12 Rauch の比較定理

12.1 ある種の状況下では，Rauch の比較定理から得られる帰結は比較的簡単に直接示せる．

例として，本問では非正曲率をもつ (M, g) を考える（断面曲率が各点で任意の σ に対して $K(\sigma) \leqq 0$ をみたすとする）．そのとき Rauch の比較定理を用いて Euclid 空間と比較することにより，任意の測地線 $\gamma\colon [0, T] \to M$ および γ に沿った法 Jacobi 場 J で $J(0) = 0$，$|\dot{J}(0)| = 1$ をみたすものに対し（$\dot{J}$ は $\nabla_{\dot{\gamma}} J$ のこと），$0 \leqq t \leqq T$ で $|J(t)| \geqq t$ が成り立つことが従う．とくに $t > 0$ で $J(t) \neq 0$ だが[*]，これを直接証明してみよう．

(1) $f(t) = |J(t)|^2$ とおく．これは C^∞ 級関数である（局所座標系を用いれば $J(t)$ の各成分は t について C^∞ 級だから[†]）．$f'(t) = 2\langle J(t), \dot{J}(t)\rangle$，$f''(t) = 2|\dot{J}(t)|^2 + 2\langle J(t), \ddot{J}(t)\rangle$ である．これと仮定 $K(\sigma) \leqq 0$ を用いて $f''(t) \geqq 0$ を示せ．

(2) $f(0) = f'(0) = 0$，$f''(0) = 1$ に注意して，$t > 0$ ならば $f(t) > 0$ である（したがって $J(t) \neq 0$ である）ことを示せ．

12.2 $\gamma\colon [a, b] \to M$ を測地線とする．$(\gamma_s)_{-\varepsilon < s < \varepsilon}$ を γ の変分であって両端を固定するようなものとするとき，変分ベクトル場を V とすれば

$$\left.\frac{dE(\gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2E(\gamma_s)}{ds^2}\right|_{s=0} = I(V, V)$$

であった．

実は，(γ_s) が両端を固定するような変分でなかったとしても，$s \mapsto \gamma_s(a)$，$s \mapsto \gamma_s(b)$ がそれぞれ測地線になっていれば同じ等式が成り立つ．それを確かめよ．ただしここでは $I(V, V) = \displaystyle\int_a^b (|\nabla_{\dot{\gamma}} V|^2 + \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V\rangle) dt$ を index form $I(V, V)$ の定義とする．

---

[*] このことから γ 上に点 $\gamma(0)$ の共役点が存在しないことも直ちにわかる．これは任意の Jacobi 場は接成分と法成分に分解しても各々の成分が Jacobi 場であり，しかも接 Jacobi 場とは $(a + bt)\dot{\gamma}(t)$ という形（a，$b \in \mathbb{R}$）のベクトル場にすぎないからである．次回触れる．

[†] もし $f(t) = |J(t)|$ としてしまうと，$J(t) = 0$ となる t において $f(t)$ が微分可能でない恐れが生じる．

12.3 (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ は Riemann 多様体で $\dim M \leqq \dim \tilde{M}$ とする．任意の $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ と任意の $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ について断面曲率の値が $K(\sigma) \geqq K(\tilde{\sigma})$ をみたすと仮定する．

あらためて点 $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ をとり固定する．正の数 r を，点 p における指数写像 $\exp_p$ が $B_r(0) \subset T_pM$ で定義されて臨界点をもたず，また $\exp_{\tilde{p}}$ も $B_r(0) \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ で定義されるようにとっておく[*]．

(1) $0 < T < r$ として，$\gamma\colon [0, T] \to M$, $\tilde{\gamma}\colon [0, T] \to \tilde{M}$ をそれぞれ p, $\tilde{p}$ を始点とする速さ 1 の測地線とする．$v \in T_pM$, $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ であって $|v| = |\tilde{v}|$, $\langle \dot{\gamma}(0), v\rangle = \langle \dot{\tilde{\gamma}}(0), \tilde{v}\rangle$ をみたすものに対し，$0 \leqq t \leqq T$ について $|(d\exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}(v)| \leqq |(d\exp_{\tilde{p}})_{t\dot{\tilde{\gamma}}(0)}(\tilde{v})|$ であることを示せ．［ヒント：$J(t) = (d\exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}(tv)$ は γ に沿った Jacobi 場で $J(0) = 0$, $\dot{J}(0) = v$ である．$\tilde{J}(t) = (d\exp_{\tilde{p}})_{t\dot{\tilde{\gamma}}(0)}(t\tilde{v})$ についても同様．］

(2) $\varphi\colon T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ を内積を保つ線型同型写像とする．任意に与えたなめらかな曲線 $c\colon [a, b] \to B_r(0) \subset T_pM$ に対し

$$\omega(s) = \exp_p(c(s)), \qquad \omega_0(s) = \exp_{p_0}(\varphi \circ c(s)), \qquad a \leqq s \leqq b$$

と定める．そのとき $L(\omega) \leqq L(\omega_0)$ であることを示せ．

［コメント：これと似たアイディアに基づき，次のような**体積比較定理**を導くこともできる．n 次元完備 Riemann 多様体 (M, g) について，ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して (M, g) の Ricci テンソルが各点で $\mathrm{Ric} \geqq (n-1)k$ をみたすとき[†]，定断面曲率 k をもつ n 次元単連結完備 Riemann 多様体[‡]における半径 r の球の体積を $\mathrm{Vol}(B_r^k)$ と書けば，(M, g) の任意の点 p を中心とする距離球 $B_r^d(p)$ の体積 $\mathrm{Vol}(B_r^d(p))$ は

$$\mathrm{Vol}(B_r^d(p)) \leqq \mathrm{Vol}(B_r^k)$$

をみたす（**Bishop の比較定理**）．これはさらに「$\mathrm{Vol}(B_r^d(p))/\mathrm{Vol}(B_r^k)$ は r について単調減少である」という形で精密化される（**Bishop–Gromov の比較定理**）．］

[*]本問は Cheeger & Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry* の系 1.35 や do Carmo, *Riemannian Geometry* の第 10 章命題 2.5 にあたるが，これらの文献は r にもっと強い制約を課している．ここに書いたことで十分なように思えるのだがどうでしょうか．修正が必要であればそれも検討して，私に教えてください．

[†]Ricci テンソルは各点で T_pM 上の対称双線型形式を定めるが，その最小固有値が $\geqq (n-1)k$ であるという意味．

[‡]$k > 0$ なら半径 $1/\sqrt{k}$ の球面，$k = 0$ なら Euclid 空間，$k < 0$ なら双曲空間を適当に相似拡大または縮小して断面曲率が k になるようにしたもの．