$x_2 = \frac{11 - 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Porovnáme výsledky s podmínkami a zjistíme, že kořen x_2 nesplňuje podmínky řešitelnosti, proto je řešením zadané rovnice pouze číslo $x = 4$.

$K = \{4\}$

---

6 **6.1** Průsečíky s osou x jsou ty body grafu funkce f, které mají nulovou y-ovou souřadnici, proto:
$y = x^2 + 3x - 40 = 0$.

Budeme řešit kvadratickou rovnici. Vypočítáme diskriminant
$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-40) = 169$.

Dosadíme do vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 13}{2}$

$x_1 = 5$, $x_2 = -8$

$P_x = [5; 0]$, $P'_x = [-8; 0]$

6.2 Nejdříve vypočítáme vrchol paraboly. Pro x-ovou souřadnici vrcholu platí vzorec:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}.$$

Souřadnici y_V dopočítáme dosazením za x do předpisu funkce. $\left(\text{Nebo použijeme vzorec: } y_V = \frac{b^2}{2a}.\right)$

$$y_V = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 40 = -\frac{169}{4}$$

Funkce f má koeficient $a = 1 > 0$, tj. parabola bude otevřená směrem nahoru. Obor hodnot funkce tedy bude:

$$H(f) = \left\langle -\frac{169}{4}; \infty \right).$$

---

7 $5 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+1} + 108 = 0$

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{3^x}{3} - 3 \cdot 3^x &= -108 \\ 5 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x &= -324 \\ -4 \cdot 3^x &= -324 \\ 3^x &= 81 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

---

8 Katalogová cena košile................x Kč

Po zvýšení o čtvrtinu hodnoty........$\left(x + \frac{1}{4}x\right)$ Kč

Po snížení o 360 Kč..................$\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right)$ Kč

Cena 8 košilí ve výprodeji stojí stejně jako 1 košile za katalogovou cenu, tj.

$$8\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right) = x$$

$$\begin{aligned} 8x + 2x - 2\,880 &= x \\ 9x &= 2\,880 \\ x &= 320 \end{aligned}$$

Katalogová cena jedné košile byla 320 Kč.

---

9 Fotografie má tvar obdélníku a její plocha je rovna obsahu obdélníku, tj. $21\text{ cm} \cdot 14\text{ cm} = 294\text{ cm}^2$.

Plocha obrazu včetně rámu je dvojnásobná, tj. $S_{obrazu} = 2 \cdot 294\text{ cm}^2 = 588\text{ cm}^2$.

Označíme si šířku rámu x, pak délky stran obrazu jsou $(21 + 2x)$ cm a $(14 + 2x)$ cm:

$S_{obrazu} = (21 + 2x)(14 + 2x) = 588$ (kde x je šířka rámu).

Po úpravě:

$2x^2 + 35x - 147 = 0.$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = 2\,401$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-35 \pm 49}{2}$.

$x_1 = 3{,}5$ a $x_2 = -21$

Zadání úlohy vyhovuje pouze kladný kořen (x je šířka rámu), tj. $x = 3{,}5$ cm.

Rozměry obrazu: $14\text{ cm} + 2 \cdot 3{,}5\text{ cm} = 21\text{ cm}$ a $21\text{ cm} + 2 \cdot 3{,}5\text{ cm} = 28\text{ cm}$.

10 Hledáme čtveřici čísel, z nichž každé je jiné a záleží na pořadí, jde tedy o variace bez opakování. Vybíráme celkem z deseti čísel (0, 1, 2 až 9) a vybíráme čtyři čísla, tj. zápis variace 4. třídy z 10 prvků.

$V = \frac{10}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5\,040$

---

11 **11.1** Celkový počet objednávek je 141, tj. je to liché číslo, zajímá nás tedy údaj, který je u 71. objednávky, a to je srpen.

11.2 Modus je měsíc, ve kterém bylo učiněno nejvíce objednávek, tj. červen.

---

12 $\left(\frac{3}{n^2 n^4}\right)^{-1} - \left(\frac{n^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{n^6}\right)^{-1} - \frac{n^6}{27} = \frac{n^6}{3} - \frac{n^6}{27} = \frac{9n^6 - n^6}{27} = \frac{8n^6}{27}$ nebo $\frac{8}{27}n^6$

---

13 Na začátku stál robot 390 000 Kč,
po prvním roce stál . . . . $p \cdot 390\,000$ Kč,
po druhém roce . . . . $p^2 \cdot 390\,000$ Kč,
po třetím roce . . . . $p^3 \cdot 390\,000$ Kč.

Tj. $p^3 \cdot 390\,000$ Kč $= 24\,960$ Kč, vypočítáme p a vyjde $p = 0{,}4 = 40\ \%$.

Odepisujeme tedy $100\ \% - 40\ \% = 60\ \%$.

---

14 První dvě vytažené čokolády mají být mléčné:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je 3, druhou čokoládu vybíráme už jen ze 6 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je nyní jen 2,

tj. $P = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$.

---

15 První vytažená čokoláda má být hořká a druhá mléčná:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád a počet příznivých jevů je 4, druhou vybíráme už jen ze 6 čokolád a počet příznivých jevů (mléčných čokolád) je 3,

tj. $P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$.

	A	N
16 **16.1**	☐	☒
16.2	☒	☐

16 **16.1** Upravíme výraz $A = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2$ podle vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$\left(3x - \frac{y}{2}\right)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \neq 9x^2 - 3xy + 4y^2$

16.2 Upravíme výraz $A = a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2$; vytkneme z prvních dvou členů a^2 a z dalších dvou členů b^2,

tj. $a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2 = a^2(a-9) - b^2(a-9)$.

A dále vytkneme závorku $(a-9)$,

tj. $a^2(a-9) - b^2(a-9) = (a^2 - b^2)(a-9)$.

První závorka je vzorec, rozložíme podle něj závorku a získáme:

$(a^2 - b^2)(a-9) = (a-b)(a+b)(a-9)$.

Nebo můžeme upravovat výraz B – roznásobit postupně všechny závorky – a dojdeme tím k výrazu A.

A N

16.3 Upravíme výraz A, vydělíme čitatele i jmenovatele číslem 4. ☒ ☐

$$\frac{4(x-2)}{x+8} = \frac{x-2}{\frac{x+8}{4}}$$

Ve jmenovateli rozdělíme zlomek na zlomky dva.

$$\frac{x-2}{\frac{x+8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+2}$$

Nebo můžeme upravovat výraz B a dojdeme tím k výrazu A.

16.4 Upravíme výraz $A = (2-9k)^2 - 16$ podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: ☐ ☒

$A = (2-9k)^2 - 16 = (2-9k-4)(2-k+4)$.

Závorky upravíme a získáme výraz:

$(-2-9k)(6-9k) \neq (2-9k)(6-9k)$.

---

17 Čitatel zlomku na levé straně nerovnice je záporný (je roven −5). Má-li být celý zlomek menší nebo roven nule, pak musí být jmenovatel zlomku kladný.

(POZOR: jmenovatel se nesmí rovnat nule!) Musí tedy platit:

$2x - 9 > 0$

$2x > 9$

$x > \frac{9}{2}$

tj. $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$. → C)

---

18 Jablek ..... 16 ks...........nezralých jablek ....16 : 4 = 4 ks,

vyhodíme 2 ks → zůstala 2 nezralá jablka.

Banánů.... 28 ks...........nezralých banánů.........28 : 4 = 7 ks,

vyhodíme 2 ks → zůstalo 5 ks nezralých banánů.

Celkem.... 44 ks...........nezralé ovoce celkem .....11 ks,

vyhodíme 4 ks → zůstalo 7 ks nezralého ovoce.

Na začátku: 100 %.......... 44 ks ovoce

x %............. 11 ks nezralého ovoce

$x = \frac{11}{44} \cdot 100\ \% = 25\ \%$

Nebo také: jestliže je nezralá čtvrtina jablek a čtvrtina banánů, pak je nezralá čtvrtina ovoce, tj. 25 %.

Po vyhození: 100 %.......... 40 ks ovoce

x %............. 7 ks nezralého ovoce.

$x = \frac{7}{40} \cdot 100\ \% = 17{,}5\ \%$

Závěr: 25 % − 17,5 % = 7,5 %.

Jestliže vyhodíme 2 nezralá jablka a 2 nezralé banány, klesne v bedně počet nezralého ovoce o 7,5 %. → B)

---

19 $R = k \cdot \frac{d}{S}$

Pravou i levou stranu rovnice vynásobíme veličinou S, potom:

$R \cdot S = k \cdot d$.

Pravou i levou stranu rovnice vydělíme veličinou k, potom:

$\frac{RS}{k} = d$.

$d = \frac{RS}{k}$ → D)

20 Poměr stran obdélníku je $4 : 3$, strana $a = 4x$ a strana $b = 3x$, pro obvod platí $o = 28 = 2(a + b)$, tj. $28 = 2(4x + 3x)$, a odtud vypočítáme, že $x = 2$ cm, tedy $a = 4 \cdot 2$ cm $= 8$ cm, $b = 3 \cdot 2$ cm $= 6$ cm.

Obsah čtyřúhelníku *SCED* je roven obsahu dvou trojúhelníků *CDS*.

Obsah trojúhelníku *CDS*: $S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12\ \text{cm}^2$.

Obsah čtyřúhelníku *SCED* je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku *CDS*, tj. $S = 2 \cdot 12 = 24\ \text{cm}^2$. → A)

21 Papír má tvar obdélníku, obsah tohoto obdélníku, tedy 1 ks papíru je:
$S = 0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}062\,37\ \text{m}^2$.

Obsah 500 ks papírů; (tj. jednoho balení) je:
$S = 500 \cdot 0{,}062\,37\ \text{m}^2 = 31{,}185\ \text{m}^2$.

$1\ \text{m}^2$................. 80 g
$31{,}185\ \text{m}^2$........... x g

$x = 31{,}185 \cdot 80 = 2\,494{,}8\ \text{g} = 2{,}494\,8\ \text{kg} \doteq 2{,}5\ \text{kg}$ → D)

22 Podle tvaru grafu jde o exponenciální funkci. → E) $y = 3^x - 1$

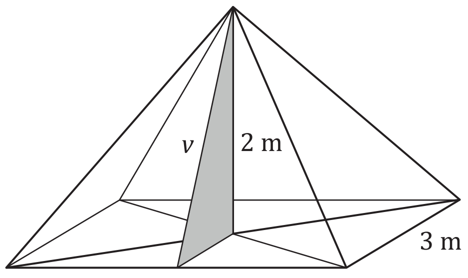
Grafem A) by byla přímka,
grafem B) parabola,
grafem C) hyperbola, logaritmická funkce,
D) graf logaritmické funkce, není ale definován pro x menší nebo rovno 0,
E) exponenciála (rostoucí), posunutá o 1 dolů.

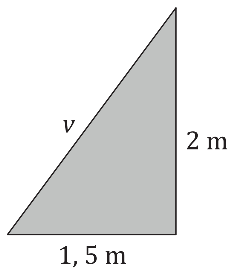
Případně můžeme i zkoušet za x a y dosazovat hodnoty a ověřovat, jestli bod leží na grafu funkce, např. u funkce A) zkusíme za x dosadit -1, v tom případě $y = -2$, ale bod $[-1; -2]$ neleží na grafu funkce f apod.

23 Nakreslíme si jehlan (střechu) a popíšeme prvky, které známe.

Střecha se skládá ze čtyř shodných trojúhelníků se základnou 3 m. Označíme si výšku v trojúhelníku, ze kterého budeme výšku počítat. Trojúhelník je pravoúhlý, z Pythagorovy věty získáme v:

$v^2 = 1{,}5^2 + 2^2$, tj. $v = 2{,}5$ m.



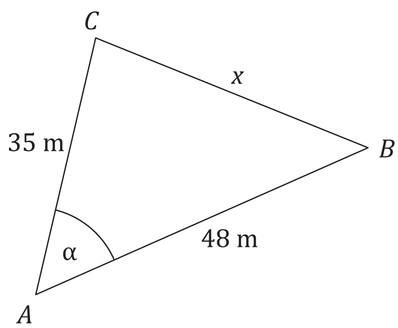


Nyní již můžeme vypočítat plochu střechy:

$S = 4 \cdot S_{\triangle} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5}{2} = 15\ \text{m}^2$. → D)

24 V trojúhelníku známe dvě strany a úhel mezi nimi, úkolem je spočítat stranu proti úhlu. Délku strany *CB* tedy spočítáme pomocí kosinové věty.

$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
$x^2 = 35^2 + 48^2 - 2 \cdot 35 \cdot 48 \cdot \cos 53° 25' \doteq 1\,526{,}47$
$x \doteq 39$ m → B)



25 Nejprve určíme souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC: $A = [-2; -1]$, $B = [4; -3]$, $C = [1; 3]$.

25.1 Souřadnice středu S strany AB vypočítáme ze vztahu $S = \dfrac{A + B}{2}$,

tj. $S = \left[\dfrac{-2 + 4}{2}; \dfrac{-1 - 3}{2}\right] = [1; -2]$.

Nyní vypočítáme souřadnice směrového vektoru přímky $\overrightarrow{SC}$,

$\vec{s} = \overrightarrow{SC} = (1 - 1; 3 - (-2)) = (0; 5)$.

Vektor $(0; 5)$ má z nabízených souřadnic stejný směr jako vektor $(0; 1)$. → E)

25.2 Směrový vektor přímky BC je $\overrightarrow{BC} = (1 - 4; 3 - (-3)) = (-3; 6) \sim (-1; 2)$.

Normálový vektor přímky BC je tedy $\vec{n} = (2; 1)$ → přehodíme x-ovou a y-ovou souřadnici a u jedné změníme znaménko. → B)

25.3 Je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AC, mají stejné směrové vektory bez ohledu na to, kterým bodem přímka p prochází. Směrový vektor přímky p je tedy:

$\vec{s} = \overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$. → F)

25.4 Směrový vektor osy x má souřadnice $(1; 0)$. Jestliže to nevíme, můžeme si na ose x zvolit libovolné dva body, např. $O = [0; 0]$ a $D = [1; 0]$, a určit směrový vektor osy x jako směrový vektor přímky OD,

$\vec{s} = \overrightarrow{OD} = (1 - 0; 0 - 0) = (1; 0)$.

Z nabízených vektorů má stejný směr vektor $(5; 0)$. → C)

---

26 **26.1** Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože rozdíl počtu cestujících každých dvou sousedních vagonů je stejný (diference d).

$a_{20} = 97$, $a_{30} = 147$, $a_1 = ?$

$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

$$d = \frac{a_r - a_s}{r - s} = \frac{147 - 97}{30 - 20} = 5$$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d = 97 - (20 - 1) \cdot 5 = 2$ → A)

26.2 $s_{10} = ?$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$$

Vypočítáme desátý člen.

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 27 + 9 \cdot 5 = 47$

$$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 47) = 245$$ → E)

26.3 $a_{31} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot d = 2 + 30 \cdot 5 = 152$ → D)

nebo $a_{31} = a_{30} + d = 147 + 5 = 152$

TEST 5

1 V pátek a v sobotu ušli $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{12}$ z celé trasy. Na neděli zbývá tedy $\frac{5}{12}$ z 11 km, tj. $\frac{55}{12}$ km $\doteq$ 4 600 m.

---

2 Podle definice logaritmu $r-5=3^p$, tedy $r=3^p+5$.

---

3 $\sqrt{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{12}}$

---

4 $A[-3;0] \quad \rightarrow \quad y=a(x+3)(x-2)$

$C[2;0]$

$y=a(x^2+x-6)$

$B[0;3]\in f \rightarrow 3=-6a \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

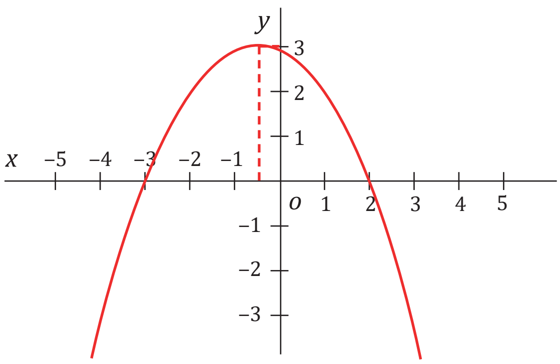
$f\colon y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$

$V[m;n]=-\frac{b}{2a},\ n=f(m)$

$m=-\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$

$n=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+3=\frac{25}{8}$

$V\left[-\frac{1}{2};\frac{25}{8}\right]$



Největší hodnota funkce f je rovna $\frac{25}{8}$.

Využijeme znalost průsečíků grafu funkce f se souřadnicovou osou x a rozložíme kvadratický trojčlen, chybějící koeficient a získáme ze třetího zadaného bodu.
Grafem kvadratické funkce je parabola, pro $a<0$ „otevřená dolů“. Pro určení maximální hodnoty musíme najít souřadnice jejího vrcholu.

5

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le\frac{(3x+1)^2}{4} \quad |\cdot 4$$
$$2(x-1)^2+8(x+1)^2\le(3x+1)^2$$
$$2\left(x^2-2x+1\right)+8\left(x^2+2x+1\right)\le 9x^2+6x+1$$
$$2x^2-4x+2+8x^2+16x+8\le 9x^2+6x+1$$
$$x^2+6x+9\le 0$$
$$(x+3)^2\le 0$$
$$x=-3$$

$K=\{-3\}$

K řešení nerovnice použijeme ekvivalentní úpravy nerovnic. Kvadratický člen $(x+3)^2$ nemůže nabývat záporné hodnoty. Proto řešíme „jen“ rovnici $(x+3)^2=0$, která má jediné řešení.

---

6 $3(2x-y)(x+5y)+x(x-27y)=3\left(2x^2-xy+10xy-5y^2\right)+x^2-27xy=$
$=3\left(2x^2+9xy-5y^2\right)+x^2-27xy=6x^2+27xy-15y^2+x^2-27xy=7x^2-15y^2$

---

7 $a_1=2,\ a_5=32$

$s_5=(a_1+a_5)\cdot\frac{5}{2}=(2+32)\cdot\frac{5}{2}=85$

8 $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm

$\triangle MNP \sim \triangle ABC \ \rightarrow \ m = ka, n = kb, p = kc$

$o_{\triangle MNP} = m + n + p = 84$ cm

$$\begin{aligned} 13k + 14k + 15k &= 84 \\ 42k &= 84 \\ k &= 2 \text{ a nejdelší strana je } p = 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nejdelší strana má délku 30 cm.

9
$$\begin{aligned} 4(x+2)^2 &= 5 \\ (x+2)^2 &= \frac{5}{4} \\ |x+2| &= \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x + 2 &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

10
$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot 10^{4x-7} - 200 &= 0 && \mid +200 \\ 0{,}2 \cdot 10^{4x-7} &= 200 && \mid : 0{,}2 \\ 10^{4x-7} &= 1\,000 \\ 10^{4x-7} &= 10^3 \\ 4x - 7 &= 3 \\ 4x &= 10 \\ x &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

---

11 $\cos\left(\dfrac{8\pi x}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{8\pi x}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $\dfrac{8\pi x}{6} = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \dfrac{11}{8} + \dfrac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

Pro $k = -1$ $x_1 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{11}{8}$, $x_2 = \dfrac{11}{8} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{8}$

$-\dfrac{1}{8} > -\dfrac{11}{8}$

---

12 $S = S_P + S_{Pl} = a^2 + 4S_{\triangle BCV}$

$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$S_P = a^2 = \dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2}\ \text{cm}^2 = 16\ \text{cm}^2$

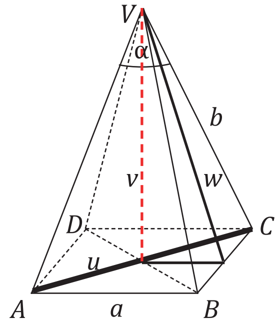
$a = 4$ cm

$\alpha = 60°$, proto trojúhelník ACV je rovnostranný, tedy $b = u$

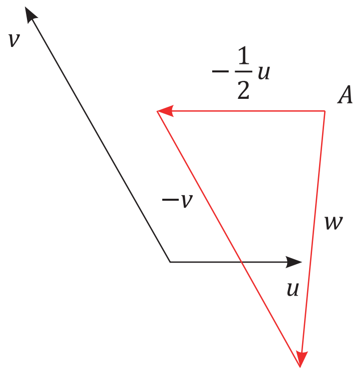
$S_{\triangle BCV} = \dfrac{aw}{2} = \dfrac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{32 - 4}}{2}\ \text{cm}^2 = \dfrac{4\sqrt{28}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{7}\ \text{cm}^2$

$S = \left(16 + 4 \cdot 4\sqrt{7}\right)\ \text{cm}^2 = \left(16 + 16\sqrt{7}\right)\ \text{cm}^2 \ (\doteq 58{,}3\ \text{cm}^2)$

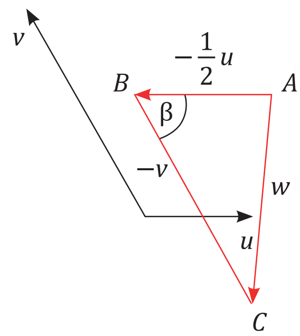
Povrch pravidelného jehlanu tvoří čtvercová podstava a plášť ze čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků.



13 **13.1**



Pro výpočet velikosti nalezeného vektoru použijeme kosínovou větu pro trojúhelník ABC.



13.2 $\beta = 180° - 120° = 60°$

$$|w|^2 = \left|-\frac{1}{2}u\right|^2 + |-v|^2 - 2\left|-\frac{1}{2}u\right| \cdot |-v| \cdot \cos\beta =$$

$$= \frac{25}{4} + 16 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \cos 60° = \frac{25}{4} + 16 - 10 = \frac{49}{4}$$

$$|w| = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

---

14 $\cos^2\alpha = \dfrac{7}{16}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{3}{4}$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 - \dfrac{27}{64} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{7}{16} = \dfrac{5}{4}$

Využijeme rovnost $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha =$

$= 2 + \sin\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) =$

$= 2 + \sin\alpha\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

a $\cos^2\alpha = \dfrac{7}{16}$,

proto $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{3}{4}$

$2 + \sin\alpha = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

---

15 $V(x) + V(-18 - x) = \dfrac{x(-18 - x)}{x + 9} + \dfrac{(-18 - x)(-18 + 18 + x)}{-18 - x + 9} =$

$\dfrac{x(-18 - x)}{x + 9} + \dfrac{(-18 - x) \cdot x}{-x - 9} = 0$

$x \neq 9$

$V(-18 - x) =$

$= \dfrac{(-18 - x)[-18 - (-18 - x)]}{(-18 - x) + 9} =$

$= \dfrac{(-18 - x) \cdot x}{-x - 9}$

16

	A	N
16.1	☐	☒
16.2	☒	☐
16.3	☐	☒
16.4	☒	☐

Průměrná výška ve skupině:

$$\overline{h} = \frac{168 + 172 + 179 + 180 + 190}{5}\ \text{cm} = 177{,}8\ \text{cm},$$

$$\overline{h_1} = \frac{168 + 190}{2}\ \text{cm} = 174\ \text{cm}.$$

17 Pro $q = 1{,}5 \ \rightarrow\ $ C)

Pro $q = 0{,}25$ platí: $a_2 = \dfrac{a_1}{4}$, $a_3 = \dfrac{a_1}{16}$, není splněna trojúhelníková nerovnost.

$(a_2 + a_3 < a_1)$. Analogicky pro $q = 0{,}5$ a pro $q = 2$.

Pro $q = 1{,}5$ je $a_2 = \dfrac{3}{2}a_1$, $a_3 = \dfrac{9}{4}a_1$,

$a_1 + a_2 = \dfrac{5}{2}a_1 > a_3 = \dfrac{9}{4}a_1$,

$a_1 + a_3 = \dfrac{13}{4}a_1 > a_2 = \dfrac{3}{2}a_1$,

$a_2 + a_3 = \dfrac{15}{4}a_1 > a_1$

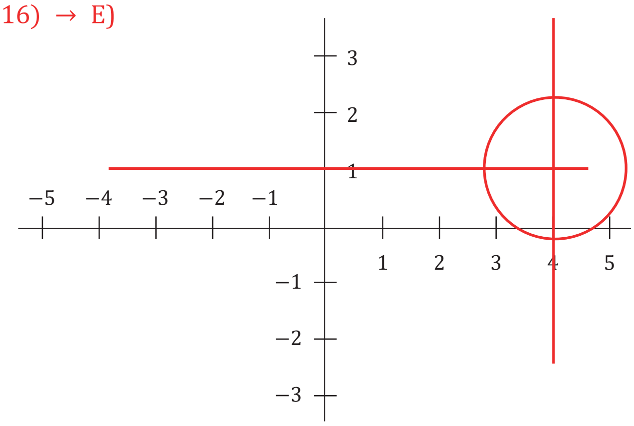
---

18 V dané množině je 5 druhých mocnin: 1; 4; 9; 16; 25.

$\mathrm{P} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6} \ \rightarrow\ $ B)

---

19 $p \in (13; 16) \ \rightarrow\ $ E)



Vzdálenost středu S od osy x je 1. Tzn. že při $r = 1$ by osa byla tečnou a při $r > 1$ bude sečnou, tj. budou existovat dva průsečíky.

Podobně využijeme vzdálenost středu S od osy y, ta je 4, tj. při $r = 4$ bude tečnou s jediným průsečíkem. Žádný průsečík nastane pro $r < 4$. Řešíme tedy soustavu nerovnic

$17 - p < 4 \quad \wedge \quad 17 - p > 1$

$p > 13 \quad \wedge \quad p < 16$

$p \in (13; 16)$.

---

20 $v \perp a \ \rightarrow\ a\colon 5x - 4y + c = 0$

$S \in a \ \rightarrow\ 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + c = 0 \ \rightarrow\ c = -17$

$a\colon 5x - 4y - 17 = 0 \ \rightarrow\ $ D)

---

21 $S = a \cdot b$

$u^2 = a^2 + b^2$

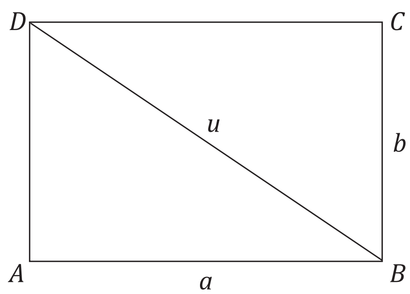
$u^2 = (u - 3)^2 + 5{,}3^2$

$0 = -6u + 9 + 28{,}09$

$6u = 37{,}09$

$u \doteq 6{,}182\ \text{cm}$, $a \doteq 3{,}182\ \text{cm}$

$S = 5{,}3 \cdot 3{,}182\ \text{cm}^2 \doteq 16{,}86\ \text{cm}^2 \ \rightarrow\ $ A)



---

22 Běžná cena oběda: (85 + 199) Kč = 284 Kč.

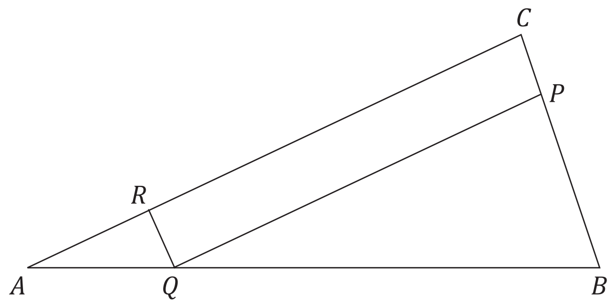
Cena oběda v akci:

0,9 · 85 + 0,75 · 199 Kč = 225,75 Kč

$$\frac{225{,}75}{284} \doteq 0{,}794\,9$$

100 % − 79,498 % = 20,51 %. → D)

23



$\triangle ABC \sim \triangle AQR$ s koeficientem podobnosti $\frac{2}{7}$, protože $|AQ| = \frac{2}{7}|AB|$

$S_{\triangle AQR} = \left(\frac{2}{7}\right)^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{4}{49} \cdot 35\ \text{cm}^2 = \frac{20}{7}\ \text{cm}^2 \ \rightarrow\ $ A)

---

24 $\frac{x^2 - 9}{(3x^2 + 9x)(x-3)^2} = 0$

$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$

Zlomek je roven nule jedině tehdy, když je čitatel roven nule: $x^2 - 9 = 0, x = \pm 3$, žádné z těchto čísel nevyhovuje podmínkám.

$K = \emptyset \ \rightarrow\ $ A)

---

25 **25.1** $o = 2\pi r \ \rightarrow\ r = \frac{o}{2\pi} \ \rightarrow\ r = 1, V = \pi r^2 \cdot v = 2\pi \cdot 1\ \text{cm}^3 \doteq 6{,}28\ \text{cm}^3 \ \rightarrow\ $ A)

25.2 $S = 4\pi r^2 \ \rightarrow\ r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$,

tedy $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{20}{4\pi}}\right)^3\ \text{cm}^3 \doteq 8{,}4\ \text{cm}^3 \ \rightarrow\ $ C)

25.3 $V = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\ \text{cm}^3 \doteq 9{,}2\ \text{cm}^3 \ \rightarrow\ $ E)

25.4 $V = S_p \cdot v = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot b = \frac{1{,}5^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{4}\ \text{cm}^3 \doteq 8{,}7\ \text{cm}^3 \ \rightarrow\ $ D)

---

26 **26.1** Poslední dvojčíslí musí být dělitelné 4: 12; 32; 52, ke každému dvojčíslí lze připojit libovolnou dvojčlennou variaci ze zbylých tří číslic

$x = 3 \cdot V_2(3) = 3 \cdot 6 = 18. \ \rightarrow\ $ D)

26.2 Na pozici jednotek nutné umístit 5, počet obsazení zbylých pozic určíme s užitím kombinatorického pravidla součinu $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ale záměnou stejných dvojek nové číslo nedostaneme, proto 24 je nutno dělit dvěma.

$24 \cdot 2 = 12 \ \rightarrow\ $ C)

26.3 Číslo musí být dělitelné dvěma i třemi.

Pro dělitelnost třemi použijeme ciferný součet. Součet čtyř čísel z kartiček bude dělitelný třemi jen výběrem číslic 2; 2; 3; 5. Z vybraných číslic tvoříme uspořádané skupiny, na pozici jednotek musí být dvojka. Jejich počet určíme užitím pravidla součinu:

$x = 3 \cdot 2 = 6. \ \rightarrow\ $ A)

ŘEŠENÍ

(VERZE 2018–2022)

ŘEŠENÍ – ČÍSELNÉ OBORY

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 16,4

2 $-\frac{9}{4}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{2}$

3 9

4 $\frac{37}{4}$

5 $b : c = 8 : 9$

6 620 kg

7 Přibližně o 53,3 %.

8

9 24

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $\frac{20 \cdot 72 \cdot 225}{25 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Důraz klademe na krácení, poté rozložíme na součin mocnin prvočísel a využijeme věty o počítání s mocninami.

2 $n(10, 12, 15) = 60$
Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

60 : 10 = 6
60 : 12 = 5
60 : 15 = 4

Do krychle se vejde 6 · 5 · 4 = 120 krabiček.

Představíme si kvádry, které jsou seskládány do krychle. Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

3 Součin čísel 12 a 25 je 2 · 2 · 3 · 5 · 5.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo n je dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo n je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo n není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo n je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo n je nejmenší společný násobek čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek. Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

4

		A	N
4.1	2 je prvočíslo.	■	□
4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	■	□
4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	□	■

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

5
5.1 $15 = 3 \cdot 5$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$; $n(15; 20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

5.2 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; $D(150; 180) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

5.3 $10 = 2 \cdot 5$; $25 = 5 \cdot 5$; $n(10; 25) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

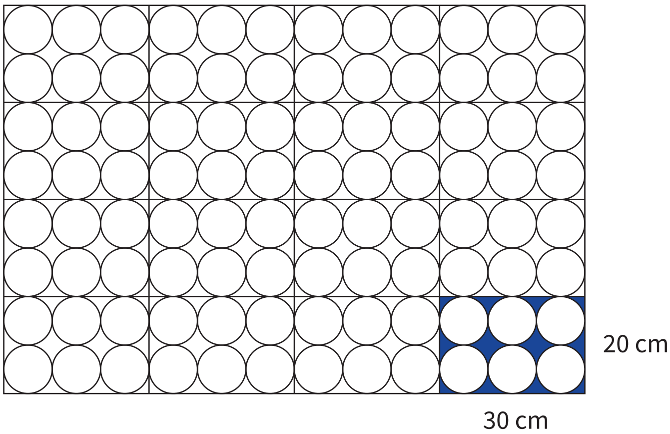
5.4 $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$; $160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $D(100; 160) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50
F) 60

5.1. F
5.2. C
5.3. E
5.4. B

Ověřujeme znalost výpočtu nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

6 Krabice lze na paletu umístit po celé délce i šířce (na orientaci nezáleží). Na paletě je $6 \cdot 16 = 96$ koulí.



Rozměr a počet krabic nemají pro výpočet zásadní smysl. Slouží pouze pro upevnění koulí a vizualizaci úlohy. Určíme počet koulí, které lze umístit do jedné krabice (známe poloměr koule) a vynásobíme počtem krabic.

7 Průměrná hodnota $\frac{8+6+5+5+6}{5}$ °C $= \frac{30}{5}$ °C $= 6$ °C

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

8 $\frac{(-1)\cdot|-2|}{(-3)} \cdot \frac{(-5+4)}{|-5+4|} = \frac{(-1)\cdot 2}{(-3)} \cdot \frac{(-1)}{1} = -\frac{2}{3}$

A) $\frac{2}{3}$

B) -2

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) $-\frac{2}{3}$

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

9

		A	N
9.1	Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná.	■	□
9.2	Součin lichého počtu záporných čísel je záporný.	□	■
9.3	Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný.	□	■

Klademe důraz na správné přečtení zadání.

9.1 Rozlišíme pojmy kladné a nezáporné číslo (resp. záporné a nekladné číslo).

9.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

10 10.1 $(-2) + 3 = 1$

10.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2$

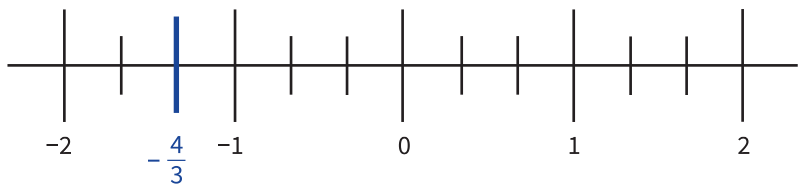
10.3 $(-2) \cdot (-1^2) = 2$

10.4 $(-3) - (-2) = -1$

A)	−1	10.1	**D**
B)	−2	10.2	**B**
C)	−5	10.3	**E**
D)	1	10.4	**A**
E)	2		
F)	5		

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze 10.2 a 10.3 je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1^2) = -1$.
Úlohu 10.4 lze řešit jako rozdíl dvou zápornýach čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

11 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose. Číselná osa pomáhá vyznačit správný počet třetin.

12 $$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}+2}{2} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} + \frac{\frac{2+6}{3}}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

13 35 ... 100 % ⇒ 50 ... 143 % – změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, co je základ tedy, kolik je 100 %. Řešíme pomocí trojčlenky nebo také výpočtem 1 %.

14

		A	N
14.1	12 395 ≐ 12 000	■	□
14.2	na stovky 12 395 ≐ 12 400 na desítky 12 395 ≐ 12 400	■	□
14.3	12 395 = 12 395 – zůstane stejné	□	■

V úloze 14.2 porovnáme oba výsledky zaokrouhlení.
Úloha 14.3 může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“.
Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

15 15.1 $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S$

15.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C$

15.3 $l' : l = 5 : 10 \Rightarrow l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l$

15.4 1 hod = 60 min ... 100 % ⇒ 75 min ... 125 % – změna 25 %

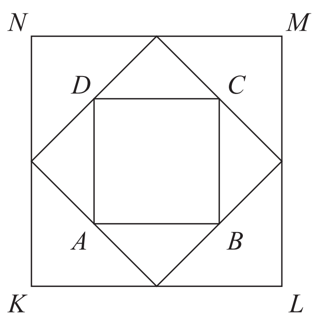
A) 25 %
B) 50 %
C) 75 %
D) 100 %
E) 125 %
F) 175 %

15.1. **E**
15.2. **C**
15.3. **B**
15.4. **A**

Úloha 15.1 může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah.
Úloha 15.2 je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina.
V úloze 15.4 žák nejprve převede základ 1 hod na 60 minut.

16 Platí pro každé reálné číslo.

17 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$, poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční“ a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

18 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 .... 100 %
3 .... x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 %.

A) 22,5 %
B) 25 %
C) 30 %
D) 33 %
E) 56 %

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

19

		A	N
19.1	Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění.	☐	■
19.2	Absolutní hodnota nuly je nula, správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná.	☐	■
19.3	Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné.	■	☐

Úloha 19.1 může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha 19.2 vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha 19.3 může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

20

20.1 $(\sqrt{2})^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

20.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

20.3 $-\sqrt{4} = -2$

20.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

A) -2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

D) 2

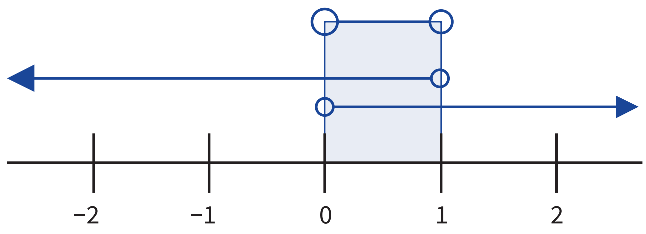
E) 4

F) neexistuje

20.1 E
20.2 D
20.3 A
20.4 C

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

21



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; ...).

22 $A = R_0^+/\{1\}$ nebo $A = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha 21). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

23 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5)$

A) $(-1; 2)$
B) $(-\infty; \infty)$
C) $(-\infty; 2\rangle$
D) $\langle -1; 5\rangle$
E) $(-1; 5)$

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalů A, B a C na číselné ose.

24

		A	N
24.1	$Z^+ \subset R^+ \Rightarrow Z^+ \cap R^+ = Z^+$	■	□
24.2	$(-1; +1) \subset \langle -1; +1\rangle$	□	■
24.3	$N \subset R$	■	□

Úlohy 24.1 a 24.3 ověřují znalosti číselných množin. V úloze 24.2 je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

25 **Přiřaďte ke každé množině správný interval.**

25.1 $R^+ = (0; \infty)$

25.2 $R^- \cap R^+ = \emptyset = (0; 0)$

25.3 $R_0^- \cup R_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty)$

25.4 $R_0^- \setminus \{0\} = R^- = (-\infty; 0)$

A) $(1; \infty)$
B) $(0; 0)$
C) $(-\infty; \infty)$
D) $\langle 0; 0\rangle$
E) $(-\infty; 0)$
F) $(0; \infty)$

25.1 F
25.2 B
25.3 C
25.4 E

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověď A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy 21 a 22).

ŘEŠENÍ – ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $-a+3$

2 $b\ \frac{11}{2}$

3 I. B
II. D
III. A

4 $(-a^3+5)^2=a^6-10a^3+25$

Kvadratický člen v mnohočlenu chybí, tzn. že koeficient je roven 0.

5 $-\frac{18}{k(k+3)}$

6 $(1+2\sqrt{3}-x)(1+x)$

7 E

8 I. D
II. B
III. E

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+3}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{4}-1+3}{\frac{1+2}{2}}=\frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+2\cdot 4}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+8}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

2 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2-2x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve −3 a potom 1.

$$A=-\frac{4(-3)}{(-3)^2-4}=-\frac{-12}{9-4}=\frac{12}{5}$$

$$B=-\frac{4\cdot 1}{1^2-4}=-\frac{4}{1-4}=\frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\cancel{12}^{3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku...

$\frac{4}{3}$ .... 100 %

$\frac{12}{5}$ .... x %

$x = 180$ %

... tedy o 80% větší.

3 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$$x^2-x-6\neq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1\neq\frac{1+5}{2}\Rightarrow x_1\neq 3$$

$$x_2\neq\frac{1-5}{2}\Rightarrow x_2\neq -2$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$

$$x^2-2x-3=2(x^2-x-6)$$

$$x^2-2x-3=2x^2-2x-12$$

$$-x^2=-9$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x = \pm 3$, ale hodnota $x = 3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru.
Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x = -3$.

4 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x + 0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x + 0{,}5x$	$0{,}5p(x + 0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x + 0{,}5x)$	$0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x)$

$0{,}3px + 0{,}5p(x + 0{,}5x) + 0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x) = 0{,}3px + 0{,}5px + 0{,}25px + 0{,}4px + 0{,}2px = 1{,}65px$ D)

5 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

5.1

$\dfrac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ B)

5.2

$\dfrac{x - 1}{\dfrac{x}{x + 1}} \Rightarrow x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1$ D)

5.3

$\dfrac{x + 1}{\dfrac{x - 1}{x}} \Rightarrow x - 1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 0$ C)

6 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a^2 - 2)^2 - (4 - a^2)^2 - 4 = \left[(a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2 + 2^2\right] - \left[4^2 - 2 \cdot 4 \cdot a^2 + (a^2)^2\right] - 4 = a^4 - 4a^2 + 4 - (16 - 8a^2 + a^4) - 4 =$

$= a^4 - 4a^2 + 4 - 16 + 8a^2 - a^4 - 4 = 4a^2 - 16 = 4(a^2 - 4) = 4(a - 2)(a + 2)$

7 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$(a + 2)^3 + (a - 2)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 + a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 - 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 - 6a^2 + 12a - 8 =$

$= 2a^3 + 24a = 2a(a^2 + 12)$

8 $3a^2x - 6ax - 2a^2y + 4ay = 3ax(a-2) - 2ay(a-2) = (a-2)(3ax-2ay) = a(a-2)(3x-2y)$

9 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x):B(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-x-6):(x^2+x-3) = x+2 \\
\underline{-x^3-x^2+3x} \\
\quad 2x^2+2x-6 \\
\quad \underline{-2x^2-2x+6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

B) $A(x) = (x+2)\cdot B(x)$

10 10.1

A N

Postupujeme dle vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, kde $a = x$ a $b = \dfrac{1}{x}$.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

10.2

A N

$$(3x+3)^2 + (4x+4)^2 = 9x^2 + 18x + 9 + 16x^2 + 32x + 16 = 25x^2 + 50x + 25 = (5x+5)^2$$

10.3

A N

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$$

10.4

A N

$$(x+2)^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 5 = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

11 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$

$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$

$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$

$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$

$$(x-1)^2 = A^2(x)$$

$A(x) = x - 1$ D)

12 $\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)=\frac{x(x-2)+x(x+2)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x\cdot x-4}{x}=\frac{x^2-2x+x^2+2x}{\cancel{x^2-4}}\cdot\frac{\cancel{x^2-4}}{x}=\frac{2\cancel{x^2}_{2x}}{\cancel{x}}=2x$

podm.: $x\neq\pm2$; $x\neq0$

13 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)=\left[\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{a-1-2a}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{-a-1}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=$

$=\frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{-\cancel{(a-1)}}{a}=\frac{1}{a}$

podm.: $a\neq\pm1$; $a\neq0$

14 $\frac{1+\frac{1}{a-2}}{a-\frac{1}{2-a}}=\frac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{-\frac{(a-1)^2}{2-a}}=\frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}}\cdot\left[-\frac{\cancel{2-a}}{\cancel{(a-1)^2}_{1-a}}\right]=\frac{1}{a-1}$

podm.: $a\neq1$; $a\neq2$

15 $1+\frac{1}{1+\frac{1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a}{a-1}}=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{a-1}{a}=1+\frac{a-1}{a}=\frac{a+a-1}{a}=\frac{2a-1}{a}$ B)

16 Výraz není definován pro takové $x\in\mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x}}\Rightarrow1+\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq-2\wedge x\neq0$

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1+\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2+2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+4}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq-4\wedge x\neq-2$

$\frac{x+2}{1+\frac{4}{x-2}}\Rightarrow1+\frac{4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x-2+4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x-2}\neq0\Rightarrow x\neq\pm2$ C)

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1-\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2-2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq0\wedge x\neq-2$

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x}}\Rightarrow1-\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x-2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq2\wedge x\neq0$

17 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

17.1 A ○ N ●

$$\frac{A(a)}{B(a)} = \frac{\frac{2a}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}} = \frac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \frac{2}{a-1}$$

17.2 A ● N ○

$$\frac{B(a)}{A(a)} + 1 = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{2a}{a^2-1}} + 1 = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \frac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \frac{a-1}{2} + 1 = \frac{a-1+2}{2} = \frac{a+1}{2}$$

17.3 A ● N ○

$$A(a) - B(a) = \frac{2a}{a^2-1} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{3a-a^2}{a^2-1}$$

17.4 A ○ N ●

$$A(a) + B(a) = \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a+1} = \frac{2a + a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \frac{a}{a-1}$$

18 $$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}$$

popř.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)+(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}$$

19 $$\left(\sqrt{x}\right)^{-1} + \left(\sqrt{x}\right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{x\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x}+x}{x \cdot x} = \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x}^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

20 $\sqrt{x}+\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad /\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x}+1=2 \qquad /-1$$

$$\sqrt{2x}=1 \qquad /^2$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad \text{C)}$$

21 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$$V(a,b)=\left(a^{-16}b^{4}\right)^{\frac{1}{8}}=a^{\overset{-2}{\cancel{-16}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}b^{\cancel{4}\cdot\frac{1}{\underset{2}{\cancel{8}}}}=a^{-2}b^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{b}}{a^{2}}$$

$$V\left(\sqrt{5},25\right)=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}^{2}}=\frac{5}{5}=1 \qquad \text{A)}$$

22 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

22.1

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2-x}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1 \\ 2-x>0 \Rightarrow 2>x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in\langle -1;2) \qquad \text{E)}$$

22.2

$$\frac{x+3}{\sqrt{4-x^{2}}} \Rightarrow 4-x^{2}>0 \Rightarrow x^{2}<4 \Rightarrow |x|<2 \Rightarrow x\in(-2;2) \qquad \text{D)}$$

22.3

$$\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \Rightarrow \frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

$$(x+2\geq 0 \wedge x+1>0) \vee (x+2\leq 0 \wedge x+1<0)$$

$$(x\geq -2 \wedge x>-1) \vee (x\leq -2 \wedge x<-1)$$

$$x\in(-1;\infty) \qquad x\in(-\infty;-2\rangle$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty;-2\rangle\cup(-1;\infty) \qquad \text{A)}$$

ŘEŠENÍ – ROVNICE A NEROVNICE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 B

2 $K = (-\infty; 10\rangle$

3 $x \neq 3$, $K = \{0\}$

4 Úkol bude splněn po 21 dnech.

5 I. A
II. A
III. A
IV. A

6 D

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich x-*ová* a y-*ová* souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [3; a] \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \Rightarrow 9 + 2a = 5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$
$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [b; 4] \Rightarrow 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \Rightarrow 3b + 8 = 5 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$
$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

$$x = 10 \left\{ \begin{aligned} &L\,(x = 10): \frac{10^2 - 3}{\sqrt{10 - 1}} = \frac{100 - 3}{\sqrt{9}} = \frac{97}{3} = 32\frac{1}{3} \\ &P\,(x = 10): \frac{10}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L\,(x = 10) \neq P\,(x = 10)$$

$$x = 5 \left\{ \begin{aligned} &L\,(x = 5): \frac{5^2 - 3}{\sqrt{5 - 1}} = \frac{25 - 3}{\sqrt{4}} = \frac{22}{2} = 11 \\ &P\,(x = 5): \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L\,(x = 5) \neq P\,(x = 5)$$

$$x = 4 \left\{ \begin{aligned} &L\,(x = 4): \frac{4^2 - 3}{\sqrt{4 - 1}} = \frac{16 - 3}{\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}} \\ &P\,(x = 4): \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L\,(x = 4) \neq P\,(x = 4)$$

$$x = 2 \left\{ \begin{aligned} &L\,(x = 2): \frac{2^2 - 3}{\sqrt{2 - 1}} = \frac{4 - 3}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1 \\ &P\,(x = 2): \frac{2}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L\,(x = 2) = P\,(x = 2)$$

$$x = 1 \left\{ \begin{aligned} &L\,(x = 1): \frac{1^2 - 3}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{1 - 3}{\sqrt{0}} \quad \text{výraz není definován} \\ &P\,(x = 1): \frac{1}{2} = 0{,}5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{pro } x = 1 \text{ rovnice není definována}$$

Z provedené zkoušky plyne, že řešením rovnice je $x = 2$. D)

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$32 + x = 0{,}96\,(x + 35)$
$32 + x = 0{,}96x + 33{,}6 \qquad / -0{,}96x - 32$
$0{,}04x = 1{,}6 \qquad / : 0{,}04$
$x = 40$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. 20 % hmotnosti vody $(0{,}2x)$ třetina zbytku

hmotnost vody v sudu x

$$
\begin{aligned}
135 - 0{,}2x - \frac{1}{2} \cdot 0{,}8x &= 79 && / \cdot 3 \\
405 - 0{,}6x - 0{,}8x &= 237 && / \cdot -405 \\
-1{,}4x &= -168 && / : (-1{,}4) \\
x &= 120
\end{aligned}
$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$
\begin{aligned}
l &= l_1\,[1 + \alpha(t - t_1)] \\
l &= l_1 + l_1\alpha(t - t_1) \\
l &= l_1 + l_1\alpha t - l_1\alpha t_1 && / -l_1 + l_1\alpha t_1 \\
l - l_1 + l_1\alpha t_1 &= l_1\alpha t && / : l_1\alpha \\
\frac{l - l_1 + l_1\alpha t_1}{l_1\alpha} &= t
\end{aligned}
$$

6

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} &= 2x - 4 && / \cdot 6 \\
3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) &= 12x - 24 \\
3x + 2x + \frac{2x+4}{3} &= 12x - 24 && / \cdot 3 \\
9x + 6x + 2x + 4 &= 36x - 72 \\
17x + 4 &= 36x - 72 && / -36x - 4 \\
-19x &= -76 && / : (-19) \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

7 7.1 — A ☐ N ☒

Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in R$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$.
Tvrzení tedy pravdivé není.

7.2 — A ☒ N ☐

Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2 - 4}{x + 2} &= 1 \\
\frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} &= 1 \\
x - 2 &= 1 && / + 2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

7.3

A N

Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in R$. Tvrzení je tedy pravdivé.

7.4

A N

Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnic a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a −2. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad / -x - 2$$
$$x^2 - 4 - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$2x + y = -3$$
$$x - 2y = -4 \qquad / \cdot 2$$
$$2x + y = -3$$
$$2x - 4y = -8$$
$$4x - 3y = -11 \qquad \text{D)}$$

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$(x+3)^2 - 4(x-1)^2 - 2x = -3(x-2)^2 + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1) - 2x = -3(x^2 - 4x + 4) + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 - 2x = -3x^2 + 12x - 12 + 6x - 1$$
$$-3x^2 + 12x + 5 = -3x^2 + 18x - 13 \qquad / +3x^2 - 18x - 5$$
$$12x - 18x = -13 - 5$$
$$-6x = -18 \qquad / : (-6)$$
$$x = 3$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. Správná odpověď je C).

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{2}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{3x+2}{x^2+x}-1 \qquad \text{podm.: } x\neq 0;\ x\neq -1$$

$$\frac{2}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{3x+2}{x(x+1)}-1 \qquad /\cdot x(x+1)$$

$$2(x+1)-x\cdot x=3x+2-x(x+1)$$

$$2x+2-x^2=3x+2-x^2-x$$

$$-x^2+2x+2=-x^2+2x+2 \qquad /-x^2+2x+2$$

$$0=0$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in R - \{-1; 0\}$.

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím menší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci .... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků .... x hodin

$$\frac{6}{4}=\frac{x+2{,}5}{x} \qquad /\cdot 4x$$

$$6x=4(x+2{,}5)$$

$$6x=4x+10 \qquad /-4x$$

$$2x=10 \qquad /:2$$

$$x=5$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků .... 5 hodin
10 soustružníků .... y hodin

$$\frac{10}{6}=\frac{5}{y} \qquad /\cdot 6y$$

$$10y=30 \qquad /:10$$

$$y=3$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, 0,75x. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku 0,75x
jmenovatel zlomku x

$$\frac{0,75x+2}{x+2}=0,8 \qquad / \cdot (x+2)$$
$$0,75x+2=0,8(x+2)$$
$$0,75x+2=0,8x+1,6 \qquad / -0,8x-2$$
$$-0,05x=-0,4 \qquad / : (-0,05)$$
$$x=8$$

Čitatel původního zlomku je roven 8, jmenovatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. 0,75 · 8 = 6.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

13 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-1}{x+9} \qquad / \cdot (x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x\neq-3;\ x\neq-9$$
$$(x-2)(x+9)=(x-1)(x+3)$$
$$x^2+9x-2x-18=x^2+3x-x-3$$
$$x^2+7x-18=x^2+2x-3 \qquad / -x^2-2x+18$$
$$5x=15 \qquad / : 5$$
$$x=3$$

$$\frac{y-3}{y+3}=\frac{y-4}{y-1} \qquad / \cdot (y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y\neq-3;\ y\neq1$$
$$(y-1)(y-3)=(y-4)(y+3)$$
$$y^2-3y-y+3=y^2+3y-4y-12$$
$$y^2-4y+3=y^2-y-12 \qquad / -y^2+y-3$$
$$-3y=-15 \qquad / : (-3)$$
$$y=5$$

Řešením rovnic jsou čísla x = 3 a y = 5. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15 (B).

14 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x^2-4}+2 \qquad \text{podm.: } x\neq\pm2$$
$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{(x-2)(x+2)}+2 \qquad / \cdot (x-2)(x+2)$$
$$2(x+2)+x(x-2)=3+2(x-2)(x+2)$$
$$2x+4+x^2-2x=3+2(x^2-4)$$
$$x^2+4=3+2x^2-8$$
$$x^2+4=2x^2-5 \qquad / -2x^2-4$$
$$-x^2=-9 \qquad / \cdot(-1)$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm3$$
$$K=\{\pm3\}$$

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

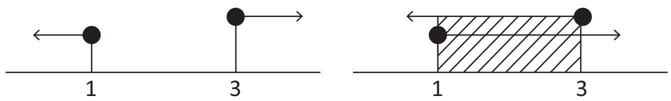
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \le 0$, jestliže $(x - 3 \ge 0 \land x - 1 \le 0) \lor (x - 3 \le 0 \land x - 1 \ge 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \ge 0 \land x - 1 \le 0) \lor (x - 3 \le 0 \land x - 1 \ge 0)$$

$$(x \ge 3 \land x \le 1) \lor (x \le 3 \land x \ge 1)$$

$$x \in \emptyset \lor x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku .... $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$$x(x + 17{,}5) = 375$$

$$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1806{,}25}}{2} =$$

$$= \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \text{ nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka 12,5 + 17,5 = 30 cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1056{,}25} = 32{,}5 \text{ cm}$. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x+1$ (druhá mocnina je $(x+1)^2$) a největší $x+2$ (druhá mocnina je $(x+2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo .... $x+1$
třetí číslo .... $x+2$

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=10(x+2)$$
$$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=10x+20$$
$$3x^2+6x+5=10x+20 \qquad /-10x-20$$
$$3x^2-4x-15=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot(-15)}}{2\cdot3}=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=$$
$$=\frac{4\pm14}{6}$$
$$x_1=\frac{4+14}{6}=\frac{18}{6}=3$$
$$x_2=\frac{4-14}{6}=\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}\ \text{nevyhovuje (}x\text{ je přirozené číslo)}$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je 3 + 4 + 5 = 12.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$(x+3)^2-(3x-1)^2=0$$
$$x^2+6x+9-(9x^2-6x+1)=0$$
$$x^2+6x+9-9x^2+6x-1=0$$
$$-8x^2+12x+8=0 \qquad /:(-4)$$
$$2x^2-3x-2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow|x_1|=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2\Rightarrow|x_2|=2 \end{array}\right\}\Rightarrow|x_2|=4|x_1|$$

Řešením je tedy E.

19 Je-li $x_1 = 3$ řešením rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x - b^2 + 5b &= 0 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}\right\} 3^2 - 3 - b^2 + 5b = 0 \Rightarrow b^2 - 5b - 6 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$b_1 = \frac{5 - 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Nyní do původní rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x - b^2 + 5b &= 0 \\ b_1 &= -1 \end{aligned}\right\} x^2 - x - (-1)^2 + 5(-1) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{2}} = -2$$

$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven −2.
Řešení je tedy B.

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2} = |x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x - a| \leq b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a - b; a + b\rangle$.

20.1 $(x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow |x - 1| \leq 1 \Rightarrow x \in \langle 0; 2\rangle$ C
20.2 $(x+1)^2 \leq 4 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -3; 1\rangle$ A
20.3 $(x+1)^2 \leq 9 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 3 \Rightarrow x \in \langle -4; 2\rangle$ D

22 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 3(2x-1) - 2(x+3) &\leq 5x - 1 \\ 6x - 3 - 2x - 6 &\leq 5x - 1 \\ 4x - 9 &\leq 5x - 1 \qquad / -5x + 9 \\ 4x - 5x &\leq -1 + 9 \\ -x &\leq 8 \qquad / : (-1) \\ x &\geq -8 \Rightarrow x \in \langle -8; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4x-3) - 5(x+2) &\geq 4x - 13 \\ 8x - 6 - 5x - 10 &\geq 4x - 13 \\ 3x - 16 &\geq 4x - 13 \qquad / -4x + 16 \\ 3x - 4x &\geq -13 + 16 \\ -x &\geq 3 \qquad / : (-1) \\ x &\leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x &\in \langle -8; \infty) \\ x &\in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \langle -8; -3\rangle$$

23 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x - 1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)(\cancel{x+1})} \leq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$1 \geq 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$$

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned}
2(3x-1) - 3[2(x+4) - 3(x-2)] &\leq 7(x-5) + 1 \\
6x - 2 - 3[2x + 8 - 3x + 6] &\leq 7x - 35 + 1 \\
6x - 2 - 3[-x + 14] &\leq 7x - 34 \\
6x - 2 + 3x - 42 &\leq 7x - 34 \\
9x - 44 &\leq 7x - 34 \qquad / -7x + 44 \\
9x - 7x &\leq -34 + 44 \\
2x &\leq 10 \qquad / : 2 \\
x &\leq 5
\end{aligned}$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \leq 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
Řešení je tedy D.

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned}
\frac{2x - \frac{1}{3}(x+4)}{4} + \frac{3x - \frac{1}{4}(x-2)}{3} &\leq \frac{3x+1}{2} \qquad / \cdot 12 \\
3\left[2x - \frac{1}{3}(x+4)\right] + 4\left[3x - \frac{1}{4}(x-2)\right] &\leq 6(3x+1) \\
6x - (x+4) + 12x - (x-2) &\leq 18x + 6 \\
6x - x - 4 + 12x - x + 2 &\leq 18x + 6 \\
16x - 2 &\leq 18x + 6 \qquad / \cdot -18x + 2 \\
-2x &\leq 8 \qquad / : (-2) \\
x &\geq -4 \Rightarrow x \in \langle -4; \infty) \qquad \text{(A)}
\end{aligned}$$

26 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

26.1

$$
\begin{aligned}
2(3x-1)-3(x+2) &\leq 4x-6 \\
6x-2-3x-6 &\leq 4x-6 \\
3x-8 &\leq 4x-6 \qquad /-4x+8 \\
3x-4x &\leq -6+8 \\
-x &\leq 2 \qquad / : (-1) \\
x &\geq -2 \Rightarrow x \in \langle -2; \infty)
\end{aligned}
$$

Řešení je tedy B.

26.2

$$
\begin{aligned}
4(2x-3)-2(x+1) &\leq 7x-8 \\
8x-12-2x-2 &\leq 7x-8 \\
6x-14 &\leq 7x-8 \qquad /-7x+14 \\
6x-7x &\leq -8+14 \\
-x &\leq 6 \qquad / : (-1) \\
x &\geq -6 \Rightarrow x \in \langle -6; \infty)
\end{aligned}
$$

Řešení je tedy E.

26.3

$$
\begin{aligned}
4(3x-2)-6(x-3) &\leq 7x+15 \\
12x-8-6x+18 &\leq 7x+15 \\
6x+10 &\leq 7x+15 \qquad /-7x-10 \\
6x-7x &\leq 15-10 \\
-x &\leq 5 \qquad / : (-1) \\
x &\geq -5 \Rightarrow x \in \langle -5; \infty)
\end{aligned}
$$

Řešení je tedy D.

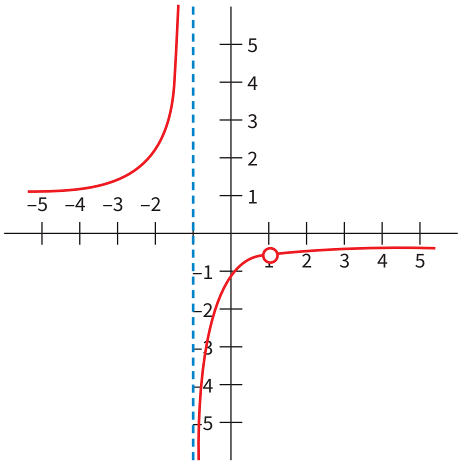
ŘEŠENÍ – FUNKCE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 C

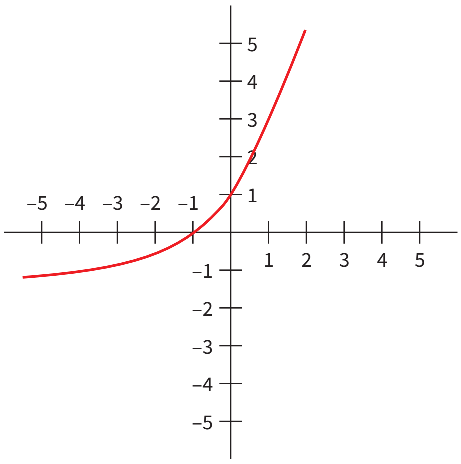
2 $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Grafem je hyperbola s výjimkou jednoho bodu (x = 1)



3 a = –4

4 $P_x[-1; 0]$, $P_y\ [0; 1]$



5 K = {1}

6 K = {4}

7 $\log_5 6 = \frac{p}{3} + \frac{q}{2}$

8 $K = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

Proto musí platit, že: $\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \Rightarrow x \in (3; 5\rangle$

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f: y = \frac{|x-3|}{2x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

4

4.1. $f_1 : y = \dfrac{2}{|x| - 3} \Rightarrow |x| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq \pm 3$ A ☐ N ■

4.2. $f_2 : y = \dfrac{x}{x^2 + 3} \Rightarrow x^2 + 3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ A ■ N ☐

4.3. $f_3 : y = \dfrac{2x + 2}{x + 1} \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ A ☐ N ■

4.4. $f_4 : y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{2}} \Rightarrow \dfrac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ A ■ N ☐

5 $A[0; 0]$: $\frac{0^2 + 0}{0 - 1} = 0 \Rightarrow$ bod $A[0; 0]$ leží

$B[-1; 0]$: $\frac{(-1)^2 + (-1)}{(-1) - 1} = \frac{1 - 1}{-2} = 0 \Rightarrow$ bod $B[-1; 0]$ leží

$C[2; 6]$: $\frac{2^2 + 2}{2 - 1} = \frac{4 + 2}{1} = 6 \Rightarrow$ bod $C[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $\frac{(-3)^2 + (-3)}{(-3) - 1} = \frac{9 - 3}{-4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6{,}3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k,
vyjádříme pomocí lineární funkce:

$$p = 55 - \frac{6{,}3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0{,}063k + 55$

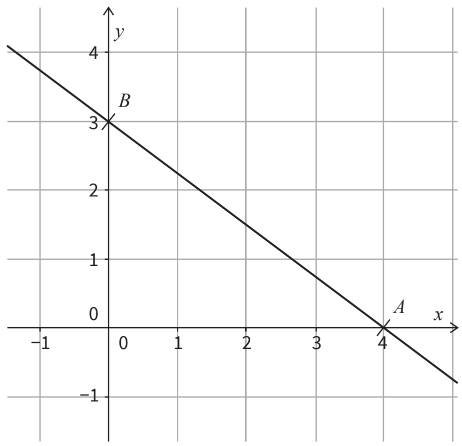
7 $v = at + b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = at_1 + b \Rightarrow 337{,}92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \Rightarrow 350{,}12 = 30a + b \end{array} \right\}$ řešením soustavy je $a = 0{,}61$ a $b = 331{,}82$

Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0{,}61t + 331{,}82$.

8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A[x; 0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B[0; y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge y = 0) \Rightarrow 0 = -0{,}75x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{0{,}75} = 4 \Rightarrow A[4; 0]$

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -0{,}75 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[0; 3]$



Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

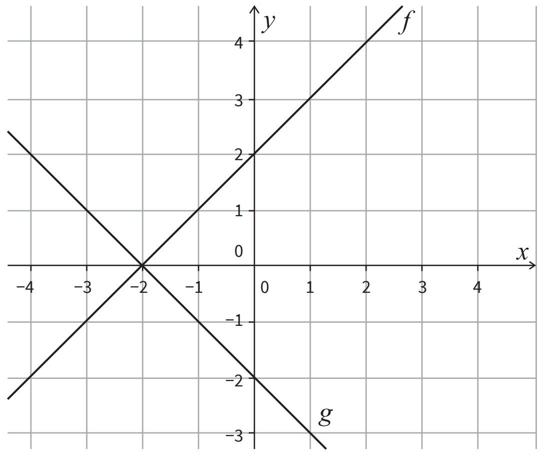
9 9.1. $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ **D**

9.2. $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ **B**

9.3. $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ **E**

10 Grafem funkce f je přímka, která se v osové souměrnosti podle osy x zobrazí opět na přímku. V osové souměrnosti podle osy x se funkční hodnoty původní funkce změní na hodnoty opačné, tzn. $g(x) = -f(x)$.

Proto $g: y = -x - 2$.



A) $g: y = x + 2$

B) $g: y = -x + 2$

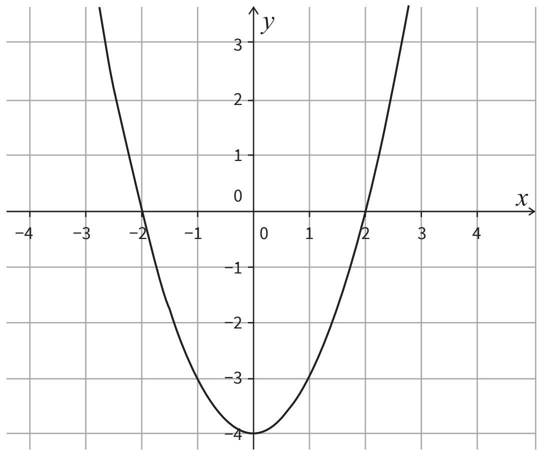
C) $g: y = x - 2$

D) $g: y = -x - 2$

E) $g: y = \frac{1}{x+2}$

11 $f: y = x - 2 \wedge P[x; 1] \in f \Rightarrow 1 = x - 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ funkce se protínají v bodě $P[3; 1]$

$g: y = ax + 4 \wedge P[3; 1] \in g \Rightarrow 1 = 3a + 4 \Rightarrow -3 = 3a \Rightarrow a = -1$



A) $a = -2$

B) $a = -1$

C) $a = -\frac{1}{2}$

D) $a = 1$

E) $a = 2$

12 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je -4, potom funkce prochází bodem $V[0; -4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice $[2; 0]$, potom druhý má souřadnice $[-2; 0]$.

Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}[2; 0]$ a $P_{x2}[-2; 0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f: y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

$V \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -4$
$P_{x1} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$
$P_{x2} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow 0 = 4a - 2b + c$

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je $a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.
Pro funkci f tedy platí: $f: y = x^2 - 4$

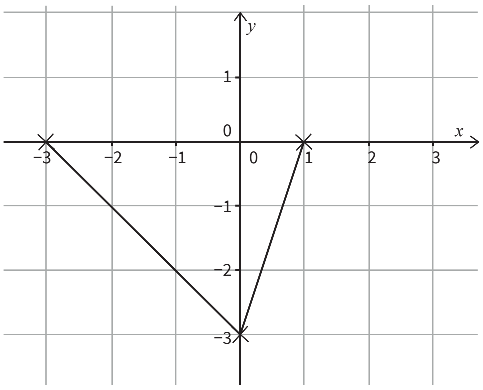
13 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \wedge f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) + 3 = a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$$f(a+1) \geq f(a)$$
$$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$$
$$2a \geq -3$$
$$a \geq -\frac{3}{2}$$
$$a \in \langle -3/2, \infty)$$

14 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.

$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P_1[0; -3]$
$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge y = 0) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow (x = -3 \vee x = 1) \Rightarrow P_2[-3; 0] \wedge P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



15 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj. $f: y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$. V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí $g: y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$.

A) $g: y = x^2 + 4x - 3$

B) $g: y = x^2 - 4x + 3$

C) $g: y = -x^2 + 4x + 3$

D) $g: y = x^2 - 4x - 3$

E) $g: y = -x^2 - 4x + 3$

16 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 4 = a^{-1+1} + b \Rightarrow 4 = a^0 + b \Rightarrow 4 = 1 + b \Rightarrow b = 3$
$B[2; 11] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 11 = a^{2+1} + b \Rightarrow 11 = a^3 + 3 \Rightarrow 8 = a^3 \Rightarrow a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

17 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\frac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$

$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$

$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$

$$\frac{2}{a-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$a \in (1, \infty)$

18 Exponenciální funkce $y = a^x$ je definována pro všechna $a \in R^+ - \{1\}$. U uvedených funkcí ověříme, zda základ a vyhovuje příslušné podmínce.

$f: y = (\cos 2\pi)^{x+1} \Rightarrow a = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$g: y = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{2x+1} \Rightarrow a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ vyhovuje podmínce, je exp. fce

$h: y = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4\right)^{x-1} \Rightarrow a = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$l: y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{x+3} \Rightarrow a = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

19

$$2^{3-x} + 2^{1-x} = 40$$
$$2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} = 40$$
$$2^{-x}(2^3 + 2^1) = 40$$
$$2^{-x}(8+2) = 40$$
$$2^{-x} \cdot 10 = 40$$
$$2^{-x} = 4$$
$$2^{-x} = 2^2$$
$$x = -2$$

A) (−5; −3)

B) (−3; −1)

C) (−1; 1)

D) (1; 3)

E) (3; 5)

20 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$\log_2(x-3) = \log_3 9$
$\log_2(x-3) = 2$
$2^2 = x-3$
$4 = x-3$
$x = 7$

21 $V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{1-2\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 6$

22 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \wedge \sin x \geq 0) \Rightarrow \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in Z$.

23 $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{-(1-\sin^2 x)} = \dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} = \dfrac{1 + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} =$

$= \dfrac{2\sin x \cancel{\cos x}}{-\cos^{\cancel{2}} x} = -\dfrac{2\sin x}{\cos x} = -2\operatorname{tg} x$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \Rightarrow \sin^2 x \neq 1 \Rightarrow \sin x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

24 **Využijeme grafické řešení.**

Z obrázku jsou patrné příslušné tři průsečíky.

Průsečíky v bodech $x = 0$ a $x = 2\pi$ nevyhovují intervalu, na kterém řešení hledáme.

A) 0 řešení

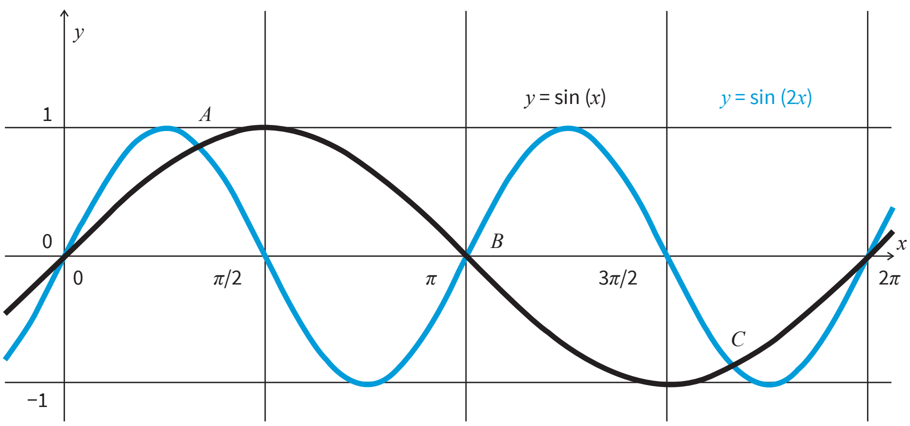
B) 1 řešení

C) 2 řešení

D) 3 řešení

E) 4 řešení

Využijte grafů obou funkcí.



25

25.1. $y = 2\sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\dfrac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow D\left[\dfrac{\pi}{3};\ \sqrt{3}-1\right] \end{cases}$

25.2. $y = \cos x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{6} + 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \dfrac{\sqrt{3}+4}{2} \Rightarrow B\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\sqrt{3}+4}{2}\right] \\ \cos\dfrac{\pi}{3} + 2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

25.3. $y = \operatorname{tg} x - 3 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} - 3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \dfrac{\sqrt{3}-9}{3} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \Rightarrow C\left[\dfrac{\pi}{3};\ \sqrt{3}-3\right] \end{cases}$

A) $A\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\right]$

B) $B\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\sqrt{3}+4}{2}\right]$

C) $C\left[\dfrac{\pi}{3};\ \sqrt{3}-3\right]$

D) $D\left[\dfrac{\pi}{3};\ \sqrt{3}-1\right]$

E) $E\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\sqrt{3}+2}{3}\right]$

25.1. **D**
25.2. **B**
25.3. **C**

26 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

A) 0

B) $\dfrac{\pi}{2}$

C) π

D) $\dfrac{3}{2}\pi$

E) 2π

ŘEŠENÍ – POSLOUPNOST A FINANČNÍ MATEMATIKA

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $a_1 = 3$

2 7 975

3 98 550

4 $a_1 = 1\,300$ Kč, $a_2 = 2\,100$ Kč, $a_3 = 2\,900$ Kč, $a_4 = 3\,700$ Kč

5 855

6 $s_8 = \dfrac{6\,305}{243} \doteq 25$

7 $a_{10} \doteq 0{,}04$ cm, $s_{15} \doteq 23{,}38$ cm^2

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný. V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

1 A) $a_5 = \dfrac{5^2 - 3\cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \dfrac{1^2 - 3\cdot 1}{5} = -\dfrac{2}{5}$; $a_2 = \dfrac{2^2 - 3\cdot 2}{5} = -\dfrac{2}{5}$; $a_3 = \dfrac{3^2 - 3\cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ posloupnost není aritmetická

D) $\dfrac{a^2}{a_1} \neq \dfrac{a^3}{a_2}$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \dfrac{3^2 - 3\cdot 3}{5} + \dfrac{4^2 - 3\cdot 4}{5} = 0 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5)\cdot d$

$d = \dfrac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení:

$d = 0{,}08$ m

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5)\cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14\cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$d = \dfrac{9 - 2a_1}{10}$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12;\ a_n = 96;\ d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n-1) \cdot 6$
$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_{15} = \frac{15}{2} \cdot (12 + 96)$

$s_{15} = 810$

5 5.1 Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20;\ d = 3;\ n = 9;$

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9-1) \cdot 3$
$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s \ = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d)$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\frac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 6.1 Počty kostek v šedých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet šedých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n-1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma.
Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98$

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n-1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144$

A) méně než 98
B) 98
C) 108
D) 140
E) více než 140

6.1 B
6.2 E

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

7 7.1 $q = \sqrt{\dfrac{a^5}{a^3}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ A ☐ N ■

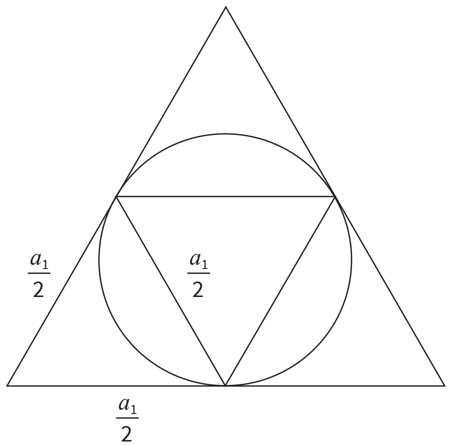
Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

7.2 $a_4 = a_3 \cdot q = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{27}$ A ■ N ☐

7.3 $a_3 + a_4 + a_5 = \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} + \dfrac{8}{81} = \dfrac{38}{81}$ A ■ N ☐

7.4 $a_1 = \dfrac{a_3}{q^2} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \dfrac{1}{2}$ A ☐ N ■

8 8.1 Délky stran jednotlivých trojúhelníků tvoří členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 1$ m. Abychom si lépe představili hodnotu kvocientu, je vhodné si druhý největší trojúhelník pootočit tak, aby jeho vrcholy ležely ve středech stran největšího trojúhelníku.



Geometrická posloupnost má tedy kvocient $q = \dfrac{1}{2}$.

Čtvrtý člen posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Po dosazení:

$$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ m} = 0{,}125 \text{ m}$$

Pro obvod trojúhelníku platí:

$$o_4 = 3 \cdot a_4 = 0{,}375 \text{ m}$$

8.2 $S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{32}\ \text{m}^2$

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí vztah:

$$S_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Z tohoto vztahu vyjádříme strany trojúhelníku:

$$a_n = \sqrt{\frac{4S_n}{\sqrt{3}}}$$

Po dosazení:

$$a_n = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}} \text{ m} = 0{,}25 \text{ m}$$

Pořadí hledaného členu posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Po dosazení:

$$0{,}25 \text{ m} = 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n = 3$ Daný obsah má třetí největší trojúhelník.

Podle Pythagorovy věty má výška rovnostranného trojúhelníku velikost $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Pro obsah rovnostranného trojúhelníku pak dostáváme vztah $S = \frac{a \cdot v}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Úlohu bychom mohli řešit taky pomocí posloupnosti obsahů trojúhelníků. Ta je taky geometrická a její kvocient je druhou mocninou kvocientu posloupnosti délek stran trojúhelníků. Kvocient posloupnosti obsahů je tedy $\frac{1}{4}$ a první člen $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ m^2$.

9 $K_0 = 400\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}08$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 3$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

A N

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí ($k = 1$). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % ($k = 0{,}85$).

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Po dosazení:

$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč $\doteq$ 503 885 Kč

10 $K_0 = 40\,000$ Kč (počáteční vklad)
$p_1 = 0{,}02$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$p_2 = 0{,}013$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n_1 = 3$ (počet úrokovacích období)
$n_2 = 2$ (počet úrokovacích období)
$k = 0{,}85$ (zdaňovací koeficient)

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n1} = 42\,075 \text{ Kč}$$

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n2}$$
$K_5 = 43\,010$ Kč $\doteq$ 43 000 Kč

A) 42 000 Kč
B) 43 000 Kč
C) 43 600 Kč
D) 44 000 Kč
E) 44 200 Kč

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n2}$

11 $K_0 = 1\,500\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}055$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

11.1 **Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:**

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)$$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10}$ $\doteq$ 2 562 000 Kč

11.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Po dosazení:

$p = \sqrt[10]{\dfrac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq$ 5,2 %

ŘEŠENÍ – PLANIMETRIE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $135°$

2 $S = 90\ \text{cm}^2$

3 4 cm, $(80 - 32\sqrt{3})$cm

4 $\frac{64}{25}$

5 $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$, $\alpha \doteq 99°36'$

6 C

7 $2\sqrt{6}$ cm

$2 : 5$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 1.1 D
1.2 B
1.3 E
1.4 A

Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

2 2.1 C
2.2 A
2.3 B
2.4 F

2.1 *Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou p, ale obě, tedy přímky q i r.*
2.3 *Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem AB (tedy k) bez krajních bodů A a B.*
2.4 *Jde o osu úsečky AB, což je přímka p, protože je na AB kolmá a prochází jejím středem.*

3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

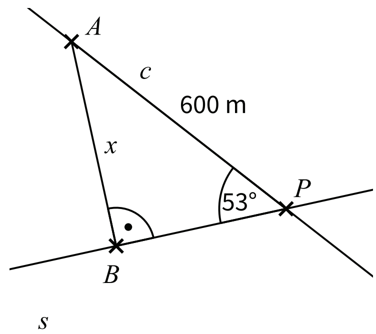
$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}\,\text{km} = 0{,}6\,\text{km} = 600\,\text{m}.$

Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka s, lesní cesta jako přímka c. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu P do bodu A. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice x vedené z bodu A na přímku s.

V pravoúhlém trojúhelníku ABP platí: $\frac{x}{|AP|} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\,\text{m} \doteq 480\,\text{m}$

A)



4 4.1
V pravoúhlém trojúhelníku ACD s odvěsnami AC a CD platí:

$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\ \text{cm}^2$

$S = 7\ \text{cm}^2$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

4.2
Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany a, b)

Protože máme zadány strany b a c a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$

$S = 7{,}66\ \text{cm}^2$

$S \doteq 8\ \text{cm}^2$

5 Pomůže nám obrázek vpravo.

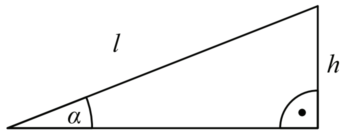
Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin\alpha = \frac{h}{l}$;

kde h se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy $h = (630 - 440)\ \mathrm{m} = 190\ \mathrm{m}$

$\sin\alpha = \frac{190}{2100} = 0{,}905$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}905) = 5{,}19°$

A)



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

6 6.1 $v = 8 \cdot \mathrm{tg}\ 35° = 5{,}6\ \mathrm{m}$, tedy B)

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \mathrm{m}$, tedy A)

6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

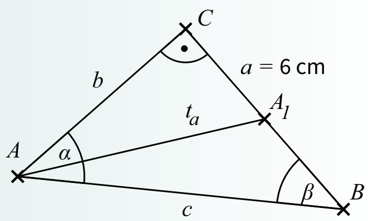
$v = 5{,}9\ \mathrm{cm}$, tedy C)

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

	A	N
7.1 Je-li $\alpha = 30°$, pak $c = 12$ cm.	●	○
7.2 Je-li $b = 4$ cm, pak $t_a = 5$ cm.	●	○
7.3 Je-li $b = 4$ cm, pak $c = 8$ cm.	○	●
7.4 Je-li $\beta = 50°$, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.	○	●

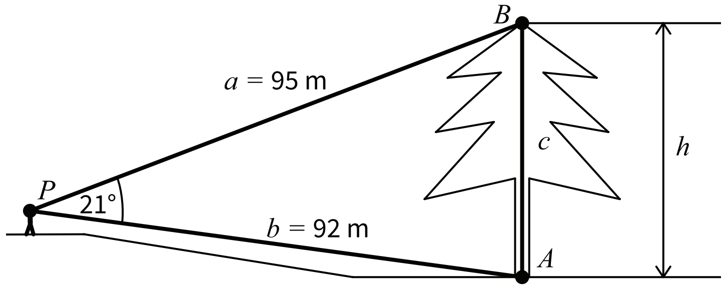
7.1 $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2}$,
tedy $c = 2a = 12$ cm
7.2 *Těžnice* t_a *spojuje vrchol* A *se středem strany* a*, tedy bodem* A_1*.*
$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3\ \mathrm{cm}$
Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 *platí*
$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$t_a^2 = 4^2 + 3^2$
$t_a = 5$ cm
7.3 $c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{52}$ cm $\doteq 7{,}21$ cm $\neq 8$ cm
7.4 *Je-li* $\beta = 50°$*, pak je* $\alpha = 90° - 50° = 40°$
Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musím mít dva vnitřní úhly shodné.



8 Pomůžeme si obrázkem.
V trojúhelníku ABP známe dvě strany a úhel, který svírají.
Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m

D)



Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.

9 9.1
Protože skutečná délka arboreta je 7 500krát větší než na plánu a skutečná šířka je také 7 500krát větší než na plánu, je skutečná rozloha $7\,500^2$-krát větší než rozloha na plánu.
$S = 3{,}84 \cdot 7\,500^2\ \text{cm}^2 = 2{,}16 \cdot 10^8\ \text{cm}^2 = 21\,600\ \text{m}^2$
$S = 2{,}16\ \text{ha}$

9.2
Označme délku arboreta jako a, šířku jako b. Protože má být délka o polovinu větší než šířka, platí $a = 1{,}5b$
$S = a \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$1{,}5b \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$b^2 = 14\,400\ \text{m}^2$
$b = 120\ \text{m}$
$a = 180\ \text{m}$

10 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten neodpovídá zadání, úhel u vrcholu A např. neměří přesně 60°. Budeme muset obě délky vypočítat.
V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{|AC|}{8\ \text{cm}} = \cos 60°$$

$$|AC| = 4\ \text{cm}$$

Stranu BD vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu A, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

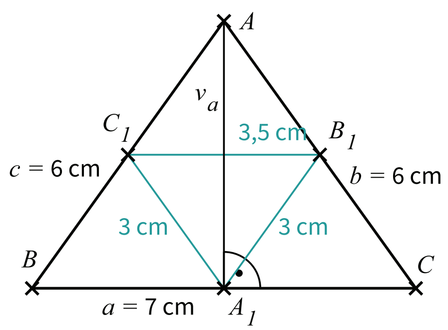
Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.
$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$
Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}79795\ldots$ cm
Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi
$9{,}798 : 4 \doteq 2{,}44948\ldots : 1$
Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$.

C)

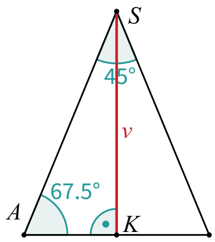
11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný.
Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$
Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.
$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$
$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm
Dosadíme do vzorce: $S = \frac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057\ \text{cm}^2$
$S \doteq 17\ \text{cm}^2$ A)

12 12.1
Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost 360° : 8 = 45°, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

12.2
Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$$\frac{v}{|AK|} = tg\,67{,}5°$$

$v = 2{,}5\,\text{m} \cdot tg\,67{,}5° = 6{,}036\,\text{m}$

Obsah trojúhelníku $S = \dfrac{a \cdot v}{2} = \dfrac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09\,\text{m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy 3 . 15,09 m² = 45,27 m² ≐ 45 m²

13 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \dfrac{(a+c)\cdot v}{2}$. Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$2S = (a+c)\cdot v \quad / : v$

$\dfrac{2S}{v} = a + c \quad / - c$

$\dfrac{2S}{v} - c = a$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm.

E)

14 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

$S = a \cdot v;\ S = \dfrac{e \cdot f}{2}$

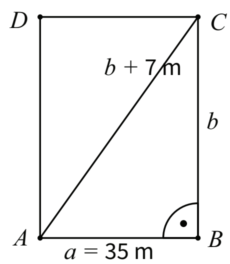
Platí tedy $a \cdot v = \dfrac{e \cdot f}{2}$. Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$a = \dfrac{e \cdot f}{2v}$

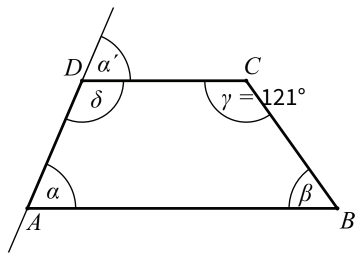
$a \doteq 11$ cm

A)

15 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.
Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.
Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.
Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84\ \text{m}^2$.
$S = 2\,940\ \text{m}^2$



16 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α' (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α', proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.
Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.



Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\dfrac{2}{3}\delta$:

$\dfrac{2}{3}\delta + \delta = 180°$
$\delta = 108°$
$\alpha = 72°$
Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy 72° − 59° = 13°.

17 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem (400 – 2 x 80) m = 240 m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce o = 240 m.

$o = 2\pi r$

$r = \frac{o}{2\pi}$

$r = 38{,}197 \text{ m} \doteq 38 \text{ m}$

18 18.1
Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$S = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$

$S = \pi \cdot (11^2 - 8^2)$

$S = 57\pi$

E)

18.2
Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\pi$

C)

18.3
Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu r_1 = 15, poloměr většího kruhu r_2 = (15 + 10) = 25.

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi$

D)

19 Délku oběžné dráhy vypočítáme jako délku kružnice s poloměrem 384 400 km: $o = 2\pi r$ = 2 415 256 km.
Tuto dráhu vykoná Měsíc za 27,3 dne. Za jeden den tedy urazí dráhu 27,3x kratší.
s = 88 471 km ≐ 88 000 km

E)

20 20.1 F
20.2 C
20.3 A
20.4 D

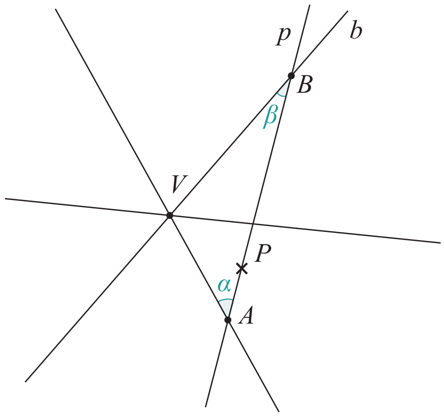
20.1 *Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu S[1; 1] o 90° v záporném smyslu, již to vychází.*

20.2 *Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.*

20.3 *Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.*

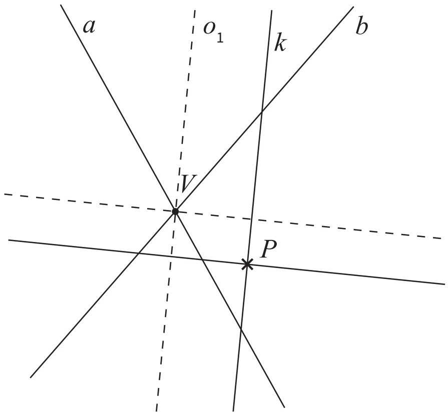
20.4 *Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor u = (–2; 1).*

21 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.

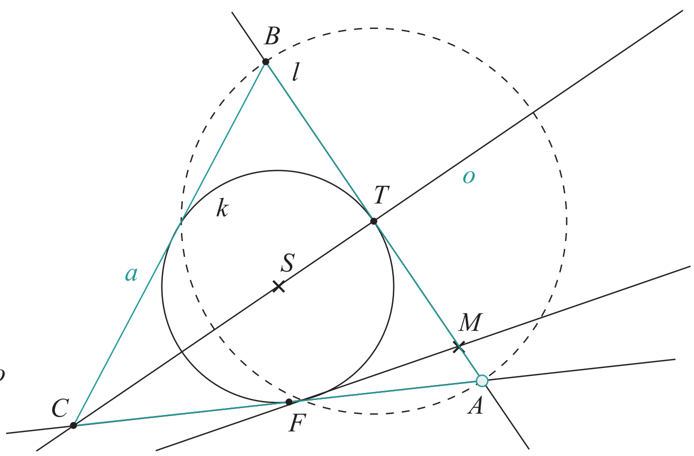


Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

22 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A a (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



ŘEŠENÍ – STEREOMETRIE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 A

2 Přibližně 2,06 cm od podstavy.

3 A

4 $v \doteq 14{,}2$ cm

5 492,4 cm^3

6 O $(3x^2 + 18)$ cm^2

7 216°

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle. Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je
$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je
$S' = 6 \cdot (0,75a)^2 = 6 \cdot 0,75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}5625$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25% původního povrchu.

Změní – li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch **o 43,75 %**.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}5625 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch …? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je $100\ \% - 56{,}25\ \% = 43{,}75\ \%$.

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$.

S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu sin 390° $= \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$, $V = 18 \cdot 24 \cdot 8 = 3456$ cm^2 .

E) jiná možnost

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268,1$ cm^3.

Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268,1$ cm$^3 = 804,25$ cm^3

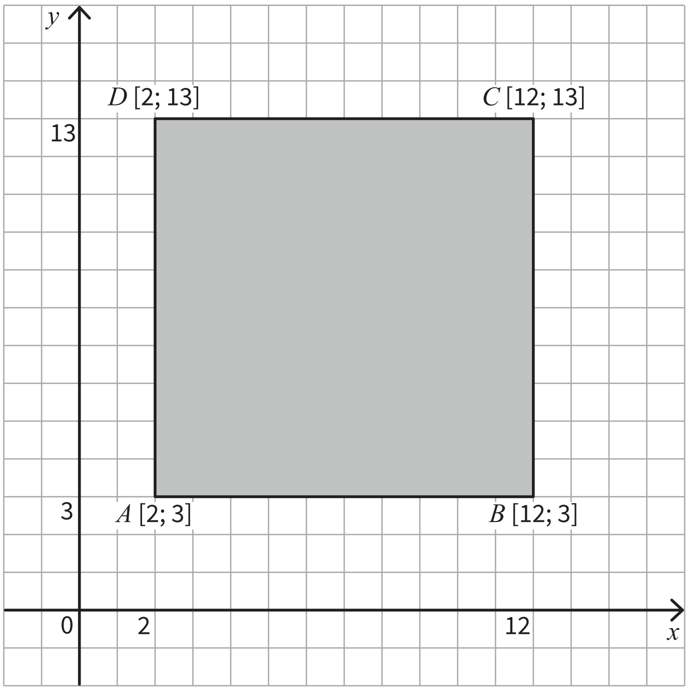
a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804,25$ cm^3, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule

$S = 4\pi \cdot R^2 =$ **418 cm²**.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ j^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13\ j$. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

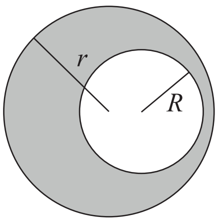
Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3} a^2 v =$ **433,3 j³**.

5 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavy válečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě:

Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.

Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.



Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ ... 35%
$\pi \cdot r^2$ ... 100%

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28 \text{ cm.}$$

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

$$S = 2 \cdot (\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$$

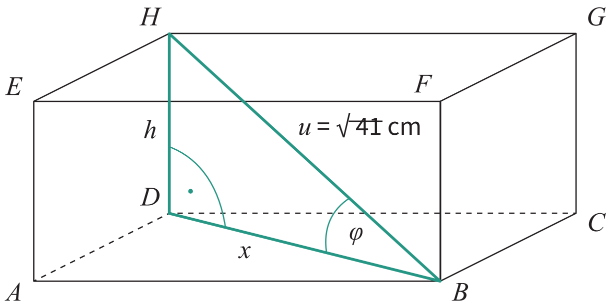
$$S = 2\pi\,(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v)$$

$\boldsymbol{S \doteq 8080\ \text{cm}^2}$

6 6.1

Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin\varphi = \frac{h}{u} \quad \Rightarrow \quad h = u \cdot \sin 28° \doteq$ **3 cm**



K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.

6.2

Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos\varphi = \frac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad x = u \cdot \cos 28° \doteq 5{,}65$ cm

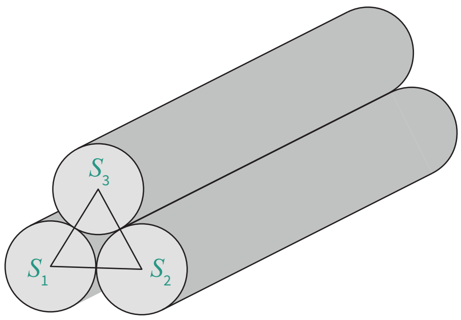
Navíc podstava je čtverec:

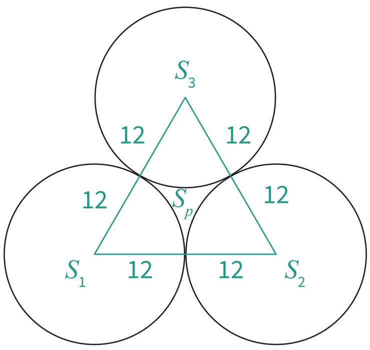
$x = \sqrt{2} \cdot |AB| \quad \Rightarrow \quad |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

Povrch celého kvádru je:

$S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq$ **80 cm²**

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný:





Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru.
K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů.
Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \doteq 249{,}4 \text{ cm}^2$

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226{,}1 \text{ cm}^2$ *(při použití 3,14 místo π)*

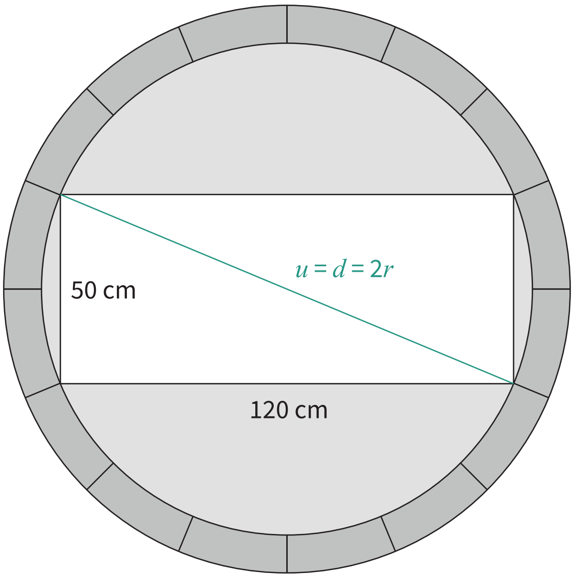
Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$S_p - S_1 = 23{,}3 \text{ cm}^2$

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu v = 300 cm:

$V = S_p \cdot v = 6990 \text{ cm}^3 \doteq$ **7 dm³**

8



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz. obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce", což odpovídá 74 % hloubky studně.

$u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ m}$
$r = 0{,}65 \text{ m}$

$60 \text{ hl} = 6000 \text{ l} = 6000 \text{ dm}^3 = 6 \text{m}^3$
$0{,}74 \cdot V = 6$
$V \doteq 8{,}1 \text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$
$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$
$\boldsymbol{v \doteq 6{,}1 \text{ m}}$ **A)**

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729 \text{ cm}^2 = 12\pi \text{ cm}^2$.

Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.

Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:

$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.

Pro délku hrany krychle platí: $a = \frac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.

Objem krychle je potom: $V = a^3 =$ **8 cm³**.

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.

V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm,

poloměr horní podstavy je $r_2 = 12$ cm

a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.

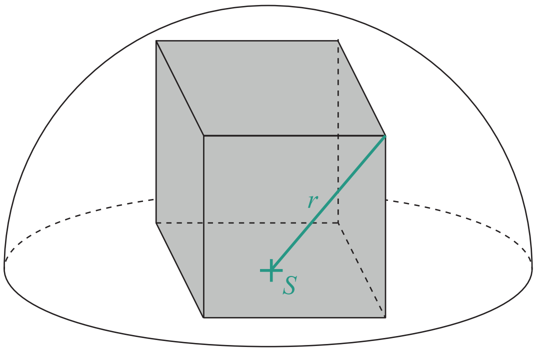
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$.

Objem kyblíku je tedy: $V = 7671{,}77 \text{ cm}^3$,

tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7671{,}77 \text{ cm}^3 = 92061 \text{ cm}^3 \doteq$ **92 litrů**.

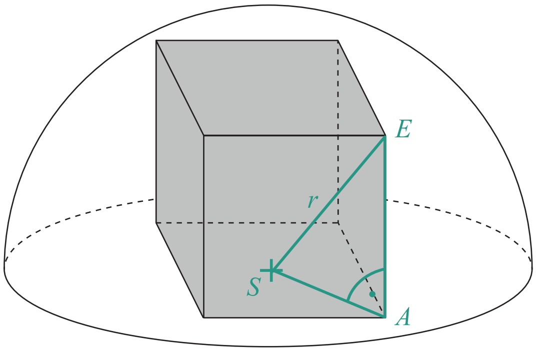
11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle.

Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAE:

$r^2 = 8^2 + (\sqrt{32})^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{96}\ \text{cm} = 4 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}$

Pro délku vnitřního průměru misky platí: $\boldsymbol{d = 8 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}}$

12 12.1

A N

$S_{koule} = S_{krychle}$

$4\pi r^2 = 6a^2$

$r^2 = \frac{3a^2}{2\pi}$

$r = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$

$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq \mathbf{1{,}38}\boldsymbol{a^3}$

$V_{krychle} = a^3$

$\boldsymbol{V_{krychle} < V_{koule}}$

12.1) V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2) Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3) Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

12.2

$3 \cdot 10^8\ \text{cm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = 3 \cdot 10^5\ \text{dm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 =$
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{l} = 43\,000\ \text{hl}$

12.3

V = 1,5 l

$\frac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\ \text{l} = 900\ \text{ml}$

ANALYTICKÁ GEOMETRIE – ŘEŠENÍ

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $A = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$

2 $D[-8; 1]$

3 $o: x + 2y - 6 = 0$

4 $c = \pm 5\sqrt{2}$

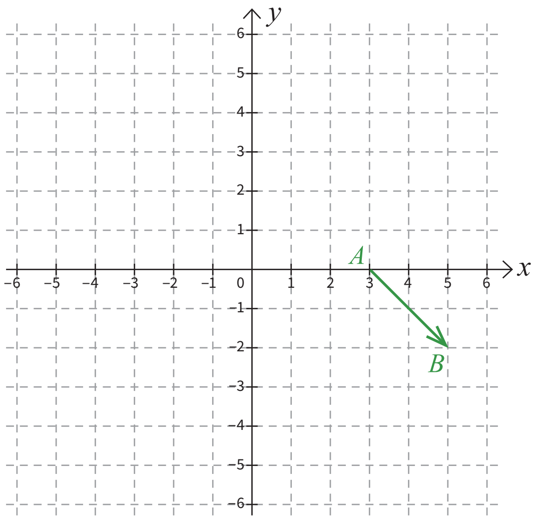
5 Přímky jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod.

6 $\alpha \doteq 36°52'$

7 $m: y + 3 = 0$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $A[3; 0]$, $B[5; -2]$



Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

C) $\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru (3; −4). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

2 2.1

Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé. — A ◯ N ●

2.2

Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k- násobkem jeden druhého. — A ◯ N ●

2.3

Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p. — A ● N ◯

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \Rightarrow q: 3x - y + c = 0$

$B \in q: 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -15$

$q: 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \Rightarrow r: x + 3y + c = 0$

$A \in r: 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$r: x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky p zapíše normálový nebo směrový vektor přímky r a rovnici přímky r. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce p.

5 $\vec{n}_{o_{AB}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \Rightarrow o_{AB}: 4x + 4y + c = 0 \qquad /:4$

$$x + y + c = 0$$

$S_{AB}[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}: 1\cdot 3 + 1\cdot(-2) + c = 0$

$$3 - 2 + c = 0$$

$$c = -1$$

$o_{AB}: x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu S úsečky AB napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce AB procházející bodem S.

6 6.1

$\vec{u}_p = (1; -1) \Rightarrow \vec{n}_p = (1; 1)$ F)

6.2

$\vec{u}_q = (1; 0) \Rightarrow \vec{n}_q = (0; -1)$ resp. $\vec{n}_q = (0; 1)$ B)

6.3

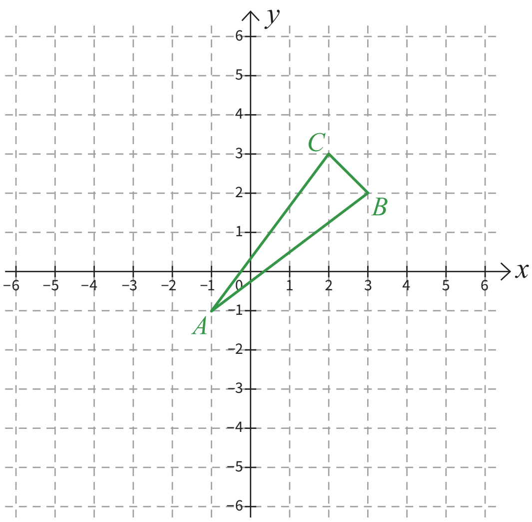
$\vec{u}_r = (1; 1) \Rightarrow \vec{n}_r = (1; -1)$ E)

6.4

$\vec{u}_s = (0; 1) \Rightarrow \vec{n}_s = (-1; 0)$ resp. $\vec{n}_s = (1; 0)$ A)

Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky q a s, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

7



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

8 $a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

9 $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{4\cdot3+3\cdot4}{5\cdot5} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

10 $\overrightarrow{AC} = (1;7) = \vec{s}_{AC}$

$\vec{n}_{AC} = (7;-1)$

$\leftrightarrow AC\colon\ 7\cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC\colon\ 7\cdot1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

$\overrightarrow{BD} = (-7;1) = \vec{s}_{BD}$

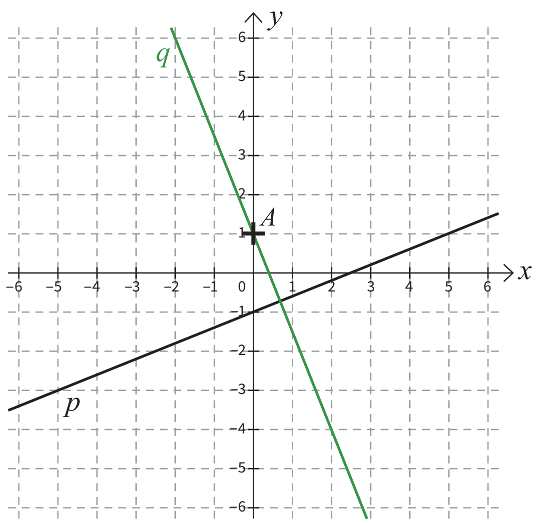
$\vec{n}_{BD} = (1;7)$

vyhovuje úhlopříčka AC

D) $7x - y - 5 = 0$

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku AC, nebo BD. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

11



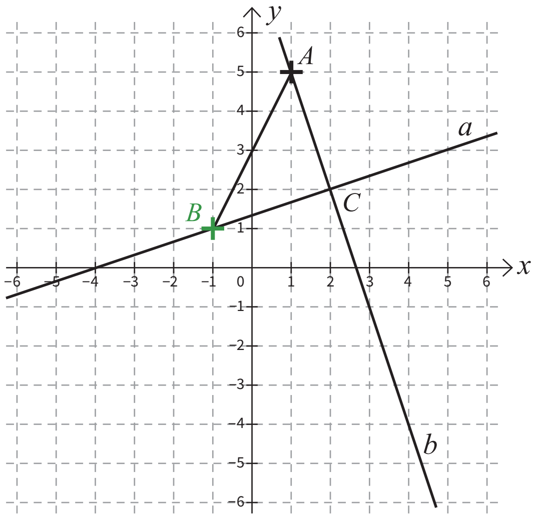
$\vec{u}_p = (5;2) = \vec{n}_q \Rightarrow q\colon 5x + 2y + c = 0$

$A \in q\colon 5\cdot0 + 2\cdot1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$q\colon 5x + 2y - 2 = 0$

Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

12



Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu B lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě C, poloměr CA je přenesen na přímku a. Z obrázku žák určí souřadnice bodu B. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky AB.

$B = [-1; 1] \Rightarrow \vec{BA} = \vec{u_c} = (2; 4)$

$\vec{n_c} = (4; -2) \Rightarrow c: 4x - 2y + c = 0 \quad /:2$

$A \in c: 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$c: 2x - y + 3 = 0$

13 13.1
vektor $\vec{BA} = (2; 1)$ — A ○ N ●

13.2
vektor $\vec{AB} = (-2; -1)$ — A ○ N ●

13.3
vektor $\vec{AB} = (-2; -1) \Rightarrow 3 \cdot AB = (-6; -3)$ — A ● N ○

Žák může chybně počítat v úloze 14.1 se souřadnicemi vektoru $\vec{AB}$ a ne vektoru $\vec{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\vec{AB}$ a $\vec{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy 14.2 a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy 14.1 V úloze 14.3 se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\vec{AB}$.

14 $B[0; 0], D[-3; 3], \Rightarrow \vec{BD} = (-3; 3)$

u_{BD}: $x = -3t$ resp. $x = t$

$y = 3t;\ t \in \mathbb{R}$ $\quad y = -t;\ t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů B a D. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\vec{AC}$ a z normálového vektoru $\vec{AC}$ vypočítat směrový vektor.

15 $\vec{n_o} = \vec{AB} = (2; -4) \Rightarrow o: 2x - 4y + c = 0 \qquad /:2$

$S_{AB}[2; 0] \in o: 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$o: x - 2y - 2 = 0$

$P_x[x; 0] \Rightarrow P_x = S_{AB}[2; 0]$

$P_y[0; y]: 0 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_y[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou x a y jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

16 $\vec{n_p} = (2; -3) \Rightarrow \vec{u_p} = (3; 2)$

$\vec{u_q} = (2; -3) \Rightarrow \vec{n_q} = (3; 2)$

$\vec{n_p} = \vec{u_q} = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky p a parametrické rovnice přímky q žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

17 15.1
$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ F)

15.2
$\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$ C)

15.3
$\left|\vec{CD}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ A)

15.4
$\left|\vec{DA}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 Body A a B jsou osově souměrné podle osy $o \Rightarrow B[4; 3]$

$\vec{u_o} = \vec{n_{AB}} = (2; -3) \Rightarrow \leftrightarrow AB: 2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB: 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$

$\leftrightarrow AB: 2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

19 $\vec{BC} = (4; 0)$

$a: \left|\vec{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\vec{BC}$, resp. $\vec{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a –2.
Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A[3; 0]$ a koncovým bodem $B[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

ŘEŠENÍ – KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 200 čísel

2 6 týmů

3 $-2p^2 + 13p - 36$
Podmínky: $p \in \mathbb{N}, p \geq 8$

4 $P = \frac{1}{32}$

5 697 680 způsobů
$P = \frac{1}{45}$

6 16 bodů

7 8 dětí

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1. způsob –** s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**

Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=$

pro rozpis faktoriálu $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots\ldots \cdot 2\cdot 1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!}-\cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}}+\cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}+\frac{8!}{5!\cdot 3!}-\cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}+\cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1}=\binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2}=\binom{8}{6}$

$\binom{n}{0}=1$ proto platí: $\binom{8}{0}=1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\cancel{\binom{8}{1}}+\cancel{\binom{8}{2}}+\binom{8}{5}-\cancel{\binom{8}{6}}+\cancel{\binom{8}{7}}}{5!-3!}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

*U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály. Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**. Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.*

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)!}{(x-1)!}-2\cdot\frac{x!}{(x-2)!}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!}-\frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!}=$

$=(x+3)!\cdot(x+2)+(x+1)\cdot x-2x(x-1)=x^2+2x+3x+6+x^2+x-2x^2+2x=8x+6$

A) $8x+6$
B) $6x+6$
C) x^2+6
D) $20x-12$
E) $4x-7$

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou x. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$ A ■ N □

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$ A ■ N □

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \dfrac{20!}{17! \cdot (20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \dfrac{20!}{3! \cdot (20-3)!}$

proto rovnost platí: $1140 = 1140$

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$ A ■ N □

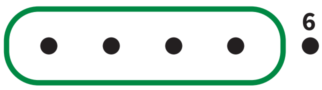
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$ A □ N ■

platí: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 = 22$

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi.
Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

4 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o **variace bez opakování**, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:



zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

$V(4,8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$
K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

A) 70
B) 6720
C) 126
D) 1680
E) 40

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici.
Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

5 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu.

Jedná se tedy o **kombinace bez opakování**.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2,6)\cdot K(1,6)=\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{1}=15\cdot 6=90$$

A) 315
B) 90
C) 36
D) 21
E) 220

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být jiný počet mužů a žen.

6 Jedná se o **kombinace bez opakování**.

6.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$$K(3,7)=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=35$$

6.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$$K(3,6)+K(3,9)=\binom{6}{3}+\binom{9}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}+\frac{9!}{3!\cdot 6!}=104$$

6.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$$K(3,9)+K(3,5)=\binom{9}{3}+\binom{5}{3}=\frac{9!}{3!\cdot 6!}+\frac{5!}{3!\cdot 2!}=94$$

A) 35
B) 104
C) 94
D) 840
E) 1680

6.1 **A**
6.2 **B**
6.3 **C**

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce.
Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích.
Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

7.1 Padne součet 5. — A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Padne součet 7. — A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 **Nepadne** součet 6. — A □ N ■

Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti **opačného jevu C'**. Platí $P(C) = 1 - P(C')$.

Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 5$.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Padne součet 5 nebo 6 . — A ■ N □

Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz. výše), pro součet 6 je $m = 5$ (viz. výše).

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

8 8.1 Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \%$$

8.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí. Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \%$$

8.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka. Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \%$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

A) 19 %
B) 36 %
C) 50 %
D) 57 %
E) 68 %

8.1	**D**
8.2	**A**
8.3	**C**

9 9.1 Závod dokončí Mercedes i Red Bull.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.
Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou **nezávislých jevů**,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 =$ 0,86, proto 86 %

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

9.2 Ferrari **nedokončí** závod.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.
Pravděpodobnost, že Ferrari **nedokončí** závod, vypočítáme jako pravděpodobnost **jevu opačného**:

$P(B) = 1 - 0{,}81 =$ 0,19, proto 19 %

9.3 Závod **nedokončí** ani McLaren, ani Renault.

Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. ⇒ že **nedokončí** závod je 0,24.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. ⇒ že **nedokončí** závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 =$ 0,06, proto 6 %

9.4 Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86 a tudíž že ho **nedokončí** je 0,14. Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India:

$P(D) = 0{,}86 \cdot 0{,}14 =$ 0,12, a to je 12 %

A)	75 %	9.1	C
B)	6 %	9.2	E
C)	86 %	9.3	B
D)	92 %	9.4	F
E)	19 %		
F)	12 %		

10 Víme, že **průměr** dosažených bodů je **78** (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.
Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.
Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmu:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{14} = 78 \qquad / \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1092$$

$$3x = 165 \qquad / : 3$$

$$x = 55$$

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

11 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky.

Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno.
Pro medián platí, že soubor hodnot **musí být uspořádaný podle velikosti!**

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$),
tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\tilde{X} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

Správné hodnoty jsou tedy:

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

Proto je správná **varianta D**.

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu.
Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti.
Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu.
Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

12 **12.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen.
To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:

$V'(6,8) = 8^6 = 262144$

12.2 $6! = 720$

ŘEŠENÍ – TEST 1

1 Vyjádříme všechna čísla jako zlomky se jmenovatelem 42, protože 42 je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 6, 7.

$-\frac{17}{6} = -\frac{119}{42}, -\frac{7}{3} = -\frac{98}{42}, \frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$

Do intervalu $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{105}{42}; \frac{28}{42}\right)$ tedy patří čísla $-\frac{98}{42} = -\frac{7}{3}$ a $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

$-\frac{7}{3} + \frac{2}{7} = -\frac{98}{42} + \frac{12}{42} = -\frac{86}{42} = -\frac{43}{21}$

Není vhodné převádět zlomky na desetinná čísla.
$-\frac{43}{21}$ případně lze vyjádřit jako smíšené číslo $-2\frac{1}{21}$.

2 Přímý úhel má velikost 180° nebo π radiánů. Tento vztah využijeme k vyjádření úhlu $\frac{7}{10}\pi$ radiánů ve stupňové míře.

$\frac{7}{10}\pi \text{ rad} = \frac{7}{10} \cdot 180° = 126°$

$\alpha = 180° - 126° = 54°$

$\alpha = 54°$

Druhá možnost řešení:
Vypočítáme nejprve velikost úhlu α v obloukové míře:
$\alpha = \left(\pi - \frac{7}{10}\pi\right) \text{ rad} = \frac{3}{10}\pi \text{ rad}$
a výsledek převedeme na stupňovou míru: $\alpha = \frac{3}{10}\pi \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$.

3 **Dosazovací metodou** (využijeme toho, že v druhé rovnici je vyjádřena neznámá y, dosadíme za y do první rovnice, vyřešíme rovnici s jednou neznámou x):

$x = 2\,(2x + 7) + 4$

$x = 4x + 14 + 4$

$-3x = 18$

$x = -6$

Dosadíme do rovnice $y = 2x + 7$ hodnotu x a vypočítáme y: $y = 2 \cdot (-6) + 7 = -5$

$K = \{[-6; -5]\}$

Použili jsme jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, proto provádět zkoušku není nutné.
Bylo možné využít x vyjádřené z první rovnice pro dosazení do druhé rovnice:
$y = 2\,(2y + 4) + 7$, pak $y = -5$ a dopočítáme $x = -6$.
Je možné použít též ***sčítací metodu*** *(uspořádáme umístění neznámých v obou rovnicích, druhou rovnici vynásobíme dvěma a obě rovnice sečteme, vyřešíme rovnici s jedinou neznámou x):*

$$x - 2y = 4$$
$$-2x + y = 7$$
$$-3x = 18$$
$$x = -6$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme $y = -5$.

4 Funkce $y = \cos x$ nabývá hodnoty -1 pro všechna $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

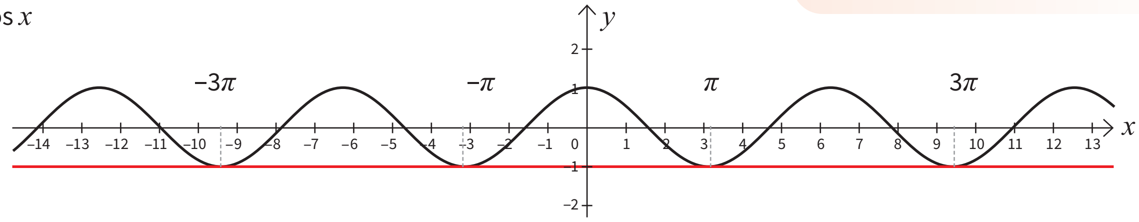
Použijeme substituci $x = \frac{\pi}{3} + t$; řešíme tedy rovnici $\frac{\pi}{3} + t = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z této rovnice vyjádříme $t = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hledáme řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi)$: pro $k = 0$ je $t = \frac{2\pi}{3}$ a pro žádné jiné celé číslo k nepatří t do intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

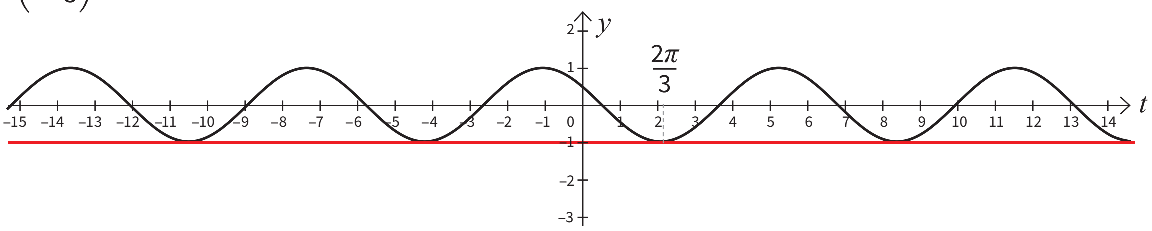
$t = \frac{2\pi}{3}$

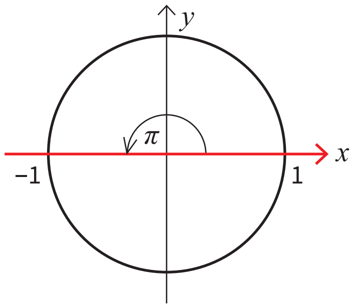
Lze ilustrovat na grafu funkce, případně na jednotkové kružnici.

$y = \cos x$



$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$



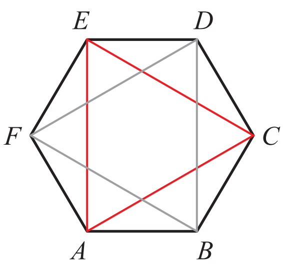


5 Pravděpodobnost náhodného jevu počítáme jako poměr počtu výsledků pokusu jevu příznivých m a počtu všech možných výsledků pokusu n. Náhodným pokusem se v tomto případě rozumí výběr tří vrcholů ze šesti vrcholů šestiúhelníku.

$n = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

Nezáleží na pořadí výběru vrcholů trojúhelníku.

Rovnostranný trojúhelník lze sestrojit právě dvěma způsoby (červený trojúhelník ACE a modrý trojúhelník FBD), $m = 2$.



Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

6 $\frac{1}{2} - 3x \geq -2 + x$

Od obou stran nerovnice odečteme x a $\frac{1}{2}$

$-4x \geq -2 - \frac{1}{2}$

$-4x \geq -\frac{5}{2}$

Obě strany nerovnice dělíme číslem −4

$x \leq x : (-4)$

$x \leq \frac{5}{8}$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší nebo rovna $\frac{5}{8}$,

tedy všechna čísla z intervalu $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Při dělení záporným číslem se obrací znak nerovnosti.

*Mohli bychom postupovat i takto: K oběma stranám nerovnice přičteme výraz $3x + 2$, dostaneme nerovnici $\frac{1}{2} + 2 \geq x + 3x$, tedy $\frac{5}{2} \geq 4x$. Dělíme obě strany rovnice kladným číslem 4 (bez obracení znaku nerovnosti) a dostaneme $\frac{5}{8} \geq x$. Je nutno dát pozor na správné přečtení této nerovnosti – vyjadřuje pořád skutečnost, že x je **menší nebo rovno** $\frac{5}{8}$, tedy $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.*

7 Mezi množstvím těsta a počtem rohlíčků je přímá úměrnost, tedy Katka bude potřebovat $240 \cdot \frac{90}{60}$ g těsta.
360 rozdělíme v poměru 4:2:5:5, na máslo připadá 90 g.

Katka bude potřebovat 90 g másla.

Dělení hmotnosti 360 g v daném poměru: $4 + 2 + 5 + 5 = 16$, $\frac{360}{16} \cdot 4\ \text{g} = 90\ \text{g}$.

Jiná možnost:
Určíme nejdříve hmotnost másla při pečení 60 rohlíčků: $\frac{240}{16} \cdot 4\ \text{g} = 60\ \text{g}$. Proto pro 90 rohlíčků bude třeba 90 g másla.

8 V geometrické posloupnosti je podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů rovný kvocientu posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Tedy $\frac{a_2}{a_1} = q$ a také $\frac{a_3}{a_2} = q$, proto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Dosadíme $\left(a_1 = 2\sqrt{2},\ a_2 = 4,\ a_3 = m\right)$:

$$\frac{m}{4} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

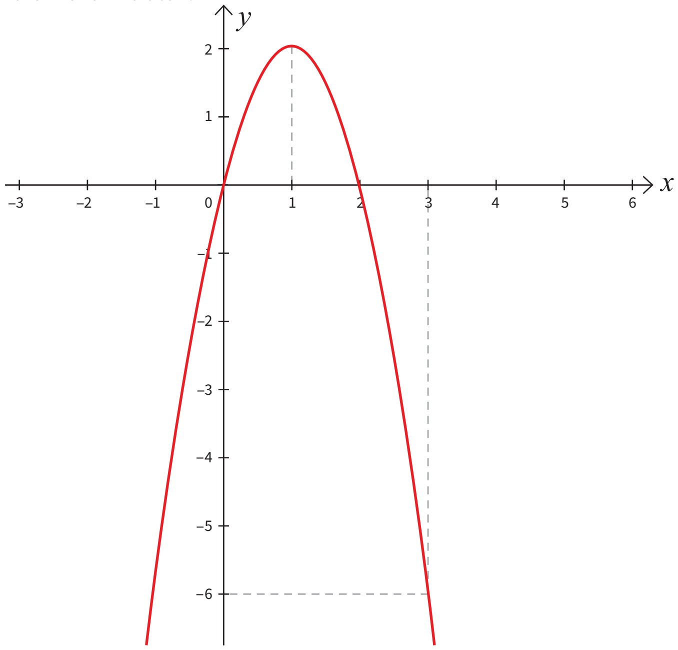
$$\frac{m}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$m = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$m = 4\sqrt{2}$$

Také jsme mohli z prvních dvou členů určit kvocient $q = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pak $\frac{m}{4} = \sqrt{2}$; $m = 4\sqrt{2}$.

9 Grafem každé kvadratické funkce je parabola. Protože funkce f nabývá maxima, bude jejím grafem parabola „otevřená směrem dolů“.



Ze souměrnosti paraboly podle její osy vyplývá, že $f(3) = f(-1)$. Úlohu pak lze řešit pomocí soustavy rovnic:
$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$
$f(3) = -6 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -6$
$f(-1) = -6 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$
(Dostaneme $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$)

Ze souměrnosti by bylo možné použít také vztah $f(2) = f(0)$.

Graf hledané funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy, proto $f(0) = 0$, a tedy $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, tedy $c = 0$.

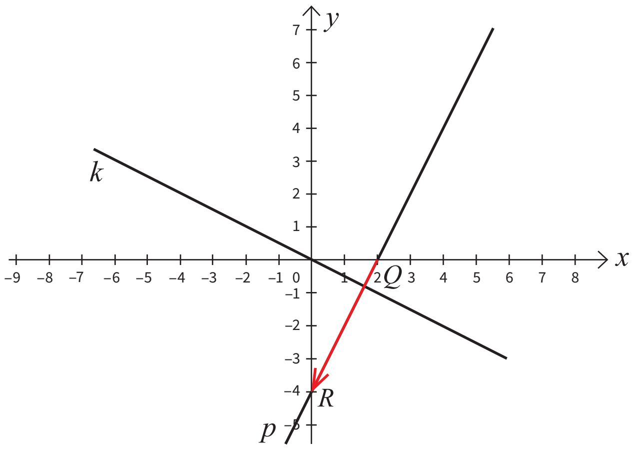
Kvadratická funkce nabývá svého maxima pro $x = -\dfrac{b}{2a}$, proto $-\dfrac{b}{2a} = 1$ … označíme (1).

Pro $x = 3$ nabývá hledaná funkce hodnotu −6, proto $-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ … označíme (2).

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme $a = -2$ a $b = 4$.

$a = -2$, $b = 4$, $c = 0$

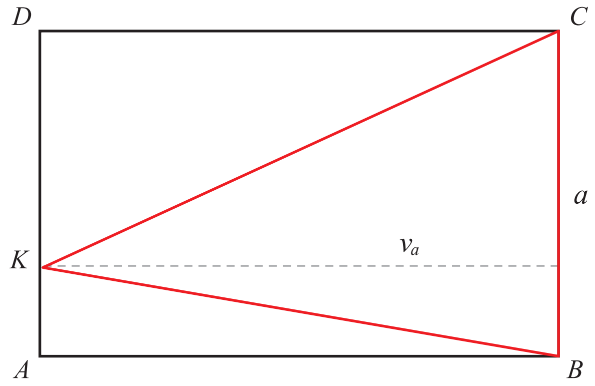
10 Hledáme obecnou rovnici přímky k ve tvaru k: $ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b v této rovnici jsou souřadnice normálového vektoru přímky k $\left(\vec{n}_k = (a; b)\right)$. Přímka k má být kolmá k přímce p, proto jejím normálovým vektorem je vektor $\vec{n}_k = R - Q$ (nebo jeho libovolný nenulový násobek).
Souřadnice vektoru $\vec{n}_k$ určíme jako rozdíl souřadnic bodů R a Q: $\vec{n}_k = R - Q = (-2; -4)$.



***Řešení užitím úsekového tvaru rovnice přímky** p. Využijeme toho, že přímka p je určena svými průsečíky se souřadnicovými osami: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 1$, případně rovnici převedeme na směrnicový tvar $y = 2x - 4$. Vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek je $a' = -\dfrac{1}{a}$.*
Přímka k bude mít směrnici $-\dfrac{1}{2}$ a směrnicovou rovnici $y = -\dfrac{1}{2}x$. Po úpravě získáme obecnou rovnici $x + 2y = 0$.

Ze souřadnic směrového vektoru přímky p získáme $a = -2$ a $b = -4$, obecnou rovnici přímky k můžeme zapsat ve tvaru k: $-2x - 4y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c, k tomu využijeme údaj, že přímka k prochází počátkem souřadnicové soustavy $P[0; 0]$.
$P[0; 0] \in k \Rightarrow -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$
Získali jsme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $-2x - 4y = 0$, po vydělení −2 máme k: $x + 2y = 0$.

11 Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (v tomto případě $a = |BC|$ a v_a je vzdálenost bodu K od strany BC, tedy $v_a = |AB| = p$). Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku BCK, musíme znát délku strany BC a velikost výšky k této straně. Výpočty budeme provádět v centimetrech.



Všimněte si, že obsah trojúhelníku BCD nezávisí na umístění bodu K na úsečce AD, „posunutím" bodu K po úsečce AD se velikost výšky trojúhelníku BCK na základnu BC nezmění.

Označíme $v_a = |AB| = p$; $a = |BC| = p - 2$.

Jediné, co potřebujeme určit, je číslo p. K tomu využijeme údaj o obvodu obdélníku $ABCD$ a vzorec pro výpočet obvodu obdélníku.

$O = 2\left(|AB| + |BC|\right)$

$O = 2\left(p + (p - 2)\right) = 2(2p - 2) = 4p - 4$

Dosadíme $O = 48$:

$48 = 4p - 4$

Po vyřešení rovnice $p = 13$, potom $v_a = |AB| = 13$, $a = |BC| = p - 2 = 13 - 2 = 11$.

Nyní můžeme vypočítat obsah trojúhelníku BCK: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{11 \cdot 13}{2} = 71{,}5$.

Trojúhelník má obsah 71,5 cm².

12 $\sqrt{9a^4 + 16\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{9a^4 + 16a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

Připomeňte si, že $\sqrt{m^2} = |m|$.
Pro $\sqrt{25a^4}$ bychom měli zapsat $\sqrt{25a^4} = |5a^2|$, ale víme, že $5a^2 \geq 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.
Tedy $|5a^2| = 5a^2$.

13 Označíme počet všech příkladů ve sbírce x. Pomocí proměnné x zapíšeme údaje z textu:

Při řešení slovní úlohy nezapomeňte zapsat, jaký význam má (co označuje) zvolená neznámá, a správně formulovat odpověď na položenou otázku.

Počet příkladů vyřešených do konce února … $\frac{x}{3}$

Počet zbývajících příkladů na konci února … $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

Počet příkladů vyřešených v březnu … $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$

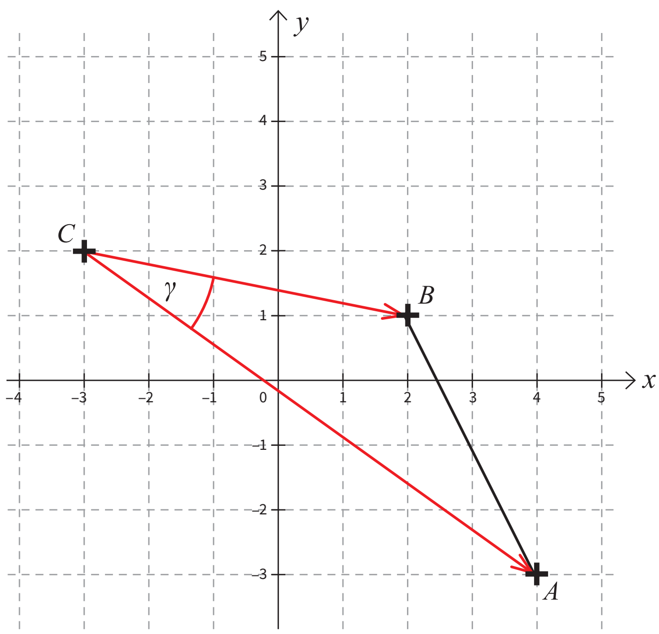
Počet příkladů vyřešených do konce března … $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x$. Na duben a květen tedy zbyla polovina všech příkladů, z ní jednu polovinu (tedy čtvrtinu z celkového počtu příkladů) vyřešila Ema v dubnu.

Sestavíme rovnici: $\frac{x}{4} = 54$, tedy $x = 216$.

Provedeme kontrolu správnosti: (v únoru $\frac{216}{3} = 72$ příkladů, v březnu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 36$ příkladů, v dubnu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 54$ příkladů, v květnu 54 příkladů, $72 + 36 + 54 + 54 = 216$).

Sbírka obsahovala 216 příkladů.

14 Vnitřní úhel u vrcholu C (v obrázku označen γ) je úhel sevřený vektory $\vec{u} = A - C$ a $\vec{v} = B - C$.



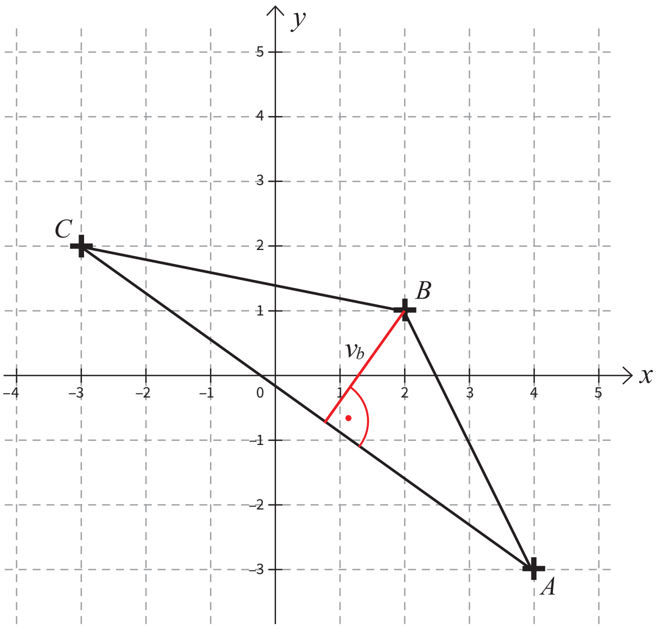
$\vec{u} = (7; -5)$, $\vec{v} = (5; -1)$

Použijeme vzorec pro výpočet úhlu dvou vektorů:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{35 + 5}{\sqrt{49 + 25} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$$

$\gamma = 24°14'$

Velikost výšky v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC.



Při výpočtu $\cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{40}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$ není vhodné poslední hodnotu zapisovat, ponecháme ji v paměti kalkulátoru a rovnou určíme γ. Je-li nutné ji zapsat (a přitom zaokrouhlit), je pro požadovanou přesnost nutné zaokrouhlit alespoň na 4 desetinná místa.

Pozn.: V analytické geometrii obvykle zapisujeme vzdálenosti bez konkrétních jednotek. V této úloze je tedy hledaná vzdálenost rovna 2,1 jednotek – rozumí se jednotky použité souřadnicové soustavy.

Směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{u} = A - C = (7; -5)$, přímka AC má tedy obecnou rovnici $5x + 7y + c = 0$, konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu A (případně C): $5\cdot 4 + 7\cdot(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 1$, tedy $\leftrightarrow AC$: $5x + 7y + 1 = 0$.

Použijeme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu B od přímky:

$$v_b = v\,(B, \leftrightarrow AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5\cdot 2 + 7\cdot 1 + 1|}{\sqrt{5^2+7^2}} = \frac{18}{\sqrt{74}} = \frac{18\sqrt{74}}{74} = \frac{9\sqrt{74}}{37} \doteq 2{,}1$$

Úhel při vrcholu C má velikost 24°14' a výška v_b má velikost přibližně 2,1 (jednotek).

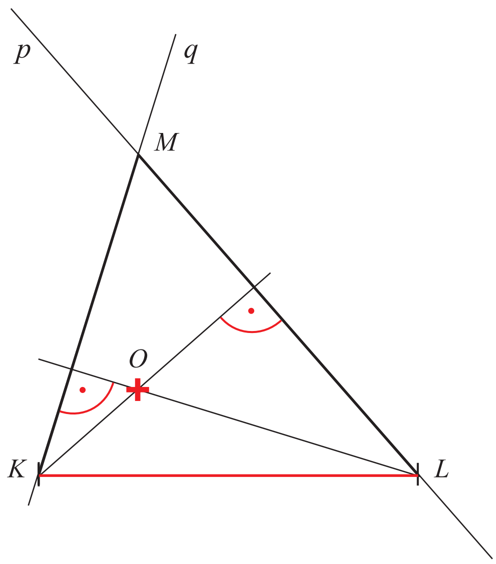
15 Předpokládáme, že existuje požadovaný trojúhelník – načrtneme ho, vyznačíme zadané prvky.

Hledáme bod M:

$M \in p\ (p \perp \leftrightarrow KO \wedge L \in p)$
(čteme: M leží na přímce p, která je kolmá k přímce KO a prochází bodem L)

$M \in q\ (q \perp \leftrightarrow LO \wedge K \in p)$
(čteme: M leží na přímce q, která je kolmá k přímce LO a prochází bodem K)

Tedy $M \in p \cap q$



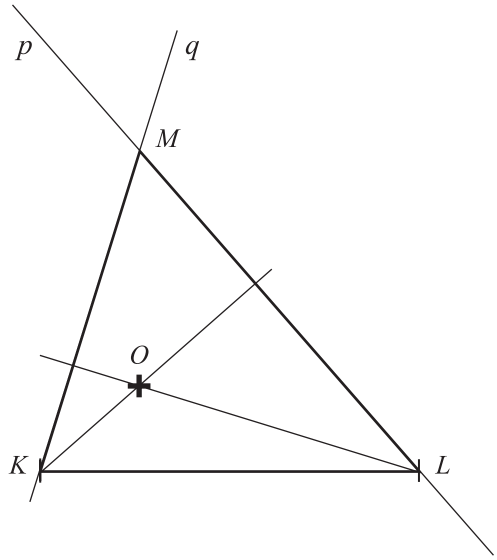
Provedeme konstrukci:

1.) $p; p \perp \overleftrightarrow{KO} \land L \in p$

2.) $q; q \perp \overleftrightarrow{LO} \land K \in p$

3.) $M; M \in p \cap q$

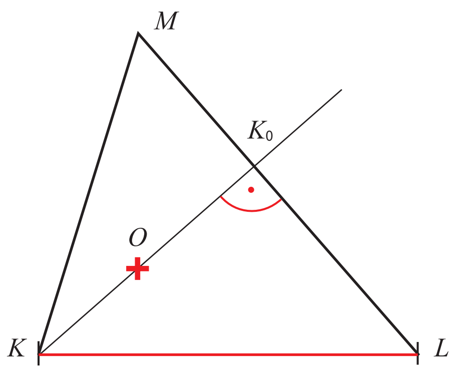
4.) ΔKLM

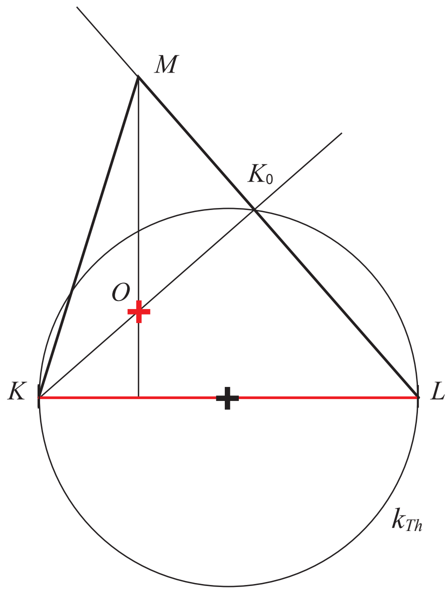


Úloha má v rovině jedno řešení.

Jiný způsob řešení:

Trojúhelník načrtneme, pojmenujeme patu výšky K_0.





Rozbor úlohy:

Neznámé body jsou K_0 a M.

Určíme nejprve bod K_0:

- K_0 je pata výšky z vrcholu K, musí ležet na polopřímce KO … $K_0 \in \overrightarrow{KO}$
- Úhel u K_0 je pravý, bod K_0 musí ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou KL … $K_0 \in k_{Th}(KL)$
- $K_0 \in \overrightarrow{KO} \cap k_{Th}(KL)$

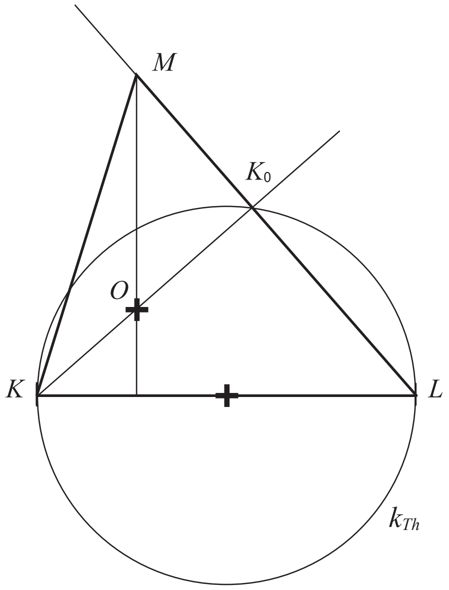
Dále hledáme bod M:

- M leží na kolmici p vedené bodem O k úsečce KL (její částí je výška v_m)
- M leží na polopřímce LK_0
- $M \in \overrightarrow{p} \cap \overrightarrow{LK_0}$

Provedeme konstrukci:

1.) $\rightarrow KO$
2.) $k_{Th}(KL)$
3.) $K_0;\ K_0 \in \rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$
4.) $p;\ O \in p,\ p \perp KL$
5.) $\rightarrow LK_0$
6.) $M;\ M \in p \cap \rightarrow LK_0$
7.) ΔKLM

Úloha má v rovině jedno řešení.



Náčrt provádíme tužkou „od ruky“. Je dobře barevně vyznačit známé prvky. Konstrukci provádíme pečlivě – ořezanou tužkou, použijeme pravítko, kružítko s ořezanou tuhou, případně úhloměr.
Poznámka: V „ostrých“ maturitních testech je nutné v záznamovém archu všechny čáry obtáhnout propisovací tužkou – záznamové archy se pro účely opravování skenují a na naskenovaném obrázku není obyčejná tužka dobře viditelná.

16 Pro dláždění dna bazénu bude potřeba 450 : 30 = 15 dlaždic v jedné řadě (podél delší stěny bazénu).

Stejných takových řad je nutno položit 300 : 30 = 10.

Na vydláždění dna bazénu je potřeba $15 \cdot 10 = 150$ dlaždic.

Pro dláždění kratší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 300 : 30 = 10 dlaždic.

Na vydláždění obou kratších stěn potřebujeme $2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$ dlaždic.

Pro dláždění delší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 450 : 30 = 15 dlaždic.

Na vydláždění obou delších stěn potřebujeme $2 \cdot 4 \cdot 15 = 120$ dlaždic.
Pro celý bazén potřebujeme 150 + 80 + 120 = 350 dlaždic.

Počet balení získáme vydělením celkové spotřeby dlaždic počtem dlaždic v jednom balení 350 : 12 = 29,2, zaokrouhlíme nahoru na 30.

D)

Můžeme řešit i tak, že vypočítáme obsah dna a stěn bazénu v cm² a tento vydělíme obsahem jedné dlaždice.
$S = (450 \cdot 300) + 2 \cdot (300 \cdot 120) + 2 \cdot (450 \cdot 120) = 3\ 15000$
$350 : (30 \cdot 30) = 350$
Při tomto způsobu výpočtu je potřeba dát pozor na to, jestli dlaždice nebude nutné řezat, tedy jestli všechny rozměry dlážděných obdélníků jsou celočíselnými násobky délky strany čtvercové dlaždice.

17 Předpis A zadává lineární funkci, jejím grafem je přímka – možnost A vyloučíme.

Předpis B zadává kvadratickou funkci, jejím grafem je parabola – možnost B vyloučíme.

Předpis C zadává exponenciální funkci, která nikdy nenabývá záporných hodnot, žádná část jejího grafu nemůže ležet pod souřadnicovou osou x – možnost C vyloučíme.

Předpis E zadává lineární lomenou funkci, jejím grafem je hyperbola (se dvěma větvemi), navíc $f(0) = (0+1)^{-1} = 1 \neq 0$, možnost E vyloučíme.

Zbývá možnost D), pro jistotu ještě ověříme:

$f: y = \log_2(x+1)$

je definována pro $x+1>0$, tedy pro $x>-1$, odpovídá funkci na obrázku

$x=0 \Rightarrow y=\log_2 1 = 0$, odpovídá funkci na obrázku

$x=1 \Rightarrow y=\log_2 2 = 1$, odpovídá funkci na obrázku

$x=3 \Rightarrow y=\log_2 4 = 2$, odpovídá funkci na obrázku

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\log_2 \frac{1}{2} = -1$, odpovídá funkci na obrázku

18 Rovnice A) a C) mají záporný diskriminant, nemají žádný reálný kořen. Zbývá otestovat rovnice B) a D). Můžeme to udělat dvěma způsoby:

1.) Dosadíme číslo a do výrazu na levé straně rovnice:

$$L_B(a) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 4 + 4\sqrt{3} \neq 0$$

$$L_D(a) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

2.) Řešíme rovnice B) a D) užitím diskriminantu:

$$D_B = 4 + 8 = 12,\ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \neq a$$

$$D_D = 4 + 8 = 12,\ x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

Vzorec pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$.

Je-li D kladné, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

19 Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy je nutné splnit podmínku

$\frac{x-3}{x} \geq 0$.

Navíc číslo ve jmenovateli zlomku musí být různé od nuly, tedy $x \neq 0$.

Nerovnici $\frac{x-3}{x} \geq 0$ budeme řešit pomocí nulových bodů ($x_{01} = 0$, $x_{02} = 3$)

a tabulky pro znaménka čitatele a jmenovatele.

Definiční oborem funkce je sjednocení intervalů $(-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$.

C)

Jiný způsob řešení nerovnice $\frac{x-3}{x} \geq 0$:
Po stanovení podmínek ($x \neq 0$) můžeme obě strany nerovnice násobit číslem x^2, které je jistě větší než nula, znak nerovnosti se zachová. Získáme nerovnici $(x-3) \cdot x \geq 0$, kterou umíme vyřešit užitím grafu kvadratické funkce $f: y = (x-3) \cdot x$, tedy kvadratické funkce $f: y = x^2 - 3x$.
Víme, že grafem je parabola „otevřená nahoru“ a protínající osu x v bodech 0 a 3, odtud $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle\infty; 0)$, po přihlédnutí k podmínkám $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3\rangle$	$\langle 3; -\infty)$
x	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$\frac{x-3}{x}$	+	−	+

20 Ze vztahu $m = \dfrac{t}{a+b}$ chceme vyjádřit neznámou a.

$m = \dfrac{t}{a+b} \quad /\cdot (a+b)$

$m(a+b) = t$

$ma + mb = t \quad /-mb$

$ma = t - mb \quad /: m$

$a = \dfrac{t-mb}{m}$

Podmínka $a \neq -b$ pro existenci výrazu je splněna automaticky, protože se jedná o kladná čísla a a b, stejně tak podmínka $m \neq 0$.

B)

21 Určíme, kolikrát nejvýše mohl být Mirek v posilovně. Průměrně 6 návštěv na každého z 6 kamarádů znamená, že dohromady vykonali 36 návštěv. Mirkovi z nich by připadl největší počet návštěv tehdy, když počet návštěv všech ostatních kamarádů bude co nejmenší. Protože má každý jiný počet návštěv, budou počty návštěv posilovny pro jednotlivé kamarády vyjádřeny nejmenšími přirozenými čísly: 1; 2; 3; 4; 5. Všichni kromě Mirka společně vykonali alespoň 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 návštěv, Mirek mohl vykonat maximálně 36 − 15 = 21 návštěv a utratit tak maximálně 2 100 Kč.

A)

22 Počty uběhnutých kilometrů v jednotlivých dnech tvoří aritmetickou posloupnost (každý den navyšuje o stejnou vzdálenost), jejíž první člen je $a_1 = 3$ a šestnáctý člen $a_{16} = 6$. Diference je rovna délce jednoho oválu a vypočítáme ji ze vztahu pro n-tý (šestnáctý) člen aritmetické posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $a_{16} = a_1 + 15d$.

Dosadíme: $6 = 3 + 15d$ a vypočítáme diferenci $d = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$ (km).

Potřebujeme sečíst prvních 31 členů této posloupnosti, použijeme vzorec pro součet prvních n členů

$s_n = (a_1 + a_n)\cdot\dfrac{n}{2}$, tedy $s_{31} = (a_1 + a_{31})\cdot\dfrac{31}{2}$. Chybí nám člen a_{31} - vypočítáme ho podle již použitého vzorce pro n-tý člen

$a_{31} = a_1 + 30d = 3 + 30\cdot\dfrac{1}{5} = 9.$

$s_{31} = (3+9)\cdot\dfrac{31}{2} = 186$

Pan Rychlý naběhal během března 186 kilometrů.

E)

23 Upravíme výraz V: $V = \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+3}{2(x+1)} = \dfrac{x+3}{2x+2}$

Čitatel rozložíme užitím Vietových vzorců. Pro kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice $x^2+2x-3=0$ platí $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Snadno uhádneme (a ověříme), že $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, a proto lze trojčlen x^2+2x-3 rozložit na součin $(x+3)(x-1)$.

B)

24 Provedeme konstrukci:

24.1 Žádná mocnina čísla 9 není rovna 0, rovnice I. nemá vůbec žádné řešení. A ○ N ●

24.2 $|x-5|=4 \Rightarrow x-5=4 \vee x-5=-4 \Rightarrow x=9 \vee x=1$. A ○ N ●

Rovnice II. má dvě řešení, ani jedno z nich není záporné.

24.3 $\sqrt{x+6}=2 \Rightarrow x+6=4 \Rightarrow x=-2$. Kořen -2 je nutno ověřit zkouškou: $\sqrt{-2+6}=\sqrt{4}=2$. A ● N ○

Rovnice III. má jeden záporný kořen.

24.4 $5=(x-1)^2-x(x+3) \Rightarrow 5=x^2-2x+1-x^2-3x \Rightarrow 5=-5x+1 \Rightarrow 4=-5x \Rightarrow x=-\frac{4}{5}$. A ● N ○

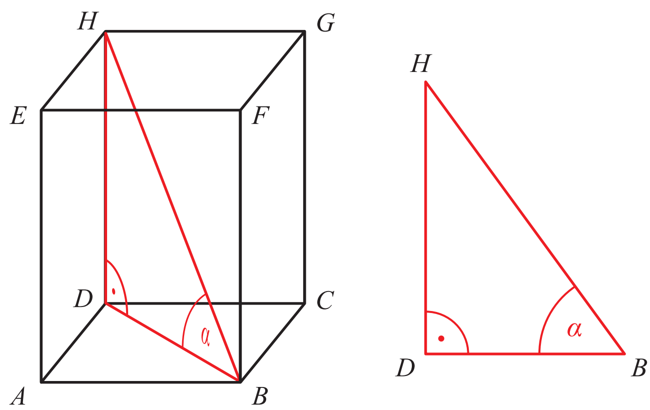
Rovnice IV. má jeden záporný kořen.

25 25.1 Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku BHD (s pravým úhlem při vrcholu D).

Označíme $\alpha = \measuredangle BHD$.

$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

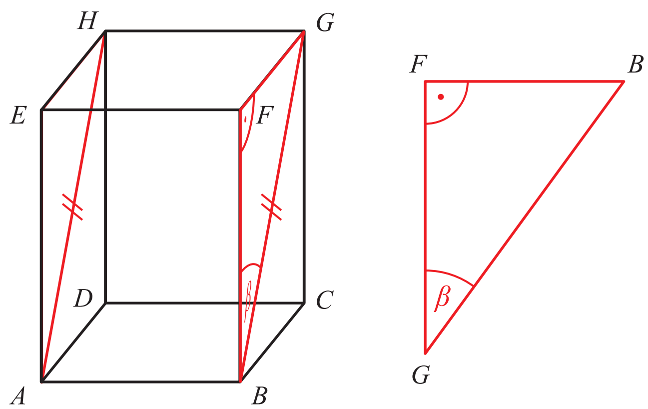
B)



25.2 Odchylka mimoběžek $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow AH$ je rovna velikosti úhlu FBG, protože přímka BF je rovnoběžná s přímkou AH. Označíme $\beta = \measuredangle FBG$ a kosinus vypočteme užitím pravoúhlého trojúhelníku BGF.

$$\cos\beta = \frac{|BF|}{|BG|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

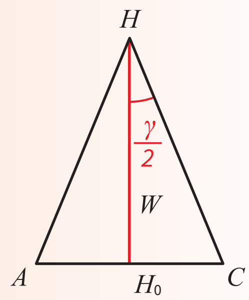
E)



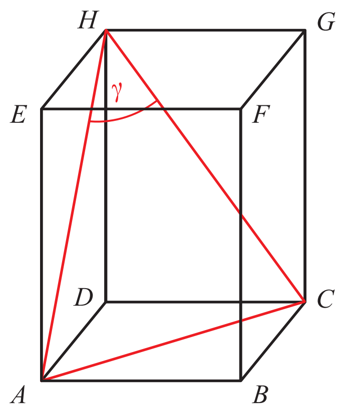
25.3 Velikost úhlu $\gamma = \measuredangle AHC$ bychom počítali z rovnoramenného trojúhelníku *ACH s hlavním vrcholem H*.

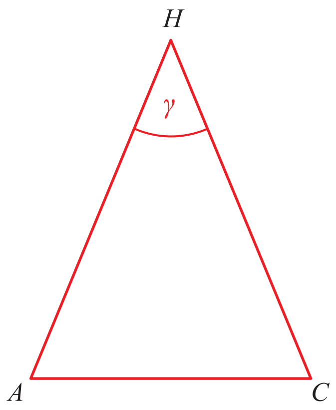
V části 3 je třeba si uvědomit, že trojúhelník ACH ***není pravoúhlý****, nelze proto použít definici kosinu jako poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku.*

V úloze III. bychom samozřejmě mohli rovnoramenný trojúhelník ACH rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, pomocí nichž lze vypočítat velikost úhlu $\frac{\gamma}{2}$.



Tento výpočet je podstatně náročnější a nevede přímo k požadovanému kosinu, proto ho zde nebudeme uvádět.





Protože je požadován kosinus úhlu γ, použijeme kosinovou větu:

$|AC|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2 \cos\gamma$,

po dosazení $8 = 40 - 40 \cdot \cos\gamma$, tedy $\cos\gamma = \frac{4}{5}$

A)

26 26.1 $8a - 2a^3 \geq 0$

$8a - 2a^3 = a(8 - 2a^2) = 2a(4 - a^2) = 2a(2 - a)(2 + a)$

	$(-\infty; -2)$	$\langle -2; 0)$	$\langle 0; 2\rangle$	$(2; \infty)$
$2a$	−	−	+	+
$2 - a$	+	+	+	−
$2 + a$	−	+	+	+
$2a(2 - a)(2 + a)$	+	−	+	−

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$

B)

Výraz rozložíme na součin užitím vzorců, určíme nulové body a posoudíme znaménko výrazu v intervalech mezi nulovými body. Krajní body příslušných intervalů zahrneme do hledané množiny, pokud je v tomto bodě výraz definován.

26.2 $\underbrace{(a^2+1)}_{\text{vždy kladné}} \cdot (a^2+a-2) \geq 0$

$a^2+a-2 \geq 0$

$(a+2)(a-1) \geq 0$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$a+2$	−	+	+
$a-1$	−	−	+
$(a+2)(a-1)$	+	−	+

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

E)

26.3 $-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \geq 0$

$-a^2 - 2a - 2 \geq 0 \qquad /:(-1)$

$a^2 + 2a + 2 \leq 0$

$$\frac{-1}{2a^2 - a - 1} \geq 0$$

$$\frac{-1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \geq 0$$

$$\frac{1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; 1)$	$(1; \infty)$
$a-1$	−	−	+
$a+\frac{1}{2}$	−	+	+
$(a-2)(a+1)$	+	−	+

$a \in (-\frac{1}{2}; 1)$

F)

Připomeňte si vzorce pro rozklad výrazů na součin:
- *$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$*
- *$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$*
- *$A^3 + B^3 = (A-B)(A^2-AB+B^2)$*

Pozor u B: Výraz $1+2a+4a^2$ není druhá mocnina dvojčlenu $\left((1+2a)^2 = 1+4a+4a^2\right)$.

26.4 $\frac{a^2-4}{-1} \geq 0$

$4 - a^2 \geq 0$

$(2-a)(2+a) \geq 0$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2-a$	+	+	−
$2+a$	−	+	+
$(2-a)(2+a)$	−	+	−

$a \in \langle -2; 2\rangle$

C)

ŘEŠENÍ – TEST 2

1 $y = \frac{3}{5}x$

$x - y = 5,6$

$x - \frac{3}{5}x = 5,6$

$\frac{2}{5}x = 5,6$

$x = 5,6 : \frac{2}{5} = 14$

$y = \frac{3}{5} \cdot 14 = \frac{42}{5} = 8,4$

$\mathbf{y = 8,4}$

Zapíšeme údaje z úlohy. Soustavu rovnic vyřešíme dosazovací metodou.

2 $0,2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$

$0,2 \cdot 10^{4x-7} = 200$

$10^{4x-7} = \frac{200}{0,2}$

$10^{4x-7} = 1000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$\mathbf{x = \frac{5}{2}}$

Zk.:

$L\left(\frac{5}{2}\right) = 0,2 \cdot 10^{4 \cdot \frac{5}{2} - 7} - 200 = 0,2 \cdot 10^3 - 200 = 200 - 200 = 0$

$P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$

Lze použít substituci $t = 4x - 7$ a řešit rovnici $0,2 \cdot 10^t - 200 = 0$. Dostaneme $10^t = 1000$, $t = 3$ a po dosazení zpět do rovnice substituce $3 = 4x - 7$, tedy $x = \frac{5}{2}$.

Zkouška v tomto případě není nutnou součástí řešení, žádnou z užitých úprav jsme nemohli ztratit žádný kořen ani získat žádný navíc. Pokud by nám zkouška „nevyšla“, je nutno v řešení hledat (vlastní) chybu.

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0'$

$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

$-k + 28 = 0$

$\mathbf{k = 28}$

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule. Dále počítáme podle definice.

4 $112 \cdot 0,75 = 84$

$84 \cdot \frac{2}{3} = 56$

Vykvetlo **56** červených tulipánů.

Vypočítáme počet všech vykvetlých tulipánů. Z počtu kvetoucích připadají na červené dvě třetiny.

5 $s_8 = (a_1 + a_8) \cdot \frac{8}{2}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_8 = 11 + 28 = 39$

$s_8 = (11 + 39) \cdot 4 = 200$

V hledišti divadla je **200 sedadel**.

Počty sedadel v řadách tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$, její první člen je roven $a_1 = 11$. Počet členů posloupnosti je 8. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti - $a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Neznáme osmý člen a_8, vypočteme ho podle vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n + 1)$ a dosadíme do vzorce pro součet.

6 $m = xy + 2(x + y)k$

$m = xy + 2xk + 2yk$

$m - 2yk = xy + 2xk$

$m - 2yk = x(y + 2k)$

$\mathbf{\frac{m - 2yk}{y + 2k} = x}$

Z daného vzorce chceme vyjádřit veličinu x. Nejprve je nutné roznásobit závorku. Členy, které obsahují požadovanou veličinu, ponecháme na jedné straně rovnice, ostatní „převedeme“ na druhou stranu rovnice. (Odečteme od obou stran rovnice výraz $2yk$.) Vytkneme požadovanou veličinu. Obě strany rovnice vydělíme výrazem v závorce. (Protože se jedná o kladné veličiny, výraz nikdy nebude roven 0, můžeme dělit bez jakýchkoli omezení).

7 $x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}; D \in R \,/\, \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

$\frac{2x - 1}{3x - 1} = \frac{2x}{3x + 1}$

$(2x - 1)(3x + 1) = 2x(3x - 1)$

$6x^2 - 3x + 2x = 6x^2 - 2x$

$\mathbf{x = 1}$

$1 \in D$

$\mathbf{K = \{1\}}$

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem obou jmenovatelů (úprava je ekvivalentní v definičním oboru rovnice). Pokud bychom na začátku podmínky nenapsali a rovnici řešili v R, není jisté, že nenásobíme nulou a na konci bychom museli udělat zkoušku. Vypočítáme $x = 1$. Kořen vyhovuje stanoveným podmínkám, proto může být řešením rovnice. Bez podmínek na začátku by bylo nutné provést zkoušku:

$L(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(1) = P(1) \Rightarrow 1 \in K$

8 $p' = 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 0{,}6375$ (procent)

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}6375}{100}\right)^5 = 25807$$

Banka by vyplatila **25807 Kč**.

Vypočítáme reálnou („čistou“) úrokovou míru p', tedy úrok po odečtení 15% daně. Částka na účtu vzrůstá pravidelně každý rok o stálý počet procent p' – použijeme vzorec pro pravidelný růst veličiny V:

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5$$

9 x ... počet dívek ve třídě 4C

$2x$ ... počet chlapců ve třídě 4C

$x + 2x$ ... počet všech žáků třídy 4C

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{3x}{2}} = 0{,}1$$

$$\frac{x(x-1)}{3x(3x-1)} = 0{,}1$$

$$\frac{x-1}{3(3x-1)} = 0{,}1$$

$x - 1 = 0,3(3x - 1)$

$10x - 10 = 9x - 3$

$x = 7$

Zkontrolujeme správnost úvah a výpočtu podle textu úlohy:

Ve třídě je 7 dívek a 14 chlapců, vypočítáme pravděpodobnost, že v náhodně vybrané dvojici budou jen dívky:

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{21}{210} = 0,1 \text{ (vyhovuje zadání).}$$

Ve třídě je **7 dívek**.

Označíme počet dívek ve třídě proměnnou x, pomocí ní vyjádříme i další údaje.

Vyjádříme pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvojice osob je složená jen z dívek. Jmenovatel zlomku vyjadřuje počet všech způsobů, jak vybrat dvojici osob ze třídy, ve které je x dívek a $2x$ chlapců, celkem $3x$ žáků (tvoříme neuspořádané dvojice z $3x$ žáků, tedy dvojčlenné kombinace z $3x$ prvků), těch je $\binom{3x}{2}$.

V čitateli je počet možností, jak dvojici vytvořit jen z dívek $\binom{x}{2}$.

Vypočítáme kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vyřešíme rovnici.

10 $\sin \alpha = \frac{u}{a} = \frac{7}{11}$

$\alpha = 39°\ 31'$

$o = 2(a + b)$ $(b = |BC| = |AD|)$

$a^2 = u^2 + b^2$

$b^2 = a^2 - u^2 = (121 - 49)\ \text{cm}^2 = 72\ \text{cm}^2$

$b = \sqrt{72}\ \text{cm} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$

$o = 2(11 + 6\sqrt{2})\ \text{cm} \doteq$ **39, 0 cm**

Úhel α má velikost 39° 31´, obvod kosodélníku je 39,0 cm.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme sinus úhlu α. K určení α použijeme kalkulačku (tlačítko většinou označeno $\sin^{-1}$ nebo arcsin podle typu kalkulátoru). K výpočtu obvodu je nutné vypočítat délku strany AD, můžeme využít Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

Pozor na správné zaokrouhlení výsledku 38,97na jedno desetinné místo.

11 $x \neq 2;\ D \in R \,/\, \{2\}$

$$\frac{x}{x-2} \leq 1$$

$$\frac{x}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{2}{x-2} \leq 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

$\boldsymbol{K = (-\infty; 2)}$

Nerovnice má neznámou ve jmenovateli, je nutné zapsat definiční obor nerovnice. Nerovnici převedeme na podílový tvar s nulou na pravé straně nerovnice – od obou stran nerovnice odečteme jedničku, pak výrazy na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel. Čitatel získaného zlomku je kladný - aby zlomek mohl být menší nebo roven nule, musí jmenovatel zlomku být záporný.

***Pozor** – ve snaze zbavit se zlomku <u>není možné</u> v R <u>násobit nerovnici jmenovatelem</u> – nevíme, zda výraz $x - 2$ není záporný.*

12 $$\left(3a - \frac{6a-1}{3a}\right) \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2 - (6a-1)}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$
$$= \frac{9a^2 - 6a + 1}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{(3a-1)^2}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$
$$= \boldsymbol{\frac{3a-1}{3a}}$$

Podmínky: $a \neq 0;\ a \neq \frac{1}{3}$

Závorka určuje prioritu operací – výrazy v závorce převedeme na společný jmenovatel. V čitateli prvního zlomku odstraníme závorku a podle vzorce $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu. Závorkou $(3a - 1)$ zkrátíme a zapíšeme výsledek.
***Pozor** – <u>dále krátit nelze</u>, v čitateli je rozdíl, nikoli součin. Jmenovatel žádného zlomku nesmí být roven nule, tedy $3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ a $3a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{3}$*

13 $|3x - 2| = x + 6$

$3x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$, $3x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

1. pro x z intervalu $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} |3x-2| &= -(3x-2) = -3x + 2 \\ -3x + 2 &= x + 6 \\ -4x &= 4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$-1 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right),\ K_1 = \{-1\}$$

2. V $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$:

$$\begin{aligned} |3x-2| &= 3x - 2 \\ 3x - 2 &= x + 6 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$4 \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right),\ K_2 = \{4\}$$

$\boldsymbol{K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 4\}}$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu v rovnici, použijeme definici absolutní hodnoty reálného čísla ($a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$). Řešení rovnice rozdělíme do dvou intervalů podle znaménka argumentu („vnitřku“) absolutní hodnoty. Řešíme dvě lineární rovnice již bez absolutní hodnoty. Je nutné se přesvědčit, zda vypočtený kořen patří do intervalu, v němž právě řešíme. Množinu kořenů v R dostaneme jako sjednocení množin kořenů v jednotlivých intervalech. Pozn.: Abychom získali dva intervaly, na nichž všechny kroky provádíme, hledáme vlastně nulové body výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

14 x ... počet hodin, který potřebuje pan Novák na posekání celé zahrady

y ... počet hodin, který potřebuje paní Nováková k posekání celé zahrady

Za jednu hodinu poseká pan Novák $\frac{1}{x}$ a paní Nováková $\frac{1}{y}$ zahrady.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$3\cdot\frac{1}{x}=4\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{\left(4\cdot\frac{1}{y}\right)}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{y}=\frac{4}{3y}$$
$$\frac{4}{3y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{7}{3y}=\frac{1}{12}$$

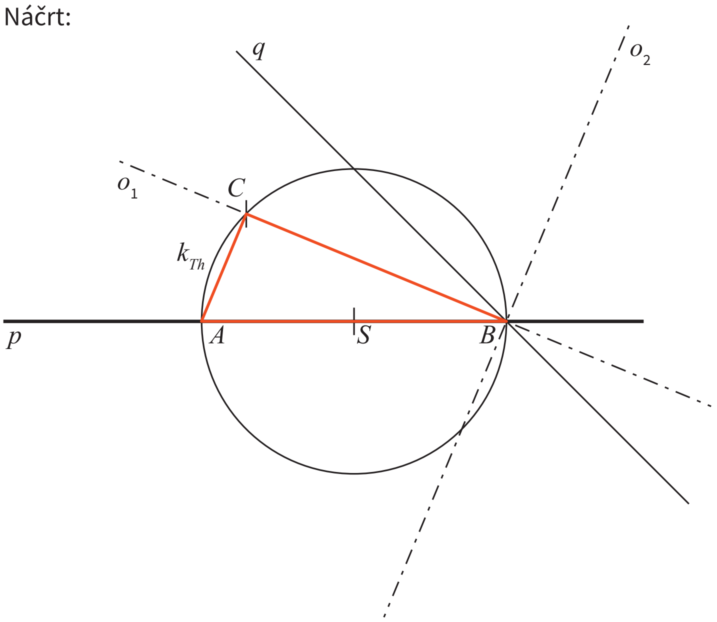
y = 28 (hodin)

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{3\cdot 28}=\frac{1}{21}$$

x = 21 (hodin)

Označíme neznámé veličiny v úloze.
Sestavíme rovnice z údajů v úloze:
Budou-li pan a paní Novákovi pracovat společně jednu hodinu, posekají dohromady $\frac{1}{12}$ zahrady.
Druhá rovnice vyjadřuje rovnost posekané plochy paní Novákovou za 4 a panem Novákem za 3 hodiny.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou, z druhé rovnice stačí vyjádřit výraz $\frac{1}{x}$ a dosadit do první.
Vypočítáme y, pak $\frac{1}{x}$ a odtud x.
Zkontrolujeme, zda vypočtené hodnoty odpovídají textu úlohy – paní Nováková poseká zahradu za 28 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{28}$ zahrady a za 4 hodiny $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$ zahrady.
Pan Novák poseká zahradu za 21 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{21}$ zahrady a za 3 hodiny $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ zahrady.
Budou-li pracovat společně, posekají za 1 hodinu $\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{4+3}{3\cdot 4\cdot 7}=\frac{1}{12}$ zahrady.
Nezapomeňte na slovní odpověď.

15 Náčrt:



Rozbor:
$|Cp|=|Cq| \Rightarrow C\in o_1\cup o_2$

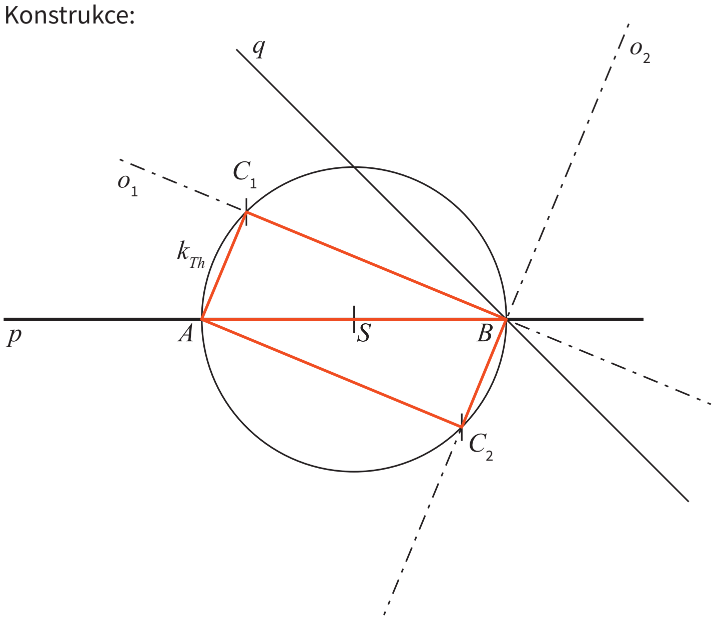
$|\sphericalangle ABC|=90° \Rightarrow C\in k_{Th}(AB)$

$C\in k_{Th}(AB)\cap(o_1\cup o_2)$

Bod C má mít stejnou vzdálenost od dvou přímek p a q. Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek, jsou dvě přímky, na nichž leží osy úhlů sevřených těmito různoběžkami (obě přímky procházejí průsečíkem daných různoběžek a jsou na sebe kolmé).

Trojúhelník ABC má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C – proto musí bod C ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB.

Konstrukce:



Popis konstrukce:

1. S; S je střed AB
2. k_{Th}; $k_{Th}\left(S; r = \frac{r}{2}\right)$
3. o_1, o_2; o_1, o_2 jsou osy úhlů sevřených přímkami p a q
4. C_1; $C_1 \in o_1 \cap k_{Th}$
5. C_2; $C_2 \in o_2 \cap k_{Th}$
6. $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$

Úloha má dvě řešení.

Pozor – střed úsečky určíme konstrukčně pomocí dvou kružnic se stejnými poloměry a středy v bodech A a B.

16 $2x - a = 0$

$x = \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = -2$

$a = -4$ D)

Zapíšeme podmínky pro existenci výrazu v předpisu funkce f:

$2x - a \neq 0$, tedy $x \neq \frac{a}{2}$.

Z uvedeného definičního oboru plyne $x \neq -2$. Porovnáme obě podmínky, tedy

$\frac{a}{2} = -2$ a zároveň $a = -4$.

17 $q\colon y = \frac{2}{3}x + b$

$M \in q \Rightarrow -1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$

$q\colon y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$q\colon \frac{2}{3}x - y - \frac{7}{3} = 0$

$\boldsymbol{q\colon 2x - 3y - 7 = 0}$

Odpověď B

Přímka p je dána směrnicovou rovnicí, směrnice přímky p je rovna $\frac{2}{3}$.

Rovnoběžné přímky mají stejné směrnice, proto i směrnice hledané přímky q bude rovna $\frac{2}{3}$. Přímka q bude tedy mít rovnici

$q\colon y = \frac{2}{3}x + b$.

Koeficient b určíme využitím souřadnic bodu M, který má na přímce q ležet, jeho souřadnice musí tedy vyhovovat rovnici přímky q.
Získali jsme směrnicovou rovnici přímky q, převedením rovnice na anulovaný tvar dostaneme obecnou rovnici přímky q.
Vynásobením obou stran rovnice třemi získáme všechny koeficienty celočíselné.

18 $a = 45$ cm, $b = 25$ cm, $v = 25$ cm, $V_1 = 18$ l $= 18$ dm^3 $= 18000$ cm^3

$V_1 = a \cdot b \cdot v_1$

$18000 \text{ cm}^3 = 45 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \cdot v_1$

$v_1 = \frac{18000}{45 \cdot 25} \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

$v - v_1 = 25 \text{ cm} - 16 \text{ cm} =$ **9 cm**

Odpověď B

Voda po nalití do akvária bude mít tvar kvádru s rozměry a, b, v_1.
Dosazením do vzorce pro objem kvádru zjistíme neznámý třetí rozměr kvádru v_1.
Před dosazením vyjádříme objem v cm^3 podle vztahu 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.
Vypočítáme vzdálenost vodní hladiny od horního okraje akvária.

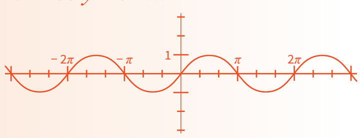
19 $\boldsymbol{A = 2}$

$\boldsymbol{B = 3}$

$\boldsymbol{C = -1}$

Odpověď E

Graf funkce $f\colon y = A \cdot \sin(Bx) + D$ sestrojíme modifikací grafu funkce $y = \sin x$.



Konstanty A a B ovlivňují „tvar“ křivky.
A určuje amplitudu – „roztažení“ ve svislém směru, pro funkci f $A = 2$ (amplituda funkce $y = \sin x$ je 1).
B určuje periodu – roztažení ve vodorovném směru, perioda funkce f je $\frac{2}{3}\pi$, proto $B = 3$ (podle vztahu $p = \frac{2\pi}{B}$, perioda funkce $y = \sin x$ je 2π).
Konstanta D určuje „posun“ grafu ve směru osy y, pro funkci f je posun o 1 ve směru záporné osy y („dolů“), proto $D = -1$.

20 $y = \binom{10}{6} \cdot 6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$

Odpověď C

Nejprve vybereme („označíme“) sedadla, která turisté obsadí – vybíráme 6 sedadel z 10 nezávisle na pořadí výběru, tedy tvoříme šestičlenné kombinace z 10 prvků, jejich počet vyjadřuje kombinační číslo $\binom{10}{6}$.

Potom začneme sedadla „obsazovat“ turisty – každému sedadlu „přidělíme“ jednoho turistu (představte si vybraná sedadla v řadě a jen měníme pořadí osob) - tvoříme permutace z 6 prvků, těch je (pro každý výběr sedadel) 6!. Násobíme podle kombinatorického pravidla součinu.

Jiný způsob uvažování (pro pokročilejší):

Tvoříme permutace s opakováním z 10 prvků, z nichž 4 jsou stejné (celkem 10 sedadel, 6 z nich obsadíme „rozlišitelnými“ turisty a 4 zůstanou prázdná – nerozlišitelná).

Jejich počet je pak $\frac{10!}{4!}$.

21 $a_1 = k \cdot a = k \cdot 12,5\ \text{cm}$

$b_1 = k \cdot b = k \cdot 10\ \text{cm}$

$c_1 = k \cdot c = k \cdot 8,5\ \text{cm}$

$a_1 - c_1 = 4{,}8\ \text{cm}$

$k \cdot 12,5\ \text{cm} - k \cdot 8,5\ \text{cm} = 4{,}8\ \text{cm}$

$4k\ \text{cm} = 4{,}8\ \text{cm}$

$k = \frac{4{,}8}{4} = \frac{6}{5}$

$b_1 = \frac{6}{5} \cdot 10\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$

Odpověď D

Pro podobné trojúhelníky platí, že odpovídající si strany jsou ve stejném poměru.

Využijeme údaj o rozdílu nejdelší a nejkratší strany, sestavíme a vyřešíme rovnici pro koeficient podobnosti k.

Dopočítáme délku prostřední strany b.

22 $2s_1 - s_2 + 12 = 0$

$s_1 = -3 + 2t$

$s_2 = 1 - t$

$$2(-3 + 2t) - (1 - t) + 12 = 0$$
$$t = -1$$

$s_1 = -3+2t \cdot (-1) = -5$

$s_2 = 1-(-1) = 2$

$S\,[-5; 2]$

$r_k = |ST| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

Odpověď A

Poloměr kružnice můžeme určit jako vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu. Bod T na kružnici k známe, proto stačí najít střed kružnice k, který je průsečíkem přímek p a q.

Průsečík přímek je bod, jehož souřadnice musejí vyhovovat rovnicím obou přímek, tedy obecné rovnici přímky p i parametrickému vyjádření přímky q. Označíme jeho souřadnice $S[s_1; s_2]$ a dosadíme je do daných rovnic. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešit budeme dosazovací metodou (využijeme vyjádřené s_1 a s_2 v druhé a třetí rovnici a dosadíme do první).

Délku úsečky ST počítáme podle vzorce:
$|ST| = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2}$

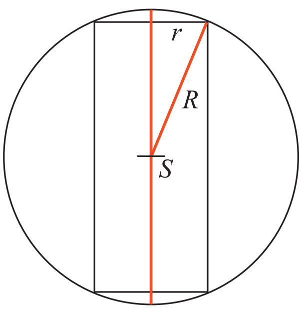
23 $\dfrac{s_4}{s_6} = \dfrac{6-2}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Odpověď C

Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit třemi úhlopříčkami (AD, BE, CF) na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Úsečky BD a DF vždy dva z těchto trojúhelníků půlí, proto obsah trojúhelníku BCD i obsah trojúhelníku DEF je roven obsahu každého ze zmiňovaných rovnostranných trojúhelníků. Obsah čtyřúhelníku $ABDF$ je tedy rovný $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ obsahu šestiúhelníku.

Jiné řešení: Čtyřúhelník $ABDF$ lze rozdělit na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABF, BSF, BDS, FDS. Do celého šestiúhelníku zbývají ještě dva shodné trojúhelníky (BCD a DEF), proto je poměr obsahů $\frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

24



Načrtneme osový řez koule a vepsaného válce, označíme v výšku válce.

24 24.1

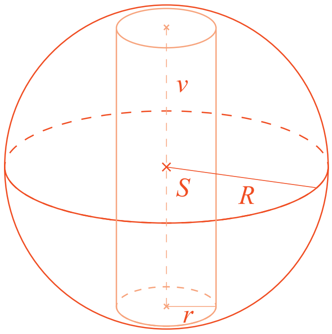
$R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$26^2 = 10^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$

$\frac{v}{2} = 24$

v = 48 cm (Tvrzení I. je pravdivé)



Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami r a $\frac{v}{2}$.

Podstavou válce je kruh, dosazením do vzorce $S_{po} = \pi r^2$ vypočítáme její obsah. Plášť válce je vlastně obdélník, jehož šířka je rovna obvodu podstavy ($o = 2\pi r$) a výška je rovna výšce válce.

Pro porovnání objemu válce a koule vypočteme jejich objemy podle vzorců

$V_V = \pi r^2 \cdot v$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

Porovnáním podílů zjistíme, že válec zaujímá přibližně 20% objemu koule.

Povrch koule počítáme podle vzorce $S_K = 4\pi R^2$

24.2

$S_{po} = \pi r^2 = \pi \cdot 100\ \text{cm}^2$

$S_{pl} = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 10 \cdot 48 = 960\pi$ cm

$\frac{S_{pl}}{S_{po}} = \frac{960\pi}{100\pi} =$ **9, 6 (Tvrzení II. je pravdivé)**

24.3

$V_V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 10^2 \cdot 48 = 4800\pi\ \text{cm}^3$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 26^3 = \frac{70304}{3}\pi\ \text{cm}^3$

$\frac{V_V}{V_K} = \frac{4800\pi \cdot}{\frac{70304}{3}\pi} =$ **0, 20 (Tvrzení III. není pravdivé)**

24.4

$S_K = 4\pi R^2 = 4\pi\ 26^2 = 2704\pi\ \text{cm}^2$

$\frac{S_K}{S_{pl}} = \frac{2704\pi \cdot}{960\pi} =$ **2, 8 > 2 (Tvrzení IV. je pravdivé)**

25 25.1

$P = \frac{2}{5}$

Odpověď B

25.2

$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{9}{25}}$

Odpověď C

Pravděpodobnost náhodného jevu A počítáme jako poměr $P = \frac{m}{n}$, kde P je počet výsledků pokusu, při kterých jev A nastane, a n je počet všech možných výsledků pokusu.

I.

Táhneme-li z osudí, ve kterém je 5 koulí, jednu kouli, má tento pokus 5 možných výsledků, jevu A (tažení bílé koule) jsou příznivé 2.

Pravděpodobnost, že první vytažená koule je černá, je $\frac{3}{5}$. Protože vytažené koule se do osudí vracejí, pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je opět černá, je také $\frac{3}{5}$. Pravděpodobnost průniku nezávislých jevů počítáme jako součin pravděpodobností.

25.3

$P = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{13}{25}}$

Odpověď D

První dvě vytažené koule budou mít stejnou barvu. Tento případ může nastat dvěma způsoby – obě první koule budou černé, nebo obě první koule budou bílé. Jevy „první dvě vytažené koule budou černé“ a „první dvě vytažené koule budou bílé“ jsou neslučitelné, pravděpodobnost jejich sjednocení dostaneme jako součet jejich pravděpodobností

($\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ je pravděpodobnost toho, že první dvě vytažené koule budou bílé).

26 26.1

Odpověď B

$f_1 : y = \frac{1}{3^x}$

je exponenciální funkce – grafem je exponenciála, základ je roven $\frac{1}{3} < 1$, proto f_1 klesá ve svém definičním oboru, vyhovuje jedině B.

26.2

Odpověď A

$f_2 : y = \frac{3}{x}$

je nepřímá úměrnost, grafem je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy, vyhovuje jedině A.

26.3

Odpověď C

$f_3 : y = \frac{x}{3}$

grafem je přímka s kladnou směrnicí $\frac{1}{3}$, vyhovuje jedině C.

26.4

Odpověď D

$f_4 : y = \frac{1}{x-3}$

je lineární lomená funkce, grafem je hyperbola se středem v bodě [3; 0], vyhovuje jedině D.

ŘEŠENÍ – TEST 3

1 Pro snadnější porovnání čísel a určení, zda do intervalu patří nebo ne, zapíšeme všechna čísla ve stejném tvaru, např. jako čísla desetinná. Poté je zakreslíme na číselnou osu.

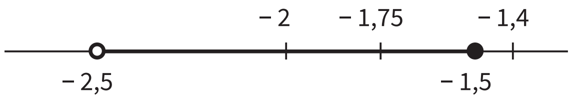
$-\frac{5}{2} = -2,5$

$-\frac{3}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{4} = -1,75$

$-1\frac{1}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{5} = -1,4$



Pro porovnání zadaných čísel bychom také mohli všechna čísla vyjádřit ve zlomcích se společným jmenovatelem.

Do zadaného intervalu tedy nepatří čísla $-2,5$ a $-1,4$. Určíme jejich součet:
$-2,5 + (-1,4) =$ **$-3,9$**

2 Nejprve určíme podmínky. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, proto $x + 4 \neq 0$ a $x - 4 \neq 0$, první podmínka je pro přirozená čísla splněna vždy, druhá pro $\underline{x \neq 4}$.

$$\frac{4}{x+4} - \frac{20 - x^2}{x^2 - 16} = \frac{1}{x-4} \qquad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$$4 \cdot (x-4) - (20 - x^2) = x + 4$$

$$4x - 16 - 20 + x^2 = x + 4 \qquad | -(x+4)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8) \cdot (x-5) = 0$$

$$\cancel{x = -8}$$ Kořen nepatří do množiny přirozených čísel N.

$$\mathbf{x = 5}$$

případně K = {5}

Protože řešíme rovnici v množině přirozených čísel, podmínku $x \neq 4$ nemusíme uvádět.
Kvadratickou rovnici můžeme řešit nejen rozkladem na součinový tvar, ale také pomocí diskriminantu a vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

3 $3^{21} - 11 \cdot 3^{20} + 3^{22} = 3 \cdot 3^{20} - 11 \cdot 3^{20} + 3^2 \cdot 3^{20} = 3^{20} \cdot (3 - 11 + 9) = \mathbf{3^{20}}$

Výraz je opravdu nutné upravit na základě pravidel pro počítání s mocninami. Výpočet pomocí kalkulačky nestačí, protože se v tomto případě hodnotí celý.

4 Aby byla definována odmocnina a logaritmická funkce, musí být splněny podmínky:

$2x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - 4x > 0$

$2x \geq -5 \qquad -4x > -2$

$x \geq -\frac{5}{2} \qquad x < \frac{1}{2}$

$K_1 = \left\langle -\frac{5}{2}; \infty \right) \qquad K_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$

Odmocnina se sudým exponentem je definována jen pro nezáporná reálná čísla. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná reálná čísla. U druhé nerovnosti pozor na násobení záporným číslem.

Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení obou nerovnic (K_1 a K_2).
Definiční obor funkce tedy je:

$$\mathbf{D = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)}$$

5 Při úpravě lomených výrazů je nutné rozložit čitatele i jmenovatele zlomků na součin. To se provádí vytýkáním nebo využitím vzorců. Poté můžeme krátit. Podmínky určujeme z rozložených jmenovatelů.

$$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2xy+x^2+y^2}{y}:\frac{y+x}{xy}=\frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}\cdot\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y+x}}=\boldsymbol{x(x+y)}\qquad [x\neq 0, y\neq 0]$$

6 6.1

Všechny členy zapíšeme pomocí mocnin se základem 3 a upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami:

Pokud při řešení logaritmické rovnice neurčíme podmínky, musíme alespoň zkusit dosadit vypočtený kořen do zadané rovnice a zjistit, zda jsou pro něj logaritmy definovány. U exponenciální rovnice podmínky a zkoušku dělat nemusíme, protože jde o prostou funkci, která je definována pro všechna čísla z R.

$$9^{x-2}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

$$3^{2(x-2)}=3^{-3}\cdot 3^x$$
$$3^{2x-4}=3^{x-3}$$
$$2x-4=x-3$$
$$\boldsymbol{x=1}$$

případně $K=\{1\}$

6.2

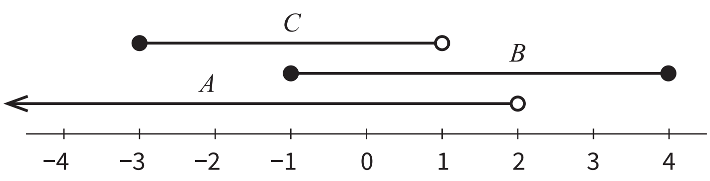
Nejprve určíme podmínky: $x>0$

Členy upravíme pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu:

$$\log_2 x+\log_2 4=4$$
$$\log_2 4x=4$$
$$4x=16$$
$$\boldsymbol{x=4}$$

případně $K=\{4\}$

7 Intervaly A, B, C zakreslíme na číselnou osu. Okraj intervalu C zvolíme tak, aby se intervaly A, B, C překrývaly na intervalu $\langle -1; 1)$.



$\boldsymbol{c=1}$

8 Výšky klád tvoří členy aritmetické posloupnosti.

a_1 =15 cm; $a_{17}-a_9=32$ cm

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci:

$$a_{17}=a_9+(17-9)\cdot d$$
$$d=\frac{a_{17}-a_9}{8}$$

po dosazení:

$d=4$ cm

Pro výpočet třináctého členu posloupnosti využijeme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$$a_{13}=a_1+(13-1)\cdot d$$

po dosazení:

$a_{13}=15\text{cm}+12\cdot 4\text{ cm}=$ **63 cm**

9 Nejprve určíme dvacátý člen posloupnosti ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d$

po dosazení:

$a_{20} = 15 \text{ cm} + 19 \cdot 4 \text{ cm} = 91 \text{ cm}$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

po dosazení:

$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (15 \text{ cm} + 91 \text{ cm})$

$\mathbf{s_{15} = 1060 \text{ cm}}$

10 Některé výrazy s faktoriály částečně rozepíšeme na součin, vytkneme a pokrátíme:

$$\frac{500! + 499!}{499!} - \frac{501! - 500!}{500!} = \frac{500 \cdot 499! + 499!}{499!} - \frac{501 \cdot 500! + 500!}{500!} =$$
$$= \frac{499!\,(500+1)}{499!} - \frac{500!\,(501-1)}{500!} = 501 - 500 = \mathbf{1}$$

Při úpravě výrazů s faktoriály rozepisujeme faktoriál většího z čísel na součin. Vypíšeme tolik činitelů, abychom se dostali na úroveň menšího z čísel.

11 11.1
Funkční hodnotu v bodě -2 určíme dosazením čísla -2 do předpisu funkce:

$a_2 = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

11.2
Průsečíky s osou x mají y-ovou souřadnici nulovou. Do předpisu funkce tedy dosadíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnici:

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$D < 0$ Rovnice nemá reálné kořeny. **Průsečíky grafu funkce f s osou x neexistují.**

12 Celý objem nádoby je $V = \frac{3}{2} \cdot 1 \text{ l} = 1,5 \text{ l} = 1500 \text{ cm}^3$.

Pro objem válce platí vztah:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

Výška válce je stejná jako průměr jeho podstavy, tedy $v = 2r$:

$V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$

Vyjádříme poloměr r a dosadíme:

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \doteq \mathbf{6,2 \text{ cm}}$

13 Šest hledaných čísel se pokusíme zapsat do šesti polí tabulky tak, aby byla řada čísel uspořádána vzestupně. Protože má mít medián hodnotu 5,5, musí být ve středních polích tabulky čísla, jejichž průměr je 5,5. Ve třetím a čtvrtém poli by tedy mohla být např. čísla 5 a 6:

		5	6		

Protože má mít modus hodnotu 8, musí být toto číslo zastoupeno alespoň dvakrát. Do posledních dvou polí zapíšeme číslo 8:

		5	6	8	8

Protože má mít aritmetický průměr hodnotu 5, musí být součet všech šesti čísel 6 · 5 = 30. Součet už doplněných čísel je 27, na zbylá dvě pole zbývá součet 3. Doplníme tedy čísla 1 a 2:

1	2	5	6	8	8

Soubor hledaných čísel je tedy např: 1, 2, 5, 6, 8, 8.

Úloha má další dvě řešení:

	2	*4*	*7*	*8*	*8*
	2	*3*	*8*	*8*	*8*

14 Vrchol vysílače, pata vysílače a okno tvoří trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti $\gamma = 53°$, sevřeným stranami délky $a = 102$ m a $b = 137$ m. Trojúhelník je podle věty *sus* zadán jednoznačně.

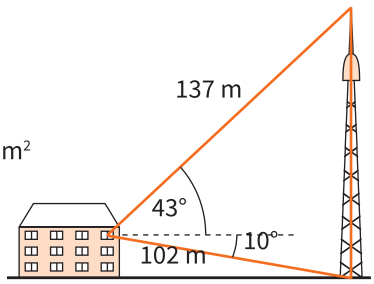
Výšku vysílače v určíme pomocí kosinové věty:

$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

po dosazení:

$v^2 = (1372 + 1022 - 2 \cdot 137 \cdot 102 \cdot \cos 53°)\ \text{m}^2$

v = **111 m**



Kosinovou větu používáme pro řešení trojúhelníků zadaných podle vět sss a sus. Naopak sinovou větu používáme tehdy, je-li trojúhelník zadán podle věty usu nebo Ssu.

Další řešení: Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a k výpočtu použijeme goniometrické funkce ostrého úhlu.

15 15.1

Pravděpodobnost jevu A počítáme jako podíl počtu výsledků m příznivých danému jevu a celkového počtu možných výsledků n.

$m = 6$ (počet dvoukorunových mincí)

$n = 16$ (počet všech mincí)

$P_{(A)} = \frac{6}{16} = 0,375 \sim$ **37,5%**

15.2

$m = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ (počet pětic mincí, ve kterých jsou 3 dvoukorunové 2 pětikorunové mince)

$n = \binom{16}{5} = 4368$ (počet všech pětic mincí)

$P = \frac{60}{4368} \doteq 0,014 \sim$ **1,4%**

Při úvahách o počtu skupin mincí, které můžeme sestavit, je lepší předpokládat, že jsou i mince stejné hodnoty vzájemně rozlišitelné. Představme si například, že je na nich uveden různý rok vyražení, což samozřejmě nemá vliv na výsledek úlohy.

16 16.1
Vrchol C získáme posunutím vrcholu B o vektor $\vec{d}$. Pro jeho souřadnice tedy platí:

$C = B + \vec{d} = [8; 4] + (1; 3) =$ **[9; 7]**

A N

16.2
Nejprve určíme souřadnice vrcholu D, který je posunutím vrcholu A o vektor $\vec{d}$:

$D = A + \vec{d} = [1; 3] + (1; 3) = [2; 6]$

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{BD}$ určíme ze vztahu:

$\overrightarrow{BD} = (d_1 - b_1; d_2 - b_2) =$ **(−6; 2)**

A N

16.3
Souřadnice středu rovnoběžníku určíme jako aritmetický průměr souřadnic bodů A, C:

$S\left[\frac{1+9}{2}; \frac{3+7}{2}\right] =$ **[5; 5]**

A N

16.4
Nejprve určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$:

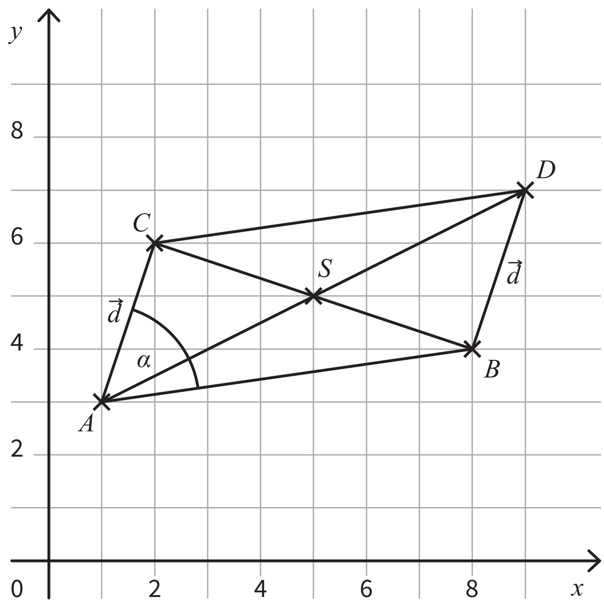
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (7; 1)$

Kosinus hledaného úhlu určíme ze vztahu:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha \doteq 63°26'$

A N



17 Nejprve si vhodně označíme neznámé počty diod. Abychom nemuseli počítat se třemi neznámými, pokusíme se označit počty diod pomocí jediné proměnné x.

červených diod x
zelených diod .... $1{,}5x$
modrých diod .... $1{,}5x + 2$
sestavíme rovnici:

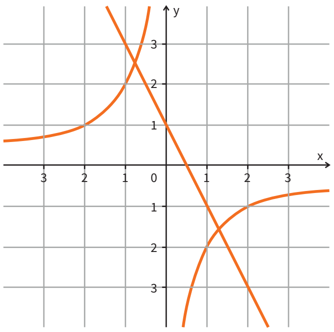
$$\begin{aligned} x + 1{,}5x + 1{,}5x + 2 &= 50 \\ 4x &= 48 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Na stromku je tedy 12 červených, 18 zelených a 20 modrých diod.

A) ~~Červených diod je 14.~~
B) ~~Zelených a modrých diod je dohromady 36.~~
C) ~~Modrých diod je 18.~~
D) Zelených diod je o 6 více než červených.
E) ~~Červených diod je 10.~~

Počty diod by samozřejmě bylo možné označit třemi neznámými, ale museli bychom pak sestavit soustavu tří rovnic, jejíž řešení je pracnější.

18 Grafem funkce $f: y = -2x + 1$ je strmě klesající přímka protínající osu y v bodě [0; 1]. Tomu odpovídají obrázky D a E. Grafem funkce $f: y = \frac{-2}{x}$ je hyperbola, která má své větve ve II. a IV. kvadrantu. Tomu odpovídají obrázky A, C, a E. **Oba grafy jsou tedy správně sestrojeny na obrázku E.**



19 Délky hran kvádru a, b, c označme pomocí jediné neznámé a, $b = 2a$, $c = 3a$, čímž si zajistíme požadovaný poměr délek hran.
Pro povrch kvádru platí:

$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$

Dosadíme naše délky hran:

$S = 2 \cdot (2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$

Vyjádříme neznámou a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{22}} = \sqrt{\frac{2\,662\ \text{cm}^2}{22}} = 11\ \text{cm}$$

Nejdelší hranou je hrana $b = 3a = 33$ cm.

A) 27 cm
B) 29 cm
C) 30 cm
D) 32 cm
E) jiná délka

20 Z rovnosti vyjádříme rámeček a upravíme:

$$\boxed{} = 3\,(a+2)^2 - 2\,(a+3)^2 = 3\cdot(a^2+4a+4) - 2\cdot(a^2+6a+9) =$$
$$= 3a^2 + 12a + 12 - 2a^2 - 12a - 18 = \mathbf{a^2 - 6}$$

A) $\boxed{a^2+6}$

B) $\boxed{\mathbf{a^2-6}}$

C) $\boxed{a+6}$

D) $\boxed{a-6}$

E) jiný rámeček

21 Porovnáním zadaného grafu s grafem funkce $y = \cos x$ je zřejmé, že se jedná také o funkci kosinus. Graf má ale dvojnásobnou „výšku“ a je posunut o jedna v kladném směru osy y.

Jeho předpis tedy je:

$\mathbf{y = 2\cdot\cos x + 1}$

A) $y = 2\cdot\sin\ x + 1$
B) $y = \sin\ x + 2$
C) $y = \sin\ 2x + 1$
D) $y = \cos\ 2x + 1$
E) $\mathbf{y = 2\cdot\cos\ x + 1}$

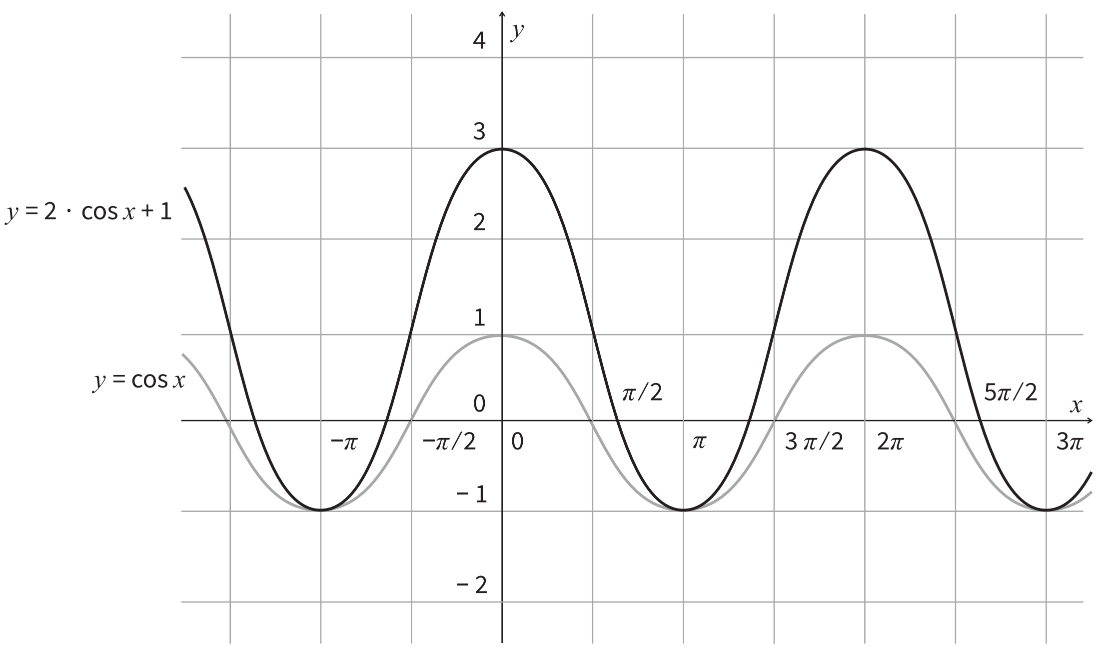
Obecně se dá říci, že graf goniometrické funkce o předpisu $y = a\cdot\cos\,(bx + c) + d$ ovlivňují jednotlivé koeficienty:

a ... ovlivňuje „výšku“ grafu

b ... ovlivňuje periodu funkce $\left(\text{ta je } \frac{2\pi}{|b|}\right)$

c ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy x

d ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy y



22 Nejprve určíme obsah půlkruhu:

$S_1 = \frac{\pi c^2}{8} \doteq 353{,}43\ \mathrm{m}^2$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (podle Thaletovy věty), k určení jeho obsahu tedy stačí znát délky jeho odvěsen:

$a = c \cdot \cos \beta \doteq 24{,}57\ \mathrm{m}$
$b = c \cdot \sin \beta \doteq 17{,}21\ \mathrm{m}$

Obsah trojúhelníku ABC je tedy:

$S_2 = \frac{a \cdot b}{2} \doteq 211{,}42\ \mathrm{m}^2$

Poměr obsahů je:

$\frac{S_1}{S_2} \doteq 0{,}60 \sim 60\%$

Plocha záhonů tvoří doplněk do 100 %, což je 40 %.

A) 35%
B) 40%
C) 42%
D) 45%
E) 48%

23 Normálovým vektorem hledané přímky p je např. vektor $\overrightarrow{BA} = (8; -4)$.
Pro sestavení obecné rovnice přímky p použijeme k- násobek vektoru AB
$\vec{n}_p = (2; -1)$.

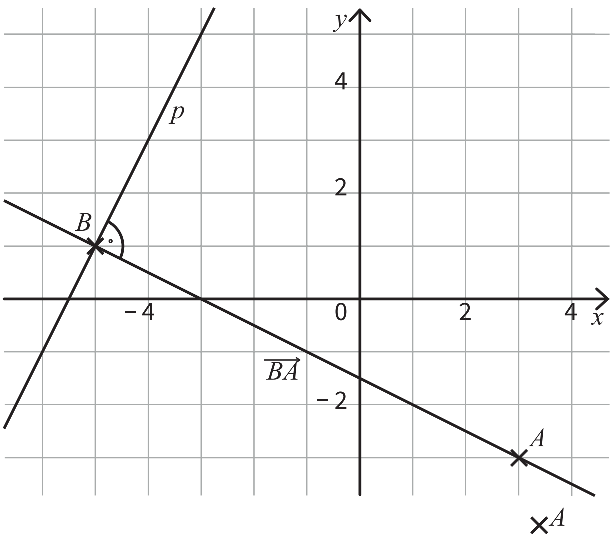
Libovolný nenulový násobek této rovnice je opět rovnicí stejné přímky.
Takže pokud bychom použili přímo vektor $\overrightarrow{BA}$, dostali bychom rovnici p: $8x + 4y + 44 = 0$, která je také správným řešením.

Rovnice tedy bude mít tvar:
$p: 2x - y + c = 0$

Neznámý koeficient c dopočítáme dosazením souřadnic bodu B, který na přímce p leží:
$2(-5) - 1 + c = 0$
$c = 0$

Přímka p má tedy rovnici:
$p: 2x - y + 11 = 0$

A) $p: x + 2y + 3 = 0$
B) $p: x - 2y + 7 = 0$
C) $p: 2x - y + 7 = 0$
D) $p: 2x - y + 11 = 0$
E) $p: x + 2y + 11 = 0$



24 $K_{10} = 3\,500\,000$ Kč (dlužná částka po deseti letech)
$p = 0{,}048$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Pro výši dlužné částky po n letech platí vztah:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Vyjádříme počáteční výši úvěru:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}$$

po dosazení:

$$K_0 = \frac{3\,500\,000\ \text{Kč}}{(1+0{,}048)^{10}} \doteq 2\,190\,000\ \text{Kč}$$

A) 2 190 000 Kč
B) 2 240 000 Kč
C) 2 280 000 Kč
D) 2 390 000 Kč
E) jinou částku

25 Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic koncových bodů úsečky.
Pro výpočet vzdálenosti bodů A, B používáme vzorec: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Při určování velikosti úsečky nezáleží na pořadí, ve kterém odečítáme souřadnice bodů. Ale při určování souřadnic vektoru na tomto pořadí záleží. Od souřadnic koncového bodu musíme odečítat souřadnice počátečního bodu.

25.1
$a = |BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{68} =$ **$2\sqrt{17}$ … F)**

25.2
Nejprve určíme střed strany a:

$$S_a\left[\frac{4-4}{2}; \frac{5+3}{2}\right] = [0; 4]$$

$t_a = |AS_a| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} =$ **$\sqrt{13}$ … A)**

25.3
$c = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = 20 =$ **$2\sqrt{5}$ … B)**

25.4

$$S_c\left[\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right] = [3; 3]$$

$t_c = |CS_c| = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49+0} =$ **7 … D)**

26 Pravidelný desetiúhelník můžeme rozdělit na 10 shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Vnitřní úhel proti základně má tedy velikost $\frac{360°}{10} = 36°$.

Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180°,
mají zbylé vnitřní úhly velikost 72°.

Vyznačené úhly pak mají velikost:

U pravidelných n-úhelníků bývá také často za úkol výpočet poloměru kružnice vepsané a opsané. V těchto typech příkladů se také vyplatí rozdělit n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků a dále pracovat s jedním z nich.

26.1 $\alpha = 3 \cdot 36° =$ **108° … C**
26.2 $\beta = 2 \cdot 72° =$ **144°… D**
26.3 $\gamma =$ **72°… E**

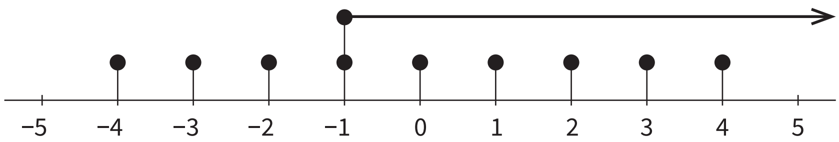
ŘEŠENÍ – TEST 4

1 Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, tj.:

$A = \{x \in Z\}; |x| < 5 = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu −1, tj.:

$B = \{x \in R\}; x \geq -1 = \langle -1; \infty)$



Průnik množiny A a B bude obsahovat čísla, která mají obě množiny společné, tj. čísla, která patří jak do množiny A, tak do množiny B.
Průnik těchto dvou množin obsahuje pouze 6 čísel:

$\boldsymbol{A \cap B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}}$

Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, obsahuje pouze 9 čísel.
Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu −1, obsahuje tedy nekonečně mnoho čísel v intervalu ⟨1; ∞).
Špatně by bylo, kdybychom zapsali výsledek jako interval, tj. ⟨1; 4⟩.

2 Litry si převedeme na cm^3:

829 litrů = 829 dm^3 = 829 000 cm^3

Číslo a, které splňuje podmínku

$1 \leq a < 10$ je 8,29.

Abychom dostali číslo 829 000, musíme 8,29 vynásobit číslem 100 000, tj. číslem 10^5, proto je 829 000 cm^3 = **8,29 · 10^5 cm^3**.

3 $\dfrac{x^2-5}{x-5} - 1 = \dfrac{x^2-5-(x-5)}{x-5} = \dfrac{x^2-5-x+5}{x-5} = \boldsymbol{\dfrac{x^2-x}{x-5}}$

4 Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Jestliže druhý den přišlo na výstavu o 50 osob více, bylo tam tedy $(k + 50)$ osob

a ty zaplatily $\frac{m}{k}(k + 50)$ korun.

Výraz se dá upravit a roznásobit do tvaru:

$\boldsymbol{m + 50\,\frac{m}{k}}$

Jiný postup řešení:
Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Pokladní tedy druhý večer vybrala opět m korun,

ale navíc ještě od 50 osob 50 $\frac{m}{k}$ korun.

Tedy celkem za druhý večer vybrala $(m + 50\,\frac{m}{k})$ korun.

Žáci zde často dělají chybu, že ve zlomku krátí x^2 v čitateli s x ve jmenovateli a −5 v čitateli i jmenovateli. Případně by se mohlo stát, že žák v euforii, že je v čitateli jasný vzorec, rozloží čitatel chybně na součin $(x - 5)(x + 5)$ a poté krátí čitatel a jmenovatel, k čemuž tato úloha opravdu svádí.
V zadání není uvedeno, že máme určit podmínky. Proto je zde neurčujme! V případě, že je určíme a budou správné (tj. $x \neq 5$), nic se neděje.
V případě, že je určíme chybně, pravděpodobně za ně bude odečten bod, tj. i když máme správně výsledek, získáme za úlohu jen 1 bod, protože u široce otevřených úloh se hodnotí vše, co žák do záznamového archu napíše.
Pozor: u rovnice s neznámou ve jmenovateli je naopak důležité podmínky určit, i když to v zadání není napsané. Můžeme tím zjistit, že výsledek, který nám vyšel, není v souladu s podmínkami a řešením rovnice tedy není.

5 $\dfrac{2x^2 - 9x + 9}{2x - 3} = 1$

Podmínky: jmenovatel se nesmí rovnat 0, tj. $2x - 3 \neq 0$, z toho plyne, že $x \neq \frac{3}{2}$.

Dále budeme řešit samotnou rovnici. Celou rovnici vynásobíme výrazem $2x - 3$:

$2x^2 - 9x + 9 = 2x - 3$

Převedeme si všechny členy na levou stranu:

$2x^2 - 9x + 9 - 2x + 3 = 0$

Získáme kvadratickou rovnici:

$2x^2 - 11x + 12 = 0$

Koeficienty této rovnice jsou: $a = 2$, $b = -11$, $c = 12$

Pro diskriminant kvadratické rovnice platí vztah: $D = b^2 - 4ac$. Dosadíme koeficienty a získáme

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Po dosazení získáme:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}$

Pro jednotlivé kořeny platí:

$x_1 = \frac{11 + 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$x_2 = \frac{11 - 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Porovnáme výsledky s podmínkami a zjistíme, že kořen x_2 nesplňuje podmínky řešitelnosti, proto je řešením zadané rovnice pouze číslo $x = 4$.

***K* = {4}**

6 6.1
Průsečíky s osou x jsou ty body grafu funkce f, které mají nulovou y-ovou souřadnici, proto:

$y = x^2 + 3x - 40 = 0$

Budeme řešit kvadratickou rovnici. Vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-40) = 169$.

Dosadíme do vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 13}{2}$

$x_1 = 5$, $x_2 = -8$

$P_x = [5; 0]$, $P'_x = [-8; 0]$

6.2
Nejdříve vypočítáme vrchol paraboly. Pro x-ovou souřadnici vrcholu platí vzorec:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$

Souřadnici y_v dopočítáme dosazením za x do předpisu funkce. $\left(\text{Nebo použijeme vzorec: } y_v = \frac{b^2}{2a}\right)$.

$$y_v = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 40 = -\frac{169}{4}$$

Funkce f má koeficient $a = 1 > 0$, tj. parabola bude otevřená směrem nahoru.

Obor hodnot funkce tedy bude:

$$\boldsymbol{H_f = \left\langle -\frac{169}{4}; \infty \right)}$$

7 $5 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+1} + 108 = 0$

$$5 \cdot \frac{3^x}{3} - 3 \cdot 3^x = -108$$

$$5 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x = -324$$

$$-4 \cdot 3^x = -324$$

$$3^x = 81$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

8 Katalogová cena košile ... x Kč

Po zvýšení o čtvrtinu hodnoty ... $\left(x + \frac{1}{4}x\right)$ Kč

Po snížení o 360 Kč ... $\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right)$ Kč

Cena 8 košilí ve výprodeji stojí stejně jako 1 košile za katalogovou cenu, tj.

$$8\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right) = x$$

$$8x + 2x - 2880 = x$$

$$9x = 2880$$

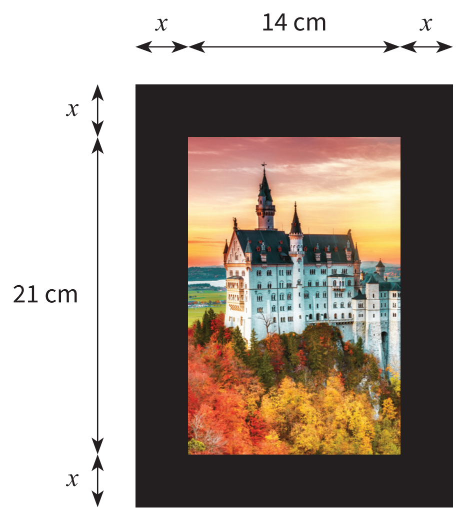
$$x = 320$$

Katalogová cena jedné košile byla **320 Kč**.

9 Fotografie má tvar obdélníku a její plocha je rovna obsahu obdélníku, tj. 21 cm · 14 cm = 294 cm^2.

Plocha obrazu včetně rámu je dvojnásobná, tj. $S_{obrazu} = 2 \cdot 294$ cm^2 = 588 cm^2.

Označíme si šířku rámu x, pak délky stran obrazu jsou $(21 + 2x)$ cm a $(14 + 2x)$ cm :



$S_{obrazu} = (21 + 2x)(14 + 2x) = 588$ (kde x je šířka rámu)

Po úpravě:

$2x^2 + 35x - 147 = 0$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = 2401$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \dfrac{-35 \pm 49}{2}$

$x_1 = 3{,}5$ a $x_2 = -21$

Zadání úlohy vyhovuje pouze kladný kořen (x je šířka rámu), tj. $x = 3{,}5$ cm.

Rozměry obrazu: 14cm + 2 · 3,5 cm = **21 cm** a 21 cm + 2 · 3,5 cm = **28 cm**.

10 Hledáme čtveřici čísel, z nichž každé je jiné a záleží na pořadí, jde tedy o variace bez opakování.

Vybíráme celkem z deseti čísel (0, 1, 2 až 9) a vybíráme čtyři čísla, tj.
zápis variace 4. třídy z 10 prvků

$$V = \frac{10}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

11 11.1
Celkový počet objednávek je 141, tj. je to liché číslo, zajímá nás tedy údaj, který je u 71. objednávky, a to je **srpen**.

11.2
Modus je měsíc, ve kterém bylo učiněno nejvíce objednávek, tj. **červen**.

12 $$\left(\frac{3}{n^2 n^4}\right)^{-1} - \left(\frac{n^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{n^6}\right)^{-1} - \frac{n^6}{27} = \frac{n^6}{3} - \frac{n^6}{27} = \frac{9n^6 - n^6}{27} = \mathbf{\frac{8n^6}{27}} \text{ nebo } \mathbf{\frac{8}{27}n^6}$$

13 Na začátku stál robot 390 000 Kč,
po prvním roce stál $p \cdot 390\,000$ Kč,
po druhém roce $p^2 \cdot 390\,000$ Kč,
po třetím roce $p^3 \cdot 390\,000$ Kč.

Tj. $p^3 \cdot 390\,000$ Kč = 24 960 Kč,

vypočítáme p a vyjde

$p = 0{,}4 = 40\ \%$. Odepisujeme tedy 100 % – 40 % = **60 %**.

14 První dvě vytažené čokolády mají být mléčné:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je 3,

druhou čokoládu vybíráme už jen ze 6 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je nyní jen 2,

tj. $P = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

15 První vytažená čokoláda má být hořká a druhá mléčná:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád a počet příznivých jevů je 4,

druhou vybíráme už jen ze 6 čokolád a počet příznivých jevů (mléčných čokolád) je 3,

tj. $P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

16 16.1

A N

Upravíme výraz $A = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2$ podle vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\left(3x - \frac{y}{2}\right)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x\,\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \mathbf{\neq 9x^2 - 3xy + 4y^2}$

16.2

A N

Upravíme výraz $A = a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2$; vytkneme z prvních dvou členů a^2 a z dalších dvou členů b^2,

tj. $a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2 = a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9)$.

A dále vytkneme závorku $(a - 9)$,

tj. $a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9) = (a^2 - b^2)\,(a - 9)$

První závorka je vzorec, rozložíme podle něj závorku a získáme:

$(a^2 - b^2)\,(a - 9)$ $\mathbf{= (a - b)\,(a + b)\,(a - 9)}$

Nebo můžeme upravovat výraz B – roznásobit postupně všechny závorky – a dojdeme tím k výrazu A.

A N

16.3
Upravíme výraz A, vydělíme čitatele i jmenovatele číslem 4:

$$\frac{4\,(x-2)}{x+8} = \frac{x-2}{\frac{x+8}{4}}$$

Ve jmenovateli rozdělíme zlomek na zlomky dva:

$$\frac{x-2}{\frac{x+8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+2}$$

Nebo můžeme upravovat výraz B a dojdeme tím k výrazu A.

A N

16.4
Upravíme výraz $A = (2–9k)^2 - 16$ podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$A = (2–9k)^2 - 16 = (2–9k–4)(2 - k + 4)$.

Závorky upravíme a získáme výraz:

$(-2-9k)(6-9k) \neq \mathbf{(2-9k)(6-9k)}$

17 Čitatel zlomku na levé straně nerovnice je záporný (je roven –5).

Má-li být celý zlomek menší nebo roven nule, pak musí být jmenovatel zlomku kladný.

(POZOR: jmenovatel se nesmí rovnat nule!) Musí tedy platit:

$2x - 9 > 0$

$2x > 9$

$x > \frac{9}{2}$

tj. $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ **C)** $\left(\frac{9}{2}; \infty\right)$

18 Jablek ...... 16 ks, nezralých jablek .... 16 : 4 = 4 ks, vyhodíme 2 ks .... zůstala 2 nezralá jablka

Banánů ...... 28 ks, nezralých banánů .... 28 : 4 = 7 ks, vyhodíme 2 ks .... zůstalo 5 ks nezralých banánů,

Celkem ...... 44 ks, nezralé ovoce celkem .... 11 ks, vyhodíme 4 ks .... zůstalo 7 ks nezralého ovoce.

Na začátku: 100 % ...... 44 ks ovoce

x % ...... 11 ks nezralého ovoce

$x = \frac{11}{44} \cdot 100\,\% = 25\,\%$

Nebo také: jestliže je nezralá čtvrtina jablek a čtvrtina banánů, pak je nezralá čtvrtina ovoce, tj. 25 %.

Po vyhození: 100 % ...... 40 ks ovoce

x % ...... 7 ks nezralého ovoce

$x = \frac{7}{40} \cdot 100\ \% = 17,5\ \%$

Závěr: 25 % - 17, 5 % = 7, 5 %.

Jestliže vyhodíme 2 nezralá jablka a 2 nezralé banány, klesne v bedně počet nezralého ovoce o 7, 5 %. B)

19 $R = k \cdot \frac{d}{S}$

Pravou i levou stranu rovnice vynásobíme veličinou S, potom:

$R \cdot S = k \cdot d$

Pravou i levou stranu rovnice vydělíme veličinou k, potom:

$\frac{RS}{k} = d$

$d = \frac{RS}{k}$ **D)** $d = \frac{RS}{k}$

20 Poměr stran obdélníku je 4:3, strana $a = 4x$ a strana $b = 3x$, pro obvod platí $o = 28 = 2(a + b)$, tj.

$28 = 2(4x + 3x)$, a odtud vypočítáme, že $x = 2$ cm, tedy $a = 4 \cdot 2$ cm $= 8$ cm, $b = 3 \cdot 2$ cm $= 6$ cm.

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven obsahu dvou trojúhelníků CDS.

Obsah trojúhelníku CDS: $S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12\ \text{cm}^2$

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku CDS, tj. $S = 2 \cdot 12 = 24\ \text{cm}^2$.

A) 24 cm²

21 Papír má tvar obdélníku, obsah tohoto obdélníku, tedy 1 ks papíru je: $S = 0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237\ \text{m}^2$.

Obsah 500 ks papírů; (tj. jednoho balení) je: $S = 500 \cdot 0{,}06237\ \text{m}^2 = 31{,}185\ \text{m}^2$.

$1\ \text{m}^2$ ...... 80 g

$31{,}185\ \text{m}^2$ ...... x g

$x = 31{,}185 \cdot 80 = 2494{,}8\ \text{g} = 2{,}4948\ \text{kg} \doteq$ **2,5 kg D)**

22 Podle tvaru grafu jde o exponenciální funkci. **E)** $y = 3^x - 1$

Grafem A) by byla přímka,
grafem B) parabola,
grafem C) hyperbola, logaritmická funkce
D) graf logaritmické funkce, není ale definován pro x menší nebo rovno 0
E) exponenciála (rostoucí), posunutá o 1 dolů

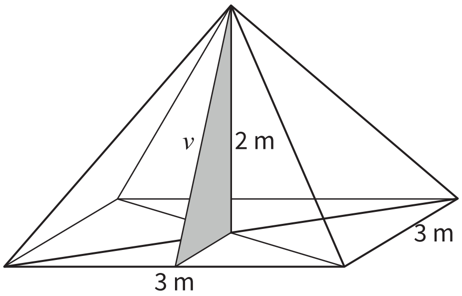
Případně můžeme i zkoušet za x a y dosazovat hodnoty a ověřovat, jestli bod leží na grafu funkce, např. u funkce A) zkusíme za x dosadit −1, v tom případě $y = -2$, ale bod [−1; −2] neleží na grafu funkce f apod.

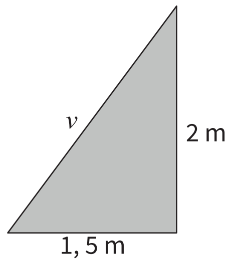
23 Nakreslíme si jehlan (střechu) a popíšeme prvky, které známe.

Střecha se skládá ze čtyř shodných trojúhelníků se základnou 3 m.

Označíme si výšku v trojúhelníku, ze kterého budeme výšku počítat.

Trojúhelník je pravoúhlý, z Pythagorovy věty získáme v: $v^2 = 1{,}5^2 + 2^2$, tj. $v = 2{,}5$ m.

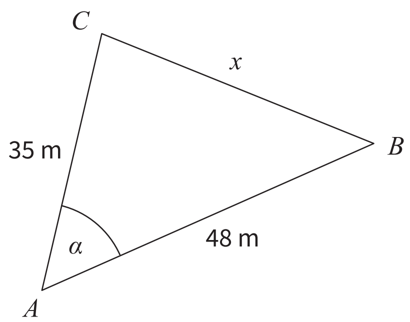




Nyní již můžeme vypočítat plochu střechy: $S = 4 \cdot S_{troj.} = 4 \cdot \dfrac{3 \cdot 2{,}5}{2} = 15$ m^2. **D) 15 m^2**

24 V trojúhelníku známe dvě strany a úhel mezi nimi, úkolem je spočítat stranu proti úhlu.

Délku strany CB tedy spočítáme pomocí kosinové věty.



$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 35^2 + 48^2 - 2 \cdot 35 \cdot 48 \cdot \cos 53°25' \doteq 1526{,}47$

$x \doteq 39$ m **B) 39 m**

25 Nejprve určíme souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC: $A = [-2; -1]$, $B = [4; -3]$, $C = [1; 3]$.

25.1

Souřadnice středu S strany AB vypočítáme ze vztahu $S = \dfrac{A + B}{2}$, tj. $S = \left[\dfrac{-2+4}{2}; \dfrac{-1-3}{2}\right] = [1; -2]$.

Nyní vypočítáme souřadnice směrového vektoru přímky $\overrightarrow{SC}$,

$\vec{s} = \overrightarrow{SC} = (1 - 1; 3 - (-2)) = (0; 5)$.

Vektor (0; 5) má z nabízených souřadnic stejný směr jako vektor (0; 1) **E) (0; 1)**

25.2
Směrový vektor přímky BC je $\overrightarrow{BC} = (1 - 4; 3 - (-3)) = (-3; 6) \sim (-1; 2)$.

Normálový vektor přímky BC je tedy $\vec{n} = (2; 1)$ ... přehodíme x-ovou a y-ovou souřadnici a u jedné změníme znaménko. **B) (2; 1)**

25.3
Je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AC, mají stejné směrové vektory bez ohledu na to, kterým bodem přímka p prochází. Směrový vektor přímky p je tedy:

$\vec{s} = \overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$ **F) (3; 4)**

25.4
Směrový vektor osy x má souřadnice (1;0).

Jestliže to nevíme, můžeme si na ose x zvolit libovolné dva body, např. $O = [0; 0]$ a $D = [1; 0]$, a určit směrový vektor osy x jako směrový vektor přímky OD,

$\vec{s} = \overrightarrow{OD} = (1 - 0); 0 - 0) = (1; 0)$.

Z nabízených vektorů má stejný směr vektor (5; 0). **C) (5; 0)**

26 26.1
Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože rozdíl počtu cestujících každých dvou sousedních vagonů je stejný (diference d). $a_{20} = 97$, $a_{30} = 147$, $a_1 = ?$

$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

$d = \frac{a_r - a_s}{r - s} = \frac{147 - 97}{30 - 20} = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d = 97 - (20 - 1) \cdot 5 = 2$

A) 2

26.2
$s_{10} = ?$

$s_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$

Vypočítáme desátý člen:

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 27 + 9 \cdot 5 = 47$

$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 47) = 245$

E) 245

26.3
$a_{31} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot d = 2 + 30 \cdot 5 = 152$

D) 152

nebo $a_{31} = a_{30} + d = 147 + 5 = 152$

ŘEŠENÍ – TEST 5

1 V pátek a v sobotu ušli $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{12}$ z celé trasy. Na neděli zbývá tedy $\frac{5}{12}$ z 11 km, tj. $\frac{55}{12}$ km $\doteq$ 4 600 m.

2 Podle definice logaritmu $r-5=3^p$, tedy $r=3^p+5$

3 $\sqrt{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{12}}$

4 $\left.\begin{matrix}A[-3;0]\\C[2;0]\end{matrix}\right\}\rightarrow y=a(x+3)(x-2)$

$y=a(x^2+x-6)$

$B[0;3]\in f\rightarrow 3=-6a\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$f: y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$

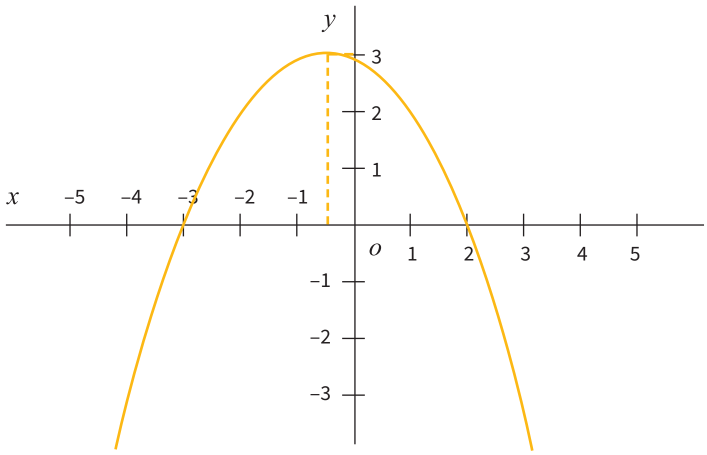
$V[m;n]=-\frac{b}{2a},\ n=f(m)$

$m=-\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$

$n=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+3=\frac{25}{8}$

$V\left[-\frac{1}{2};\ \frac{25}{8}\right]$

Největší hodnota funkce f je rovna $\frac{25}{8}$.



Využijeme znalost průsečíků grafu funkce f se souřadnicovou osou x a rozložíme kvadratický trojčlen, chybějící koeficient a získáme ze třetího zadaného bodu.
Grafem kvadratické funkce je parabola, pro $a<0$ „otevřená dolů“. Pro určení maximální hodnoty musíme najít souřadnice jejího vrcholu.

5 $\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le\frac{(3x+1)^2}{4}\quad /\cdot 4$

K řešení nerovnice použijeme ekvivalentní úpravy nerovnic.

$2(x-1)^2+8(x+1)^2\le(3x+1)^2$

$2(x^2-2x+1)+8(x^2+2x+1)\le 9x^2+6x+1$

$2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 \leq 9x^2 + 6x + 1$

$x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$(x + 3)^2 \leq 0$

$x = -3$

$K = \{-3\}$

Kvadratický člen $(x + 3)^2$ nemůže nabývat záporné hodnoty. Proto řešíme „jen" rovnici $(x + 3)^2 = 0$, která má jediné řešení.

6 $3(2x - y)(x + 5y) + x(x - 27y) = 3(2x^2 - xy + 10xy - 5y^2) + x^2 - 27xy =$

$= 3(2x^2 + 9xy - 5y^2) + x^2 - 27xy = 6x^2 + 27xy - 15y^2 + x^2 - 27xy =$

$= 7x^2 - 15y^2$

7 $a_1 = 2, a_5 = 32$

$s_5 = (a_1 + a_5) \cdot \frac{5}{2} = (2 + 32) \cdot \frac{5}{2} = 85$

8 $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm

$\Delta MNP \sim \Delta ABC \rightarrow m = ka, n = kb, p = kc$

$^{o}\Delta MNP = m + n + p = 84$ cm

$13k + 14k + 15k = 84$

$42k = 84$

$k = 2$ a nejdelší strana je $p = 30$ cm

Nejdelší strana má délku 30 cm.

9 $4(x + 2)^2 = 5$

$(x + 2)^2 = \frac{5}{4}$

$|x + 2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x + 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{2}$

10 $0{,}2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$ /+200

$0{,}2 \cdot 10^{4x-7} = 200$ /:0,2

$10^{4x-7} = 1\,000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

11 $\cos\left(\frac{8\pi x}{6}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\pi x}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $\frac{8\pi x}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11}{8} + \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

Pro $k = -1 x_1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{8},\ x_2 = \frac{11}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8} > -\frac{11}{8}$

12 $S = S_p + S_{Pl} = a^2 + 4S_{\Delta BCV}$

$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

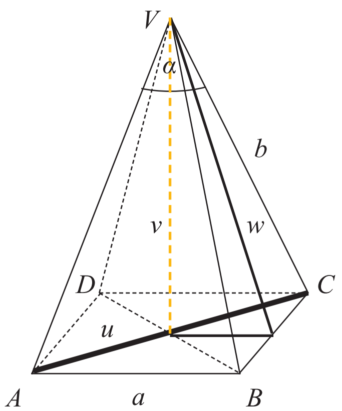
$S_p = a^2 = \frac{u^2}{2} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{2}$ cm^2 = 16 cm^2

$a = 4$ cm

$\alpha = 60°$, proto trojúhelník ACV je rovnostranný, tedy $b = u$

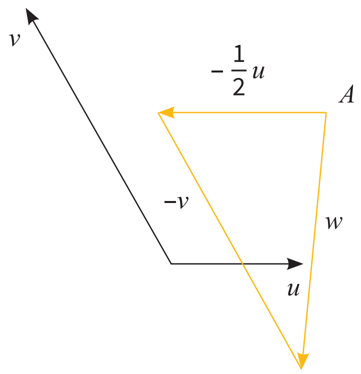
$S_{\Delta BCV} = \frac{aw}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{32 - 4}}{2}$ cm^2 = $\frac{4\sqrt{28}}{2}$ cm^2 = $4\sqrt{7}$ cm^2

$S = (16 + 4 \cdot 4\sqrt{7})$ cm^2 = $(16 + 16\sqrt{7})$ cm^2 ($\doteq 58{,}3$ cm^2)

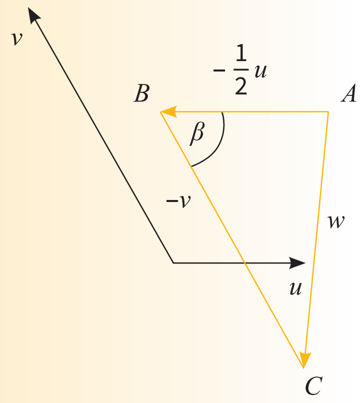


Povrch pravidelného jehlanu tvoří čtvercová podstava a plášť ze čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků.

13 13.1.



Pro výpočet velikosti nalezeného vektoru použijeme kosínovou větu pro trojúhelník ABC.



13.2.

$\beta = 180° - 120° = 60°$

$|w|^2 = \left|-\frac{1}{2}u\right|^2 + |-v|^2 - 2\left|-\frac{1}{2}u\right| \cdot |-v| \cos\beta =$

$= \frac{25}{4} + 16 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \cos 60° = \frac{25}{4} + 16 - 10 = \frac{49}{4}$

$|w| = \frac{7}{2} =$ 3,5

14 $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 - \frac{27}{64} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{16} = \frac{5}{4}$

Využijeme rovnost

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 +$

$+ \sin\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2 + \sin$

α $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

a $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$, proto

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$2 + \sin\alpha = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

15 $V(x) + V(-18-x) = \dfrac{x(-18-x)}{x+9} + \dfrac{(-18-x)\,(-18+18+x)}{-18-x+9} = \dfrac{x(-18-x)}{x+9} + \dfrac{(-18-x)\cdot x}{-x-9} = 0$

$x \neq 9$

$V(-18-x) = \dfrac{(-18-x)\cdot(-18-(-18-x))}{(-18-x)+9} = \dfrac{(-18-x)\cdot x}{-x-9}$

16 16.1. N
16.2. A
16.3. N
16.4. A

Průměrná výška ve skupině:

$\bar{h} = \dfrac{168+172+179+180+190}{5}$ cm = 177,8 cm

$\bar{h}^1 = \dfrac{168+190}{2}$ cm = 174 cm

17 C Pro $q = 1{,}5$

Pro $q = 0{,}25$ platí: $a_2 = \dfrac{a_1}{4}$, $a_3 = \dfrac{a_1}{16}$, není splněna trojúhelníková nerovnost. $(a_2 + a_3 < a_1)$. Analogicky pro $q = 0{,}5$ a pro $q = 2$.

Pro $q = 1{,}5$ je $a_2 = \dfrac{3}{2}a_1$, $a_3 = \dfrac{9}{4}a_1$,

$a_1 + a_2 = \dfrac{5}{2}a_1 > a_3 = \dfrac{9}{4}a_1$,

$a_1 + a_3 = \dfrac{13}{4}a_1 > a_2 = \dfrac{3}{2}a_1$,

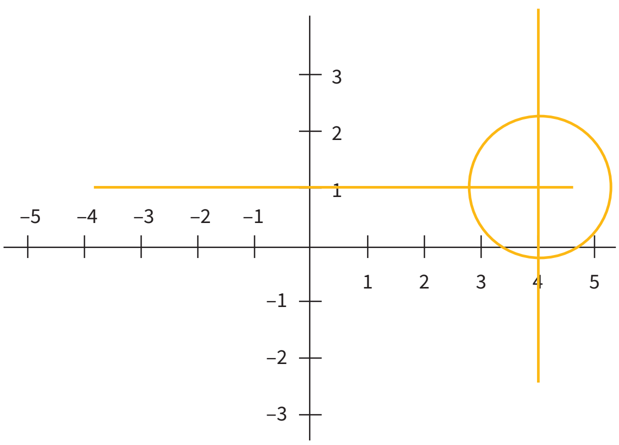
$a_2 + a_3 = \dfrac{15}{4}a_1 > a_1$

18 B $\dfrac{1}{6}$

V dané množině je 5 druhých mocnin: 1; 4; 9; 16; 25.

$P = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$

19 E $p \in (13; 16)$



Vzdálenost středu S od osy x je 1. Tzn. že při $r = 1$ by osa byla tečnou a při $r > 1$ bude sečnou, tj. budou existovat dva průsečíky.
Podobně využijeme vzdálenost středu S od osy y, ta je 4, tj. při $r = 4$ bude tečnou s jediným průsečíkem. Žádný průsečík nastane pro $r < 4$. Řešíme tedy soustavu nerovnic
$17 - p < 4 \wedge 17 - p > 1 \rightarrow p > 13 \wedge$
$\wedge\ p < 16$
$p \in (13; 16)$

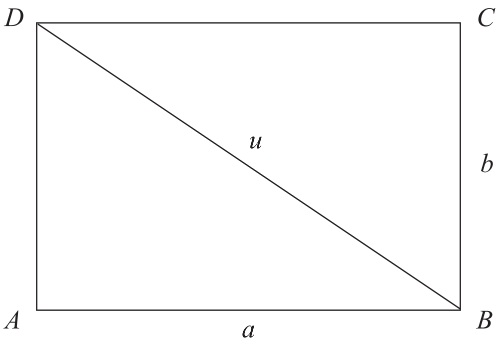
20 D $5x - 4y - 17 = 0$

$v \perp a \rightarrow a : 5x - 4y + c = 0$

$S \in a \rightarrow 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + c = 0 \rightarrow c = -17$

$a : 5x - 4y - 17 = 0$

21 A 16,86 cm^2



$S = a \cdot b$

$u^2 = a^2 + b^2$

$u^2 = (u - 3)^2 + 5{,}3^2$

$0 = -6u + 9 + 28{,}09$

$6u = 37{,}09$

$u \doteq 6{,}182$ cm, $a \doteq 3{,}182$ cm

$S = 5{,}3 \cdot 3{,}182\ cm^2 \doteq 16{,}86\ cm^2$

22 D 20,51 %

Běžná cena oběda: (85 + 199) Kč = 284 Kč

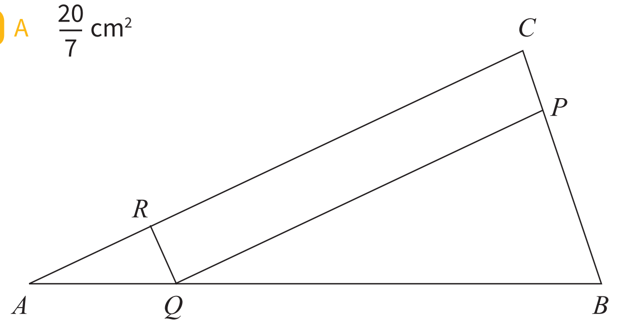
Cena oběda v akci:

$0{,}9 \cdot 85 + 0{,}75 \cdot 199$ Kč = 225,75 Kč

$\frac{225{,}75}{284} \doteq 0{,}794\,9$

100 % – 79,498 % = 20,51 %

23 A $\frac{20}{7}$ cm²



$\Delta ABC \sim \Delta AQR$ s koeficientem podobnosti $\frac{2}{7}$, protože $|AQ| = \frac{2}{7}|AB|$

$$S_{\Delta AQR} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 S_{\Delta ABC} = \frac{4}{49} \cdot 35\ \text{cm}^2 = \frac{20}{7}\text{cm}^2$$

24 A 0

$$\frac{x^2 - 9}{(3x^2 + 9x)\ (x - 3)^2} = 0$$

$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$

Zlomek je roven nule jedině tehdy, když je čitatel roven nule: $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, žádné z těchto čísel nevyhovuje podmínkám.

$K = \emptyset$

25 25.1 A

$$o = 2\pi r \rightarrow r = \frac{o}{2\pi} \rightarrow r = 1,\ V = \pi r^2 \cdot v = 2\pi \cdot 1\ \text{cm}^3 \doteq 6{,}28\ \text{cm}^3$$

25.2 C

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}},\ \text{tedy } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{20}{4\pi}}\right)^3 \text{cm}^3 \doteq 8{,}4\ \text{cm}^3$$

25.3 E

$$V \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\ \text{cm}^3 \cdot 9{,}2\ \text{cm}^3$$

25.4 D

$$V = S_p \cdot v = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot b = \frac{1{,}5^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{4}\ \text{cm}^3 \doteq 8{,}7\ \text{cm}^3$$

26 26.1 D

Poslední dvojčíslí musí být dělitelné 4: 12; 32; 52, ke každému dvojčíslí lze připojit libovolnou dvojčlennou variaci ze zbylých tří číslic

$x = 3 \cdot V_2(3) = 3 \cdot 6 = 18$

26.2 C

Na pozici jednotek nutné umístit 5, počet obsazení zbylých pozic určíme s užitím kombinatorického pravidla součinu $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ale záměnou stejných dvojek nové číslo nedostaneme, proto 24 je nutno dělit dvěma. $24 \cdot 2 = 12$

26.3 A

Číslo musí být dělitelné dvěma i třemi.

Pro dělitelnost třemi použijeme ciferný součet. Součet čtyř čísel z kartiček bude dělitelný třemi jen výběrem číslic 2; 2; 3; 5. Z vybraných číslic tvoříme uspořádané skupiny, na pozici jednotek musí být dvojka. Jejich počet určíme užitím pravidla součinu: $x = 3 \cdot 2 = 6$