13 Bonnet–Myers の定理

13.1 測地線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ について，γ に沿って定義された区分的 C^∞ 級ベクトル場 V，W に対し index form

$$I(V,W) = \int_a^b (\langle \dot{V}, \dot{W} \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle)dt$$

を考える（$\dot{V}$ は $\nabla_{\dot{\gamma}} V$ を表す）．V が Jacobi 場 J であるとき

$$I(J,W) = \langle \dot{J}(b), W(b) \rangle - \langle \dot{J}(a), W(a) \rangle$$

であることを確かめよ．

13.2 Rauch の比較定理を経由しない Bonnet の定理の証明を与えよう．完備 Riemann 多様体 (M,g) の断面曲率が $K(\sigma) \geqq \delta > 0$ をみたすとする．Hopf–Rinow の定理により，速さ 1 の測地線 $\gamma\colon [0,T] \to M$ は $T > \pi/\sqrt{\delta}$ のとき最短測地線ではありえないことを証明すればよい．そのためには，γ に沿って定義された $V(0) = V(T) = 0$ をみたす区分的 C^∞ 級ベクトル場 V であって，$I(V,V) < 0$ をみたすものが存在することを示せば十分である．

e を γ に沿った長さ 1 の任意の平行法ベクトル場として

$$V(t) = \left(\sin \frac{\pi t}{T}\right) e(t)$$

とおく．

(1) $I(V,V) = \displaystyle\int_0^T \left(\sin^2 \frac{\pi t}{T}\right) \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \langle R(e,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, e \rangle\right) dt$ を示せ．

(2) $I(V,V) < 0$ であることを結論せよ．よって Bonnet の定理が従う．

13.3 前問の証明を改良して Myers の定理を示そう．n 次元完備 Riemann 多様体 (M,g) の Ricci テンソルが $\mathrm{Ric} \geqq (n-1)\delta > 0$ をみたすとする．前問と同様に，速さ 1 の測地線 $\gamma\colon [0,T] \to M$ で $T > \pi/\sqrt{\delta}$ なるものに対し，γ に沿って定義された $V(0) = V(T) = 0$ をみたす区分的 C^∞ 級ベクトル場 V であって，$I(V,V) < 0$ をみたすものが存在することを示せば十分である．

e_1，e_2，……，e_{n-1} を γ に沿った互いに直交する長さ 1 の平行法ベクトル場とし

$$V_i(t) = \left(\sin \frac{\pi t}{T}\right) e_i(t)$$

とおく．$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} I(V_i, V_i) < 0$ を示せ．よって $I(V_i,V_i) < 0$ をみたす i が少なくとも一つ存在するから，Myers の定理が従う．