

2 Riemann 計量

2.1* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ から北極 $p_+ = (0, \dots, 0, 1)$ を除いた開集合 $U = S^n \setminus \{p_+\}$ において, p_+ を中心とするステレオグラフィック射影によって定義される局所座標系 (x^1, \dots, x^n) を考える. すなわち, 各 x^i は U で定義された関数で, (y^1, \dots, y^{n+1}) を \mathbb{R}^{n+1} の標準的な座標系とすれば

$$y^i = \frac{2x^i}{1 + |x|^2} \quad (i = 1, \dots, n), \quad y^{n+1} = -\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}$$

である (ただし $|\cdot|$ は \mathbb{R}^n における通常のノルム). この局所座標系 (x^1, \dots, x^n) に関して, S^n の通常の Riemann 計量 g は

$$g_{ij} = \frac{4}{(1 + |x|^2)^2} \delta_{ij}$$

と表されることを示せ. $n = 2$ の場合だけを考えることにしてもよい.

[ヒント: 局所表示の変換則を用いて求めることも可能だが, 直接的に $\partial/\partial x^i$ を \mathbb{R}^{n+1} の接ベクトルとして表すことで $g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$ を求めるほうが簡単だろう.]

2.2 双曲空間 \mathbb{H}^n の Riemann 計量 g は, \mathbb{H}^n を Poincaré 開球モデルによって単位開球 B^n とみなすとき, 標準座標系 (x^1, \dots, x^n) を用いて

$$g_{ij} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \delta_{ij}$$

によって与えられる.

\mathbb{H}^n は次の写像 φ によって上半空間 $H^n = \{(y', y^n) \in \mathbb{R}^n \mid y^n > 0\}$ と同一視される:

$$\varphi: B^n \rightarrow H^n, \quad \varphi(x) = 2 \frac{x + e_n}{|x + e_n|^2} - e_n, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

この φ を \mathbb{H}^n のチャートと考えることができる. そうすることにより (y^1, \dots, y^n) を \mathbb{H}^n の座標系とみなす. (y^1, \dots, y^n) に関して g がどのように表示されるか求めたい.

(1) $y = \varphi(x)$ のとき $|x + e_n||y + e_n| = 2$ であることを示せ. さらに $1 - |x|^2 = 4y^n/|y + e_n|^2$ であることを示せ. [ヒント: $X = x + e_n$, $Y = y + e_n$ とおくと計算しやすい.]

(2) 座標系 (y^1, \dots, y^n) に関して

$$g_{ij} = \frac{1}{(y^n)^2} \delta_{ij}$$

であることを示せ.

【補足】 Riemann 計量の引き戻し

$f: N \rightarrow M$ を C^∞ 級写像, g を M の Riemann 計量とすると, 各点 $p \in N$ において

$$h_p(v, w) := g_{f(p)}(f_*v, f_*w), \quad v, w \in T_pN$$

によって h_p を定義することにより, N の Riemann 計量 h が定まる. この h を f^*g と書いて, Riemann 計量 g の f による**引き戻し** (pullback) とよぶ.

例 1. M の Riemann 計量 g から部分多様体 N に誘導される計量とは, 包含写像 $i: N \hookrightarrow M$ による g の引き戻しのことだといってもよい.

例 2. Riemann 計量 g のチャート (U, φ) に関する局所表示とは, $g|_U$ の $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ による引き戻しを $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ の標準座標系によって表示したものともいえる. さらにこの観点からいえば, 局所表示の変換というのは, $\varphi \circ \psi^{-1}$ による引き戻しだとみなすこともできる.

いま M の Riemann 計量が $g = g_{ij}dx^i dx^j$ と表されているとする. また, 写像 f を M のチャート (U, φ) と N のチャート (V, ψ) で $f(V) \subset U$ をみたすものを用いて

$$f(y^1, \dots, y^n) = (f^1(y^1, \dots, y^n), \dots, f^m(y^1, \dots, y^n))$$

と表す (正確には $f(\psi^{-1}(y^1, \dots, y^n)) = \varphi^{-1}(f^1(y^1, \dots, y^n), \dots, f^m(y^1, \dots, y^n))$ の意).

このとき $h = f^*g$ を求めるにはどうしたらいいか. $g_{ij}dx^i dx^j$ に $x^i = f^i(y^1, \dots, y^n)$ を「代入」して整理すればよい. というのは,

$$\begin{aligned} g(f_*v, f_*w) &= g_{ij}dx^i(f_*v)dx^j(f_*w) = g_{ij}(f^*dx^i)(v)(f^*dx^j)(w) \\ &= g_{ij}d(f^*x^i)(v)d(f^*x^j)(w) = g_{ij}df^i(v)df^j(w) \end{aligned}$$

が成り立つからである.

上記の計算方法を用いて問題 2.1, 2.2 について考え直してみるとよい. 「式が勝手に計算してくれる」感覚がわくのではないかと思う.

なお, 微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ が $f^*g = g$ をみたすとき f は M の**等長変換**であるという. たとえば Euclid 空間 \mathbb{R}^n の等長変換の例としては, 平行移動, 直交行列の作用, およびそれらの合成が挙げられる. 実は \mathbb{R}^n の等長変換は以上のもので尽くされる. これを証明するには, ある点 $p \in M$ について, 「点 p を固定する等長変換であって T_pM の直交変換を誘導するようなものは恒等変換しかない」ということを証明すればよい (なぜか?).

実は, 連結な Riemann 多様体について一般に, 任意の $p \in M$ について「」に書かれたことが成り立つ. これを証明するには, あとで導入する正規座標系の概念を用いるのがよい.