对于高维的情形，由于接受率α的存在(通常$\alpha < 1$)，以上Metropolis-Hastings 算法的效率不够高。能否找到一个转移矩阵Q使得接受率$\alpha = 1$呢？我们先看看二维的情形，假设有一个概率分布$p(x,y)$，考察x坐标相同的两个点$A(x_1,y_1), B(x_1,y_2)$，我们发现

$$
\begin{aligned}
p(x_1,y_1)p(y_2|x_1) &= p(x_1)p(y_1|x_1)p(y_2|x_1) \\
p(x_1,y_2)p(y_1|x_1) &= p(x_1)p(y_2|x_1)p(y_1|x_1)
\end{aligned}
$$

所以得到

$$
p(x_1,y_1)p(y_2|x_1) = p(x_1,y_2)p(y_1|x_1) \tag{21}
$$

即

$$
p(A)p(y_2|x_1) = p(B)p(y_1|x_1)
$$

基于以上等式，我们发现，在$x = x_1$ 这条平行于y轴的直线上，如果使用条件分布$p(y|x_1)$做为任何两个点之间的转移概率，那么任何两个点之间的转移满足细致平稳条件。同样的，如果我们在$y = y_1$ 这条直线上任意取两个点$A(x_1,y_1), C(x_2,y_1)$,也有如下等式

$$
p(A)p(x_2|y_1) = p(C)p(x_1|y_1).
$$

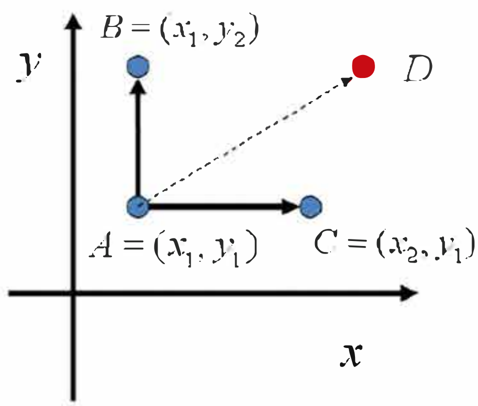

Figure 20: 平面上马氏链转移矩阵的构造

于是我们可以如下构造平面上任意两点之间的转移概率矩阵Q

$$
\begin{aligned}
Q(A \to B) &= p(y_B|x_1) & \text{如果} \quad x_A = x_B = x_1 \\
Q(A \to C) &= p(x_C|y_1) & \text{如果} \quad y_A = y_C = y_1 \\
Q(A \to D) &= 0 & \text{其它}
\end{aligned}
$$

有了如上的转移矩阵Q, 我们很容易验证对平面上任意两点X,Y，满足细致平稳条件

$$
p(X)Q(X \to Y) = p(Y)Q(Y \to X)
$$

于是这个二维空间上的马氏链将收敛到平稳分布$p(x,y)$。而这个算法就称为Gibbs Sampling 算法,由物理学家Gibbs 首先给出的。