

问题1:

模式  $w_1$  有  $p(x|w_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

模式  $w_2$  有  $p(x|w_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$

由贝叶斯风险决策规则

$$\Lambda(x) = \frac{p(x|w_1)}{p(x|w_2)} > \frac{C_{12} - C_{22}}{C_{21} - C_{11}} \frac{\Pr(w_2)}{\Pr(w_1)}$$

又  $C_{11} = C_{22} = 0$

故  $\Lambda(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}} > \frac{C_{12} \Pr(w_2)}{C_{21} \Pr(w_1)}$

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}} > \frac{C_{12} \Pr(w_2)}{C_{21} \Pr(w_1)}$$

$$\frac{1-2x}{2\sigma^2} > \ln \frac{C_{12} \Pr(w_2)}{C_{21} \Pr(w_1)}$$

$$x_0 < \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \frac{C_{12} \Pr(w_2)}{C_{21} \Pr(w_1)}$$

故最小平均风险的分类阈值为  $x_0 < \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \frac{C_{12} \Pr(w_2)}{C_{21} \Pr(w_1)}$

## 问题2:

1. 数据生成.

$X$  中的数据有  $[x_{11}, y_{11}]^T, [x_{12}, y_{12}]^T, [x_{13}, y_{13}]^T$

分别满足均值向量  $\mu_1 = [1, 1]^T, \mu_2 = [4, 4]^T,$

$\mu_3 = [8, 1]^T$  和协方差矩阵  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 2I$

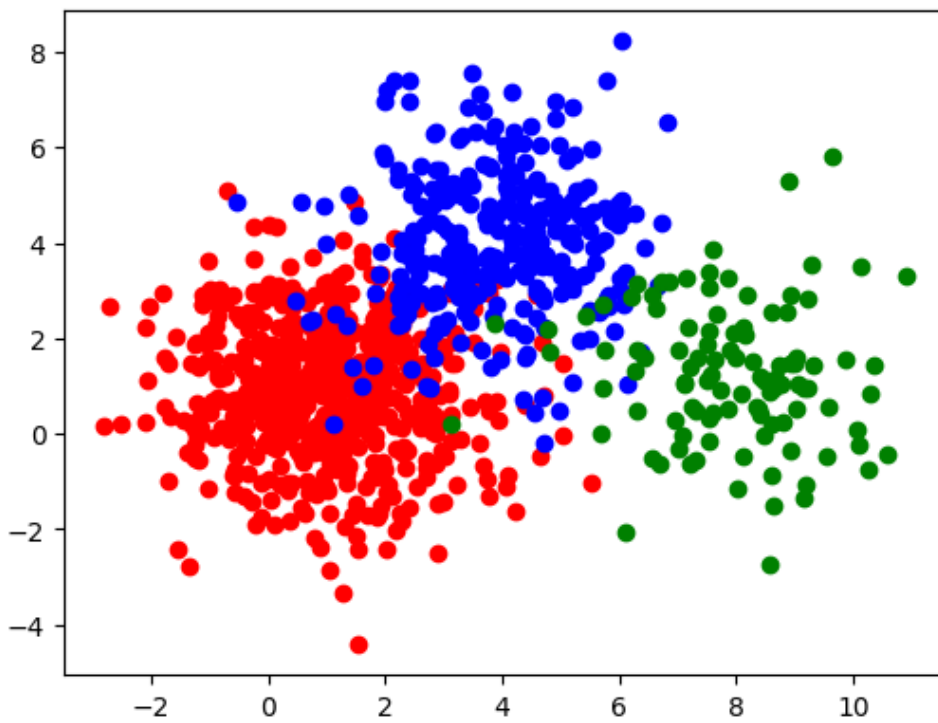
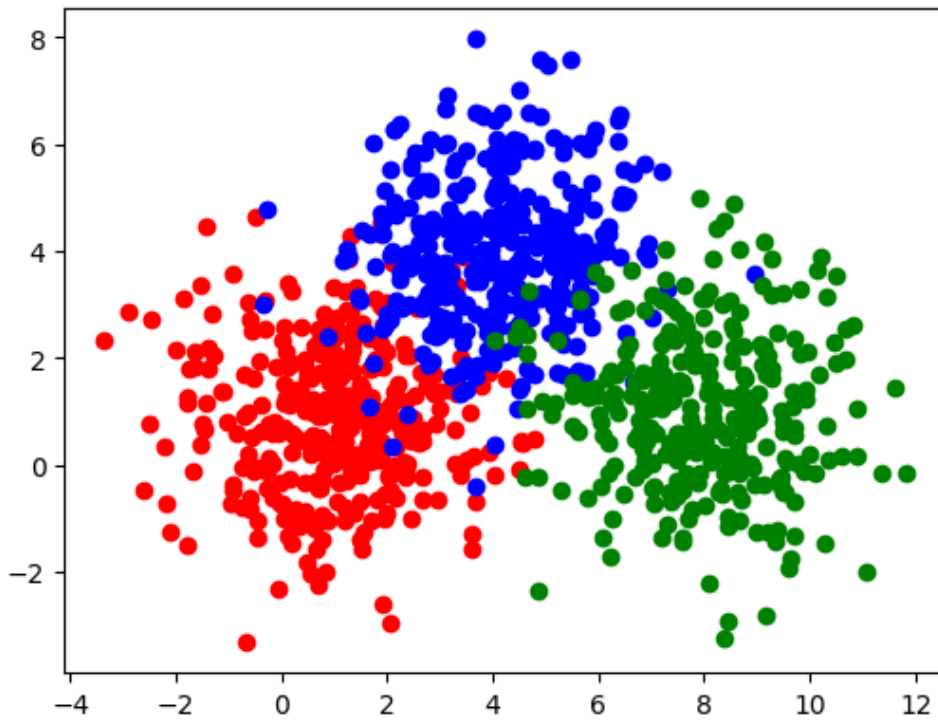
$X'$  中的数据有  $[x_{21}, y_{21}]^T, [x_{22}, y_{22}]^T, [x_{23}, y_{23}]^T$   
同理.

其中  $X$  中的三个分布的样本数量比为  $1:1:1$

$X'$  中的三个分布的样本数量比为  $6:3:1$

为两个数据集中的所有样本标上 label

2. 生成数据图像如下



3.

①似然率测试规则

$$\Lambda(x) = \frac{p(x|w_1)}{p(x|w_2)} > \frac{p_r(w_2)}{p_r(w_1)}$$

$$p(x|w_1) p_r(w_1) > p(x|w_2) p_r(w_2)$$

在数据集  $x$  中,  $p_r(w_1) = p_r(w_2) = p_r(w_3)$

$p(x|w)$  可以通过满足的正态分布计算出.

$$p(x|w) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}$$

计算出  $p(x|w)$  后, 通过似然率测试规则可以判断生成样本的 label, 通过似然生成的 label 和原始的 label 做差, 求出分类错误率.

在数据集  $x'$  中,  $p_r(w_1) : p_r(w_2) : p_r(w_3) = 6:3:1$ .

其余同理.

### ⑤ 贝叶斯风险规则

$$\frac{p(x|w_1)}{p(x|w_2)} > \frac{C_{12} - C_{22}}{C_{21} - C_{11}} \cdot \frac{p_r(w_2)}{p_r(w_1)}$$

已知  $C_{12}=2, C_{13}=3, C_{23}=2.5, C_{11}=C_{22}=C_{33}=0,$   
 $C_{21}=C_{31}=C_{32}=1,$  对任意两类进行贝叶斯  
风险规则判断。

$p(x|w)$  同样可以通过正态分布计算出。通过贝叶斯  
风险判断出贝叶斯 label, 和原始的 label 做  
差可得到分类错误率。

### ⑥ 最大后验概率规则

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \Lambda(x) = \frac{p(x|w_1)}{p(x|w_2)} > \frac{p_r(w_2)}{p_r(w_1)}$$

该情况与似然率测试相同, 不再赘述。

#### ④ 最小欧式距离规则

$$g_i(x) = -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu_i)^T (x - \mu_i) + \ln \Pr(w_i)$$

计算每个样本到均值的距离, 选取距离最小的作为 label, 和原始 label 作差得到分类错误率.

4. 分类错误率如下.

	$x$	$x'$
似然	0.069	0.071
贝叶斯	0.077	0.077
最大后验	0.069	0.071
最短欧氏	0.067	0.08

分析: 贝叶斯在不同参数下效果相同, 其余三个都是在先验相同的情况下错误率更低.

(代码见: <https://github.com/ym-guan/PR>)