

Diseño y aplicación de controladores PI, PID & PID con Acción integral.

Yeison Mauricio García Gutiérrez, ✉ y.garcia@utp.edu.co

Ian Alexander López Peña, ✉ ian.lopez@utp.edu.co

Proyecto presentado para la materia de Control II

Profesor: Ángel Antonio Marín López, Magíster (MSc) en Ingeniería Eléctrica



Universidad
Tecnológica
de Pereira

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Tecnologías

Ingeniería Mecatrónica

Pereira – Risaralda

2020

Tabla de contenido

Resumen.....	4
Abstract.....	5
Introducción	6
1 Marco teórico	7
2 Metodología	13
2.1. Diseño del controlador PI.....	16
2.2. Diseño del controlador PID.....	18
2.3. Diseño del controlador Polinomial Generalizado con Acción integral	19
3 Resultados	22
3.1. Simulación.....	22
3.1.1. Simulación del controlador PI.....	22
3.1.2. Simulación del controlador PID	24
3.1.3. Simulación del controlador Polinomial generalizado con Acción integral.....	25
3.2. Implementación en la planta real.....	27
3.2.1. Implementación del controlador PI	27
3.2.2. Implementación del controlador PID.....	28
3.2.3. Implementación del controlador Polinomial Generalizado con acción integral	29
4 Conclusiones	31
Referencias.....	32

Lista de figuras

Figura 1 Diagrama de un sistema de control	7
Figura 2 Sistema multivariable.	7
Figura 3 Controlador PI.....	9
Figura 4 Diagrama de bloques controlador PID	10
Figura 5 Señal controlador PID.....	11
Figura 6 simulación en el software proteus	13
Figura 7 montaje real del proyecto.....	14
Figura 8 Representación Horno-Voltaje.....	15
Figura 9 Grafica Horno-Voltaje	15
Figura 10 Diagrama de bloque PI lazo cerrado.....	23
Figura 11 Grafica señal de controlador PI.....	24
Figura 12 Diagrama de bloques controlador PID.....	25
Figura 13 Grafica de señal controlador PID	25
Figura 14 Diagrama de bloques controlador Polinomial Generalizado	26
Figura 15 Grafica de señal controlador Polinomial generalizado	27
Figura 16 Grafica de señal controlador PI planta real con modificación	28
Figura 17 Grafica de señal controlador PID planta real	29
Figura 18 Grafica de señal controlador polinomial con acción integral.....	30

Resumen

El resultado principal del trabajo es diseñar tres controladores aplicados a un sistema real el cual está compuesto por un horno (bombilla) y se desea controlar su temperatura. Para el control de estos se diseñarán tres controladores que son: controlador proporcional, integral (PI), controlador proporcional, integral y derivativo (PID) y por ultimo polinomial generalizado con acción integral en el controlador. Se realizarán los cálculos y se simularán en el programa Matlab, *Simulink* donde se demostrará que los controladores construidos funcionan correctamente, posteriormente se realizará la adaptación a un sistema embebido que en este caso será un Arduino, por donde será comunicado con la planta para su debido control.

Los procesos serán probados por medio de graficas donde podremos observar que cumple con los requisitos deseados y se podrá observar el comportamiento de dicha señal

Palabras clave: Controlador, Control PI, Control PID, Controlador con Acción integral

Abstract

The main result of the work is to design three controllers applied to a real system which is composed of a furnace (bulb) and you want to control its temperature. For the control of these three controllers will be designed that are: proportional controller, integral (PI), proportional controller, integral and derivative (PID) and finally generalized polynomial with integral action in the controller. The calculations will be made and simulated in the Matlab program, *Simulink*, where it will be demonstrated that the controllers built work correctly. Later, the adaptation to an embedded system will be made, which in this case will be an Arduino, where it will be communicated with the plant for its due control.

The processes will be tested by means of graphics where we will be able to observe that it fulfills the wished requirements and the behavior of this signal will be able to be observed

Keywords: Controller, PI Control, PID Control, Integrally powered controller.

Introducción

Desde los inicios de la historia el hombre ha tratado de hacer sus procesos más eficientes, en el mundo actual, nuestros campos de acción obligan a las industrias y ser más productivos con mayor calidad y menos recursos, la competencia y el desarrollo ha sido un motor para el control moderno y la automatización.

El control moderno ha traído un gran avance a la ciencia y a la ingeniería, con la implementación física y lógica de los principios fundamentales. El control automático por otro lado se ha convertido en una parte importante en los sistemas de vehículos espaciales, en los sistemas robóticos, en los procesos modernos de fabricación y en cualquier otra operación industrial que requiera un control de variables. (Ogata, 2010)

La implementación del control digital llega con la aparición de la electrónica digital y el gran desarrollo en los microprocesadores, esto ha favorecido el procesamiento digital de señales y da lugar a soluciones de diferentes necesidades en los campos de la comunicación, control de procesos, electro medicina y automatización. Con el control digital de sistemas dinámicos contamos con la posibilidad de implementar algoritmos en los sistemas embebidos o en computadores de propósito general. (Tamayo, 2016)

Se procederá a diseñar e implementar en un sistema embebido tres de los controladores digitales representativos del sector industrial y académico: el PI, PID y el controlador Polinomial generalizado con acción integral, se realizará su diseño por reubicación de polos.

1 Marco teórico

Como mencionamos anteriormente el objetivo de este trabajo es realizar el diseño e implementación de los tres controladores digitales más utilizados, para posteriormente implementarlos en un sistema embebido donde se efectuará el control de una planta real.

Daremos un breve resumen de los conceptos teóricos que serán utilizados en este trabajo. Comencemos definiendo que son los sistemas de control y cuáles son sus términos básicos:

Sistemas de control un sistema dinámico puede definirse conceptualmente como un ente que recibe acciones externas o variables de entrada, cuya respuesta a estas acciones externas son denominadas variables de salidas, un sistema de control es un tipo de sistema que se caracteriza por la presencia de una serie de elementos que permiten influir en el funcionamiento del sistema. La finalidad de un sistema de control es conseguir el dominio de las variables de salida, de modo que estas alcancen unos valores prefijados. (Universitat Politècnica de Catalunya)

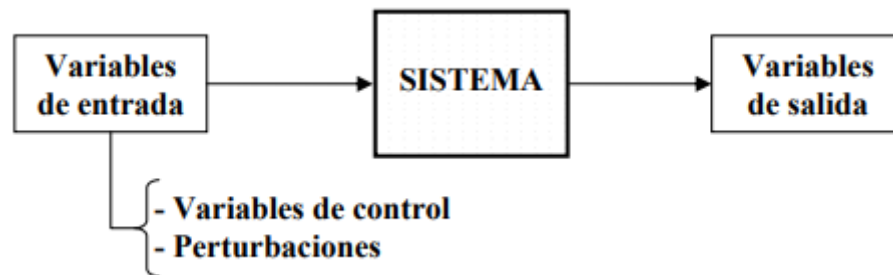


Figura 1 Diagrama de un sistema de control

Nota: Fuente <https://cutt.ly/7uAkCFn>. Sistemas de control Capítulo 2

A partir de la gráfica se puede hacer el análisis cuantitativo que consiste en hallar las respuestas (salidas) debidas a la aplicación de ciertas señales de entrada, el análisis cualitativo que consiste en analizar ciertas propiedades tales como estabilidad, controlabilidad y observabilidad. (Buitrago & Giraldo Suárez, 2009)

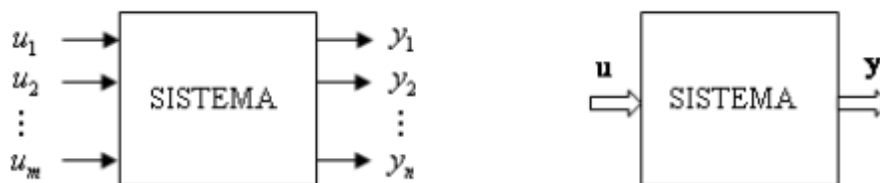


Figura 2 Sistema multivariable.

Nota: Fuente Libro Teoría de control análogo. Didier Giraldo Buitrago & Eduardo Giraldo Suárez.

En la figura 2 se muestra un bloque que representa un sistema multivariable donde la entradas las llamamos u y las salidas y

Teniendo el término de sistemas de control definidos encontramos que surgen nuevos términos adicionales que debemos definir como:

Variable controlada y señal de control o variable manipulada. La variable controlada es la cantidad que se mide y controla. La señal de control o variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. Controlar significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado (Ogata, 2010)

Plantas: una planta puede ser un conjunto de elementos que operan en una máquina, tal vez puede ser una parte de un equipo, cuyo objetivo es realizar una acción en particular. (Ogata, 2010)

Control realimentado: Cuando se habla de una realimentación se refiere a la operación que, con perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida del sistema y alguna entrada de referencia. (Ogata, 2010)

Ya teniendo nuestra introducción al control definida, comenzamos con la teoría que nos será de mucha utilidad para realizar este trabajo.

Los sistemas de control con retroalimentación se pueden clasificar de distintas maneras según su propósito, por ejemplo, según el método de análisis y diseño, se clasifican como lineales o no lineales, variantes en el tiempo o invariantes en el tiempo. De acuerdo con los tipos de señales encontradas se pueden clasificar como sistemas continuos y discretos o modulados y no modulados. (Buitrago & Giraldo Suárez, 2009)

Controladores PI: El controlador PI es la variación más popular, incluso más que los controladores PID completos. El valor de la salida del controlador $tu(t)$ se alimenta al sistema como la entrada variable manipulada. El control de PI es necesario para los procesos que no se integran, es decir, cualquier proceso que finalmente regrese a la misma salida dado el mismo conjunto de entradas y perturbaciones. Un controlador de solo P es el más adecuado para integrar procesos. (Hedengren, 2017)

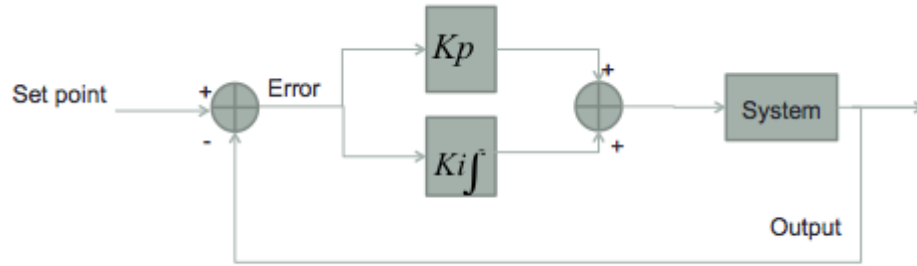


Figura 3 Controlador PI

Nota: Fuente <https://cutt.ly/UuSPYEI>. P.I Controller.

Se calcula una señal de error tomando la diferencia entre la salida de un sistema, El punto de ajuste es el nivel en el que nos gustaría que nuestro sistema se ejecute.

$$e(t) = SP - PV$$

$$u(t) = u_{bias} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t e(t) dt$$

Los u_{bias} son constantes que generalmente se establecen con el valor de $u(t)$ cuando el controlador cambia por primera vez del modo manual al modo automático. Esto proporciona una transferencia sin interrupciones si el error es cero cuando se enciende el controlador. Los valores de ajuste de un controlador PI son las ganancias llamadas K_c y la constante de tiempo integral τ_I . El valor de K_c es un multiplicador en el error proporcional y el termino integral, es un valor más alto que hace que el controlador sea más agresivo al responder a errores fuera del punto de referencia. El punto de referencia SP es el valor objetivo y la variable PV es el valor medido que puede derivarse del valor deseado. El error desde el punto de referencia es la diferencia entre el SP y el PV . (Hedengren, 2017)

Para el desarrollo de este trabajo se utilizará la función de transferencia del controlador PI en tiempo continuo para posteriormente discretizar. Simplificando la ecuación obtenemos.

$$u(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

Controladores PID: El nombre que se utiliza para identificar el tipo de controlador, generalmente está relacionado con los modos de control que lo forman: proporcional (P), integral (I) y derivativo (D); las cuales se refieren a las acciones de control tomados usualmente sobre el error. (Sanchez, Vilanova, & Arrieta)

Tenemos que para un controlador PID la potencia de salida es igual a la suma de tres coeficientes: proporcional, integral y diferencial. Cuanto mayor sea el coeficiente de proporción, menor será la potencia de salida en el mismo error de control. Cuanto mayor sea el coeficiente de integración, más lento será el coeficiente de integración acumulado. Cuanto mayor sea el coeficiente de diferenciación, mayor será la respuesta del sistema a la perturbación. El controlador PID se usa en sistemas inerciales con un nivel de ruido relativamente bajo del canal de medición. La ventaja de PID es el rápido tiempo de calentamiento, el control preciso de la temperatura de consigna y la rápida reacción a las perturbaciones. El PID de sintonización manual es extremadamente complejo, por lo que se recomienda utilizar la función de autoajuste. (TERA Ucrania, 2016)

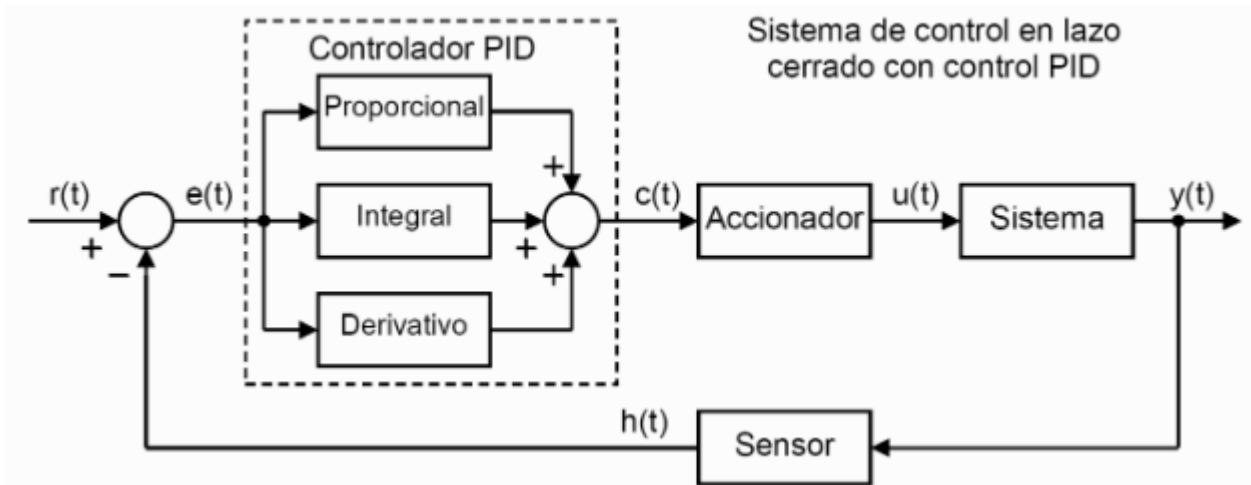


Figura 4 Diagrama de bloques controlador PID

Nota: Fuente <https://cutt.ly/WuSKnQx>. Controlador PID

La señal $r(t)$ se denomina referencia e indica el estado que se desea conseguir en la salida del sistema $y(t)$. En un sistema de control de temperatura, la referencia $r(t)$ será la temperatura deseada y la salida $y(t)$ será la temperatura real del sistema controlado. Como puede verse en el esquema anterior, la entrada al controlador PID es la señal de error $e(t)$. Esta señal indica al controlador la diferencia que existe entre el estado que se quiere conseguir o referencia $r(t)$ y el estado real del sistema medido por el sensor, señal $h(t)$. Si la señal de error es grande, significa que el estado del sistema se encuentra lejos del estado de referencia deseado. Si por el contrario el error es pequeño, significa que el sistema ha alcanzado el estado deseado. (Pardo, 2020)

Para un controlador PID proporcional, integral y derivativo se pueden establecer unas reglas sencillas para sintonizar el controlador de forma manual.

- *Acción proporcional:* Se aumenta poco a poco la acción proporcional para disminuir el error (diferencia entre el estado deseado y el estado conseguido) y para aumentar la velocidad de respuesta. Si se alcanza la respuesta deseada en velocidad y error, el PID ya está sintonizado. Si el sistema se vuelve inestable antes de conseguir la respuesta deseada, se debe aumentar la acción derivativa. (Pardo, 2020)
- *Acción integral:* En el caso de que el error del sistema sea mayor que el deseado, se aumentará la constante integral K_i hasta que el error se minimice con la rapidez deseada. Si el sistema se vuelve inestable antes de conseguir la respuesta deseada, se debe aumentar la acción derivativa. (Pardo, 2020)
- *Acción derivativa:* Si el sistema es demasiado inestable, se aumentará poco a poco la constante derivativa K_d para conseguir de nuevo estabilidad en la respuesta. (Pardo, 2020)

La ecuación general del controlador PID es

$$c(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int e(t)dt + K_d \cdot \frac{\partial e(t)}{\partial t}$$

$$PID = k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}$$

$c(t)$ = señal de control

$e(t)$ = señal de error

K_p, K_i, K_d = parámetros del controlador PID

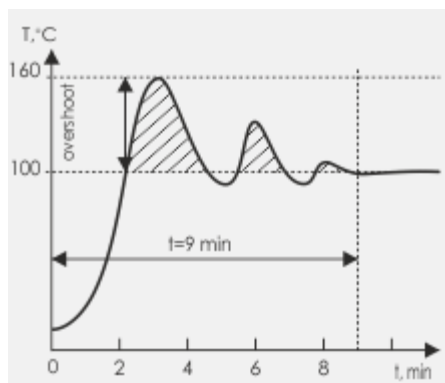


Figura 5 Señal controlador PID

Nota: Fuente <https://cutt.ly/1uSHHTW>. P, PI and PID control

Por ultimo tenemos el *controlador polinomial generalizado con acción integral*.

En este trabajo diseñaremos dicho controlador de acuerdo a las siguientes ecuaciones.

$$C(z) = \frac{L_0 Z + L_1}{(z - 1)(z^2 + P_0 Z + P_1)}$$

Donde $(z - 1)$ es la acción integral requerida y L_0, L_1, P_0, P_1 serán nuestro parámetros a encontrar.

Todos los controladores serán hallados por medio del método de reubicación de polos.

Teniendo nuestros controladores definidos procedemos a realizar el diseño de cada uno.

2 Metodología

Iniciaremos este proyecto realizando el montaje del circuito de un horno (bombilla), que será diseñado respectivamente:

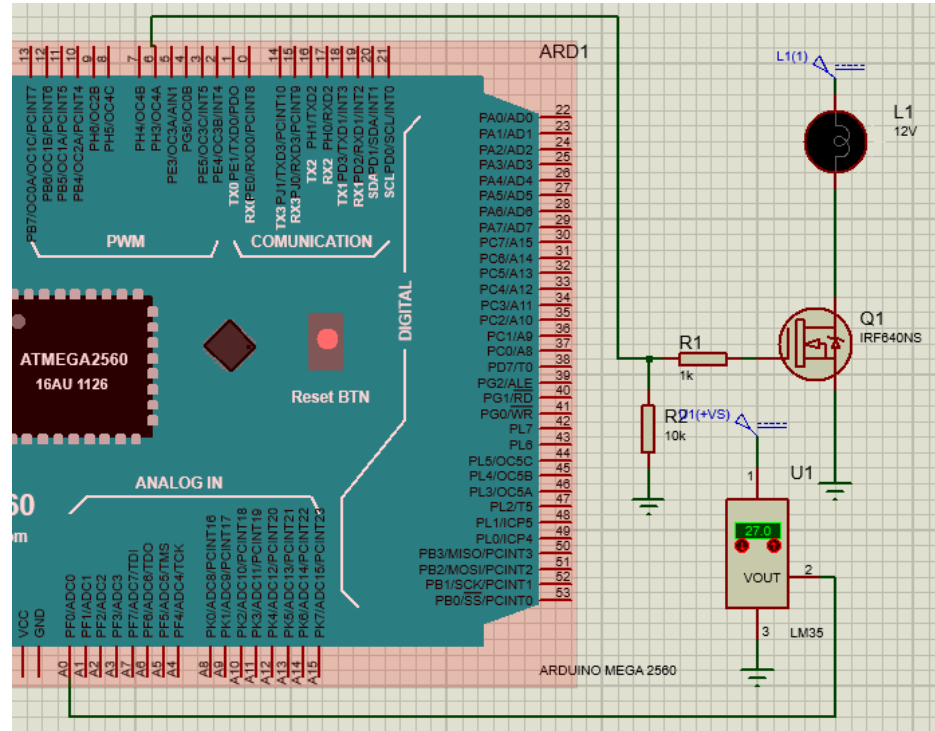


Figura 6 simulación en el software proteus

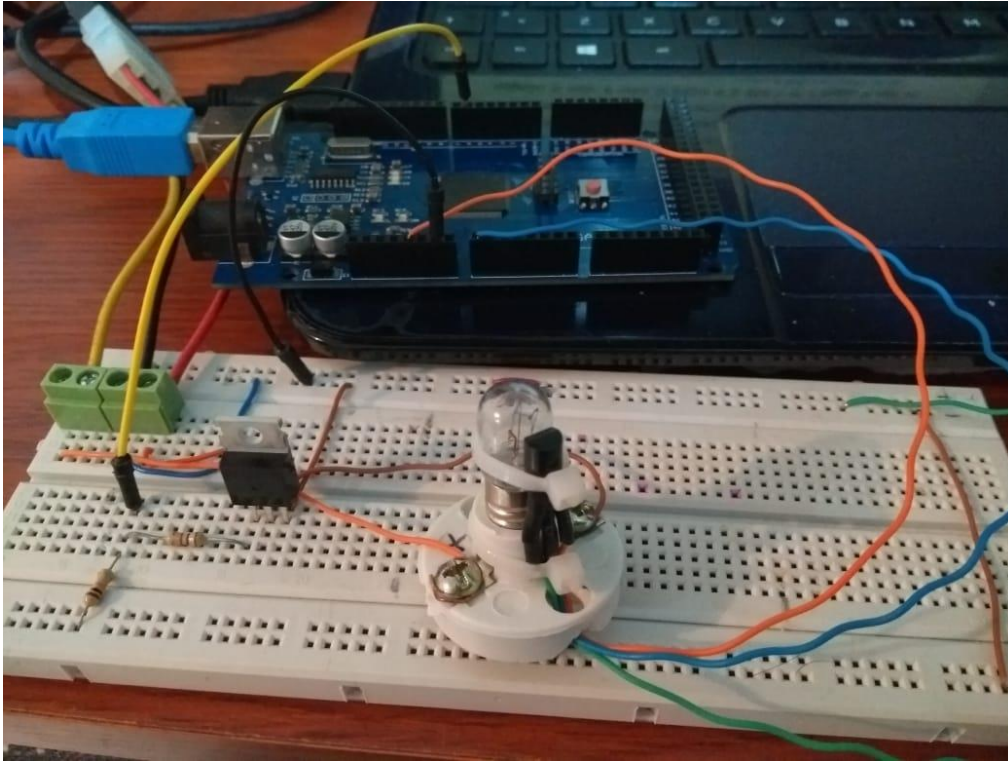


Figura 7 montaje real del proyecto

Se utiliza el sensor de temperatura lm35 el cual envía una señal de Salida lineal de 10 mV/°C esta señal esta conectada al conversor analógico digital del microcontrolador atmega2560 de 10bits donde varia de 0-1023 y matemáticamente se opera para evidenciar la temperatura en centígrados, en cuanto al control de potencia de la salida se usa el modulo de pwm del microcontrolador de 0-255 determinando asi el ciclo de trabajo 0-100% y el bombillo de 12v.

Ya que trabajaremos con 12 voltios y una potencia de 3,6 W podemos encontrar nuestra función de transferencia de nuestra planta por medio del programa de Proteus donde se diseñará el funcionamiento para la construcción de la función de transferencia de nuestra planta.

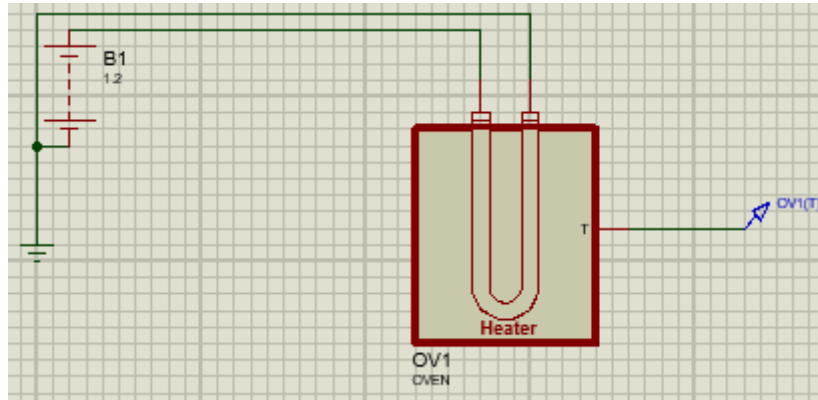


Figura 8 Representación Horno-Voltaje

Tomamos el 20% de la alimentación total de la planta real. Ubicamos 25 grados de temperatura ambiente y procedemos a graficar nuestra salida de voltaje del horno.

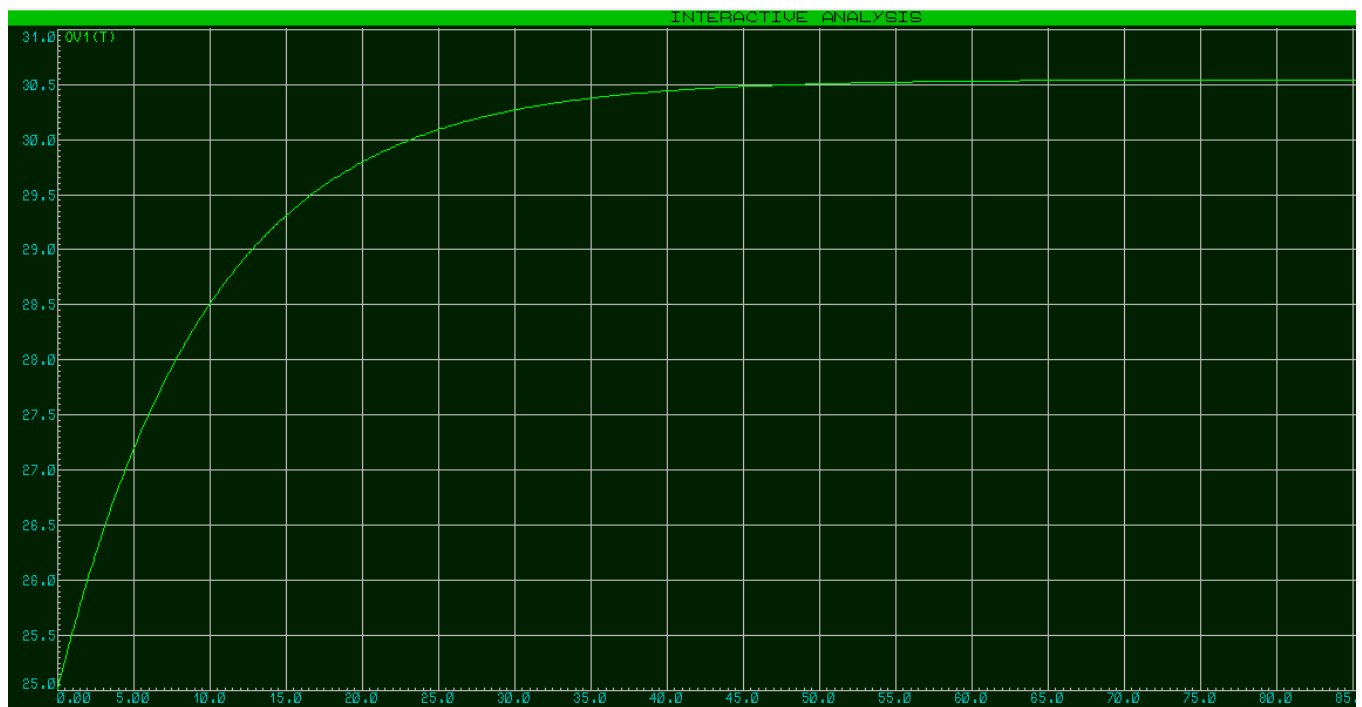


Figura 9 Grafica Horno-Voltaje

Procedemos a construir nuestra función de transferencia de nuestra planta en tiempo continuo.

$$H(s) = \frac{Ke^{\theta s}}{Ts + 1}$$

Tenemos la función de transferencia, hallamos las incógnitas.

$$4T = 30,5$$

Sabemos por la gráfica que nuestro $4T$ es 80 de acuerdo a esto reemplazamos 30,5

$$T = \frac{30,5}{4} = 7,625$$

Tenemos nuestro T hallamos k

$$k = \frac{y_f - y_i}{u_f - u_i} = \frac{30,5 - 25}{1,2 - 0} = 4,5833$$

Sacamos los valores observando la gráfica.

$$H(S) = \frac{4,3833}{7,625s + 1}$$

Por ultimo reemplazamos y tenemos la función de transferencia de nuestra planta en tiempo continuo.

Ya obtenida nuestra función de transferencia procedemos a construir nuestros controladores.

2.1. Diseño del controlador PI

Tendremos unos criterios de diseño de un máximo sobrepaso del 5%, un tiempo de establecimiento de 2 segundos y un tiempo de muestreo de 0.1 segundos, hallaremos la función del controlador bajo la teoría de reubicación de polos.

$$\xi = \sqrt{\frac{Ln(0,05)^2}{Ln(0,05)^2 + \pi^2}} = 0,69010$$

$$w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0,69010 \times 2} = 2,8981$$

Tenemos los valores de ξ y w_n podemos hallar los polos en tiempo continuo y posteriormente hallar el polinomio deseado.

$$s_{12} = -\xi W_n \pm W_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$S_{12} = -1,999 \pm 2,0973i$$

$$p_d = (S + (-1,999 + 2,0973i))(S + (-1,999 - 2,0973i))$$

$$p_d = z^2 + 3,98z + 8.398$$

Tenemos el polinomio deseado continuamos hallando el polinomio característico, para esto tenemos esta función donde hallaremos las ganancias por medio de la teoría de reubicación de polos

$$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{H(s)C(s)}{1 + H(s)C(s)}$$

Nuestra función en lazo cerrado. Procedemos en hallar el polinomio característico con:

$$PI = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$H(S) = \frac{4,3833}{7,625s + 1}$$

Reemplazamos

$$H(S) = \frac{\left(\frac{4,3833}{7,625s + 1}\right)\left(k_p s + \frac{k_p}{s}\right)}{1 + \left(\frac{4,3833}{7,625s + 1}\right)\left(k_p s + \frac{k_p}{s}\right)}$$

$$H(S) = \frac{\frac{4,5833(k_p s + k_i)}{7,625s^2 + s}}{\frac{(7,625s^2 + s) + 4,5833(k_p s + k_i)}{7,625s^2 + s}}$$

$$H(S) = \frac{4,5833k_p s + 4,5833k_i}{7625s^2 + (1 + 4,5833k_p)s + 4,5833k_i}$$

$$P_{LC} = S + \frac{(1 + 4,5833K_p)s}{7,625} + \frac{4,5833k_i}{7,625}$$

Ya encontrado nuestro polinomio característico comparamos con nuestro polinomio deseado.

$$3,98 = 1 + \frac{(1 + 4,5833K_p)}{7,625}$$

$$1 + 4,5833K_p = 28,9769$$

$$K_p = 6,104009$$

$$8,358 = 4,5833k_i$$

$$k_i = 1,8235$$

Tenemos nuestros K_p y k_i respectivamente.

2.2. Diseño del controlador PID

Para el diseño del controlador PID iniciaremos con la discretización de nuestra función de transferencia de la planta, utilizaremos la función “c2d” de Matlab para mayor facilidad al momento de diseñar. Tomamos un tiempo de muestreo de 0.1 segundos, hallaremos la función del controlador bajo la teoría de reubicación de polos.

$$H(z) = \frac{0,05972}{z - 0,987}$$

Se toman como criterios de diseño un máximo sobre impulso del 15% y un tiempo de establecimiento de 4 segundos

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln(0,15)^2}{\ln(0,15)^2 + \pi^2}} = 0,51693$$

$$w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0,51693 \times 2} = 1,9344$$

Tenemos los valores de ξ y w_n podemos hallar los polos en tiempo continuo y posteriormente hallar el polinomio deseado.

$$s_{12} = -\xi W_n \pm W_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_{12} = -0,999 \pm 1,6559i$$

Tenemos nuestros polos en tiempo continuo procedemos a discretizar

$$z = e^{-0,999 \times 0,1} \cos(0,1 \times 1,6559) \pm e^{-0,999 \times 0,1} \sin(0,1 \times 1,6559)$$

$$z = 0,8924 \pm 0,1491i$$

Tenemos nuestros polos en tiempo continuo, hallamos el tercer polo.

$$s_3 = -10$$

$$z = e^{-10 \times 0,1} = 0,3678$$

$$p_d = (z - (0,8924 + 0,1491i))(z - (0,8924 - 0,1491i))(z - 0,3678)$$

$$p_d = (z^3 - 1,417z^2 + 0,1621z + 0,30108)$$

Hallamos la función deseada procedemos a encontrar nuestro polinomio característico

$$C(z) = \frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{z(z-1)}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{z + a_1}$$

$$H_{LC}(z) = \frac{H(z)C(z)}{1 + H(z)C(z)}$$

$$H_{LC}(z) = \frac{b_0 c_0 z^2 + b_0 c_1 z + b_0 c_2}{z^3 + (a_1 - 1 + b_0 c_0)z^2 + (-a_1 + b_0 c_1)z + b_0 c_2}$$

$$P_{LC} = z^3 + (a_1 - 1 + b_0 c_0)z^2 + (-a_1 + b_0 c_1)z + b_0 c_2$$

Comparamos con nuestro polinomio deseado para hallar las constantes

$$-0,987 - 1 + 0,05972C_0 = -1,417$$

$$C_0 = \frac{0,97}{0,05972} = 9,54454$$

$$0,987 + 0,05972C_1 = 0,162159$$

$$C_1 = \frac{-0,8248}{0,05972} = -13,8118$$

$$C_2 = \frac{0,30108}{0,05972} = 9,0415$$

Tenemos nuestras constantes C_0 , C_1 y C_2

2.3. Diseño del controlador Polinomial Generalizado con Acción integral

Se procede a diseñar un controlador polinomial generalizado con acción integral, contaremos con la discretización de nuestra función de transferencia de la planta, por medio de la función “c2d” de Matlab. Tomamos un tiempo de muestreo de 0.1 segundos, hallaremos la función del controlador bajo la teoría de reubicación de polos.

$$H(z) = \frac{0,05972}{z - 0,987}$$

Se toman como criterios de diseño un máximo sobre impulso del 15% y un tiempo de establecimiento de 4 segundos

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln(0,15)^2}{\ln(0,15)^2 + \pi^2}} = 0,51693$$

$$w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0,51693 \times 2} = 1.9344$$

Tenemos los valores de ξ y w_n podemos hallar los polos en tiempo continuo y posteriormente hallar el polinomio deseado.

$$s_{12} = -\xi W_n \pm W_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$S_{12} = -0,999 \pm 1,6559i$$

Tenemos nuestros polos en tiempo continuo procedemos a discretizar

$$z = e^{-0,999 \times 0,1} \cos(0,1 \times 1,6559) \pm e^{-0,999 \times 0,1} \text{sen}(0,1 \times 1,6559)$$

$$z = 0,8924 \pm 0,1491i$$

Tenemos nuestros polos en tiempo continuo, hallamos el tercer y cuarto polo.

$$s_{34} = -10$$

$$Z_{34} = e^{-10 \times 0,1} = 0,3678$$

$$p_d = (Z - (0,8924 + 0,1491i))(Z - (0,8924 - 0,1491i))(Z - 0,3678)^2$$

$$P_d = z^4 - 2,5204z^3 + 2,26678z^2 - 0,84361z + 0,11073$$

Hallamos la función deseada procedemos a encontrar nuestro polinomio característico

$$C(z) = \frac{L_o Z + L_1}{(z - 1)(z^2 + P_o Z + P_1)}$$

$$H(z) = \frac{b_o Z + b_1}{Z^2 + a_1 Z + a_2}$$

$$H_{LC}(z) = \frac{H(z)C(z)}{1 + H(z)C(z)}$$

$$H_{LC}(z) = \frac{\left(\frac{b_o Z + b_1}{Z^2 + a_1 Z + a_2}\right) \left(\frac{L_o Z + L_1}{(z - 1)(z^2 + P_o Z + P_1)}\right)}{1 + \left(\frac{b_o Z + b_1}{Z^2 + a_1 Z + a_2}\right) \left(\frac{L_o Z + L_1}{(z - 1)(z^2 + P_o Z + P_1)}\right)}$$

$$P_{LC} = z^4 + ((P_o - 1) + (a_1))z^3 + ((P_1 - P_o) + (a_1 P_o - a_1))z^2 + ((-P_1) + (a_1 P_1 - a_1 P_o) + (b_o L_o))z - a_1 P_1 + b_o L_1$$

Teniendo nuestro polinomio característico y nuestro polinomio deseado podemos realizar comparación para despejar las variables.

Construimos una Matriz de Sylvester

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_1 - 1) & 1 & 0 & 0 \\ (-a_1) & (a_1 - 1) & b_0 & 0 \\ 0 & (-a_1) & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ L_0 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 + 1 \\ \alpha_2 + a_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1,987 & 1 & 0 & 0 \\ 0,987 & -1,987 & 0,05972 & 0 \\ 0 & 0,987 & 0 & 0,05972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ L_0 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5334 \\ 1,27978 \\ -0,84361 \\ 0,11073 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \times B$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,987 & 1 & 0 & 0 \\ 49,5842 & 33,2719 & 16,7448 & 0 \\ -32,8394 & -16,5271 & 0 & 16,7448 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,5334 \\ 1,27978 \\ -0,84361 \\ 0,11073 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -0,5334 \\ 0,2199 \\ 2,0065 \\ -1,7804 \end{bmatrix}$$

Donde sus valores correspondientes son:

$$P_0 = -0,5334$$

$$P_1 = 0,2199$$

$$L_0 = 2,0065$$

$$L_1 = -1,7804$$

3 Resultados

Como resultados se demostrará mediante gráficas y pruebas los controladores diseñados

3.1. Simulación

En esta sección se mostrarán los controladores simulados por medio del programa Matlab *Simulink*

Iniciaremos con el controlador PI

3.1.1. Simulación del controlador PI

Previamente encontramos los valores de K_i y K_p , el sistema se trabajó en tiempo continuo, a continuación, discretizaremos la planta y el controlador para realizar la simulación en tiempo discreto.

Se procede a discretizar la función del controlador por el método hacia atrás.

$$C(s) = k_p + \frac{k_I}{s}$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = k_p + \frac{k_I}{\left(\frac{1 - z^{-1}}{h}\right)}$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{k_p + k_I h - k_p z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$u(z) = \frac{(k_p + k_I h)z - k_p}{z - 1}$$

Tenemos la función del controlador en tiempo discreto. Procedemos a discretizar la función de transferencia de la planta por el método hacia atrás.

$$H(S) = \frac{4,3833}{7,625s + 1}$$

$$H(z) = \frac{4,3833}{7,625(\frac{1-z^{-1}}{h}) + 1}$$

$$H(z) = \frac{4,3833}{\frac{7,625 - 7,625z^{-1}}{h} + 1}$$

$$H(z) = \frac{4,3833h}{7,625 - 7,625z^{-1} + h}$$

$$H(z) = \frac{4,3833h}{(7,625 + h)z - 7,625}$$

Una vez obtenidas las funciones de transferencia discretizadas procedemos a construir nuestro diagrama de bloques en *Simulink*

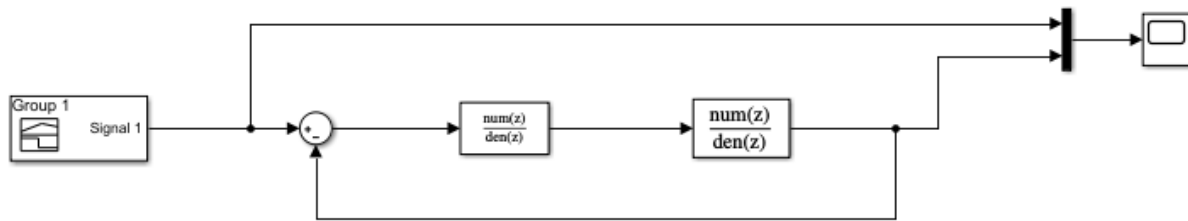


Figura 10 Diagrama de bloque PI lazo cerrado

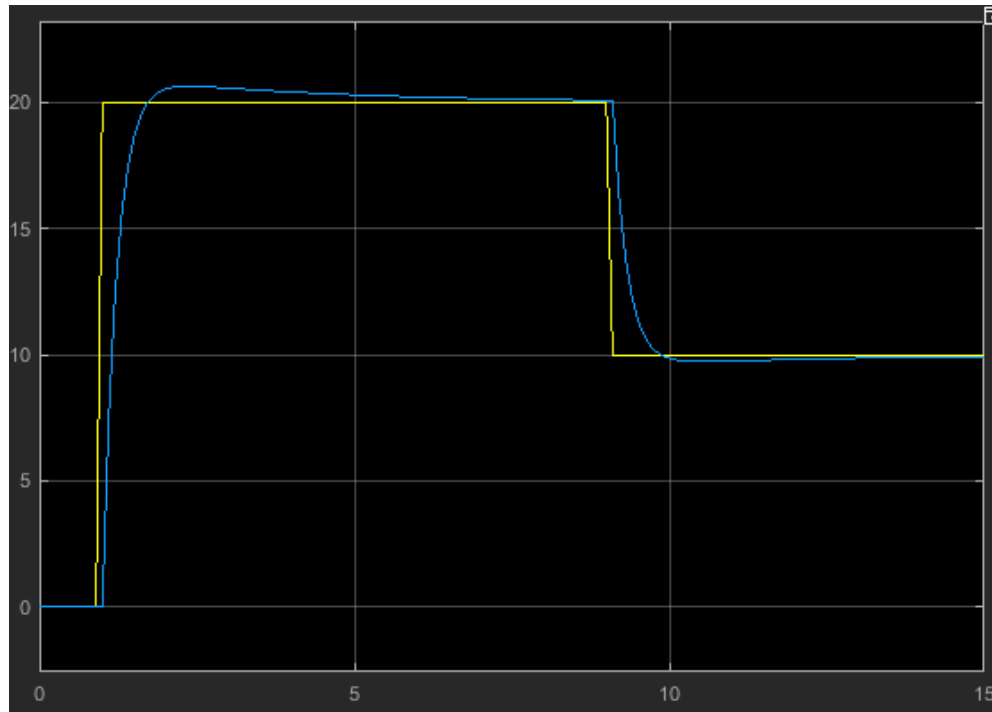


Figura 11 Grafica señal de controlador PI

En la Fig. 9 se observa que se realiza el seguimiento de la señal de referencia en los cambios de referencia, la parte proporcional funciona correctamente ya que tiene una subida al momento del cambio de referencia y la parte integral al momento de pasar por la referencia hace la corrección del error. El sistema tiene un tiempo de establecimiento de aproximadamente 3 segundos y un máximo sobrepaso mínimo.

3.1.2. Simulación del controlador PID

Para la simulación del controlador PID utilizaremos las funciones de transferencia discretizadas, la función de transferencia de la planta será discretizada por la función “c2d” de Matlab.

$$H(z) = \frac{0,05972}{z - 0,987}$$

$$C(z) = \frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{z(z - 1)}$$

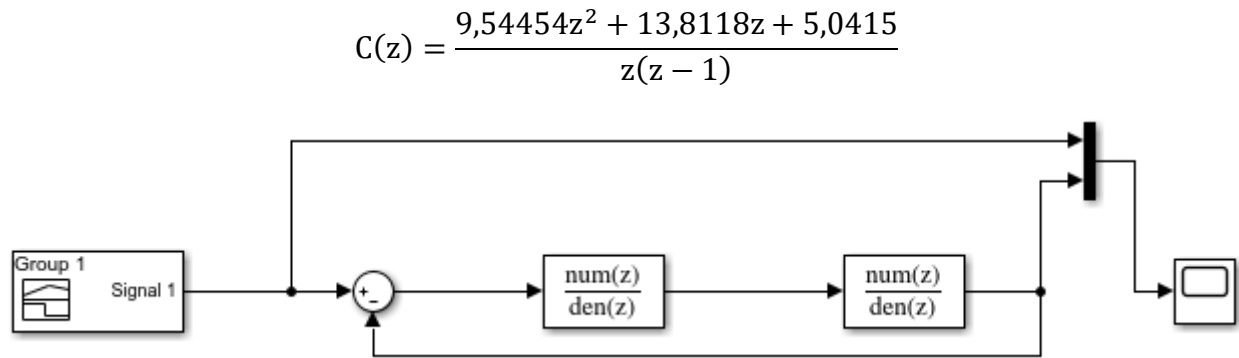


Figura 12 Diagrama de bloques controlador PID

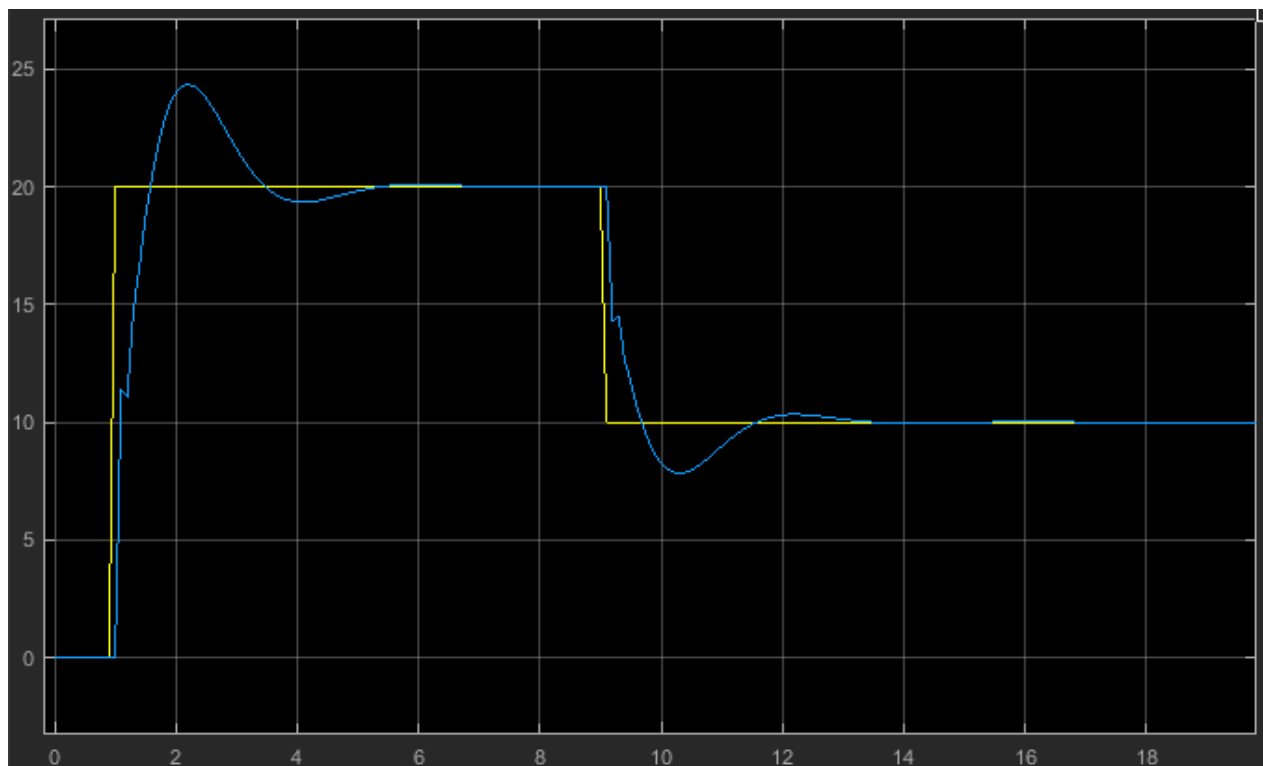


Figura 13 Grafica de señal controlador PID

En la gráfica de la Fig. 11 se puede observar los cambios de referencia y su seguimiento de la señal, con los criterios de diseño correspondientes, la señal tiene un pico alto, pero con la corrección del error logra llegar a la referencia

3.1.3. Simulación del controlador Polinomial generalizado con Acción integral

El controlador polinomial generalizado cuenta con una función de transferencias así:

$$C(z) = \frac{L_0 Z + L_1}{(z - 1)(z^2 + P_0 Z + P_1)}$$

$$C(z) = \frac{2,0065Z - 1,7804}{(z - 1)(z^2 - 0,5334Z + 0,2199)}$$

Utilizaremos la función de transferencia de la planta con la función de Matlab previamente encontrada que es:

$$H(z) = \frac{0,05972}{z - 0,987}$$

Procedemos a realizar el diagrama de bloques en *Simulink*

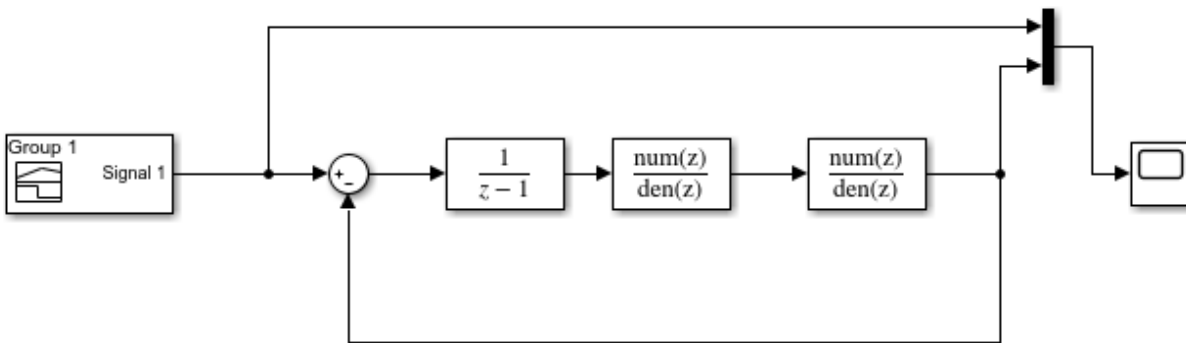


Figura 14 Diagrama de bloques controlador Polinomial Generalizado

Podemos observar que el controlador tiene la acción integral agregada.

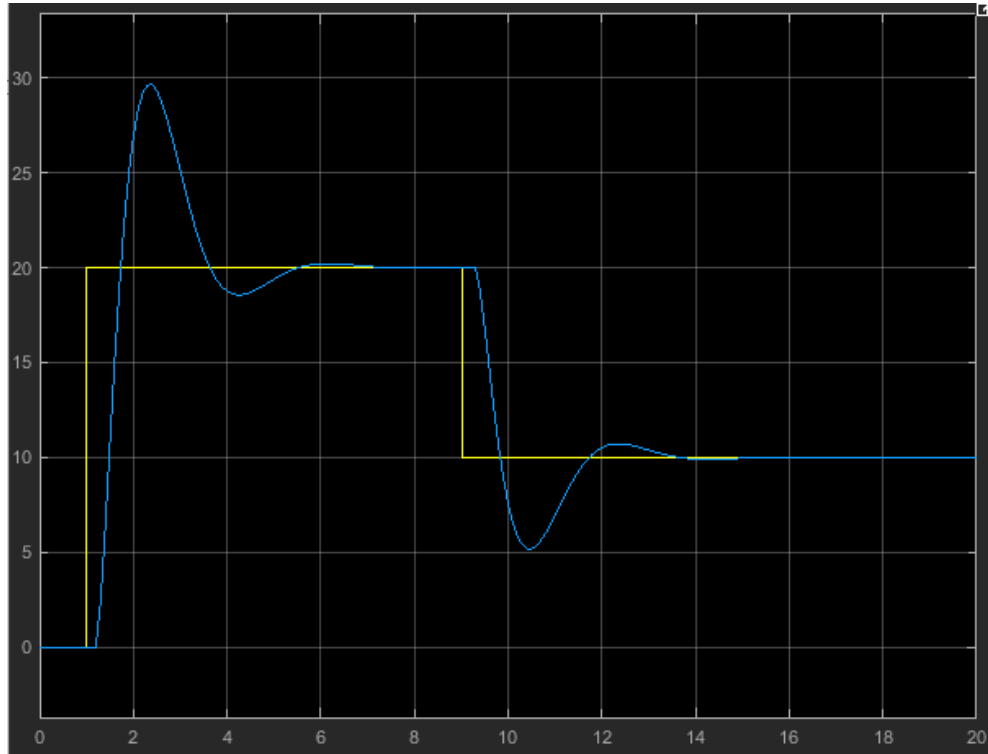


Figura 15 Grafica de señal controlador Polinomial generalizado

En la gráfica de la Fig. 13 se puede observar los dos cambios de referencia y su seguimiento de la señal, con los criterios de diseño correspondientes, la señal tiene un pico muy alto, pero con logra llegar a la referencia rápidamente.

3.2. Implementación en la planta real

Con nuestros controladores anteriormente diseñados y simulados, procederemos a implementarlo en nuestro sistema embebido, en este caso utilizaremos Arduino.

3.2.1. Implementación del controlador PI

Para implementar el controlador PI a nuestro arduino tendremos que pasar la función de transferencia a una ecuación en diferencias

$$u(z) = \frac{(k_p + k_i h)z - k_p}{z - 1} \times e(z) \times \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

$$u[k] = u[k - 1] + [k_p + k_i h]e[k] - k_p e[k - 1]$$

$$u[k] = u[k - 1] + [6,28644]e[k] - 6,10409e[k - 1]$$

La grafica de la señal es

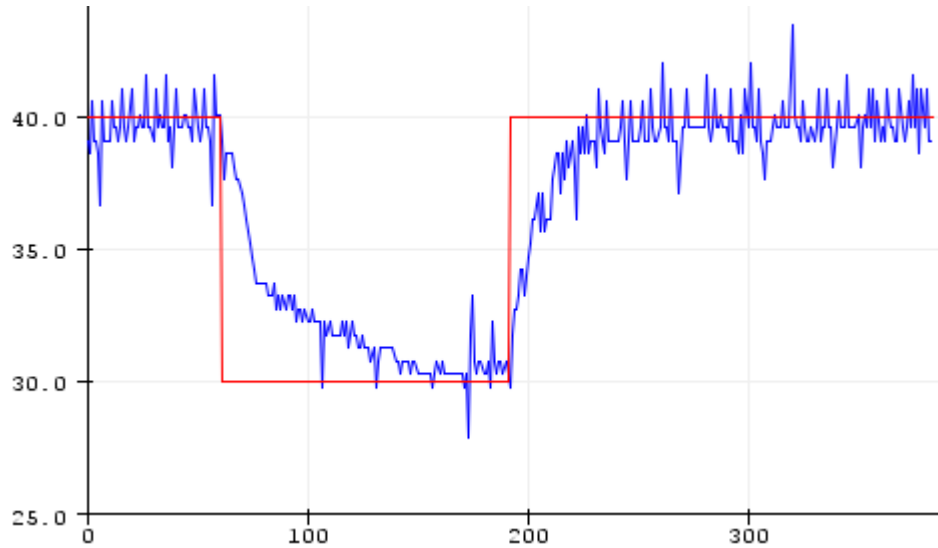


Figura 16 Grafica de señal controlador PI planta real con modificación

Podemos observar en la gráfica de la Fig. 17 las oscilaciones de nuestro sistema, pero que alcanza el valor de referencia requerido.

3.2.2. Implementación del controlador PID

Para la implementación del controlador PID a nuestro arduino debemos encontrar la ecuación en diferencias de nuestro controlador.

$$C(z) = \frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{z(z - 1)} \times e(z) \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}}$$

$$u[k] = u[k - 1] + C_0 e[k] + C_1 e[k - 1] + C_2 e[k - 2]$$

$$u[k] = u[k - 1] + 9,54454e[k] - 13,8118e[k - 1] + 5,0415e[k - 2]$$

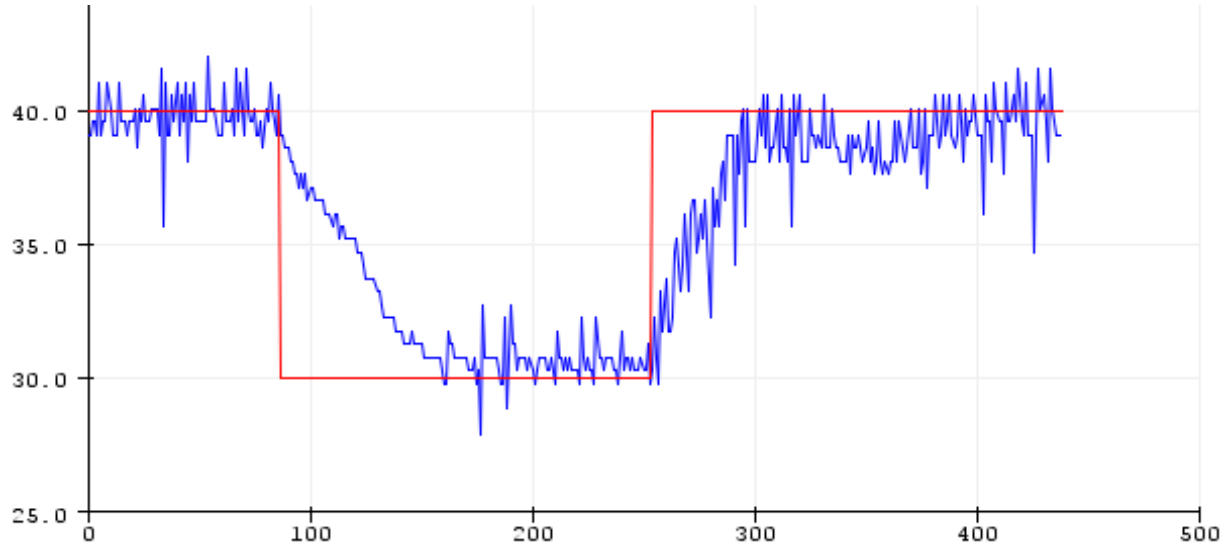


Figura 17 Gráfica de señal controlador PID planta real

Podemos observar en la gráfica de la Fig. 18 que la señal alcanza el valor de referencia pedido, pero se observan unas oscilaciones.

3.2.3. Implementación del controlador Polinomial Generalizado con acción integral

Para la implementación de nuestro controlador Polinomial Generalizado debemos utilizar la ecuación en diferencias.

$$C(z) = \frac{L_0 Z + L_1}{(z - 1)(z^2 + P_0 Z + P_1)} \times e(z) \times \frac{z^{-3}}{z^{-3}}$$

$$u[k] = -(P_0 - 1)u[k - 1] - (P_1 - P_0)u[k - 2] + P_1 u[k - 3] + L_0 e[k - 2] + L_1 e[k - 3]$$

$$u[k] = -0,4666u[k - 1] - 0,7533u[k - 2] + 0,2199u[k - 3] + 2,0065e[k - 2] + 1,7804e[k - 3]$$

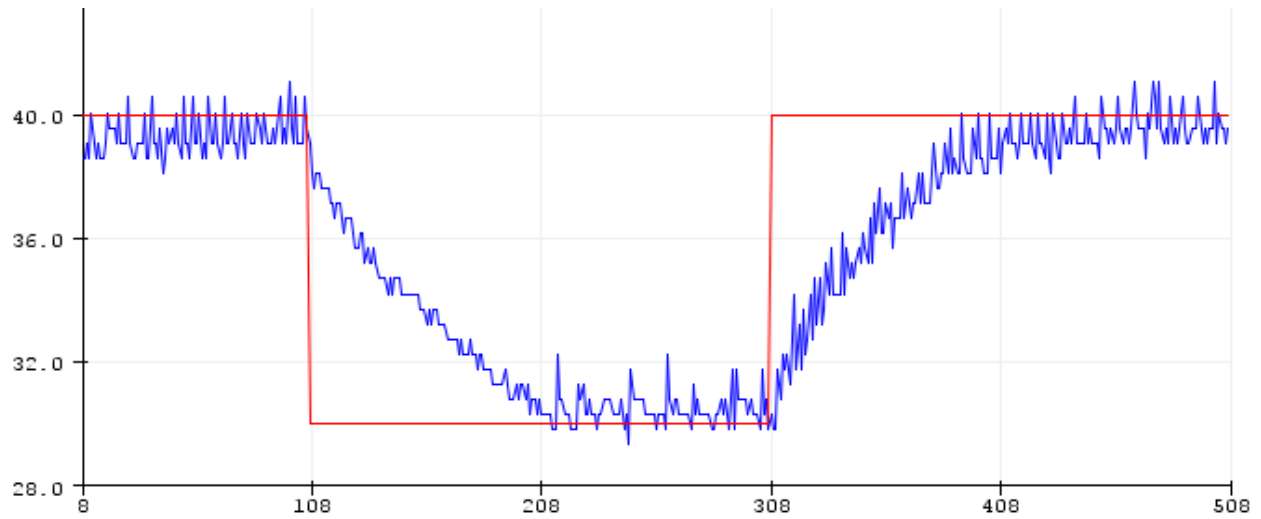


Figura 18 Gráfica de señal controlador polinomial con acción integral

Por ultimo podemos observar en la gráfica de la Fig.19 que la señal llega a los valores de referencia, pero tiene unas oscilaciones muy mínimas.

4 Conclusiones

Como conclusión principal encontramos que los valores resultantes de las constantes son un elemento bastante importante al momento de diseñar un controlador, ya que nos definirá la estabilidad y el funcionamiento del controlador.

Podemos concluir que se al momento de comparar el sistema y el controlador simulado contra el sistema y el controlador real, existe una gran diferencia en cuanto a señales y funcionamiento, deducimos que esto es debido a que en las simulaciones no se tienen en cuenta variables existentes en el ambiente y en la vida real.

Al momento de realizar el controlador PI se discretizó la función por medio del método hacia atrás y pretendimos realizar el siguiente controlador que se trataba del PID, pero encontramos que al momento de hallar el polinomio característico se tornaba más extenso el cálculo. Es por esto que decidimos realizarlo por medio de la función 'c2d' de Matlab.

Se evidencio que, en nuestra planta real, al momento de llegar a la referencia se encontraban oscilaciones mínimas, deducimos que esto sucede ya que al tratarse de una variable como la temperatura puede llegar a influir las variables que existen en el ambiente, los cambios de temperatura etc.

Referencias

- Buitrago, D. G., & Giraldo Suárez, E. (2009). *Teoría de control análogo*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Hedengren, J. D. (2 de Octubre de 2017). *Briham Young University*. Obtenido de Proportional Integral (PI) Control: <https://apmonitor.com/pdc/index.php/Main/ProportionalIntegralControl>
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Madrid: Pearson Education.
- Pardo, C. (2020). *Picuino*. Obtenido de <https://www.picuino.com/es/arduprog/control-pid.html>
- Sanchez, H. S., Vilanova, R., & Arrieta, O. (s.f.). *Implementación de controladores PID: Equivalencia y Optimalidad*. Obtenido de http://www.ja2014.upv.es/wp-content/uploads/papers/paper_130.pdf
- Tamayo, J. P. (2016). *Diseño e implementación de controladores digitales a través de un sistema de adquisición de datos*. Pereira: Scientia et Technica.
- TERA Ucrania. (2016). *TERA ukraine PJSC*. Obtenido de <https://www.ao-tera.com.ua/list/us/technology/0/246.html>
- Universitat Politècnica de Catalunya. (s.f.). *Sistemas de control*. Obtenido de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/3330/34059-5.pdf?sequence=5&isAllowed=y>