7 測地線 (1)

7.1 球面 S^n の測地線について調べる．

(1) $\mathbb{R}^{n+1}$ の互いに直交する 2 つの単位ベクトル a，b を用いて

$$\gamma_{a,b}(t) = (\cos t)a + (\sin t)b, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

と定める．$\gamma_{a,b}$ が S^n の測地線であることを示せ．［ヒント：問題 5.4 を利用せよ.］

(2) 速さ 1 の測地線 $\gamma\colon I \to S^n$ はある a，b を用いて $\gamma(t) = \gamma_{a,b}(t)$ と表されることを示せ．［ヒント：$0 \in I$ と仮定して問題ない．そして測地線は $\gamma(0)$，$\dot{\gamma}(0)$ を指定すれば一意的.］

7.2 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の測地線について調べる．上半平面モデル $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ を用いることにしよう．Riemann 計量は $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ で与えられる．

(1) $\gamma_0(t) = (0, e^t)$ で定義される曲線 γ_0：$(-\infty, \infty) \to H^2$ が測地線であることを示せ．［ヒント：問題 3.2.］

(2) 点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ と同一視する．次の 3 種類の写像がそれぞれ H^2 の等長変換を与えることを示せ.

(a) $\Phi(z) = \lambda z$（λ は正の実数）.

(b) $\Phi(z) = z + c$（c は実数）.

(c) $\Phi(z) = -1/z$.

(3) 速さ 1 の測地線 $\gamma\colon I \to H^2$ はある等長変換 Φ によって $\gamma = \Phi \circ \gamma_0$ と表されることを示せ.

［ヒント：長さ 1 の任意の接ベクトル $v \in T_{(0,1)}H^2$ に対し，$\gamma(0) = (0, 1)$，$\dot{\gamma}(0) = v$ をみたす測地線 γ を $\Phi \circ \gamma_0$ の形で表せることを示せば十分である（なぜか？）．任意の実数 c に対し，(2) で挙げた 3 種類の写像を合成して得られる

$$z \mapsto z + c \mapsto -\frac{1}{z + c} \mapsto -\frac{c^2 + 1}{z + c} \mapsto -\frac{c^2 + 1}{z + c} + c = \frac{cz + 1}{z + c}$$

も等長変換であることを利用せよ.］

7.3 (1)　(M, g) を連結な Riemann 多様体とし，$\Phi\colon M \to M$ を等長変換とする．ある点 $p \in M$ において $\Phi(p) = p$，$(d\Phi)_p = \mathrm{id}_{T_pM}$ ならば Φ は恒等変換であることを示せ．［ヒント：$A = \{\, q \in M \mid \Phi(q) = q,\, (d\Phi)_q = \mathrm{id}_{T_qM} \,\}$ とおく．仮定によって A は空集合ではない．A が開集合かつ閉集合であることを示す．］

(2)　Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換が $\Phi(x) = Ax + b$（A は n 次直交行列，b は $\mathbb{R}^n$ のベクトル）の形に表されるものに限られることを示せ．

(3)　球面 S^n の等長変換が $\mathbb{R}^{n+1}$ の直交変換の制限によって得られるものに限られることを示せ．

7.4　$\gamma : I \to M$ を速さ 1 の測地線とする（ただし $I \subset \mathbb{R}$ は 0 を含む区間）．$p = \gamma(0)$ において $\dot\gamma(0)$，v_2，……，v_n が T_pM の正規直交基底となるように $n-1$ 個のベクトル v_j（$2 \leqq j \leqq n$）をとる．各 j に対し，$e_j(t)$ を $e_j(0) = v_j$ をみたす γ に沿って定義された平行ベクトル場とする．すると各 $t \in I$ において $\dot\gamma(t)$，$e_2(t)$，……，$e_n(t)$ は $T_{\gamma(t)}M$ の正規直交基底である．

逆に，速さ 1 の曲線 $\gamma : I \to M$ に沿って平行ベクトル場 $e_2(t)$，……，$e_n(t)$ が定義されており，各 $t \in I$ に対し $\dot\gamma(t)$，$e_2(t)$，……，$e_n(t)$ が $T_{\gamma(t)}M$ の正規直交基底であるとする．そのとき γ は測地線であることを示せ．

7.5　Riemann 多様体 (M, g) の点 $p \in M$ において正規球 $B_\varepsilon(p)$ をとり，この正規球における正規座標系 $(x^1, \dots, x^n)$ を考える．

(1)　$(x^1, \dots, x^n)$ に関する Christoffel 記号 $\Gamma^k{}_{ij}$ の点 p における値がすべて 0 であることを示せ．［ヒント：任意の $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\gamma(t) = (a^1 t, \dots, a^n t)$ は測地線である．これを測地線の方程式に代入する．］

(2)　$(x^1, \dots, x^n)$ に関して $(\partial g_{ij}/\partial x^k)(p) = 0$ であることを示せ．

（実は g_{ij} の 2 次までの Taylor 展開は

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl}(p) x^k x^l + O(|x|^3)$$

で与えられる（第 12 回？）．つまり Riemann 曲率テンソルは，正規座標系における g と Euclid 計量のずれの主要部を表している．）