9 Hopf–Rinow の定理

9.1 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とおく．$\mathbb{R}^2$ の Euclid 計量を制限して得られる M の Riemann 計量を g とする．

(1) (M, g) が完備でないことを 3 通りの方法で確かめよう．

(a) 定義域を $[0, \infty)$ まで延長できないような (M, g) の測地線の例を挙げよ．

(b) (M, g) の収束しない Cauchy 列の例を挙げよ．

(c) (M, g) の有界閉集合であってコンパクトでないようなものの例を挙げよ．

(2) $p = (-1, 0)$，$q = (1, 0)$ とおく．(M, g) において $d(p, q) = 2$ であることを示せ．また p から q に達する長さ 2 の区分的に滑らかな曲線が存在しないことを示せ．

9.2 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ は完備である．そのことを 2 通りの方法で確かめよう．

(1) $\mathbb{H}^2$ は測地完備であることを示せ．［ヒント：測地線は問題 7.2 で記述してある．］

(2) $\mathbb{H}^2$ の任意の有界閉集合はコンパクトであることを示せ．［ヒント：たとえば Poincaré 開円板モデル B^2 を用いる．双曲計量に関する有界閉集合 A は，原点 0 を中心とする双曲計量に関するある距離球 $B^d_r(0)$ に含まれる．そこで $B^d_r(0)$ が B^2 のあるコンパクト部分集合に含まれることを確かめれば十分（なぜか？）．］

9.3 完備でない Riemann 多様体であっても，「任意の 2 点 p，q に対し p から q に達する最短測地線が存在する」という性質をみたす場合はある．例を挙げよ．

9.4 (1) Riemann 多様体 (M, g) では，距離球 $B^d_r(p)$ の閉包は $\{ q \in M \mid d(p, q) \leqq r \}$ にいつでも等しいことを示せ．

(2) 一般の距離空間 (X, d) では，開球 $B^d_r(p)$ の閉包は $\{ q \in X \mid d(p, q) \leqq r \}$ に等しいとは限らない．そのことを示す例を挙げよ．