14 Cartan–Hadamard の定理

14.1 完備 Riemann 多様体 (M, g) が非正曲率をもつ（断面曲率が $K(\sigma) \leqq 0$ をみたす）とする．そのとき M のどんな測地線 $\gamma\colon [0, \infty) \to M$ も始点 $\gamma(0)$ の共役点を $(0, \infty)$ の範囲にもたないが，これは以下のようにして，Rauch の比較定理を使わずに簡単に証明できる．

γ に沿って定義された $J(0) = 0$，$\dot{J}(0) \neq 0$ をみたす Jacobi 場 J を考える．仮定 $K(\sigma) \geqq 0$ を用いて $\dfrac{d}{dt}|J(t)|^2 \geqq 0$ を示せ．またそのことから $t > 0$ で $|J(t)|^2 > 0$ であることを示せ．

14.2 M，N を C^∞ 級多様体とし，$f\colon N \to M$ を局所微分同相写像とする．この f が次に述べる **smooth path lifting property** をもつと仮定する．

> 任意の C^∞ 級曲線 $\gamma\colon [0, T] \to M$ と $f(q_0) = \gamma(0)$ をみたす $q_0 \in N$ に対し，q_0 を始点とする C^∞ 級曲線 $\tilde{\gamma}\colon [0, T] \to N$ であって，γ のリフトになっている（$f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ をみたす）ようなものが存在する．

そのとき f が可微分被覆写像であることを，以下に従って証明せよ．

［注：位相空間のあいだの連続写像 $f\colon Y \to X$ についても同様の主張があるが，それが可微分カテゴリーでも成立するのだ，というのが本問の眼目である．］

(1) 任意に $p \in M$ をとる．M は多様体だから，p の弧状連結かつ単連結な開近傍 U をとれる．$f^{-1}(U)$ の連結成分への分解を $f^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ とする（$f^{-1}(U)$ は多様体 N の開集合であることから局所弧状連結なので，V_α は弧状連結でもある）．各 V_α が N の開集合であることを示せ．

(2) 各 V_α への f の制限 $f|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ を考える．これが全単射であることを示せば，逆写像 $(f|_{V_\alpha})^{-1}$ の微分可能性は f が局所微分同相写像であることから直ちにわかるので，f が可微分被覆写像であると結論できる．

まず，$f|_{V_\alpha}$ が全射であることを，smooth path lifting property を用いて示せ．

(3) $f|_{V_\alpha}$ の単射性を示そう．もし $f(q_1) = f(q_2)$，q_1，$q_2 \in V_\alpha$ ならば，q_1 を出発し q_2 に至る V_α の C^∞ 級曲線 $\gamma\colon [0, T] \to V_\alpha$ がある．$\underline{\gamma} = f \circ \gamma\colon [0, T] \to U$ は U の閉曲線であり，U の単連結性により定曲線にホモトピック．このホモトピーを $F\colon [0, T] \times [0, 1] \to U$ とする（端点は固定しておく）．F は C^∞ 級写像とすることができる[*]．

F が $\tilde{F}(t, 0) = \gamma(t)$ をみたすリフト $\tilde{F}\colon [0, T] \times [0, 1] \to V_\alpha$ をもつことがわかれば

---

[*]本問はこの事実をとりあえず認めて解答してよい．Friedrichs の軟化子をうまく使えばよいのだが，写像 F の値は多様体の点だから何らかの工夫が必要である．U を $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする開球を像とするようなチャートとしておき，F を $\mathbb{R}^n$ 値関数とみなすのが一つの単純な方法だろう．

$q_1 = q_2$ が従う．その理由を説明せよ．

(4)　$0 \leqq s_0 < 1$ とする．F が仮に $[0,T] \times [0,s_0]$ までは前述のようなリフト $\tilde{F}$ をもつとしよう．$[0,T]$ のコンパクト性に注意して，ある $\delta > 0$ が存在して $\tilde{F}$ が $[0,T] \times [0, s_0 + \delta)$ におけるリフトに拡張することを示せ．

(5)　$0 < s_0 \leqq 1$ とする．F が $[0,T] \times [0,s_0)$ において前述のようなリフト $\tilde{F}$ をもつとしよう．そのとき，$\tilde{F}$ は $[0,T] \times [0,s_0]$ における F のリフトに拡張することを示せ．

［ヒント：$\omega_{s_0} = F(t,s_0)$ とおけば，f の smooth path lifting property によって ω_{s_0} は q_1 を始点とするリフト $\tilde{\omega}_{s_0}\colon [0,T] \to N$ をもつ．(4) と同様にして，$\tilde{\omega}_{s_0}$ は $[0,T] \times (s_0 - \delta, s_0]$ における F のリフト $\tilde{F}'$ に拡張する．ここで $s_0 - \delta < s < s_0$ に対しては，$F(\cdot,s)$ の 2 通りのリフト $\tilde{F}(\cdot,s)$，$\tilde{F}'(\cdot,s)$ が得られたことになるが，始点 $\tilde{F}(0,s)$，$\tilde{F}'(0,s)$ 同士は一致することと N の Hausdorff 性に注意して，実は $\tilde{F}(\cdot,s) = \tilde{F}'(\cdot,s)$ であることを示せ．したがって $\tilde{F}$ と $\tilde{F}'$ は定義域の共通部分で一致する．］

(6)　(4) と (5) から，(3) で述べたようなリフト $\tilde{F}\colon [0,T] \times [0,1] \to V_\alpha$ が存在することを結論せよ．ゆえに $f|_{V_\alpha}$ は単射であり，f は可微分被覆写像であることがわかる．