11 曲線のエネルギーとその変分

11.1 M を完備 Riemann 多様体とし，N を M の閉部分多様体とする．p を N 上にない M の点とする．$d(p,N) = \inf_{q' \in N} d(p,q')$ とおく．

(1) $d(p,q) = d(p,N)$ をみたす $q \in N$ が存在することを示せ．［ヒント：Hopf–Rinow の定理により有界閉集合はコンパクト．］

(2) (1) のような q に対して p と q を結ぶ最短測地線 γ を任意に一つとる．γ が N に直交することを示せ．［ヒント：曲線 γ の最短性を直接利用してもよいが，ここではエネルギーを使う方針を示す．直交しないとする．そのとき始点 p を固定する γ の変分 (γ_s) で，変分ベクトル場 V が $\langle V(b), \dot\gamma(b)\rangle < 0$ をみたすようなものをとれる．ある $s = s_0$ が存在して $E(\gamma_{s_0}) < E(\gamma)$ であることを示し，γ が最短測地線であることと合わせて矛盾を導け．］

11.2 (1) V を向きづけられた奇数次元実計量ベクトル空間とする．向きを保つ任意の直交変換 $\varphi\colon V \to V$ に対し，$\varphi(v) = v$ をみたす 0 でないベクトル $v \in V$ が存在することを示せ．

(2) (M, g) を向きづけられた偶数次元 Riemann 多様体とし，断面曲率が正である*とする．任意の閉測地線 γ に対し，γ がそれよりも短い閉曲線にホモトピックであることを示せ†．［ヒント：仮定と (1) により，閉測地線 γ に沿って非自明な平行ベクトル場 $V = V(t)$ をとることができる．V を変分ベクトル場とする γ の変分 (γ_s) をとる（ただし各 γ_s も閉曲線とする）．エネルギー $E(s) = E(\gamma_s)$ について $E'(0) = 0$, $E''(0) < 0$ を示し，利用せよ．］

---

*各点 $p \in M$ におけるすべての 2 次元部分空間 $\sigma \subset T_pM$ に対し $K(\sigma) > 0$ であるという意味．

†（なめらかな）閉曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ とは，始点 $\gamma(a)$ と終点 $\gamma(b)$ が一致していて，しかも $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde\gamma(t) = \gamma(t - k(b-a)), \qquad \text{ただし } t \in \mathbb{Z} \text{ は } t - k(b-a) \in [a,b] \text{ となるように選ぶ}$$

と定めたとき $\tilde\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ がなめらかな曲線であるようなもの．円周 S^1 からの C^∞ 級写像のことだといってもよい．さらに上記の $\tilde\gamma$ が測地線であるとき，閉曲線 γ は（閉）測地線であるという．