10　Jacobi 場

10.1　$F: I_1 \times I_2 \to M$ を区間の直積 $I_1 \times I_2$ から Riemann 多様体への C^∞ 級写像とし，曲線 $\gamma_s: I_2 \to M$ を $\gamma_s(t) = F(s,t)$ で，曲線 $\omega_t: I_1 \to M$ を $\omega_t(s) = F(s,t)$ で定義する．また各 $(s,t) \in I_1 \times I_2$ に対し $V(s,t) \in T_{F(s,t)}M$ が与えられており，(s,t) に関して C^∞ 級であるとする*．$\nabla_{\dot\omega_t}\nabla_{\dot\gamma_s}V - \nabla_{\dot\gamma_s}\nabla_{\dot\omega_t}V = R(\dot\omega_t, \dot\gamma_s)V$ を示せ．［ヒント：局所座標系を用いて計算.］

10.2　測地線 $\gamma: I \to M$ に沿って定義された Jacobi 場 $J = J(t)$ について，ある $t_0 \in I$ に対し $J(t_0) \perp \dot\gamma(0)$，$\dot J(t_0) \perp \dot\gamma(0)$ ならば任意の $t \in I$ に対し $J(t) \perp \dot\gamma(t)$ であることを示せ．［ヒント：内積 $\langle J(t), \dot\gamma(t)\rangle$ を t に関して 2 回微分する.］

10.3　双曲平面 $\mathbb{H}^2$ における Jacobi 場の例を，測地線の 1 パラメタ族をもとに構成してみよう．上半平面モデル $H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ を用いる．

(1)　任意の実数 s に対し，

$$\gamma_s(t) = \left(\frac{s(e^{2t}-1)}{1+s^2e^{2t}}, \frac{(1+s^2)e^t}{1+s^2e^{2t}} \right)$$

で与えられる H^2 の曲線 γ_s が測地線であることを確かめよ．

(2)　$\gamma = \gamma_0$ に沿った Jacobi 場 $J(t) = \left.\dfrac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}\right|_{s=0}$ を考える．また，点 $\gamma(0) = (0,1)$ における接ベクトル $(1,0) \in T_{(0,1)}H^2$ を平行移動して得られる γ に沿った単位平行ベクトル場を $e_2 = e_2(t)$ とする．$J(t) = (\sinh t)e_2(t)$ を示せ．

(3)　$J(t)$ が Jacobi 方程式をみたすことを確かめよ．

10.4　測地線 $\gamma: [a,b] \to M$ に沿って $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ が共役ではないと仮定する．そのとき，任意に与えられた $v \in T_{\gamma(a)}M$，$w \in T_{\gamma(b)}M$ に対して，$J(a) = v$，$J(b) = w$ をみたす γ に沿った Jacobi 場 $J(t)$ がただ一つ存在することを示せ．［ヒント：$v = 0$ として証明すれば十分である（なぜか？）．$J(a) = 0$ をみたすすべての Jacobi 場がなすベクトル空間を $\mathcal{J}_0$ とする．$J \mapsto J(b)$ で定義される $\mathcal{J}_0$ から $T_{\gamma(b)}M$ への線型写像を考えよ.］

10.5　Riemann 多様体 (M,g) の **Killing ベクトル場**とは，その任意の局所フロー $\varphi_t: U \to M$（U は開集合，$-\varepsilon < t < \varepsilon$）が $\varphi_t^* g = g|_U$ をみたすようなもののことである．

(1)　Killing ベクトル場を測地線 γ に制限したものは Jacobi 場であることを示せ．

(2)　連結な Riemann 多様体 (M,g) では，Killing ベクトル場 X がある点 $p \in M$ において $X(p) = 0$ かつ $\nabla_v X = 0$（$v \in T_pM$ は任意）をみたすならば，M 全体で $X = 0$

---

*V が接束 TM への写像 $I_1 \times I_2 \to TM$ として C^∞ 級ということ．$V(s,t)$ を局所座標系を用いて表示したときの各成分が (s,t) に関して C^∞ 級ということだといってもよい．

であることを示せ.