Probabilités & Statistique

Master 2 IGAST

Yann MENEROUX

yann.meneroux@ign.fr
Service de Géodésie et de Métrologie - Institut National de l'Information Géographique et Forestière - IGN

Octobre 2023

Statistique vs Probabilités ?

- Statistique : méthodologie (démarche) scientifique visant à acquérir des connaissances sur l'état d'un objet difficilement perceptible sur le plan cognitif :
  - objet massif (population, big data...) : résumer, synthétiser, visualiser, échantillonner, compresser...
  - objet incertain (observations bruitées) : moyenner, borner, encadrer, compenser...

Statistique vs Probabilités ?

- Statistique : méthodologie (démarche) scientifique visant à acquérir des connaissances sur l'état d'un objet difficilement perceptible sur le plan cognitif :
  - objet massif (population, big data...) : résumer, synthétiser, visualiser, échantillonner, compresser...
  - objet incertain (observations bruitées) : moyenner, borner, encadrer, compenser...

- Probabilités : théorie mathématique traitant de l'aléatoire, sans justification a priori (même si généralement fondée sur des besoins pratiques) et opérant dans un cadre contrôlé (information parfaite).

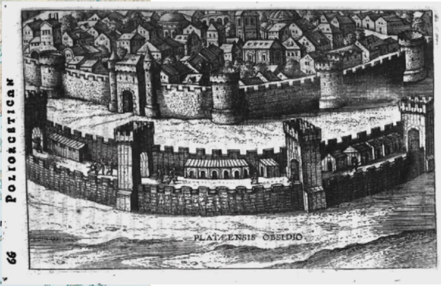
Statistique vs Probabilités ?

- Statistique : méthodologie (démarche) scientifique visant à acquérir des connaissances sur l'état d'un objet difficilement perceptible sur le plan cognitif :
    - objet massif (population, big data...) : résumer, synthétiser, visualiser, échantillonner, compresser...
    - objet incertain (observations bruitées) : moyenner, borner, encadrer, compenser...

- Probabilités : théorie mathématique traitant de l'aléatoire, sans justification a priori (même si généralement fondée sur des besoins pratiques) et opérant dans un cadre contrôlé (information parfaite).

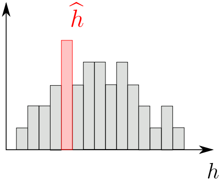
- En général, la statistique cherche à décrire des états présents ou passés. La théorie des probabilités cherche à prédire des évènements futurs.

Thucydide



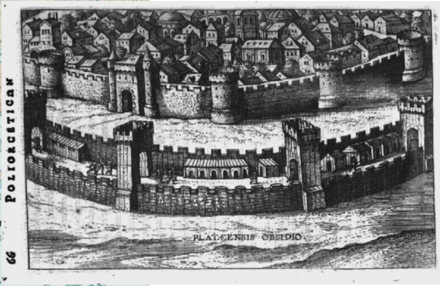
Siège de Platée (-430 av J.C.)

$$L(h,x) = 1 - \mathbf{1}_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = h \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Naissance au XVIIe ?

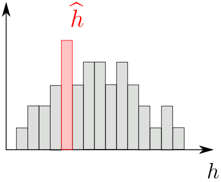
Thucydide



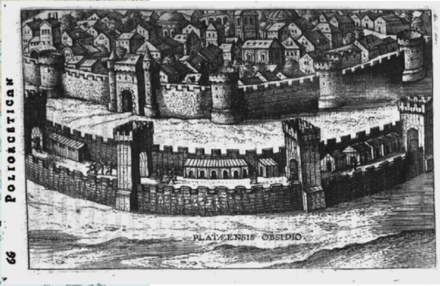
Siège de Platée (-430 av J.C.)

$$L(h,x) = 1 - \mathbf{1}_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = h \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\widehat{h} = \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{E}[L(h,X)]$$



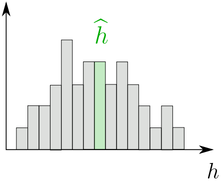
Thucydide



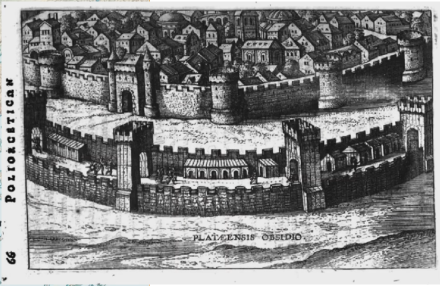
Siège de Platée (-430 av J.C.)

$$L(h,x) = |h - x| \qquad \text{(Norme L1)}$$

$$\widehat{h} = \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{E}[L(h,X)]$$



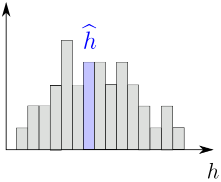
Thucydide



Siège de Platée (-430 av J.C.)

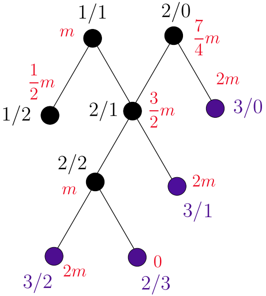
$$L(h,x) = (h-x)^2 \quad \text{(Norme L2)}$$

$$\widehat{h} = \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{E}[L(h,X)]$$



Naissance des probabilités

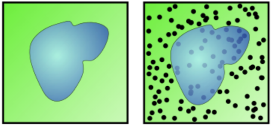
Correspondance de Pascal et Fermat (1654) : *Deux joueurs déposent chacun une mise m pour jouer une partie en 3 manches, mais décident de se quitter après deux victoires de l'un et une victoire de l'autre. Comment devraient-ils se répartir la mise ?*



Naissance des probabilités

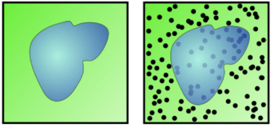
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

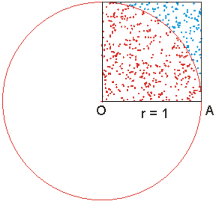


Méthodes de Monte-Carlo

La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

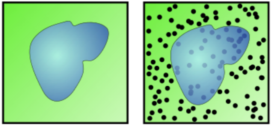


Méthodes de Monte-Carlo



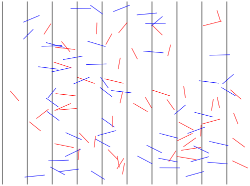
$$\frac{\color{red}{A_d}}{\color{blue}{A_c}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}({\color{red}\bullet}) \approx 4\times \frac{N_{\color{red}\bullet}}{N_{\color{blue}\bullet}}$$

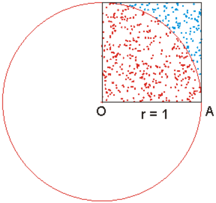
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)



Méthodes de Monte-Carlo

Aiguille de Buffon (1733)

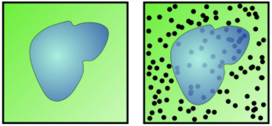




$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4 \times \frac{N_{\bullet}}{N_{\bullet}}$$

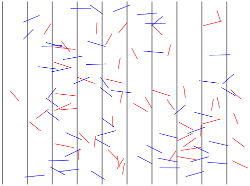
Naissance des probabilités

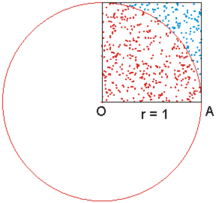
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

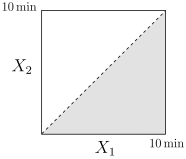


Méthodes de Monte-Carlo

Aiguille de Buffon (1733)

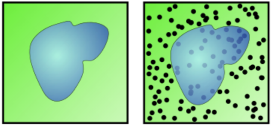






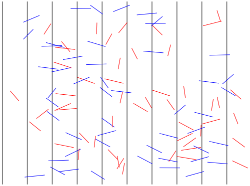
$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\textcolor{red}{\bullet}) \approx 4 \times \frac{N_{\textcolor{red}{\bullet}}}{N_{\textcolor{blue}{\bullet}}}$$

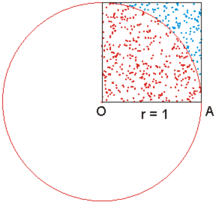
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

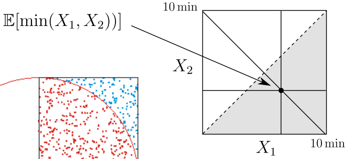


Méthodes de Monte-Carlo

Aiguille de Buffon (1733)

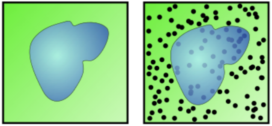






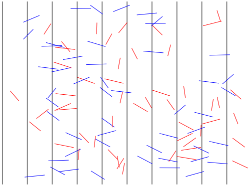
$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet)$$
$$\approx 4 \times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$

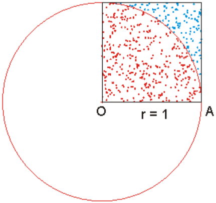
La géométrie du hasard (Pascal, 1662)

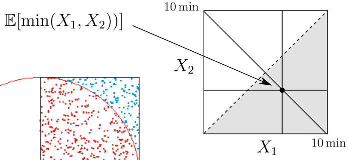


Méthodes de Monte-Carlo

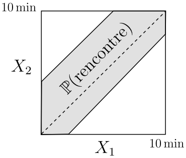
Aiguille de Buffon (1733)







$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \Rightarrow \pi = 4 \times \mathbb{P}(\bullet) \approx 4\times \frac{N_\bullet}{N_\bullet}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

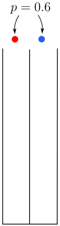
Loi des grands nombres. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = \frac{r}{t}$, alors pour tout indice de confiance $c \in [0,1[$ arbitrairement proche de 1, il existe un nombre n de tirages tel que, avec une probabilité c, la statistique empirique $\frac{X}{n}$ est comprise entre $\frac{r-1}{t}$ et $\frac{r+1}{t}$.

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

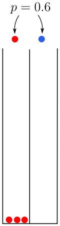
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

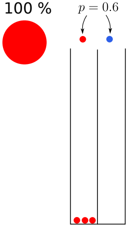
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



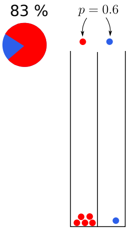
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



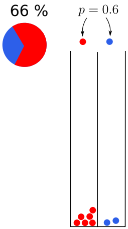
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



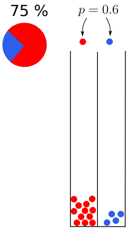
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



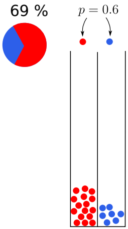
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



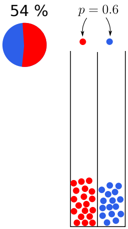
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



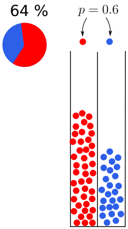
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



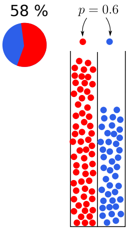
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



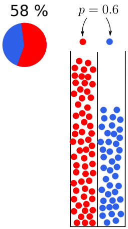
Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

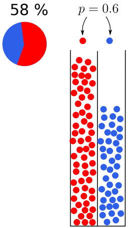


Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

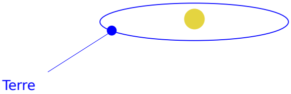
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

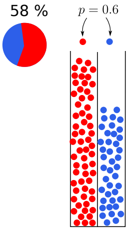
Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

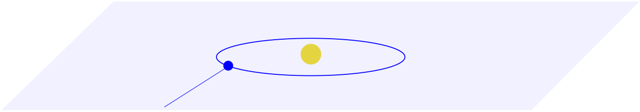
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

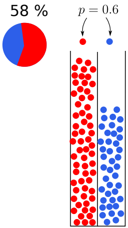
Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

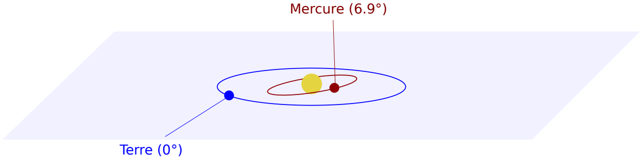
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

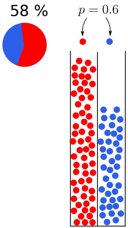
Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

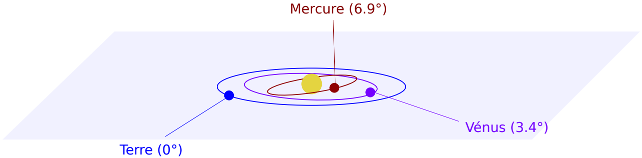
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

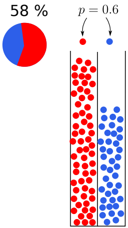
Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

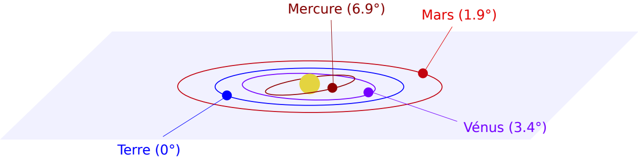
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

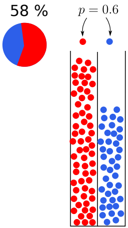
Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

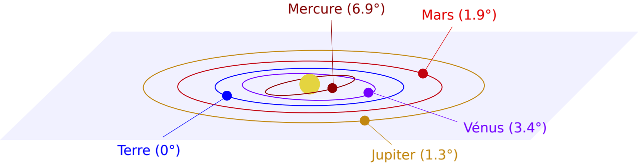
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

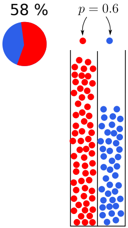
Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)



Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

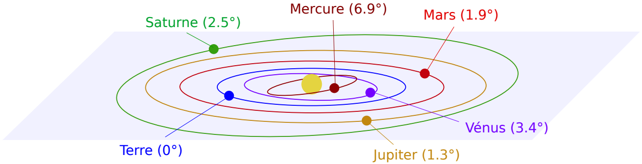
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$



Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

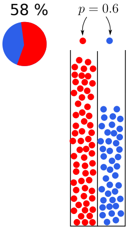
→ premier calcul de p-value (1732)



Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

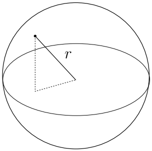
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

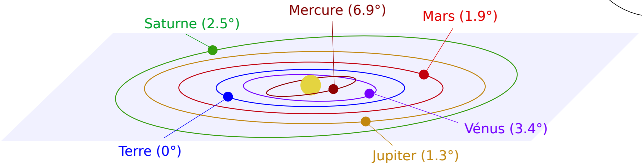


Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)

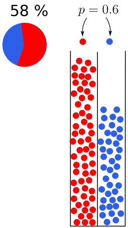




Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

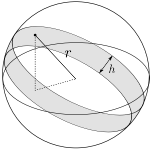
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

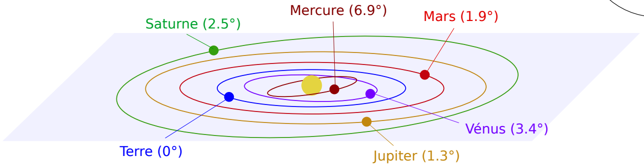


Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

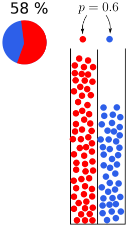
→ premier calcul de p-value (1732)





Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

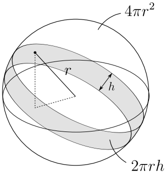
$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

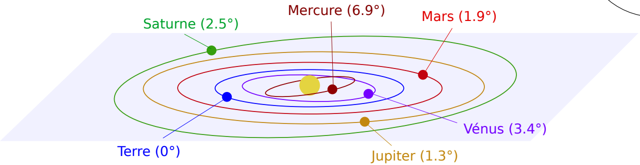


Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)

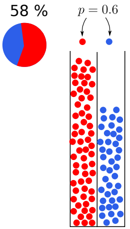




Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

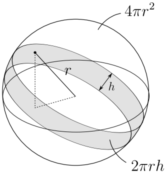


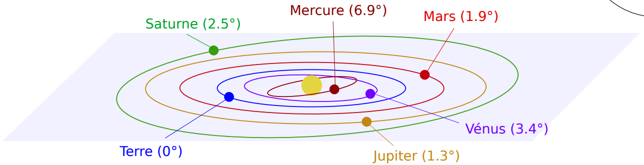
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)

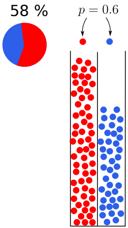
$$\frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{h}{r} = \frac{\sin\theta_{max}}{2} = 0.06$$





Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

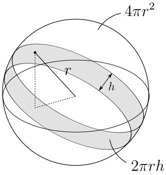


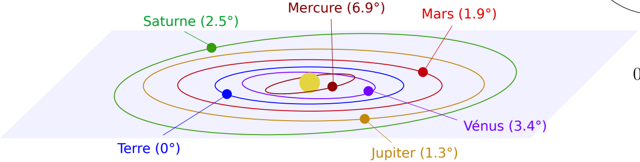
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)

$$\frac{2\pi r h}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{h}{r} = \frac{\sin\theta_{max}}{2} = 0.06$$

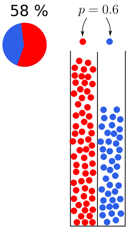




0.06^{n-1}

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

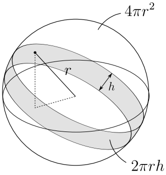


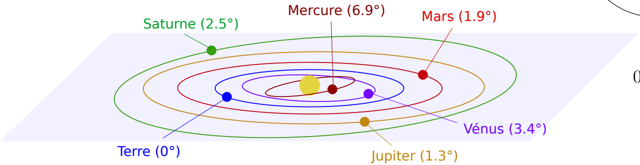
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)

$$\frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{h}{r} = \frac{\sin\theta_{max}}{2} = 0.06$$





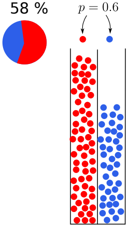
0.06^{n-1}

$\rightarrow \quad p = 7e^{-7}$

Bernoulli (1623-1789) - (*Ars Conjectandi*, 1713)

Exemple. Si une expérience se réalise favorablement avec une probabilité $p = 0.6$, pour un nombre $n > 25550$ de tirages :

$$\mathbb{P}\left(0.58 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0.62\right) > \frac{1000}{1001}$$

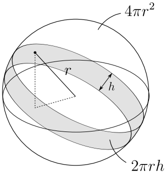


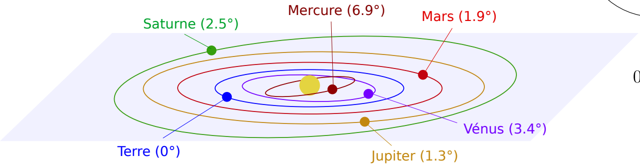
Un évènement doit arriver dans le futur aussi souvent qu'il a été donné à observer dans le passe

Daniel Bernoulli :

→ premier calcul de p-value (1732)

$$\frac{2\pi r h}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{h}{r} = \frac{\sin\theta_{max}}{2} = 0.06$$



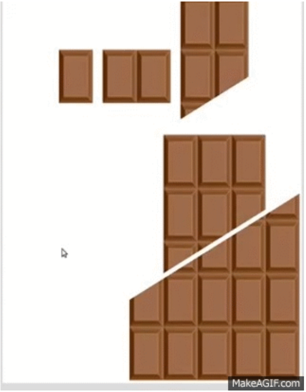


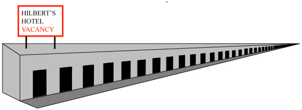
0.06^{n-1}

$\rightarrow \boxed{p = 7e^{-7}}$

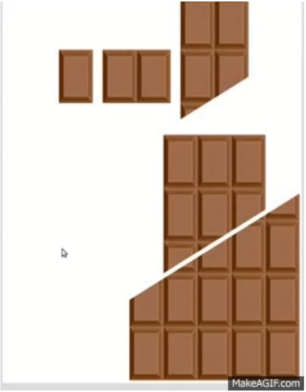
p-value

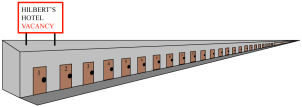
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



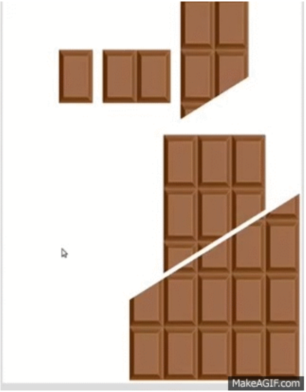


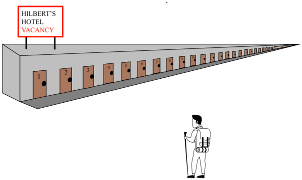
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



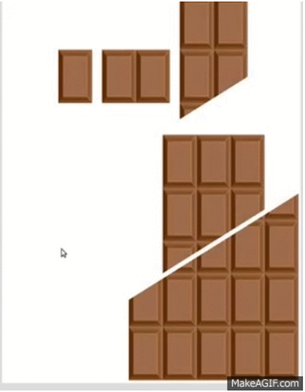


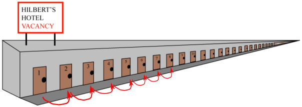
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)





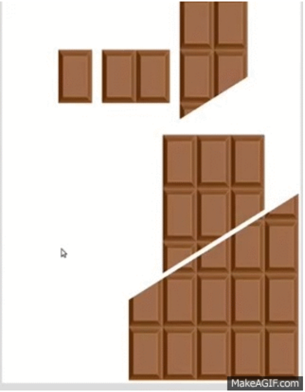
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

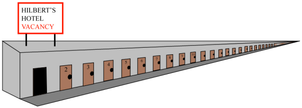




$c_n \to c_{n+1}$

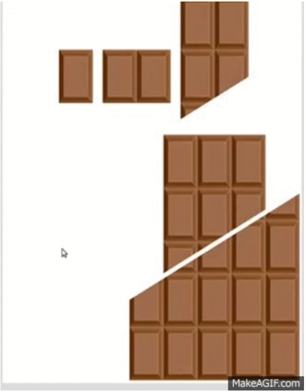
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

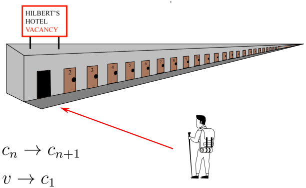




$c_n \to c_{n+1}$

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

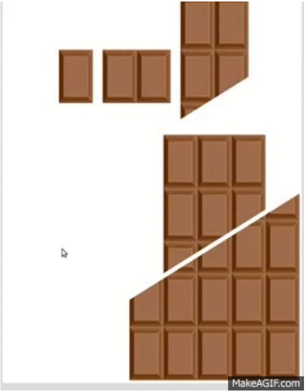


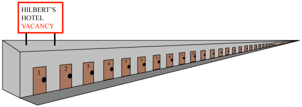


$c_n \to c_{n+1}$

$v \to c_1$

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

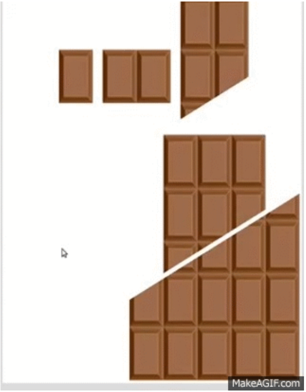


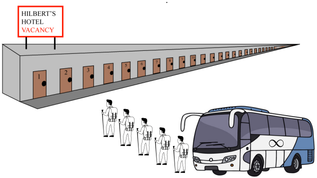


$c_n \to c_{n+1}$

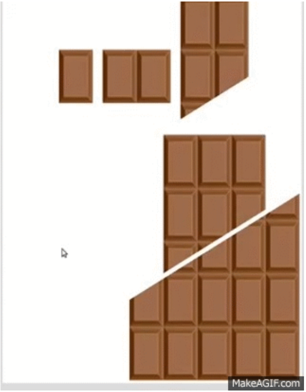
$v \to c_1$

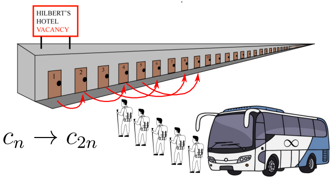
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



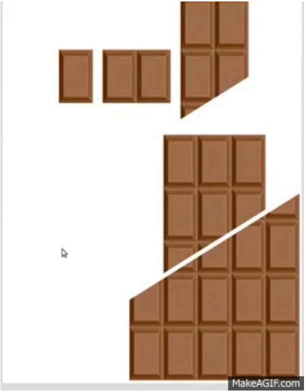


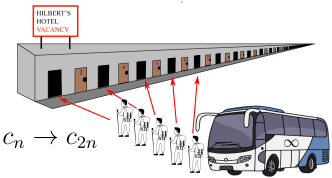
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)



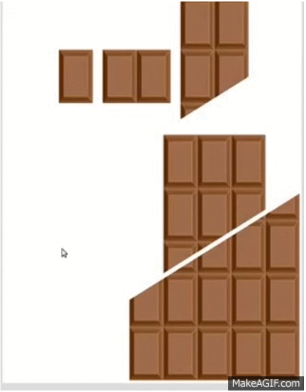


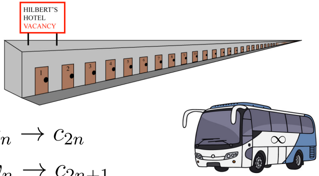
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)





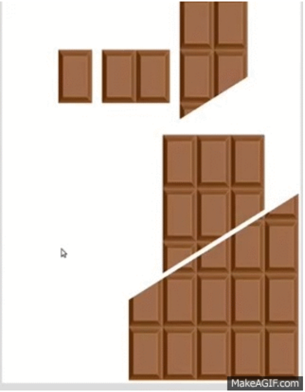
Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)

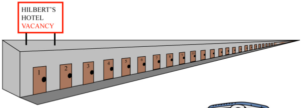




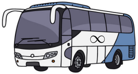
$$c_n \to c_{2n}$$
$$v_n \to c_{2n+1}$$

Théorie de la mesure : Borel (1894), Lebesgue (1901)





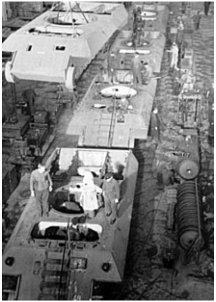
$$c_n \to c_{2n}$$
$$v_n \to c_{2n+1}$$



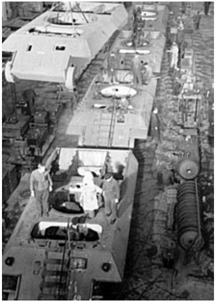
Banach-Tarski

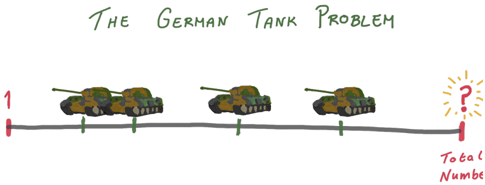
Probabilités modernes

Probabilités modernes

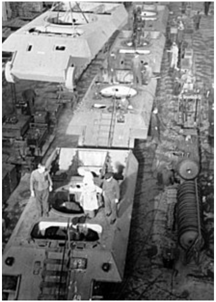


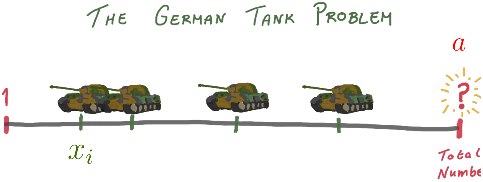
Probabilités modernes



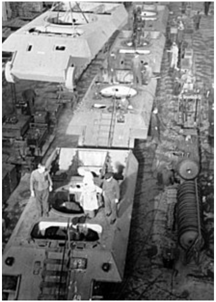


Probabilités modernes



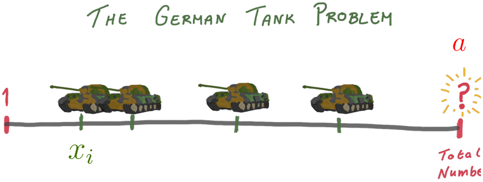


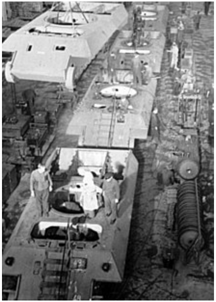
Probabilités modernes



Trouver $a \in \mathbb{R}_+$

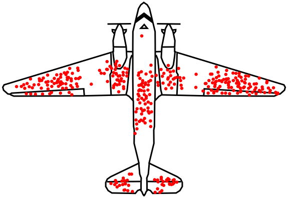
t.q. $x_i \quad \mathcal{U}([1, a])$

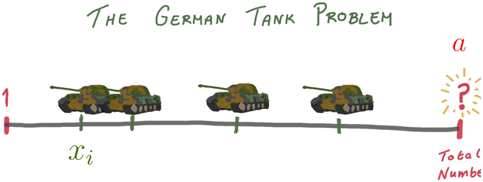




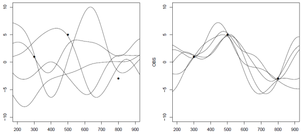
Trouver $a \in \mathbb{R}_+$

t.q. x_i $\mathcal{U}([1, a])$

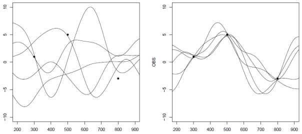




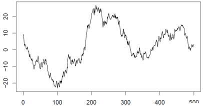
Probabilités modernes



Fonctions aléatoires



Fonctions aléatoires

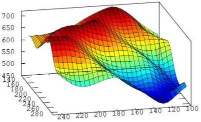


Processus 1D

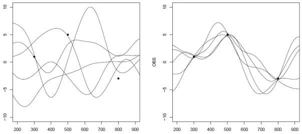
Séries temporelles, économie...

Processus 2D

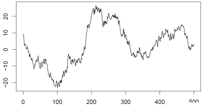
MNT



Probabilités modernes



Fonctions aléatoires

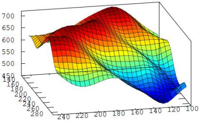


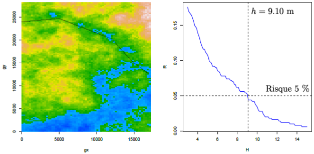
Processus 1D

Séries temporelles, économie...

Processus 2D

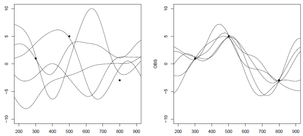
MNT



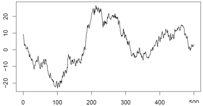


Simulations, propagation d'incertitudes...

Probabilités modernes



Fonctions aléatoires

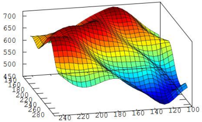


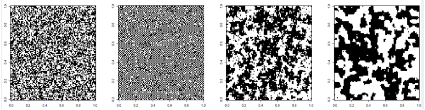
Processus 1D

Séries temporelles, économie...

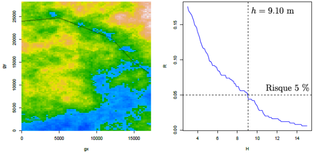
Processus 2D

MNT



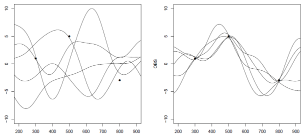


Champs de Markov

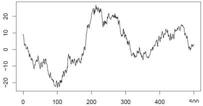


Simulations, propagation d'incertitudes...

Probabilités modernes



Fonctions aléatoires

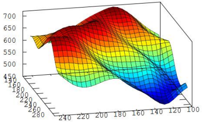


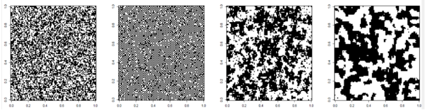
Processus 1D

Séries temporelles, économie...

Processus 2D

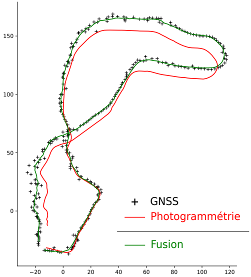
MNT

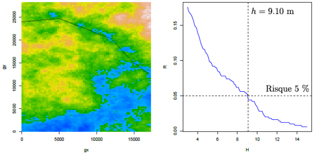




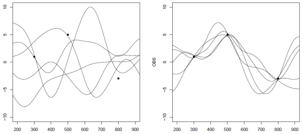
Champs de Markov

Filtrage de Kalman

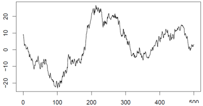




Simulations, propagation d'incertitudes...



Fonctions aléatoires

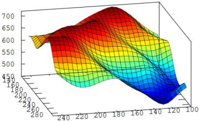


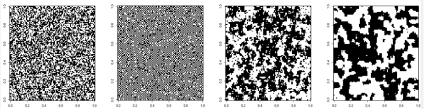
Processus 1D

Séries temporelles, économie...

Processus 2D

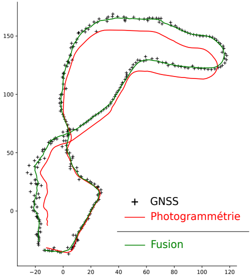
MNT

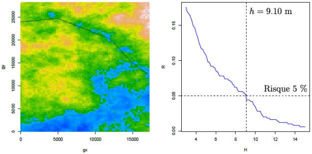




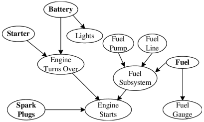
Champs de Markov

Filtrage de Kalman





Simulations, propagation d'incertitudes...



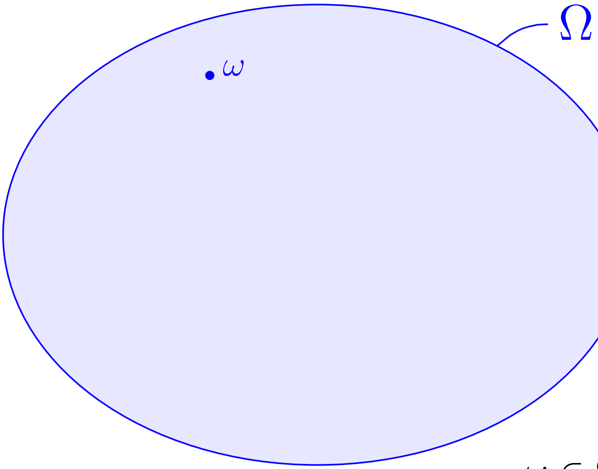
Modèles graphiques

Programme du cours

- **Partie I : définitions de base** (12/10 AM)
- **Partie II : variable aléatoire discrètes** (12/10 AM)
- **Partie III : variable aléatoire continues** (12/10 AM)
- **Partie IV : un peu de multivarié** (12/10 PM)
- **Partie V : moments** (13/10 AM)
- **Partie VI : aspects numériques** (13/10 AM)

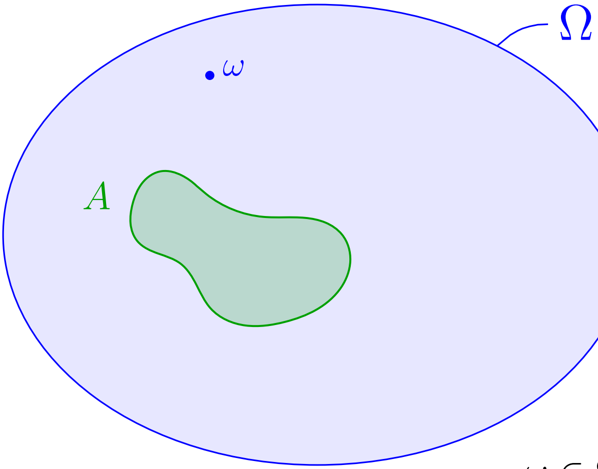
Définitions de base

- Rappels
- Espace probabilisable
- Mesure de probabilité
- Propriétés



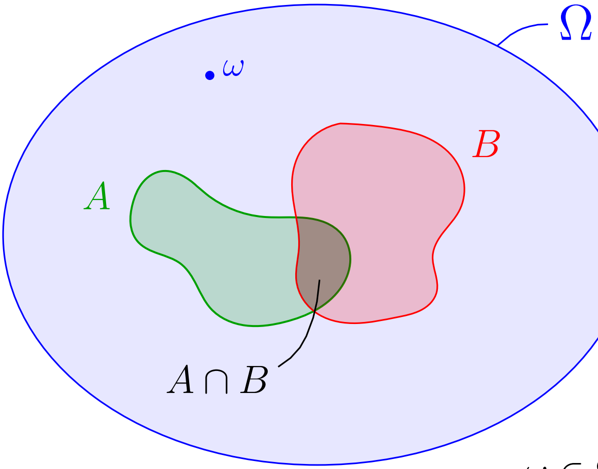
$\omega \in \Omega$

Quelques rappels de théorie des ensembles



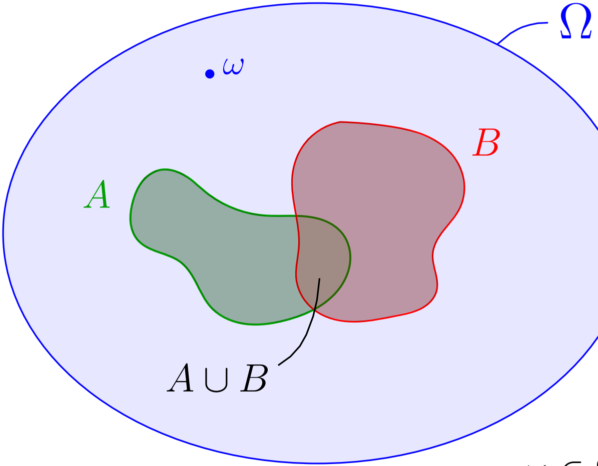
$A \subset \Omega$

$\omega \in \Omega$

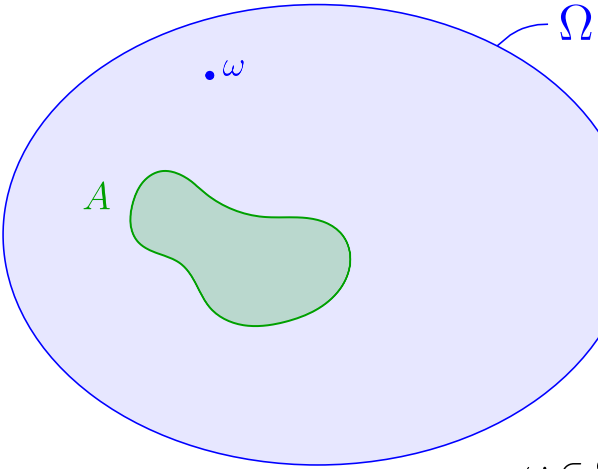


$\omega \in \Omega$

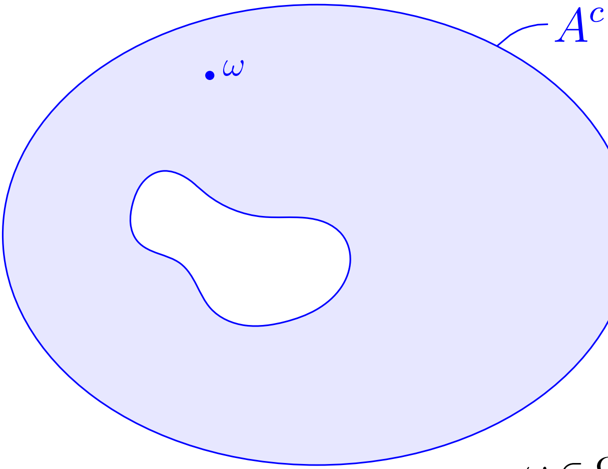
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$\omega \in \Omega$$

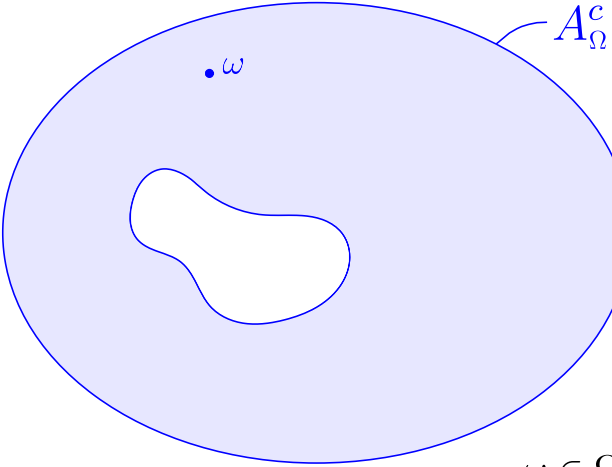


$\omega \in \Omega$



$\omega \in \Omega$

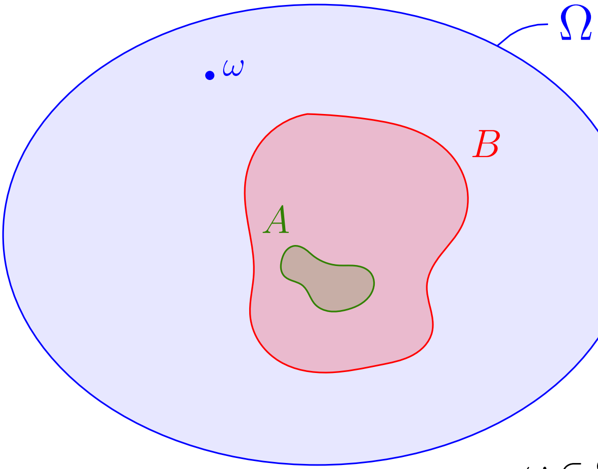
$A^c = \{\omega \notin A\}$



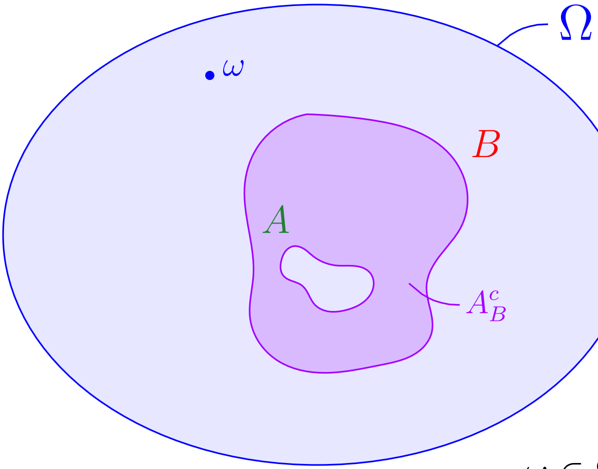
$\omega \in \Omega$

$A^c = \{\omega \notin A\}$

Quelques rappels de théorie des ensembles

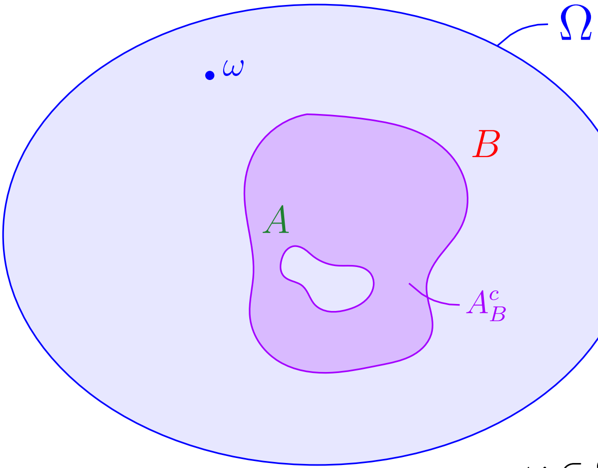


$$\omega \in \Omega$$



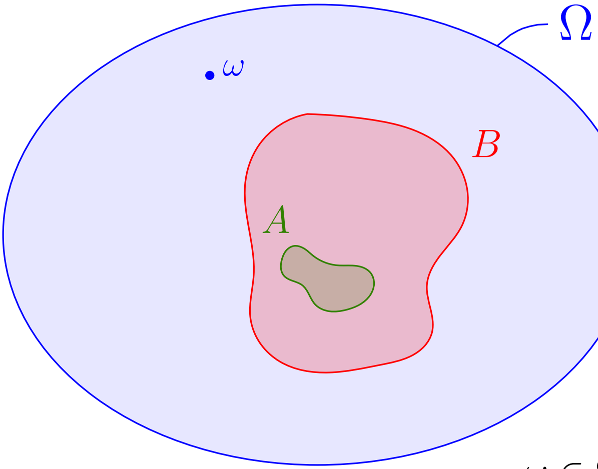
$\omega \in \Omega$

$A_B^c = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\}$



$$\omega \in \Omega$$

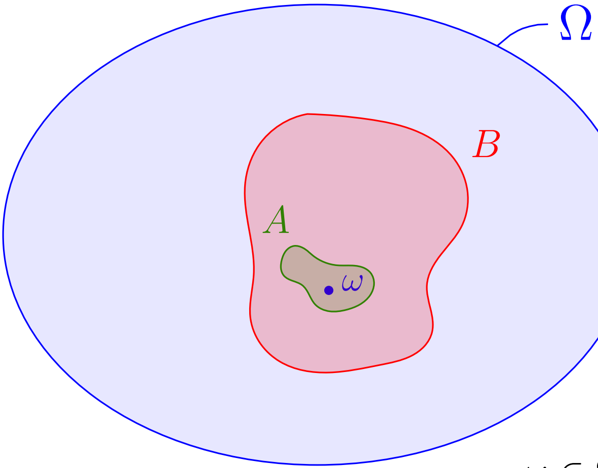
$$A_B^c = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\} = A^c \cap B$$



$\omega \in \Omega$

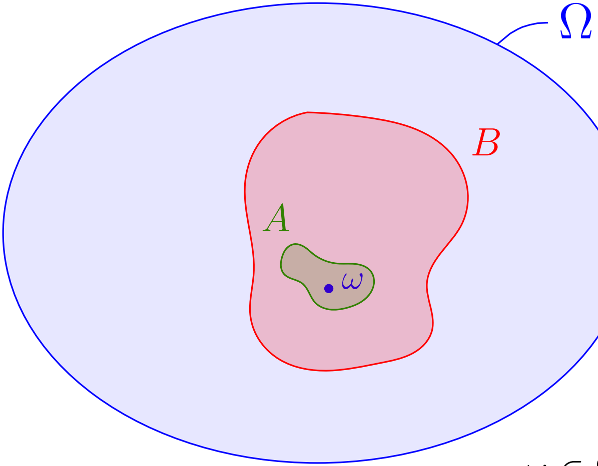
$A \subset B$:

Quelques rappels de théorie des ensembles



$\omega \in \Omega$

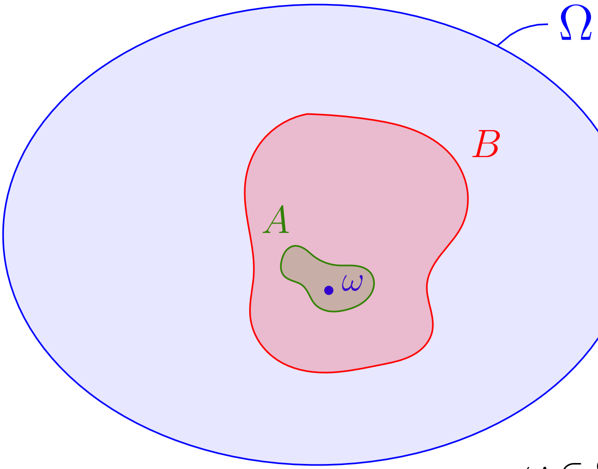
$A \subset B : \ \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$



$\omega \in \Omega$

$A = B : \ \omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$

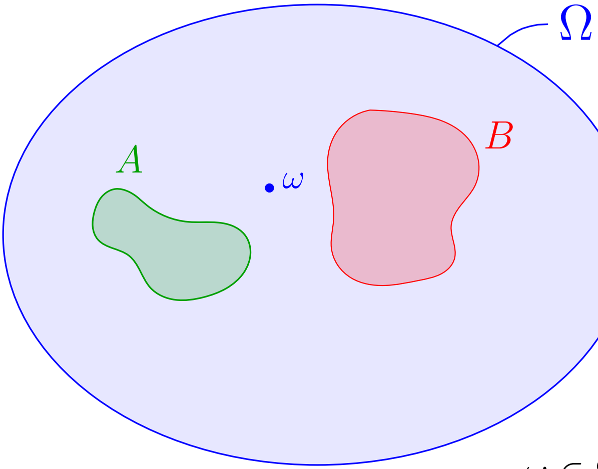
Quelques rappels de théorie des ensembles



$\omega \in \Omega$

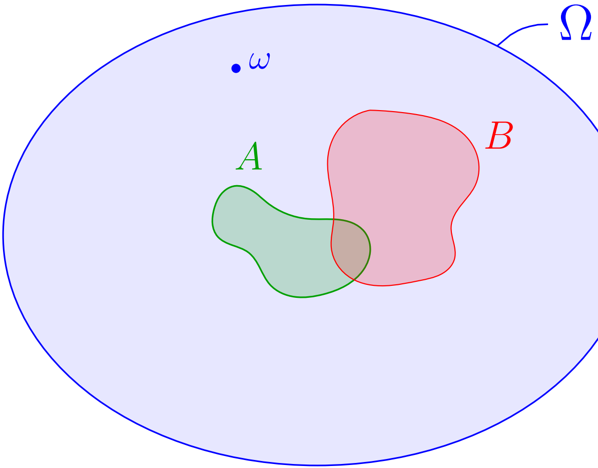
$A = B : A \subset B$ et $B \subset A$

Quelques rappels de théorie des ensembles

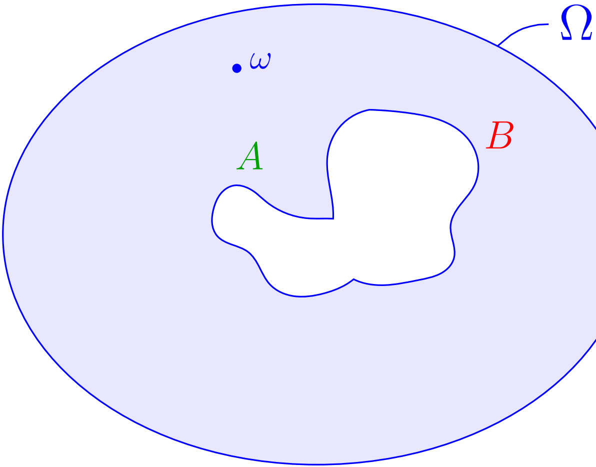


$A \cap B = \varnothing$

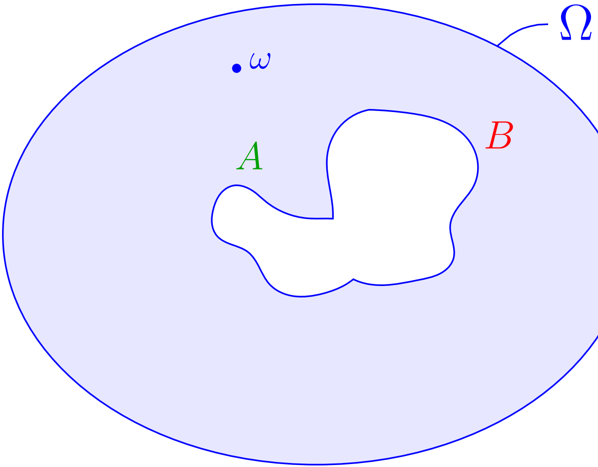
$\omega \in \Omega$



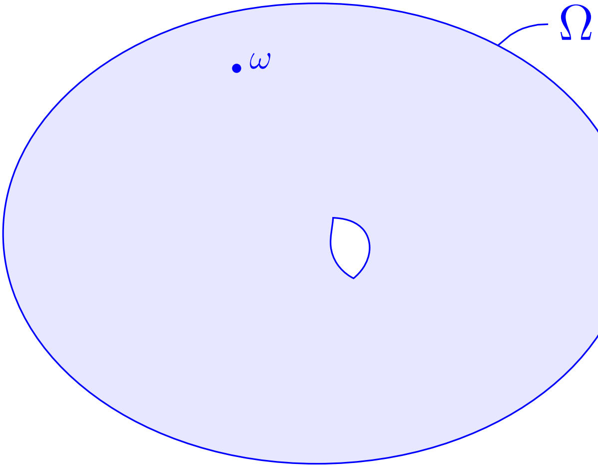
$(A \cup B)^c$



$(A \cup B)^c$

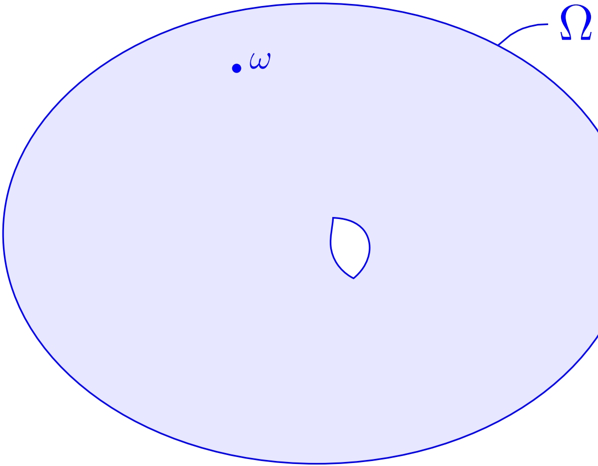


$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



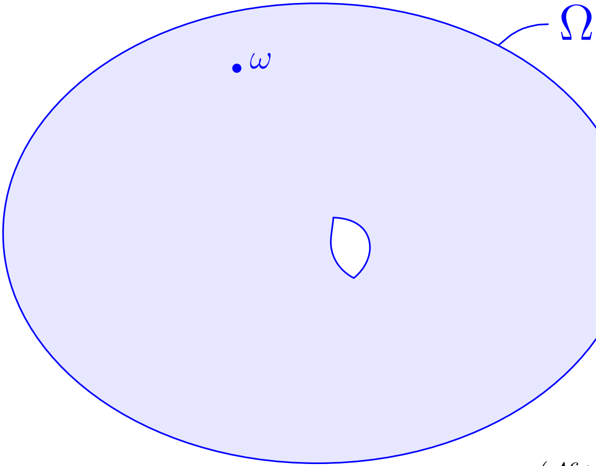
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c$



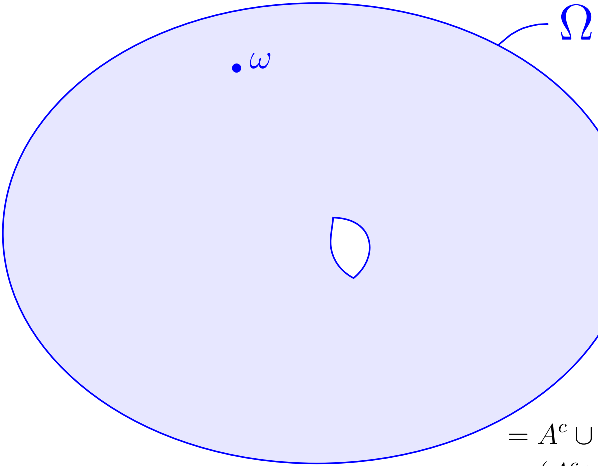
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = (A^{c^c} \cap B^{c^c})^c$$



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$= (A^c \cup B^c)^{c^c}$$
$$(A \cap B)^c = (A^{c^c} \cap B^{c^c})^c$$



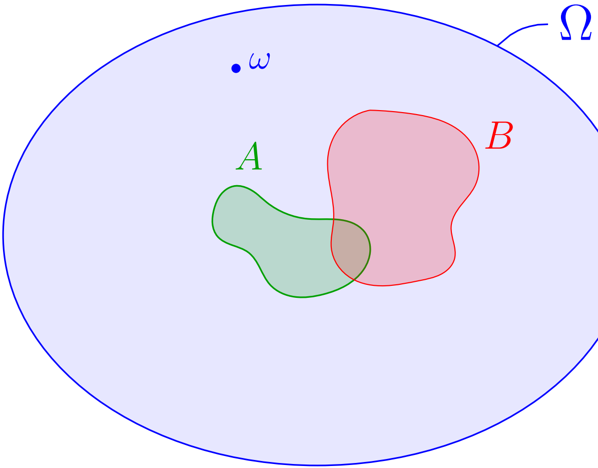
$$= A^c \cup B^c$$

$$= (A^c \cup B^c)^{c^c}$$

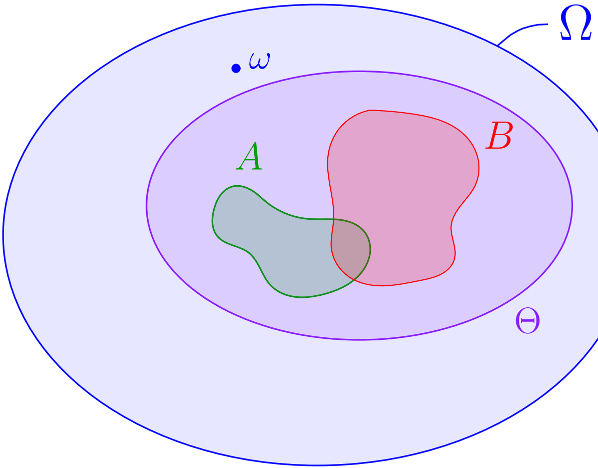
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = (A^{c^c} \cap B^{c^c})^c$$

Quelques rappels de théorie des ensembles

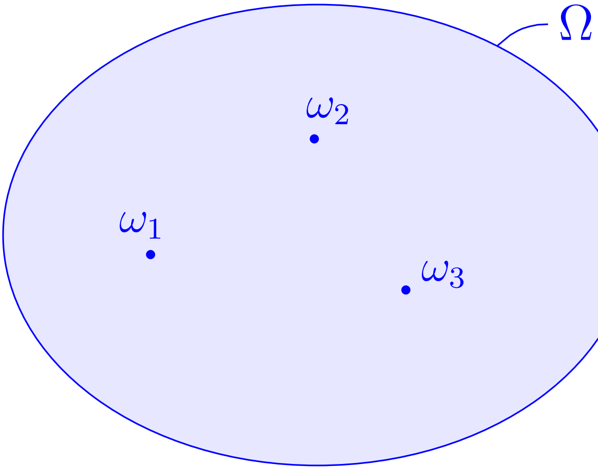


$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

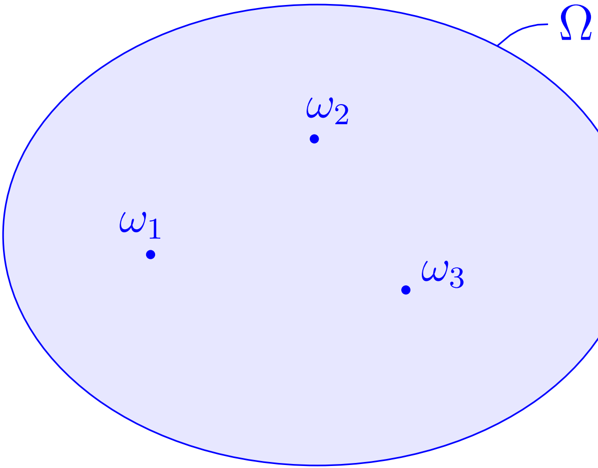


$(A \cup B)^c_\Theta = A^c_\Theta \cap B^c_\Theta$

$(A \cap B)^c_\Theta = A^c_\Theta \cup B^c_\Theta$

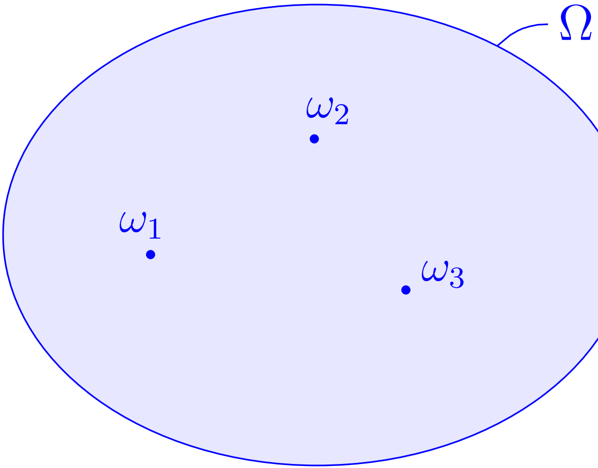


$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

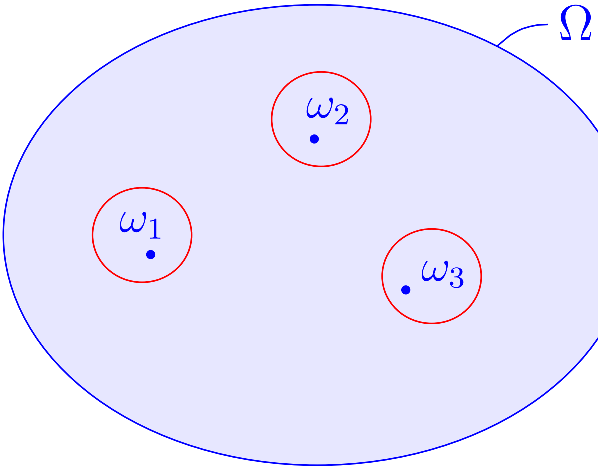


$$\mathcal{P}(\Omega) = \{$$

Quelques rappels de théorie des ensembles

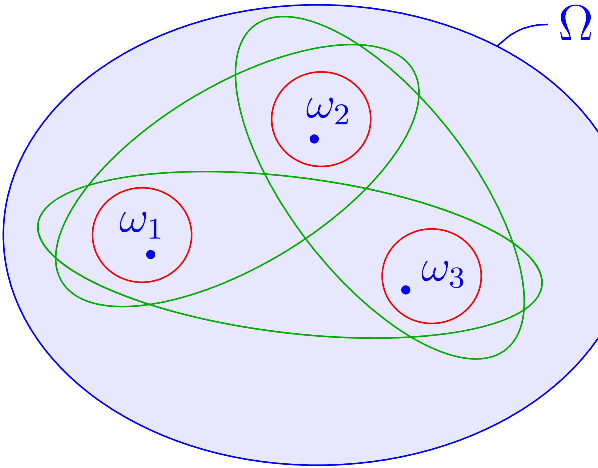


$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{ \varnothing$$



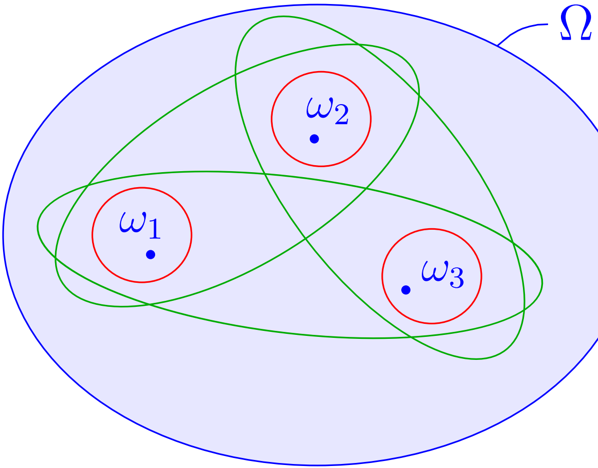
$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, {\color{red}\omega_1}, {\color{red}\omega_2}, {\color{red}\omega_3}$$

Quelques rappels de théorie des ensembles

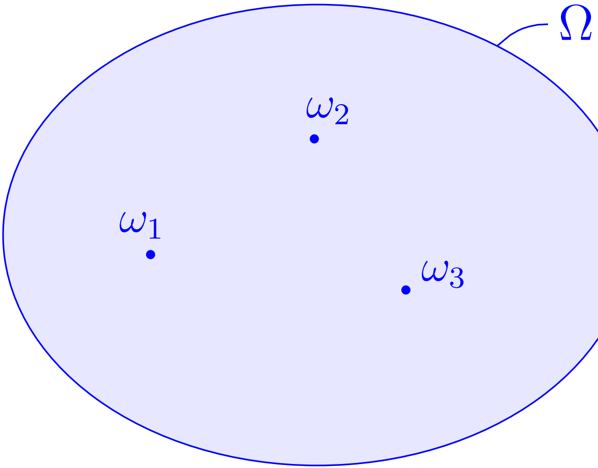


$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}$$

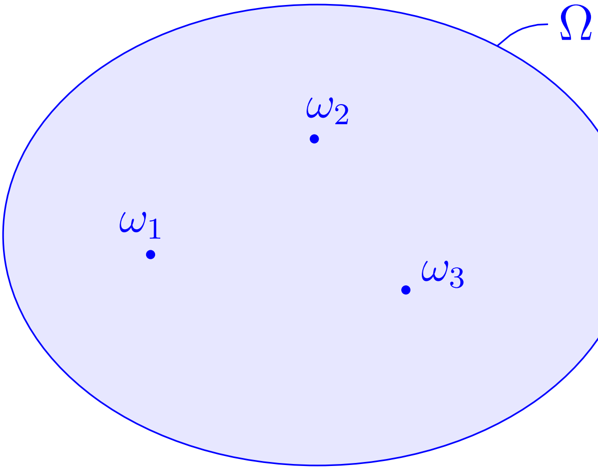
Quelques rappels de théorie des ensembles



$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\Big\}$$



$$\mathrm{card}\big(\mathcal{P}(\Omega)\big) = 2^{|\Omega|}$$



$$\mathrm{card}\big(\mathcal{P}(\Omega)\big) = 2^{|\Omega|} \qquad \mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$$

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble fondamental

Définition : algèbre

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ est une **algèbre** sur Ω si :

- $\mathcal{A}$ est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union finie** :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \in \mathcal{A}$$

Espace probabilisable

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble fondamental

Définition : algèbre

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ est une **algèbre** sur Ω si :

- $\mathcal{A}$ est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union finie** :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \in \mathcal{A}$$

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble fondamental

Définition : algèbre

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ est une **algèbre** sur Ω si :

- $\mathcal{A}$ est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union finie** :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \in \mathcal{A}$$

Exemple : $\{A \subset \mathbb{N} \mid A$ ou A^c est fini$\}$ est une algèbre sur $\mathbb{N}$.

Espace probabilisable

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble fondamental

Définition : tribu

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ est une **tribu** sur Ω si :

- $\mathcal{A}$ est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union dénombrable** :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$$

La structure algébrique $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable (ou probabilisable). Les éléments de $A \in \mathcal{A}$ sont des parties mesurables.

Exemple : $\{A \subset \mathbb{N} \mid A$ ou A^c est fini$\}$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{N}$.

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble fondamental

Définition : tribu

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ est une **tribu** sur Ω si :

- $\mathcal{A}$ est **non vide**
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **union dénombrable** :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$$

La structure algébrique $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable (ou probabilisable). Les éléments de $A \in \mathcal{A}$ sont des parties mesurables.

Exemple : $\{\varnothing, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont <u>toujours</u> des tribus sur Ω.

Soit Ω l'univers des éventualités : ensemble fondamental

Définition : tribu - alternative

Une famille $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est une **tribu** sur Ω si :

- $\varnothing \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **complémentaire** : $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}$
- Stabilité par **intersection dénombrable** :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$$

La structure algébrique $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable (ou probabilisable). Les éléments de $A \in \mathcal{A}$ sont des parties mesurables.

Exemple : $\{\varnothing, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont toujours des tribus sur Ω.

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega\}$

Exemple : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

  $\rightarrow \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

  $\rightarrow \quad \{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{C}$

- Tribu **engendrée** par $\mathcal{C}$:

Espace probabilisable

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

  $\rightarrow \; \{1,2\}^c = \{3,4,5,6\} \notin \mathcal{C}$

- Tribu **engendrée** par $\mathcal{C}$:

$\sigma(\mathcal{C})$

Exemple : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

  $\rightarrow \{1,2\}^c = \{3,4,5,6\} \notin \mathcal{C}$

- Tribu **engendrée** par $\mathcal{C}$:

$\sigma(\mathcal{C})= \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega$

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu (tribu grossière)
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$ est une tribu
- $\mathcal{C} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu

  $\rightarrow \ \{1,2\}^c = \{3,4,5,6\} \notin \mathcal{C}$

- Tribu **engendrée** par $\mathcal{C}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega, \{3,4,5,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Définition : mesure

Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$:

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Définition : mesure

Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$:

- $\mu(\varnothing) = 0$

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Définition : mesure

Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$:

- $\mu(\varnothing) = 0$
- μ est σ-additive :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Définition : mesure

Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$:

- $\mu(\varnothing) = 0$
- μ est σ-additive : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de $\mathcal{A}$ (*i.e.* $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$), alors :

Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Définition : mesure

Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$:

- $\mu(\varnothing) = 0$
- μ est σ-additive : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de $\mathcal{A}$ (*i.e.* $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$), alors :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

Définition : mesure

Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$:

- $\mu(\varnothing) = 0$
- μ est σ-additive : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de $\mathcal{A}$ (*i.e.* $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$), alors :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Exemple : la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definie pour toute partie A de $\mathbb{N}$ par $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Ω peut être **fini** ($\{P, F\}$), **infini dénombrable** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...) ou même **continu** ($[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$...).

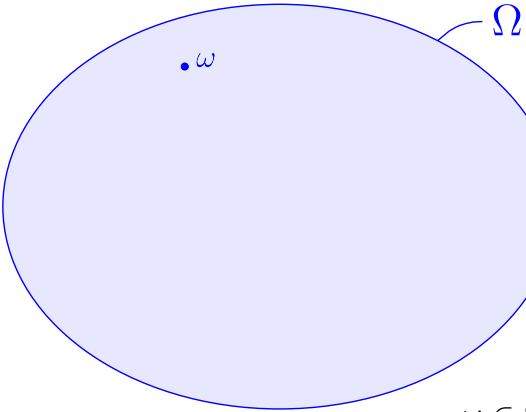
Définition : mesure de probabilité (axiomes de Kolmogorov)

Une **mesure de probabilité** est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$:

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- μ est σ-additive : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties deux-à-deux disjointes de $\mathcal{A}$ (*i.e.* $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$), alors :

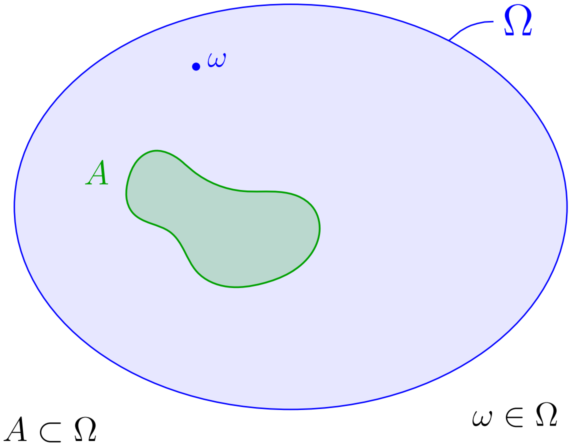
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple : la mesure de dirac sur $(\Omega, \mathcal{A})$ definie pour un élément donné (fixé) $\omega \in \Omega$ par $\delta_\omega(A) = \mathbf{1}_{\omega\in A}\ \forall\ A \in \mathcal{A}$.



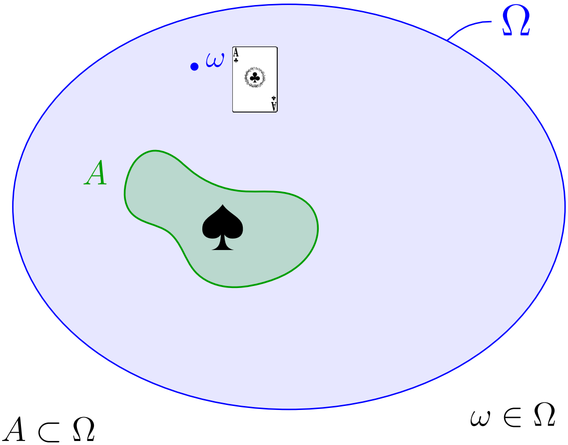
$\omega \in \Omega$

$\omega \in \Omega$ est une éventualité (élémentaire)

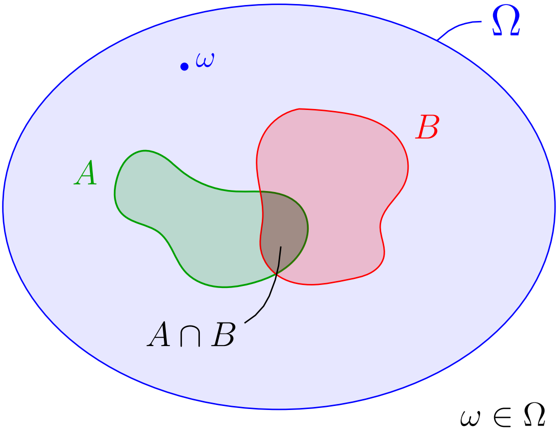


$A \subset \Omega$ est un évènement. Si $\omega \in \Omega$ alors, l'évènement A est réalisé.

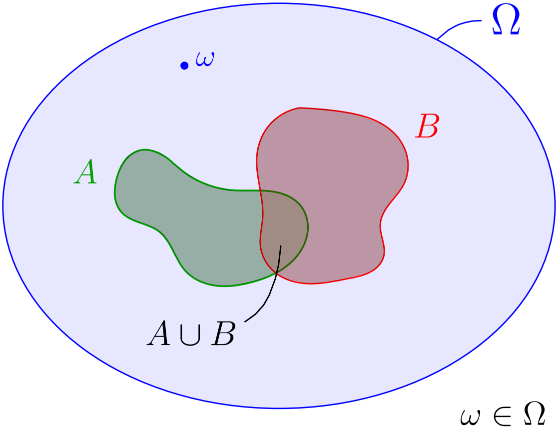
Vocabulaire probabiliste



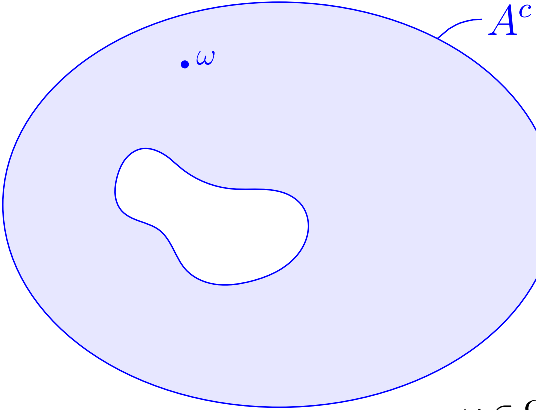
$A \subset \Omega$ est un évènement. Si $\omega \in \Omega$ alors, l'évènement A est réalisé.



$A \cap B$: *A **et** B sont réalisés simultanément*.



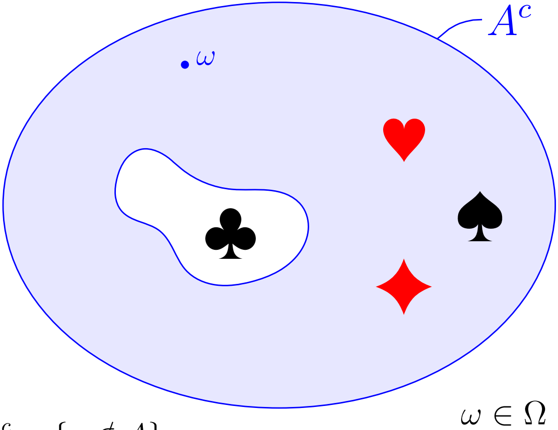
$A \cup B$: *au moins l'un des deux évènements A **ou** B est réalisé*.



$A^c = \{\omega \notin A\}$

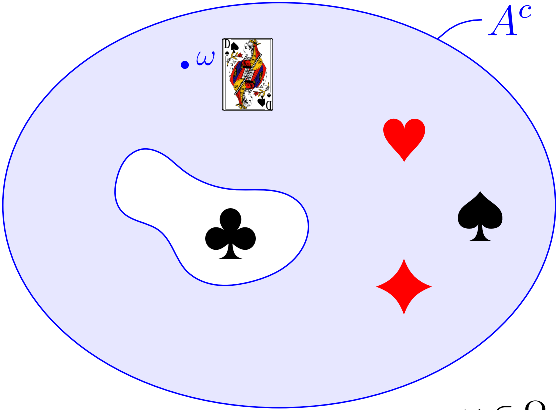
$\omega \in \Omega$

A^c : si $\omega \notin A$ alors, l'évènement A n'est pas réalisé.



$A^c = \{\omega \notin A\}$

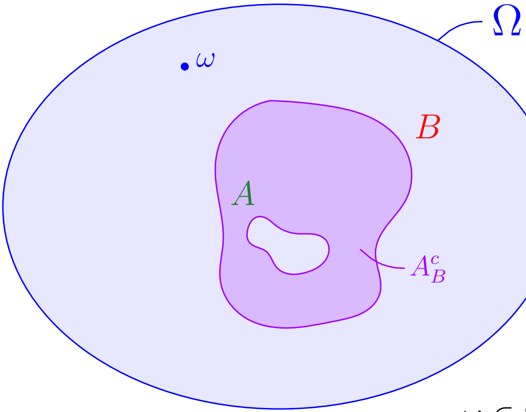
A^c : si $\omega \notin A$ alors, l'évènement A n'est pas réalisé.



$\omega \in \Omega$

$A^c = \{\omega \notin A\}$

A^c : si $\omega \notin A$ alors, l'évènement A n'est pas réalisé.

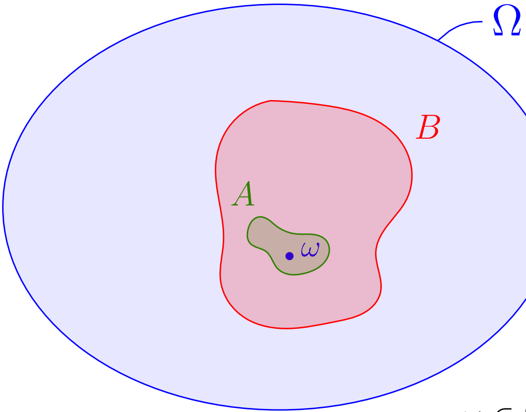


$\omega \in \Omega$

$$A_B^c = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\}$$

$A_B^c = A^c \cap B$: l'évènement B est réalisé sans l'évènement A.

Vocabulaire probabiliste

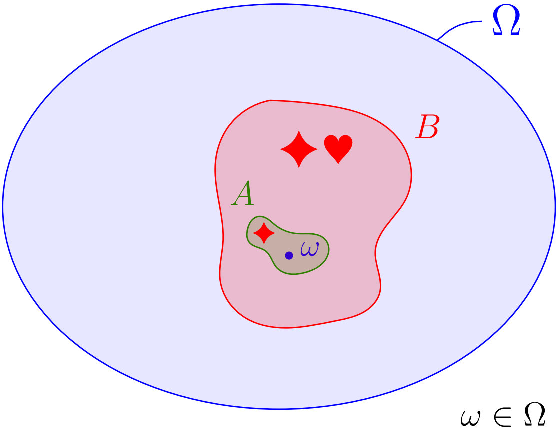


$\omega \in \Omega$

$A \subset B : \ \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$

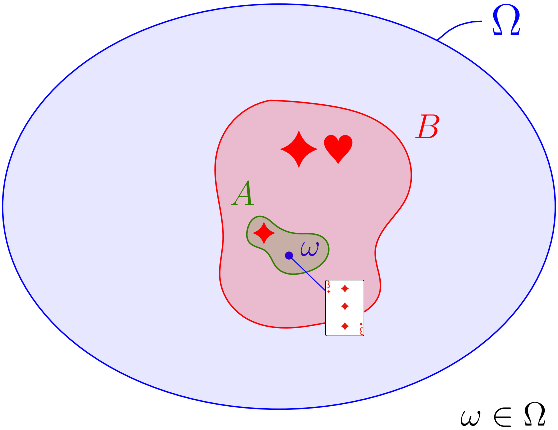
$A \subset B$: l'évènement A implique l'évènement B.

Vocabulaire probabiliste



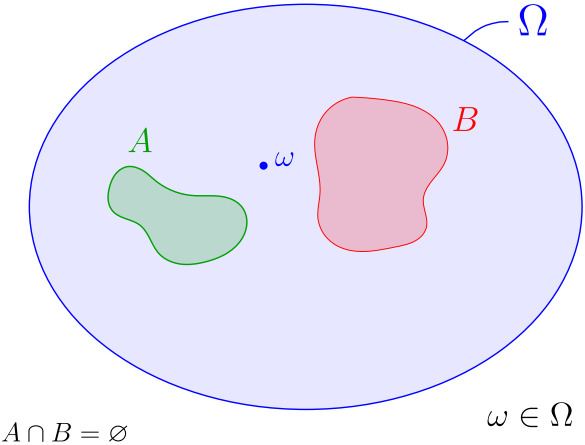
$$A \subset B : \ \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

$A \subset B$: l'évènement A implique l'évènement B.

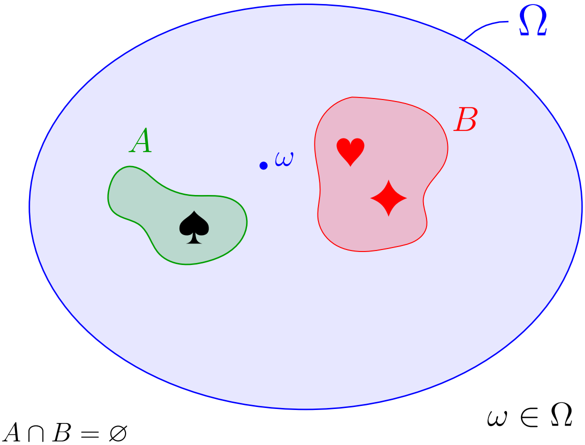


$A \subset B : \ \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$

$A \subset B$: l'évènement A implique l'évènement B.



$A \cap B = \varnothing$: les évènements A et B sont incompatibles.



$A \cap B = \varnothing$: les évènements A et B sont incompatibles.

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}: \; \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}: \ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(\spadesuit \clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit \diamondsuit)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}: \ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\,\diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}, \ A \subseteq B$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}: \ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\,\diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B: \ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}: \ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\,\diamondsuit)$

- $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B: \ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\,\diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit)$
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit)$
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}: \ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\,\diamondsuit)$

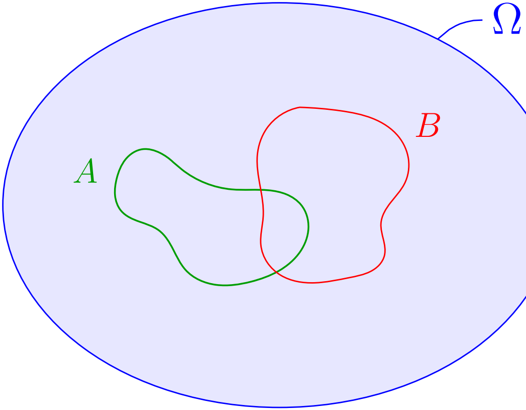
- $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B: \ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit)$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

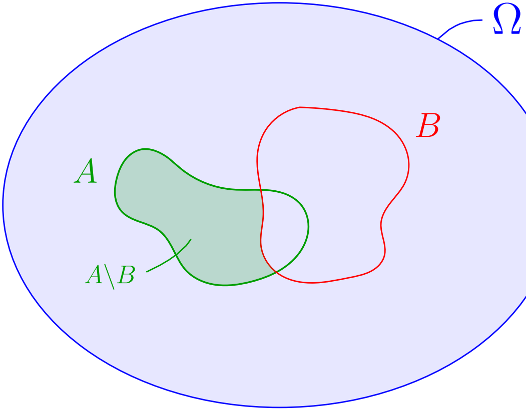
- $A, B \in \mathcal{A}: \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

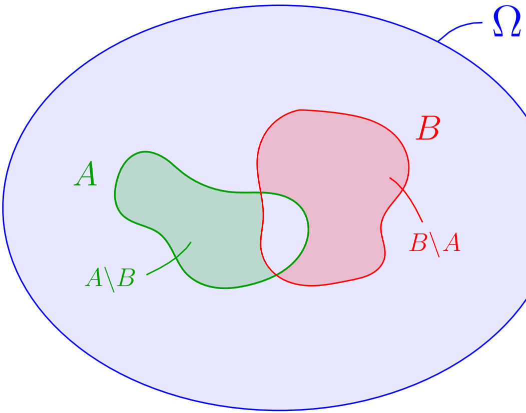


$A \cup B =$

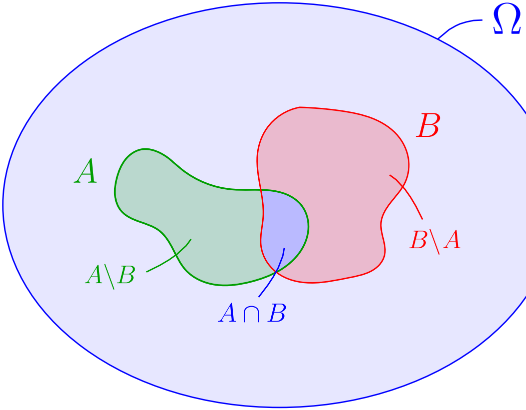
Quelques propriétés de la mesure de probabilité



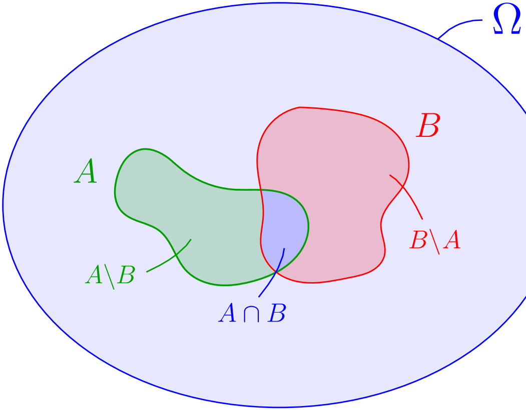
$$A \cup B = A \backslash B \ \cup$$



$A \cup B = A\backslash B \ \cup \ B\backslash A \ \cup$

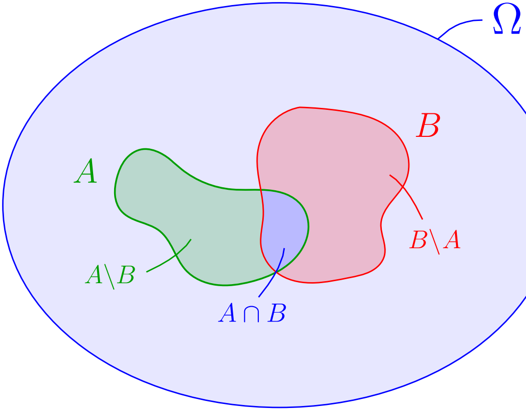


$$A \cup B = A \backslash B \ \cup \ B \backslash A \ \cup \ A \cap B$$



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A\backslash B) + \mathbb{P}(B\backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

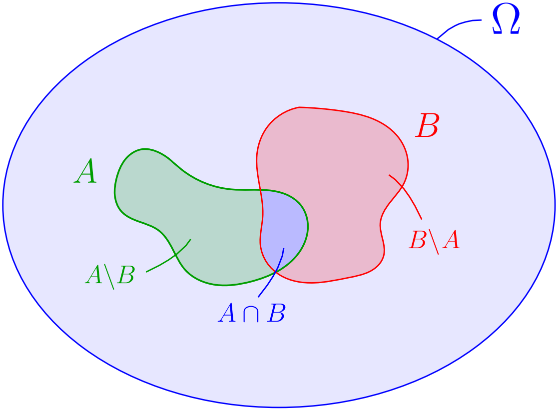
Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A\backslash B) + \mathbb{P}(B\backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

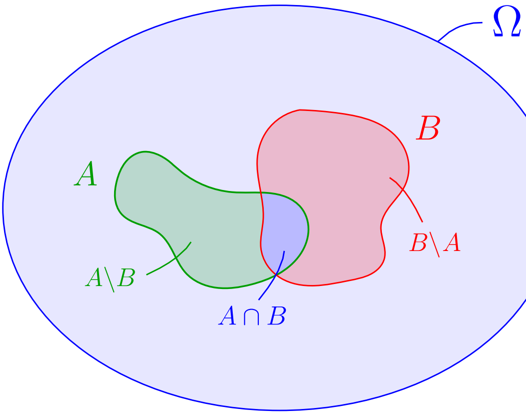
Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité



$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ \dots \ + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)}$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\diamondsuit)$

- $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit)$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\,\diamondsuit)$

- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\qquad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\,\clubsuit)$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbf{K}$ = Roi : $\qquad \mathbb{P}(\mathbf{K} \cup \diamondsuit) = \mathbb{P}(\mathbf{K}) + \mathbb{P}(\diamondsuit) - \mathbb{P}(\mathbf{K}\,\diamondsuit)$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\quad \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\diamondsuit)$

- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\quad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit)$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbf{K}$ = Roi : $\quad \mathbb{P}(\mathbf{K} \cup \diamondsuit) = \mathbb{P}(\mathbf{K}) + \mathbb{P}(\diamondsuit) - \mathbb{P}(\mathbf{K}\diamondsuit)$

- Pour la mesure de comptage sur un ensemble Ω fini :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Quelques propriétés de la mesure de probabilité

- $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\quad \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit) = 1 - \mathbb{P}(\heartsuit\diamondsuit)$
- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ $\quad \mathbb{P}(\spadesuit) \leqslant \mathbb{P}(\spadesuit\clubsuit)$
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ quelconques :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

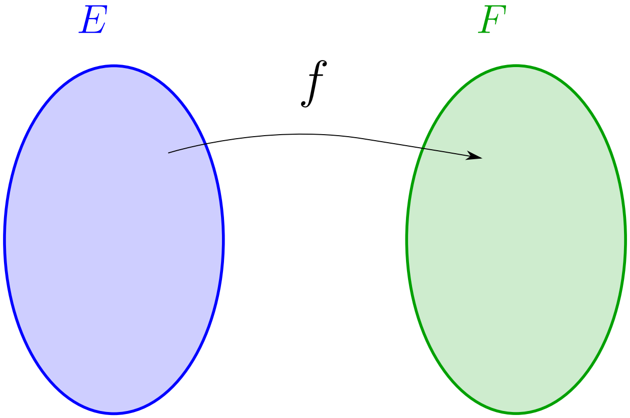
- $\mathbf{K}$ = Roi : $\quad \mathbb{P}(\mathbf{K} \cup \diamondsuit) = \mathbb{P}(\mathbf{K}) + \mathbb{P}(\diamondsuit) - \mathbb{P}(\mathbf{K}\diamondsuit)$
- Pour la mesure de comptage sur un ensemble Ω fini :

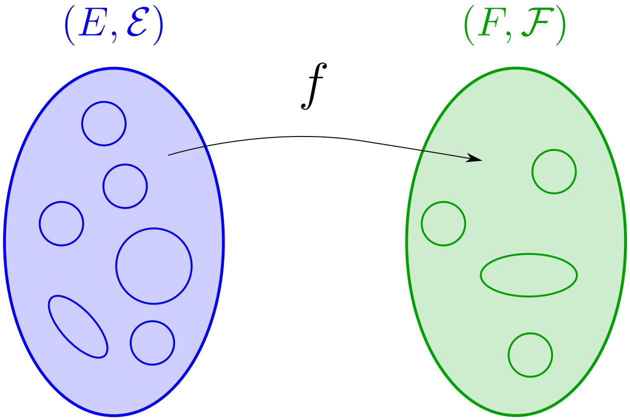
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

Variables aléatoires

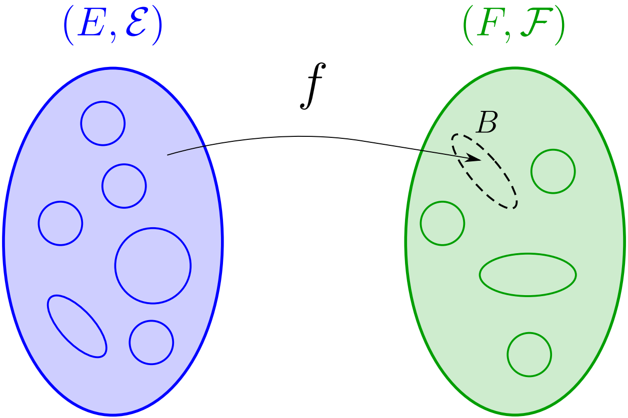
- Définition
- Exemple de lois discrètes
- Propriétés

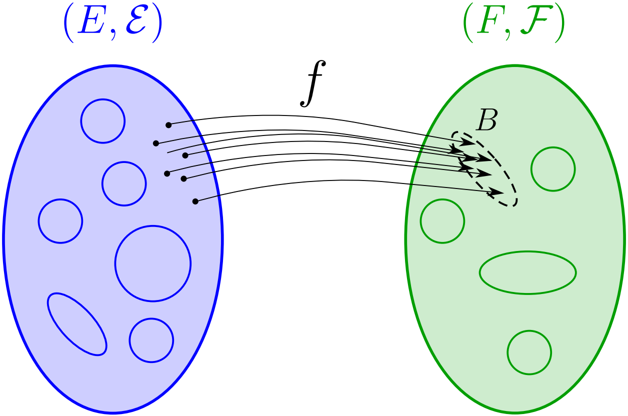
Variable aléatoire

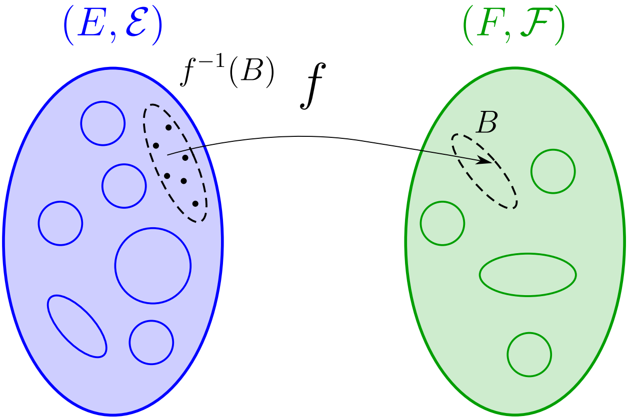


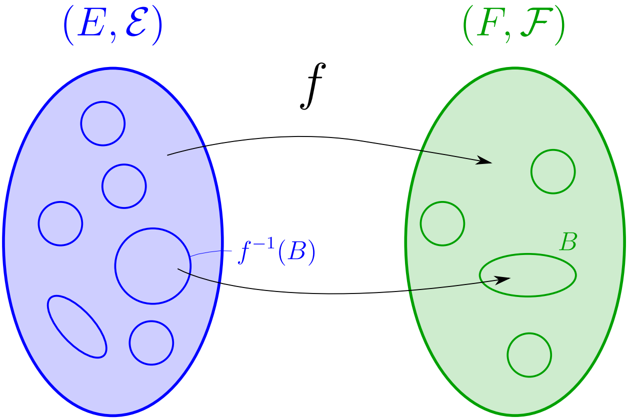

$(E, \mathcal{E})$
$(F, \mathcal{F})$
f

Variable aléatoire

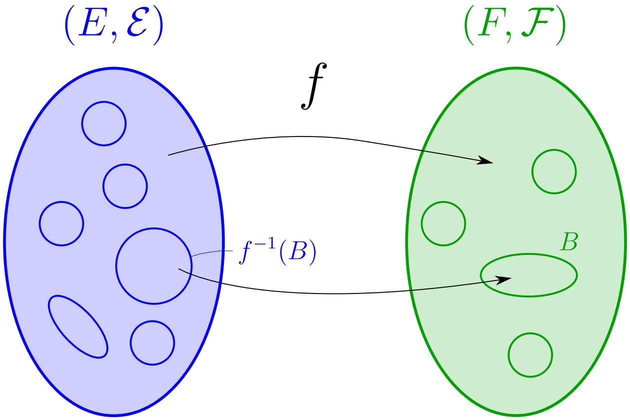



$(E, \mathcal{E})$
$(F, \mathcal{F})$
f
B


$(E, \mathcal{E})$
$(F, \mathcal{F})$
$f^{-1}(B)$
f
B

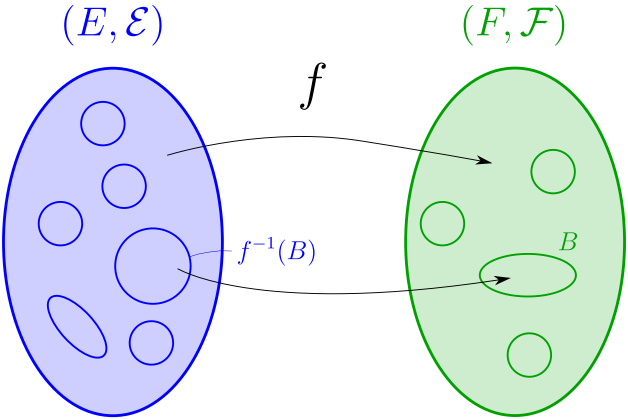


f $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-mesurable $\quad B \in \mathcal{F} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$



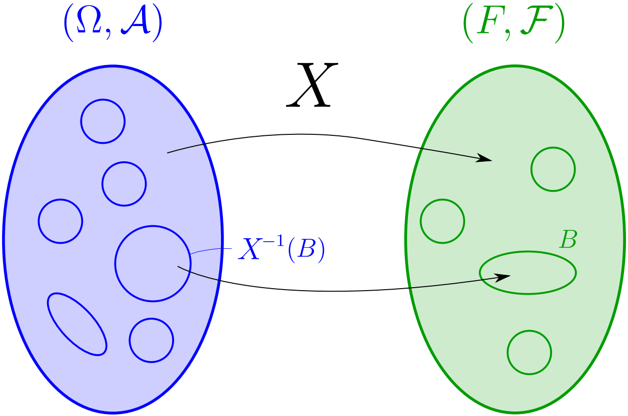
f mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

Variable aléatoire

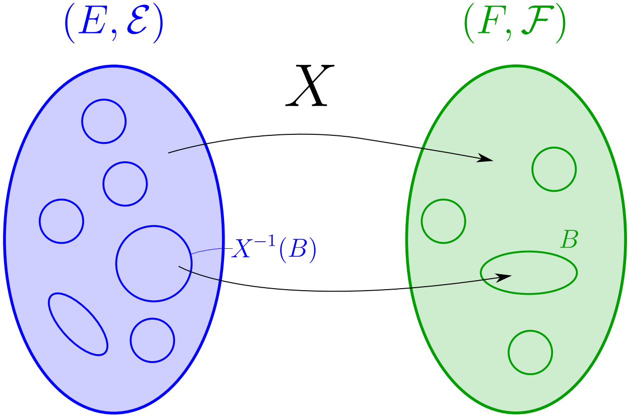


f mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

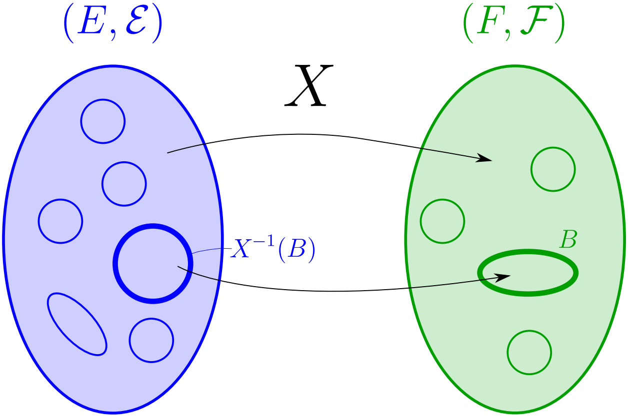
Variable aléatoire



X mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$



$$B \subseteq \mathcal{F} \quad P_X(B) = \mathbb{P}(X(\omega) \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$



$$B \subseteq \mathcal{F} \quad P_X(B) = \mathbb{P}(X(\omega) \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| =$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

*Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : **4€** (2 num), **21€** (3 num), **490€** (4 num) et **95 200€** (5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

*Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : **4€** (2 num), **21€** (3 num), **490€** (4 num) et **95 200€** (5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

A_k *: le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

A_k *: le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

A_k *: le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : $(37, 5, 48, 15, 29)$.

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

A_k *: le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : $(37, 5, 48, 15, 29)$. Alors, la réalisation $\omega = (5, 42, 2, 29, 37)$ produira la variable $x = X(\omega) = ?$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

*Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : **4€** (2 num), **21€** (3 num), **490€** (4 num) et **95 200€** (5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

A_k *: le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : $(37, 5, 48, 15, 29)$. Alors, la réalisation $\omega = (5, 42, 2, 29, 37)$ produira la variable $x = X(\omega) = 21$

Exemple de variable aléatoire discrète : Loto

Un joueur choisit 5 numéros dans une grille de nombres allant de 1 à 49. Les gains varient de la manière suivante : ***4€*** *(2 num),* ***21€*** *(3 num),* ***490€*** *(4 num) et* ***95 200€*** *(5 num).*

$\Omega = \{1, 2, ...49\}^5$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{49^5}$

A_k *: le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la sélection du joueur est : $(37, 5, 48, 15, 29)$. Alors, la réalisation $\omega = (5, 42, 2, 29, 37)$ produira la variable $x = X(\omega) = 21$ $(\omega \in A_3)$

Loi de probabilité discrète ($X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$)

Mesure de probabilité **discrète** : mesure sur tout ou partie de $\mathbb{N}$

Loi de probabilité discrète ($X : \Omega \to \mathbb{N}$)

Mesure de probabilité **discrète** : mesure sur tout ou partie de $\mathbb{N}$

Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** associée à une variable aléatoire X discrète est donnée par la mesure $\mathbb{P}$ de tout singleton $\{k\}$ de $\mathbb{N}$:

$$P_X(k) = \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$$

Loi de probabilité discrète ($X : \Omega \to \mathbb{N}$)

Mesure de probabilité **discrète** : mesure sur tout ou partie de $\mathbb{N}$

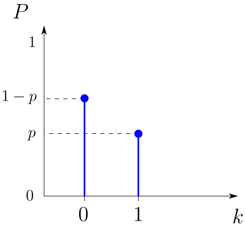
Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** associée à une variable aléatoire X discrète est donnée par la mesure $\mathbb{P}$ de tout singleton $\{k\}$ de $\mathbb{N}$:

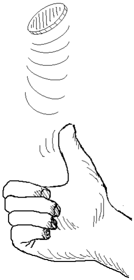
$$P_X(k) = \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$$

- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Hypergéométrique, binomiale négative, Zipf, multinomiale...

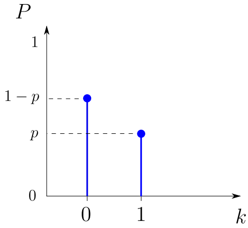
Loi de Bernoulli



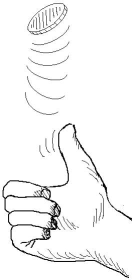
$$P_X(X=k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1-p & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Loi de Bernoulli



$$P_X(X=k) = \begin{cases} p & \text{si } k=1 \\ 1-p & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

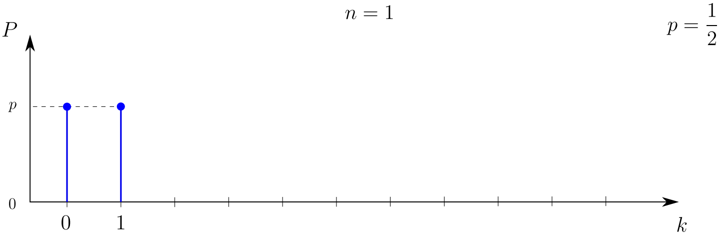


$$\Omega = \mathbb{N} = \{0\} \,\dot\cup\, \{1\} \,\dot\cup\, \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\mathbb{N}\backslash\{0,1\}) = 1 - p + p = 1$$

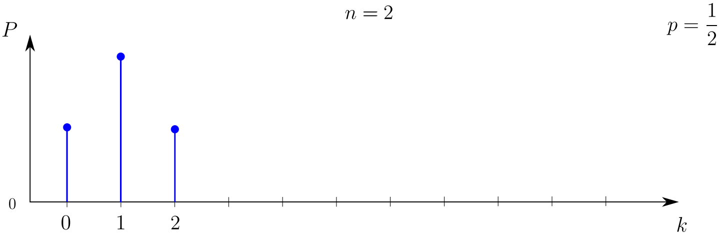
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



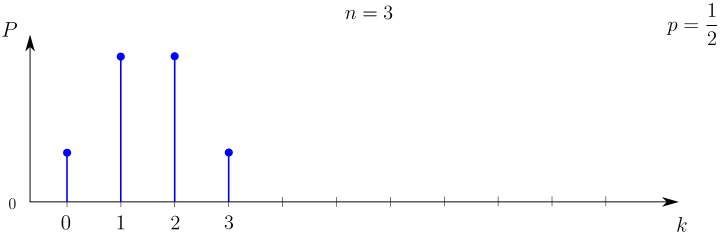
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



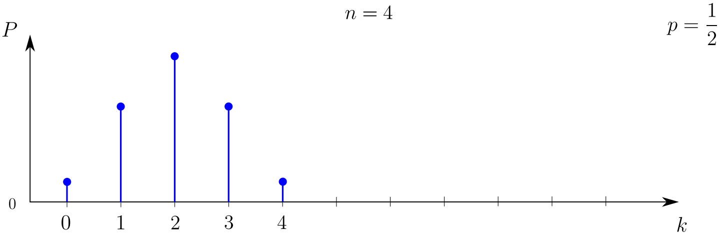
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

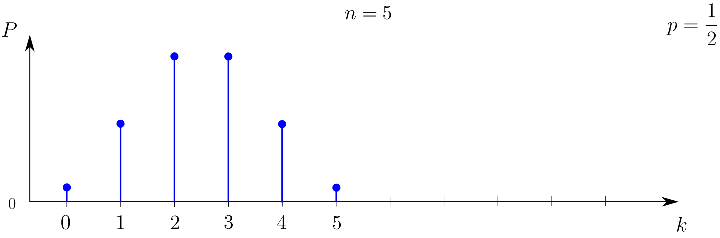


Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

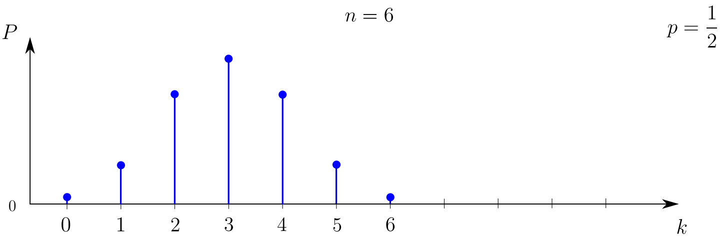


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



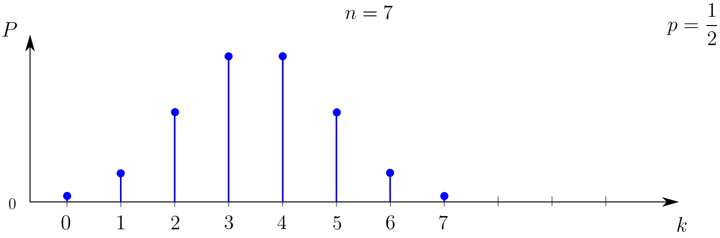
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

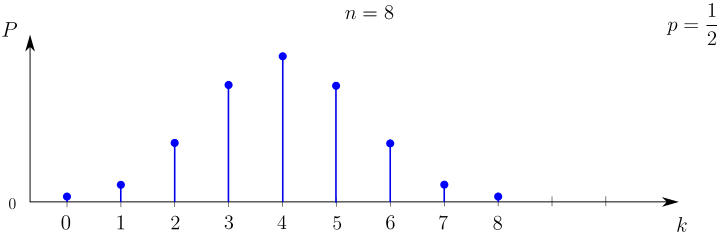


Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

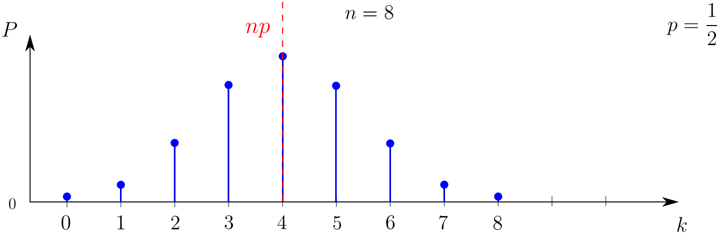


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



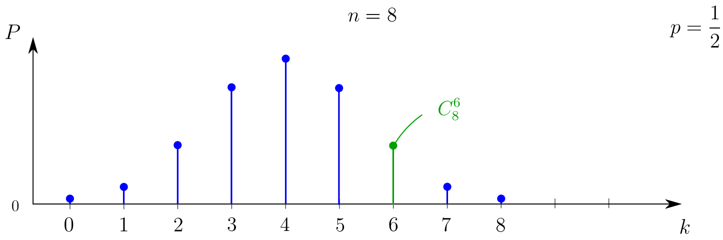
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



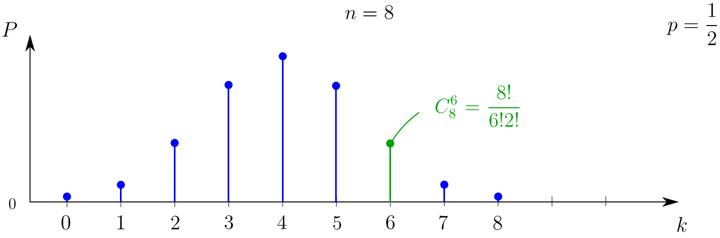
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



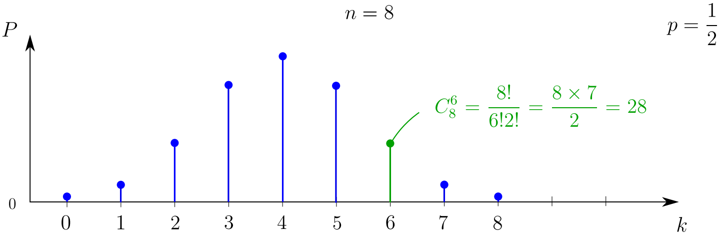
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



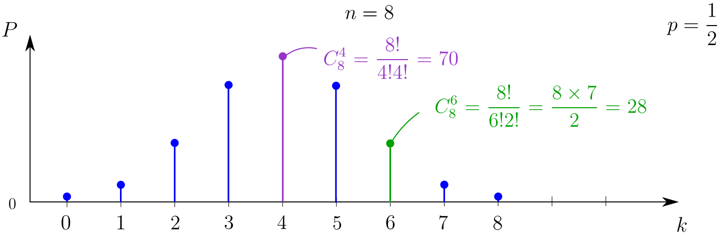
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



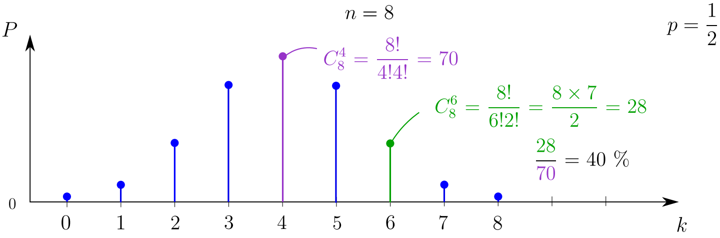
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

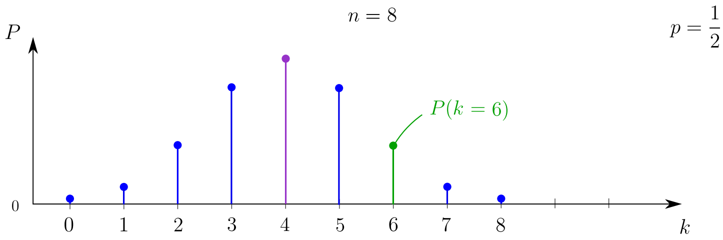


Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

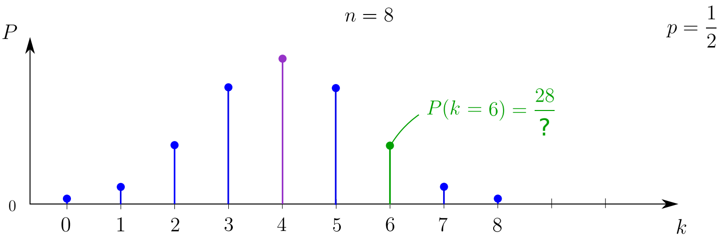


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

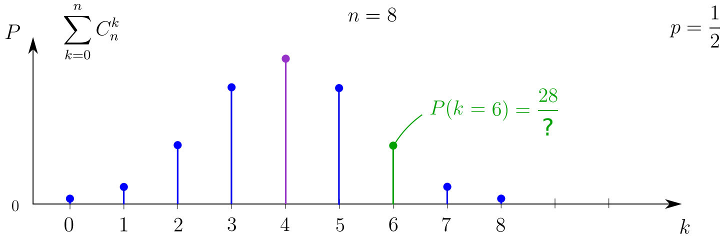


Loi binomiale

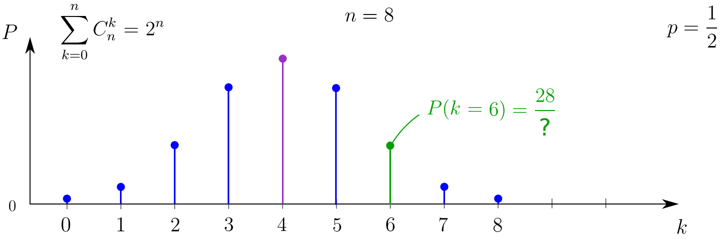
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

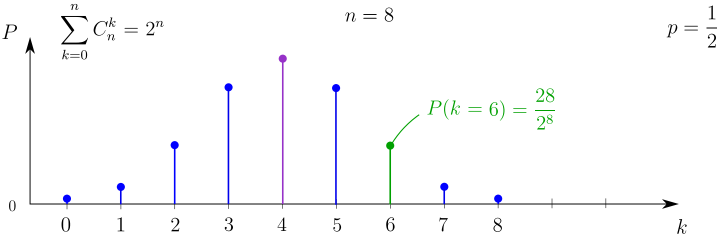


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

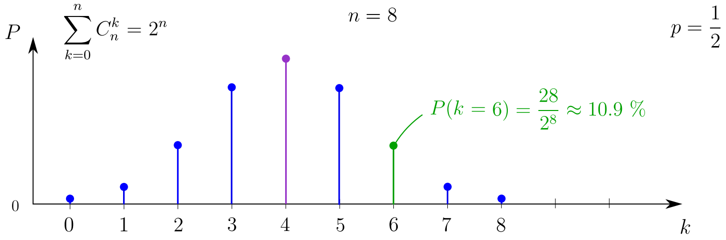


Loi binomiale

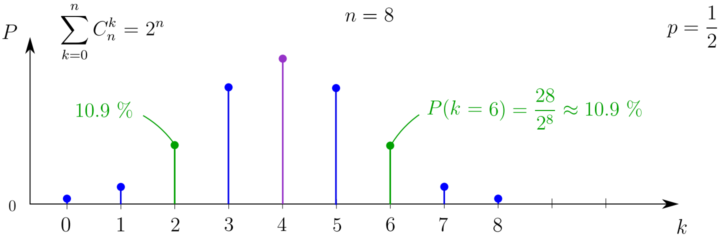
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

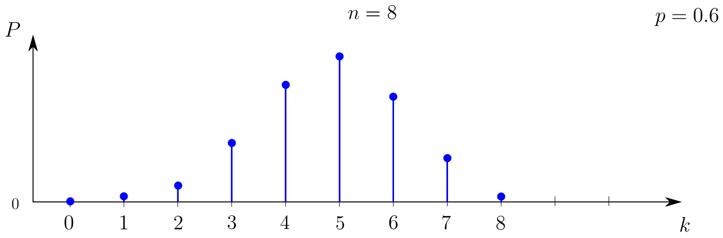


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



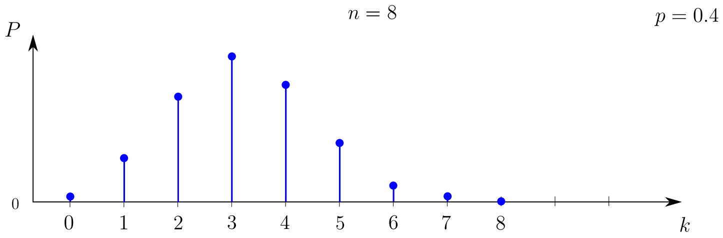
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



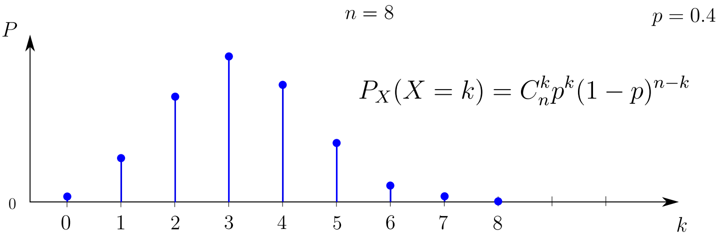
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.

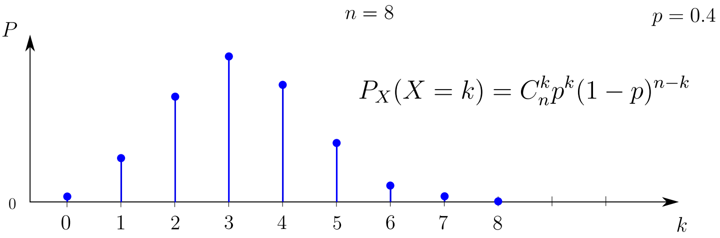


Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



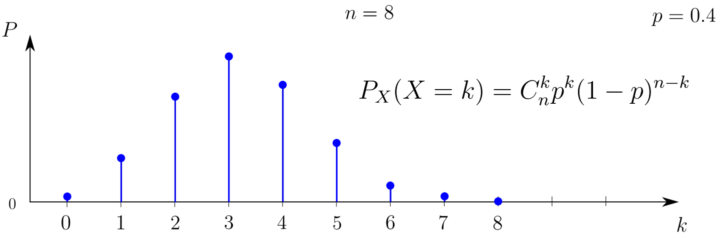
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

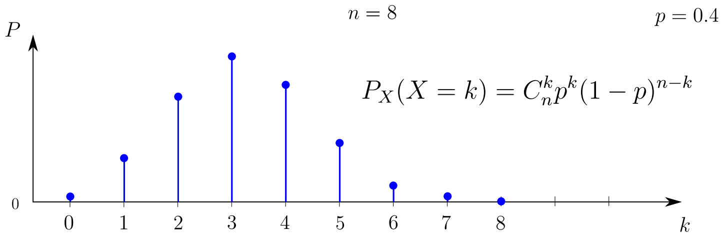
Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



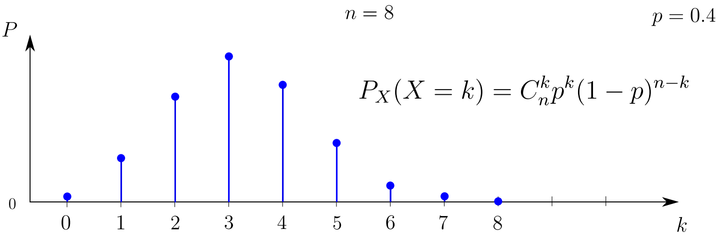
$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n$$

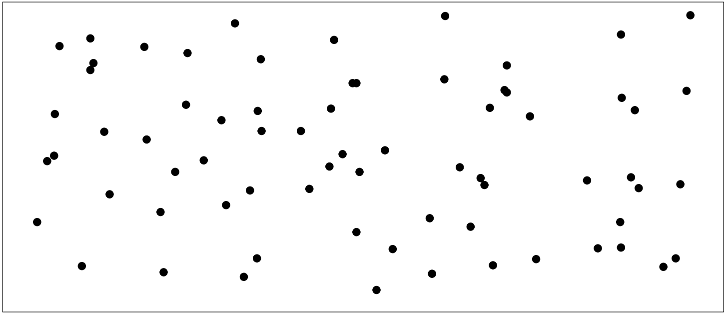
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. Alors, la variable $X = X_1+X_2+...+X_n$ suit une **loi binomiale** de paramètre n.



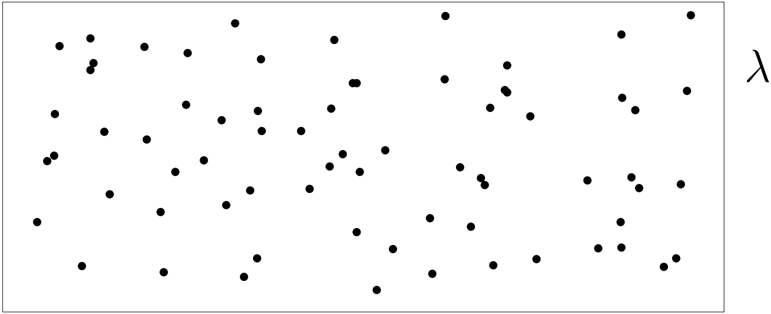
$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

Loi de Poisson

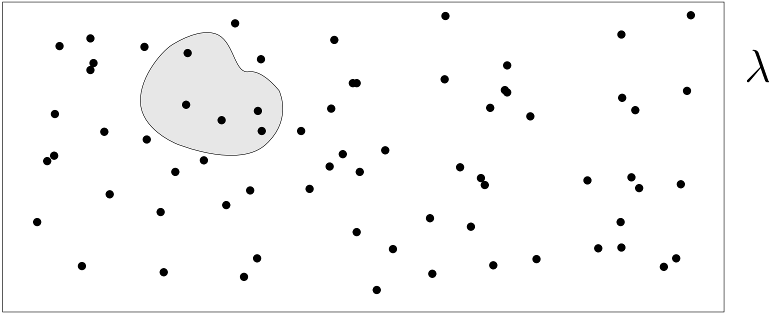
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



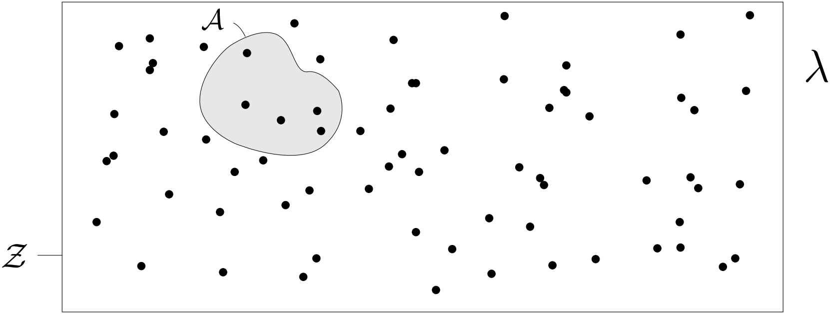
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.

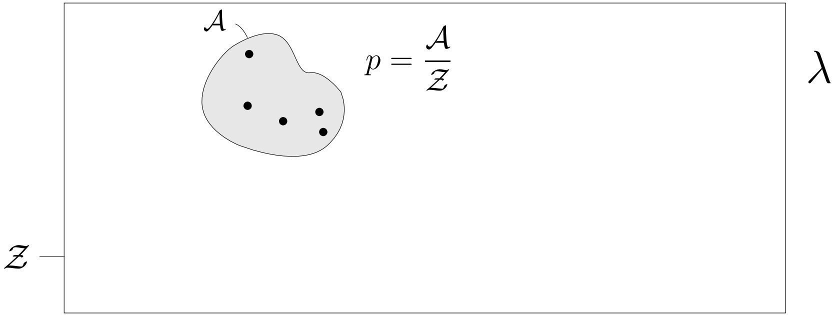


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.

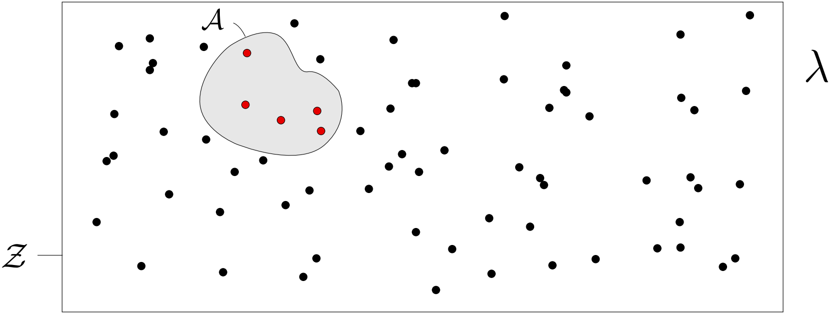


Loi de Poisson

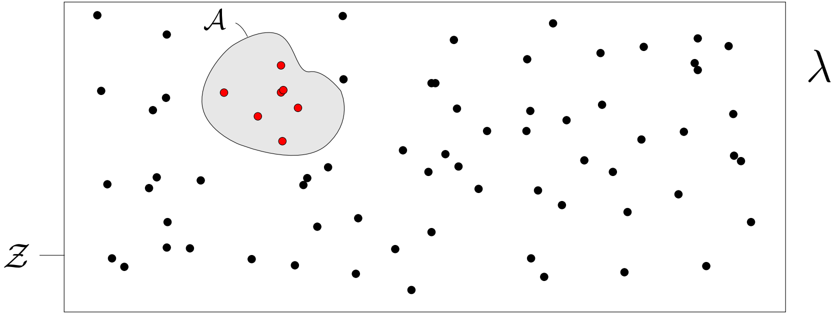
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.

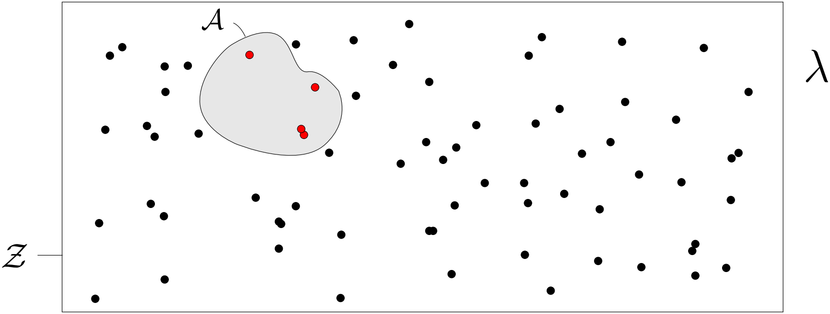


Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



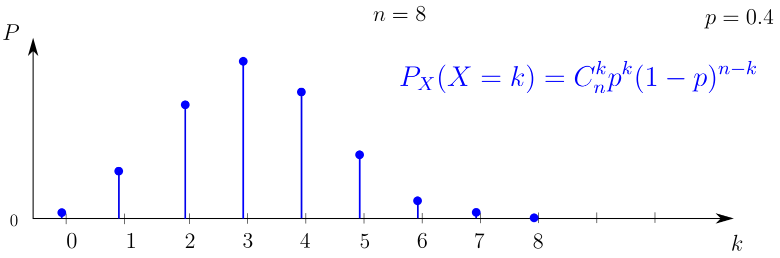
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



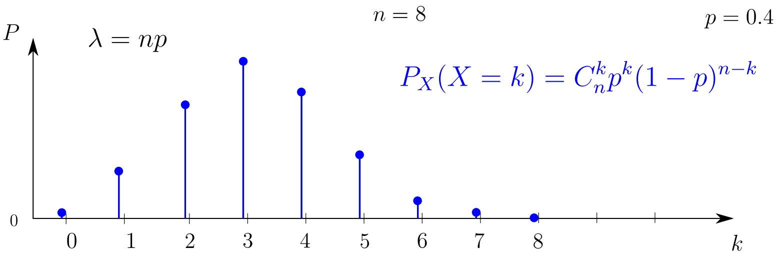
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



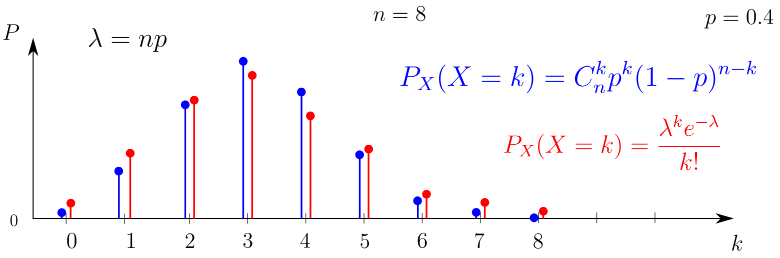
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



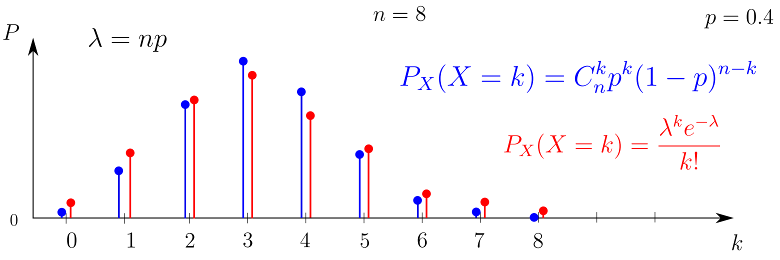
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



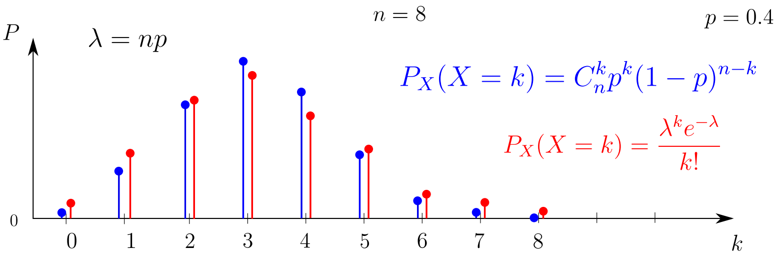
Loi de Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

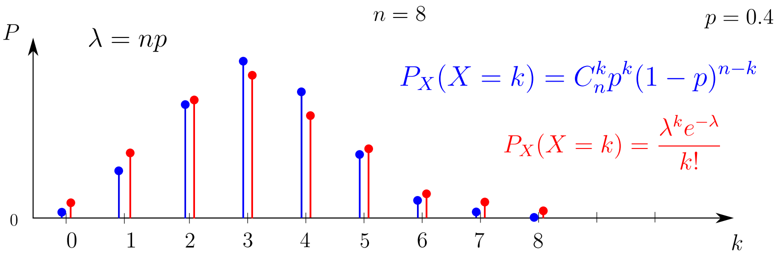
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson

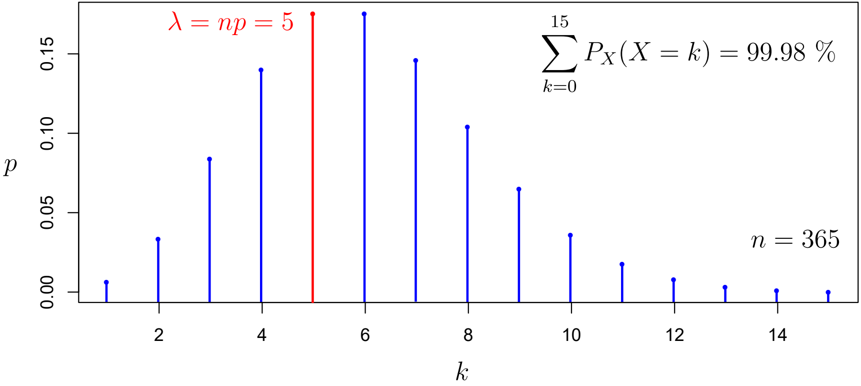
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ...X_n$ une suite (finie) de variables aléatoires distribuées suivant une **loi de Bernoulli** de paramètre p. On suppose $n \gg 1$ et p *relativement petit*. Alors, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda = np$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_X(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)}$$

Loi de Poisson

Exemple : nombre de retards de plus de 30 min sur une ligne de train

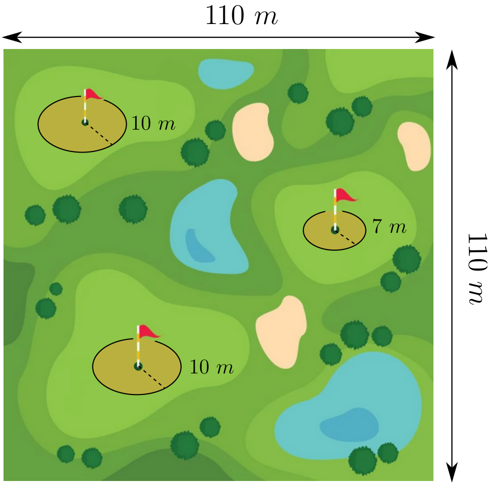


$\lambda = 5$ retards/an **en moyenne** $n = 365$ jours $p = 1.37\ \%$

Le gérant, qui possède 2000 € de trésorerie, doit reboucher tous les trous de taupes présents sur le green pour organiser une compétition planifiée le lendemain.

Le prix de l'entretien est de 1000 € par équipe de travail, pour 8h d'intervention, à raison de 1 trou /heure/équipe.

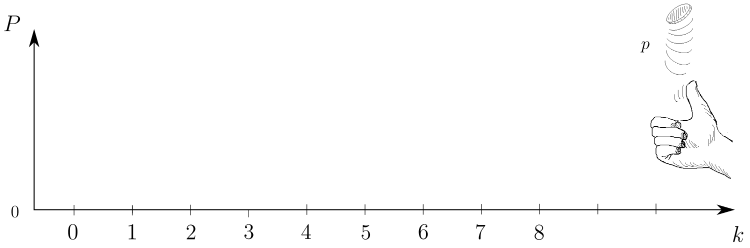
$$\lambda = 115 \text{ trous/ha}$$



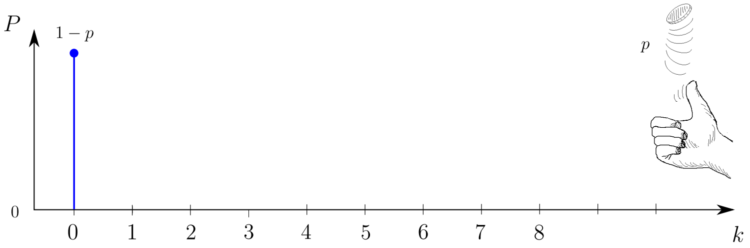
→ Quelle est la probabilité que la compétition puisse être maintenue ?

→ Quel est le coût moyen engagé par le gérant ?

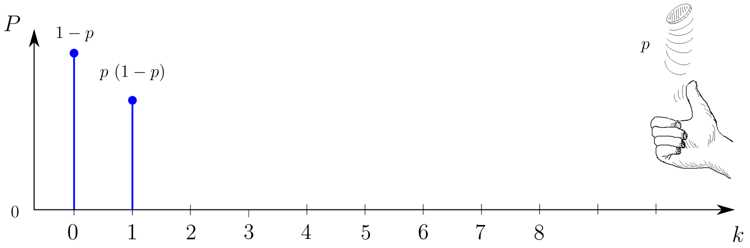
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>infinie</u> de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

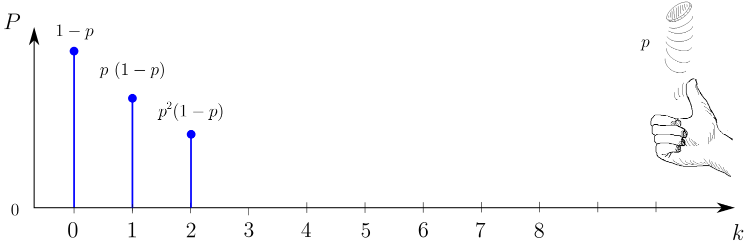


On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



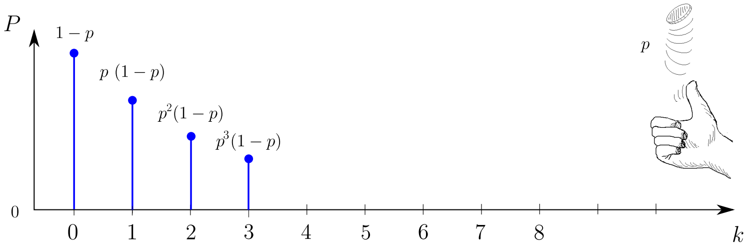
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

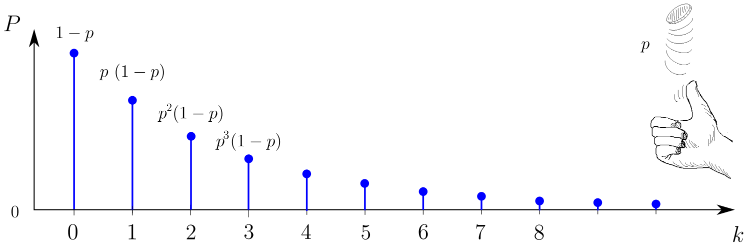


Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

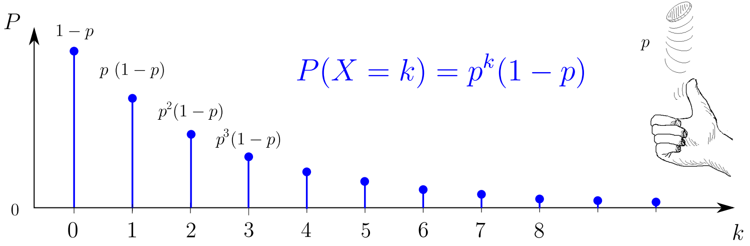


On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



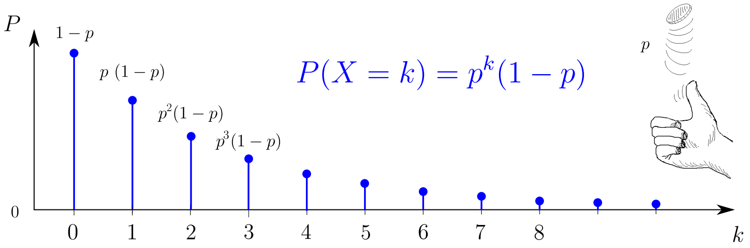
Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



Loi géométrique

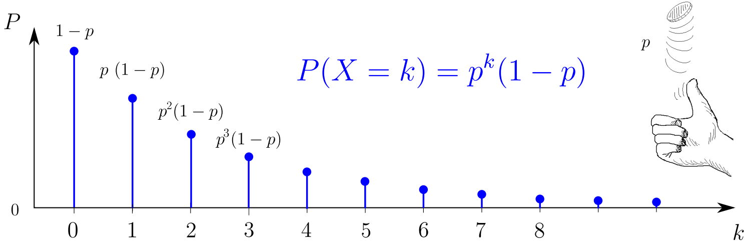
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



$\mathbb{P}(\Omega) =$

Loi géométrique

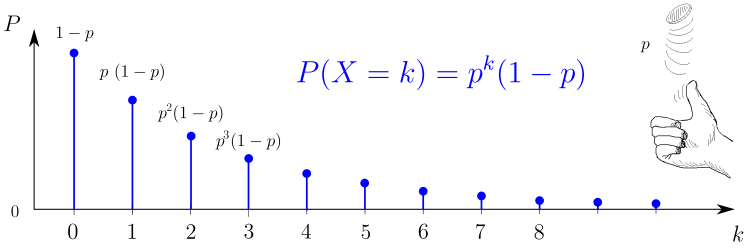
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>infinie</u> de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p^k(1-p) =$$

Loi géométrique

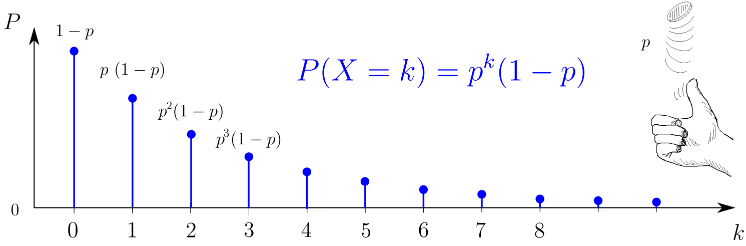
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.



$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p^k(1-p) = (1-p)\sum_{k\in\mathbb{N}} p^k =$$

Loi géométrique

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = \min\{k \mid X_k = 0\} - 1$ suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

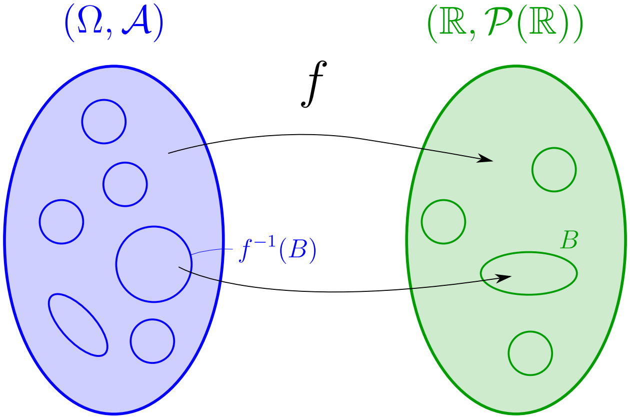


$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p^k(1-p) = (1-p)\sum_{k\in\mathbb{N}} p^k = (1-p)\times\frac{1}{1-p} = 1$$

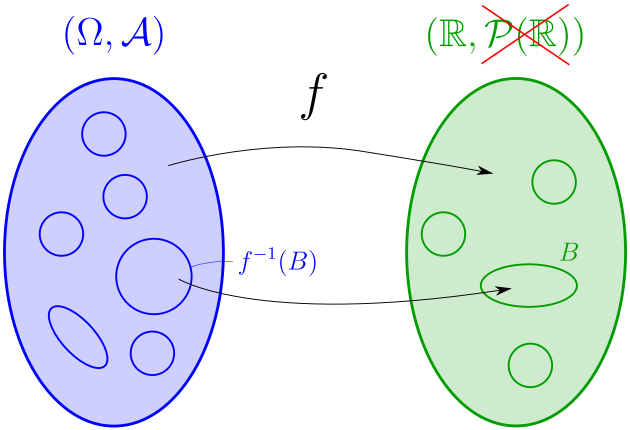
Variables aléatoires II

- *Définition cas continu*
- *Fonction de répartition*
- *Densité de probabilité*
- *(Contre) exemples*

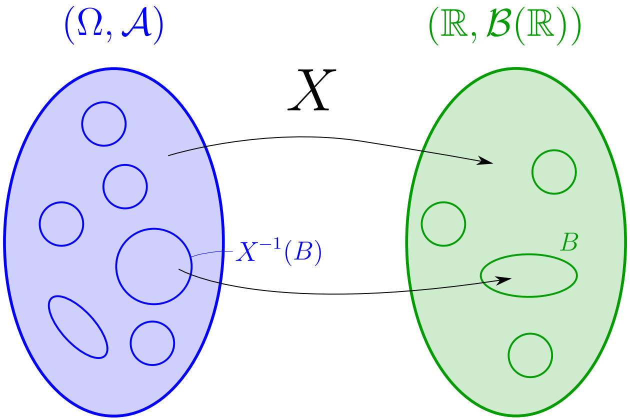
Variable aléatoire continue



X mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$



X mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

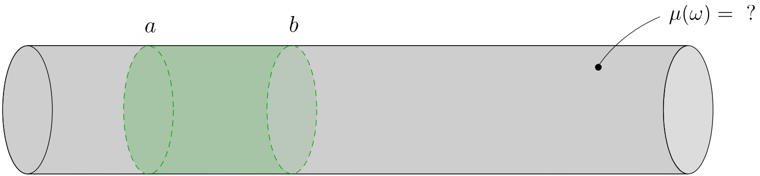


X mesurable $\quad\quad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

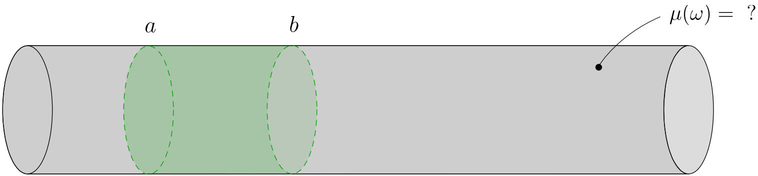
Variable aléatoire continue

Variable aléatoire continue

Variable aléatoire continue

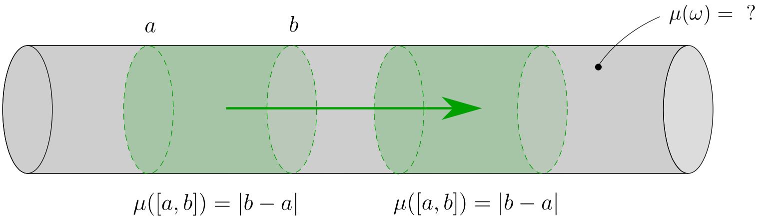


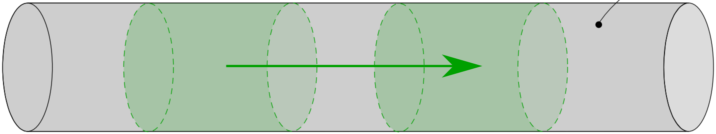
Variable aléatoire continue



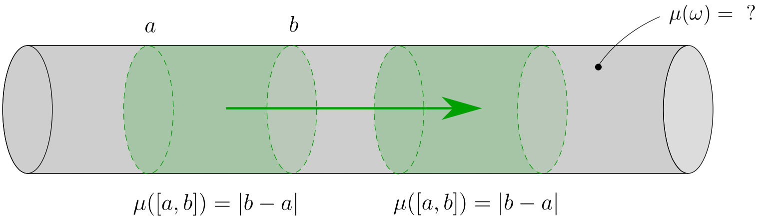
$\mu([a,b]) = |b-a|$

Variable aléatoire continue



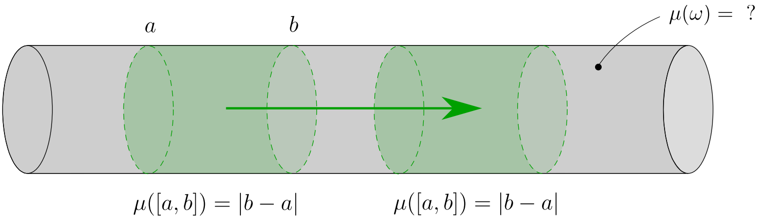


Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :



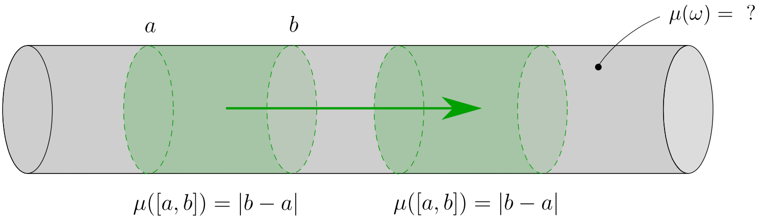
Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

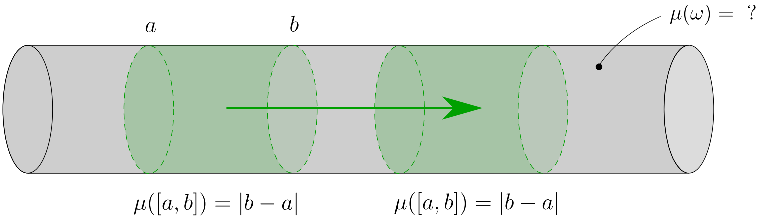
- $\longrightarrow$ invariante par translation
- $\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

- → invariante par translation
- → telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Variable aléatoire continue



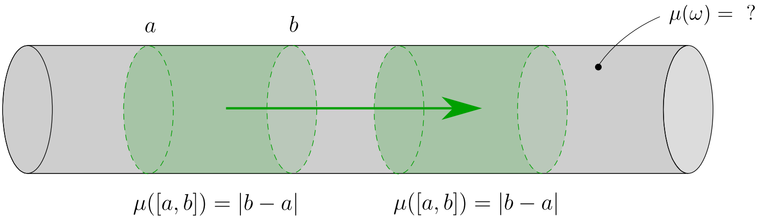
Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation

$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

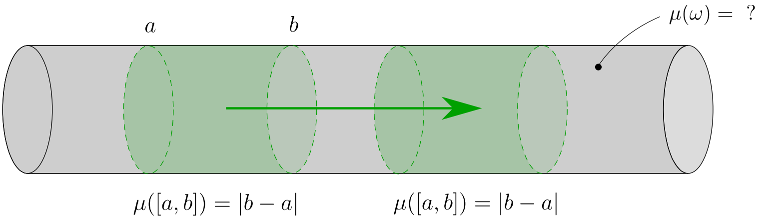
$\longrightarrow$ invariante par translation

$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

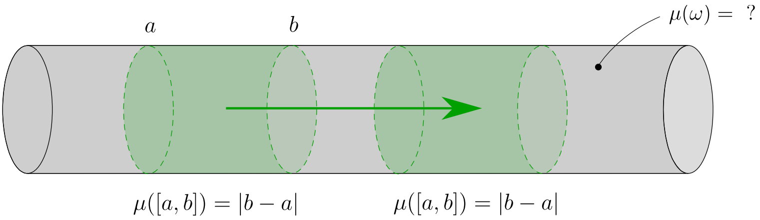
$\longrightarrow$ invariante par translation

$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$$\{x\} \ ?$$



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation

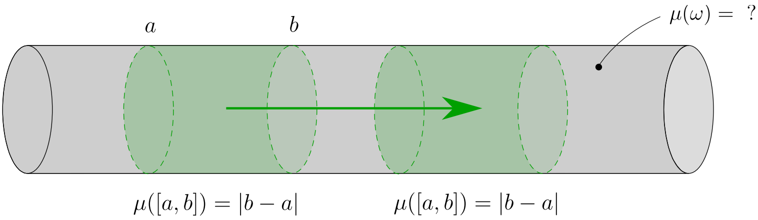
$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$$\{x\} \rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

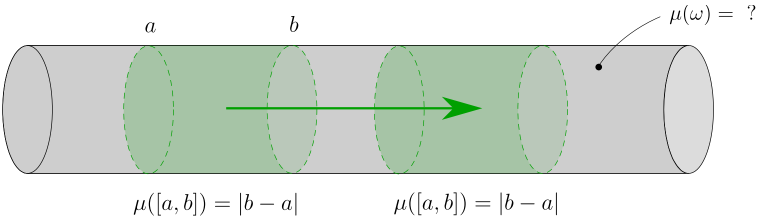
$\longrightarrow$ invariante par translation

$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$$[a,b] \ ?$$



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation

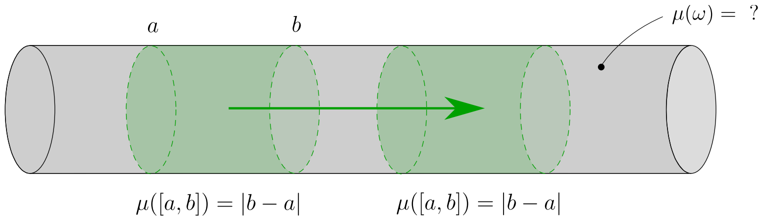
$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$$[a,b] \ \rightarrow \ \{a\} \cup \,]a,b[\, \cup \{b\}$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation

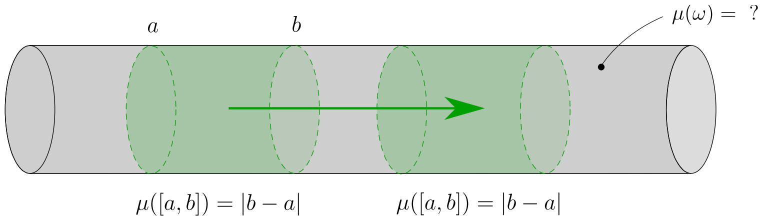
$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$$]-\infty, x] \quad ?$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation

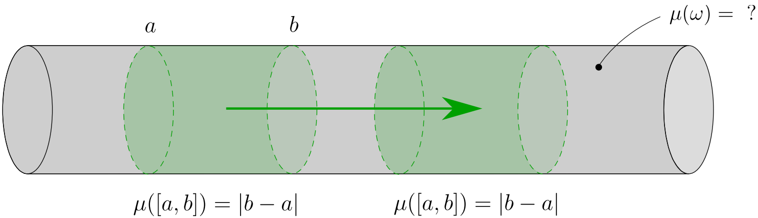
$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b]) = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$$]-\infty, x] \ \rightarrow \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, x]$$

Variable aléatoire continue



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

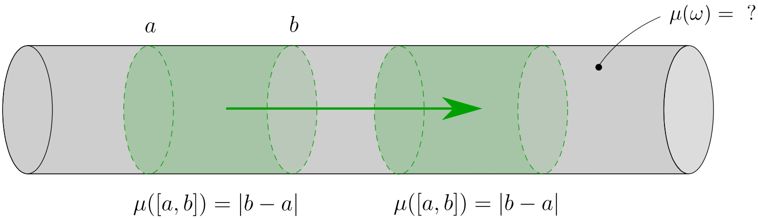
$\longrightarrow$ invariante par translation

$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

$\mathbb{Q}$?



Pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui soit :

$\longrightarrow$ invariante par translation

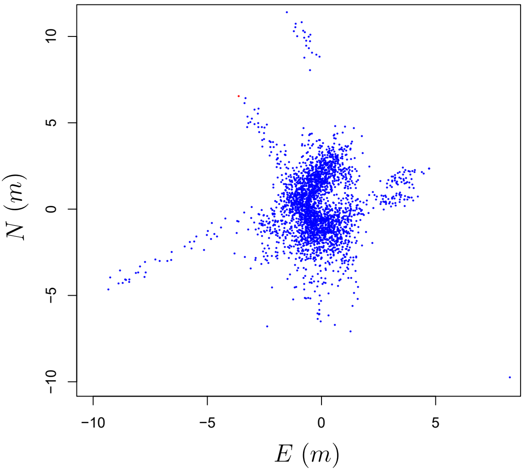
$\longrightarrow$ telle que : $\mu([a,b] = |b-a|$

Solution : tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ tribu engendrée par les segments ouverts $]a,b[$

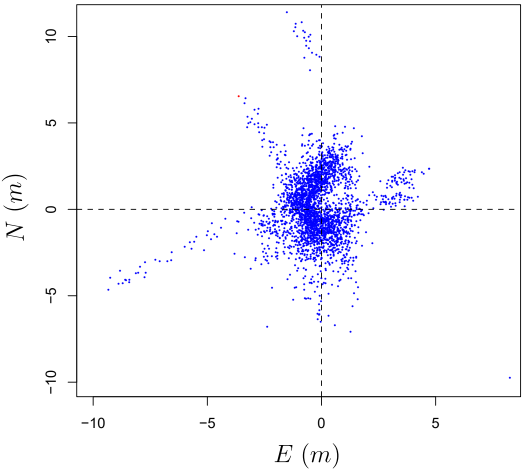
$$\mathbb{Q} \ \rightarrow \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}, \ q_n \in \mathbb{Q}$$

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)

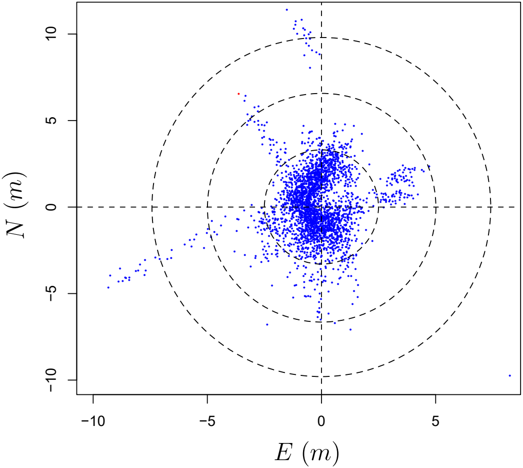


Loi de probabilité continue

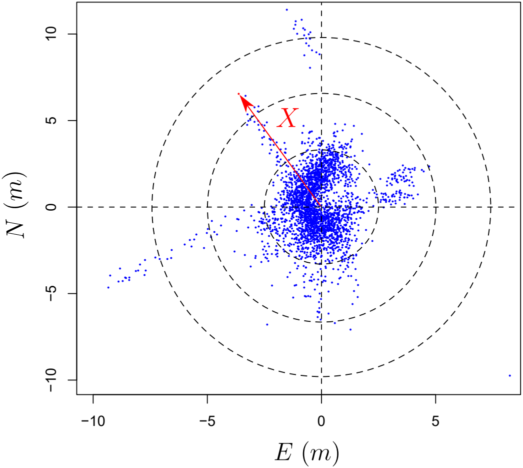
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



X variable aléatoire : $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction $F_X \ : \ \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in \,]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0,1]$
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in \,]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0,1]$
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriétés

- F_X est croissante et à valeurs dans $[0,1]$
- $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Loi de probabilité continue

Fonction de répartition

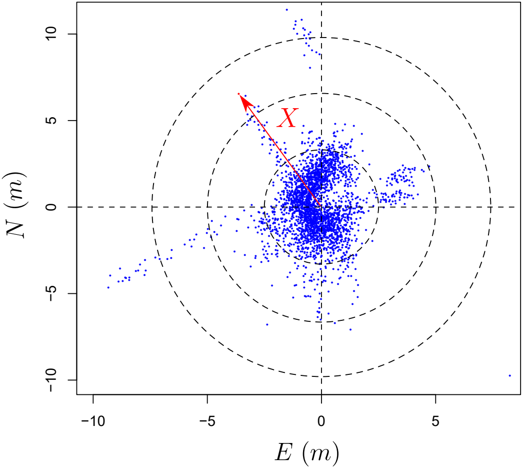
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (discrète ou continue). On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction $F_X \; : \; \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in \,]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriétés

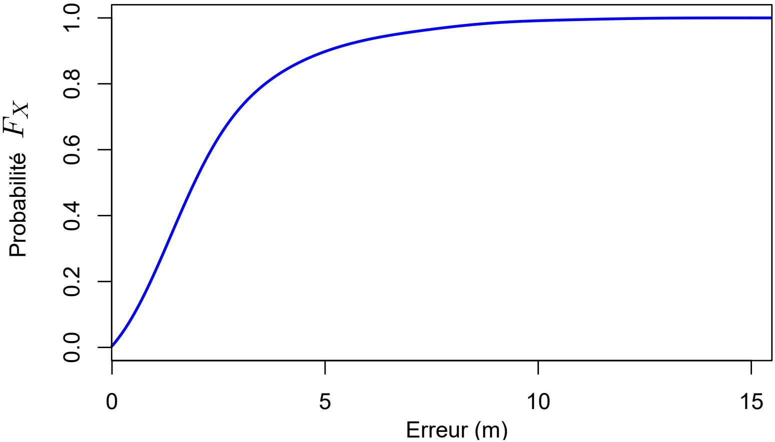
- F_X est croissante et à valeurs dans $[0,1]$
- $\forall \; a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$: $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



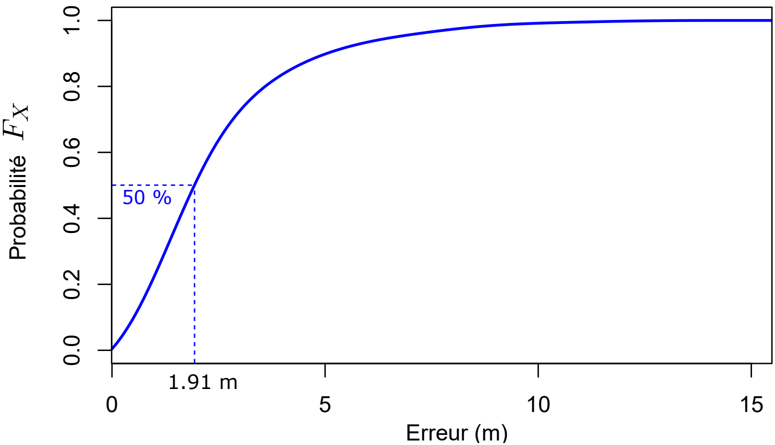
X variable aléatoire : $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



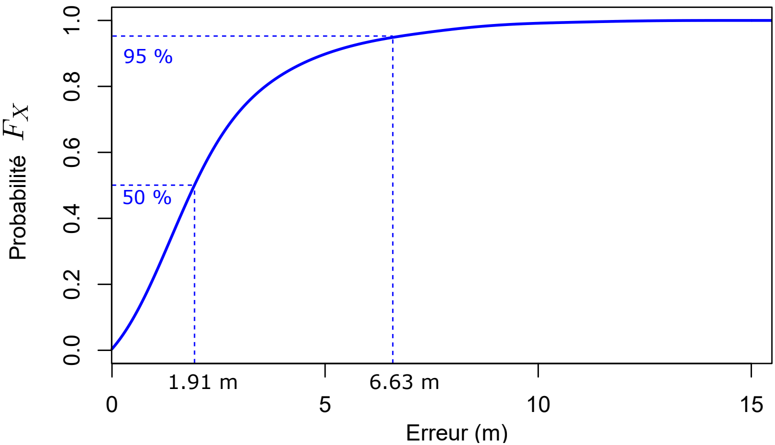
X variable aléatoire : $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



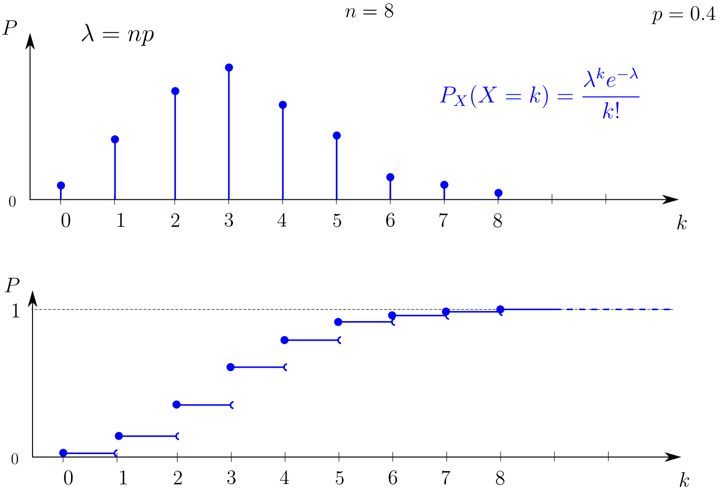
$\mathbb{P}(X < 1.91) = 0.50$ (médiane)

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)

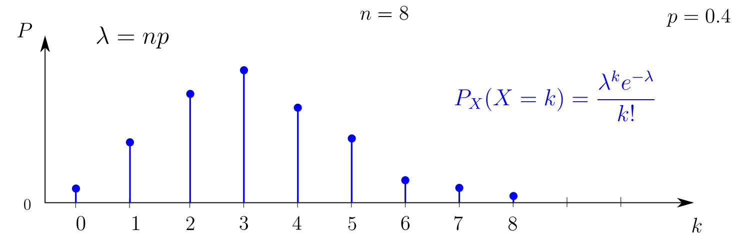


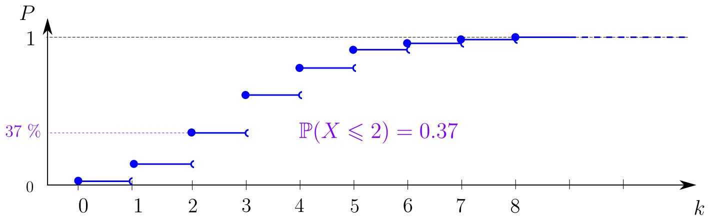
$\mathbb{P}(X < 6.63) = 0.95$ (bande de confiance à 95 %)

E.g. Fonction de répartition de la loi de Poisson

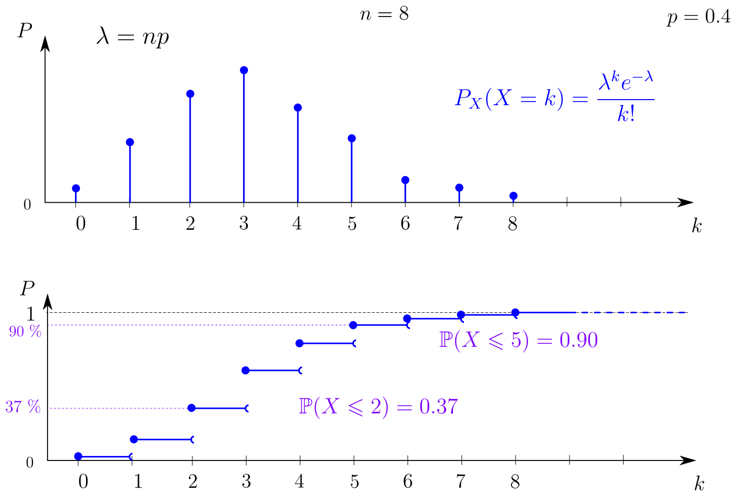


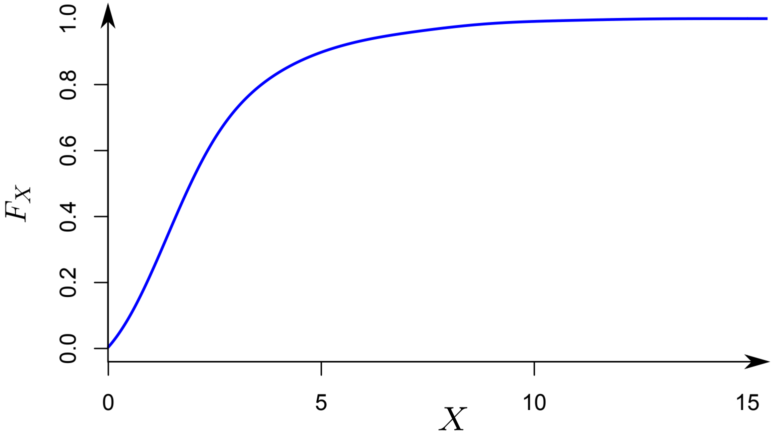
E.g. Fonction de répartition de la loi de Poisson





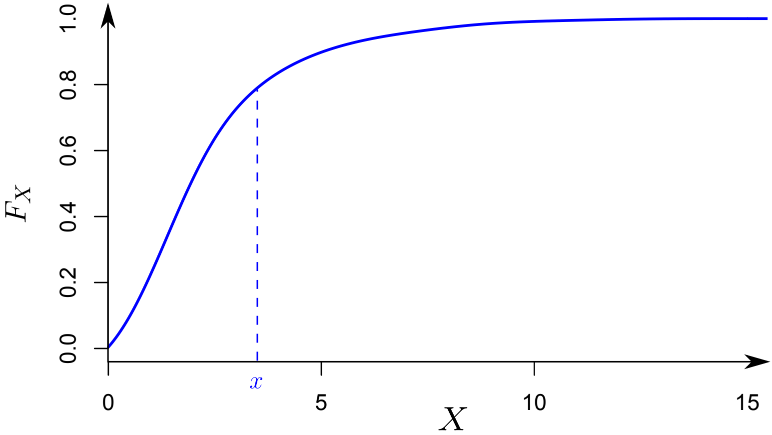
E.g. Fonction de répartition de la loi de Poisson



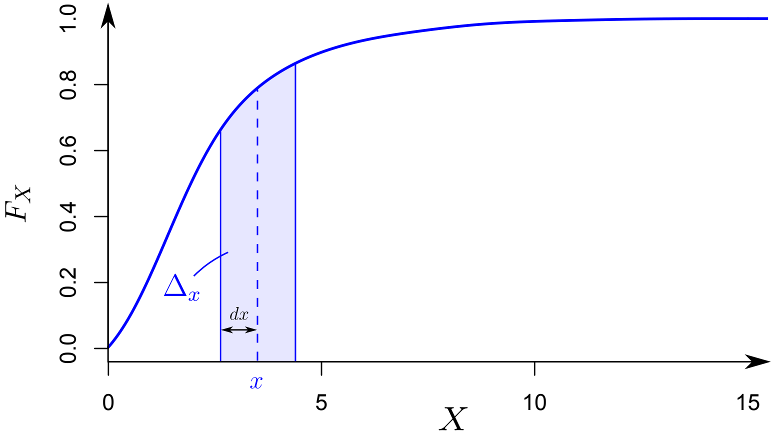


F_X
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
X

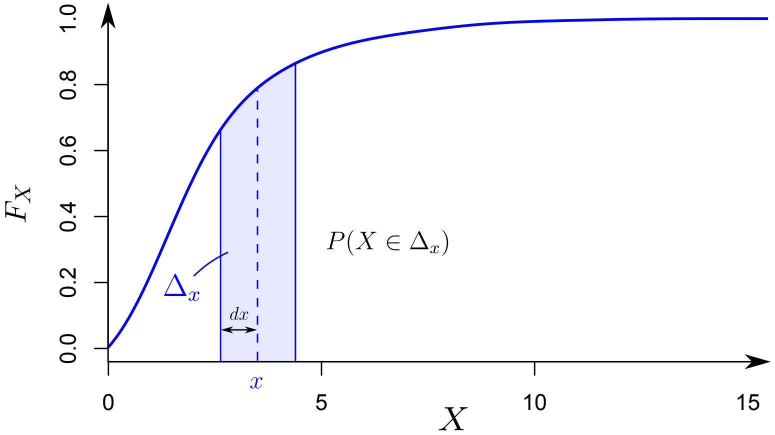
Densité de probabilité



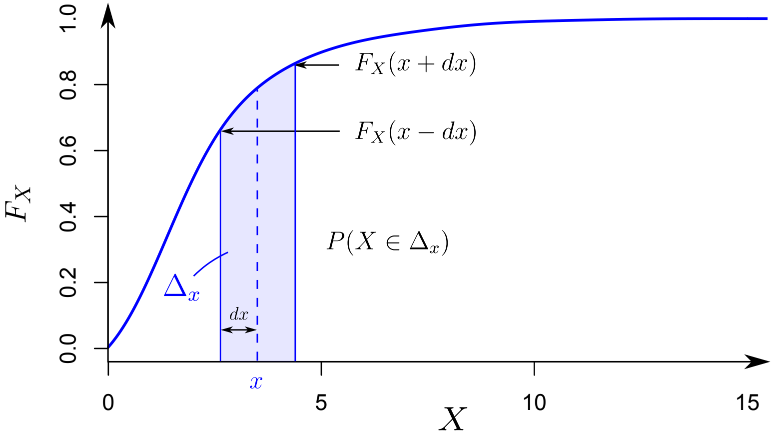
Densité de probabilité

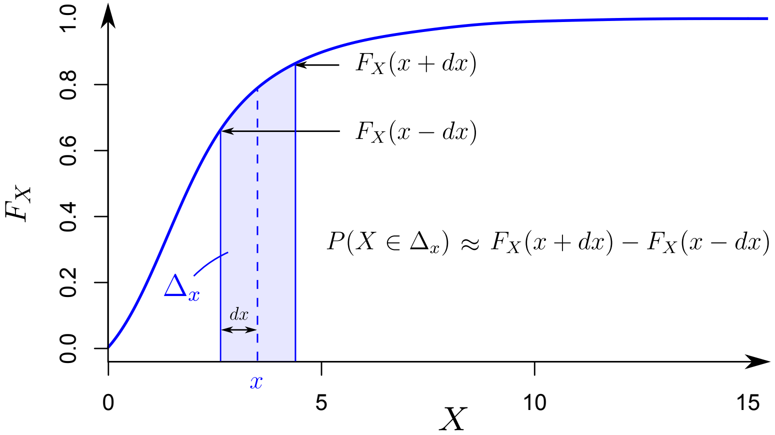


Densité de probabilité

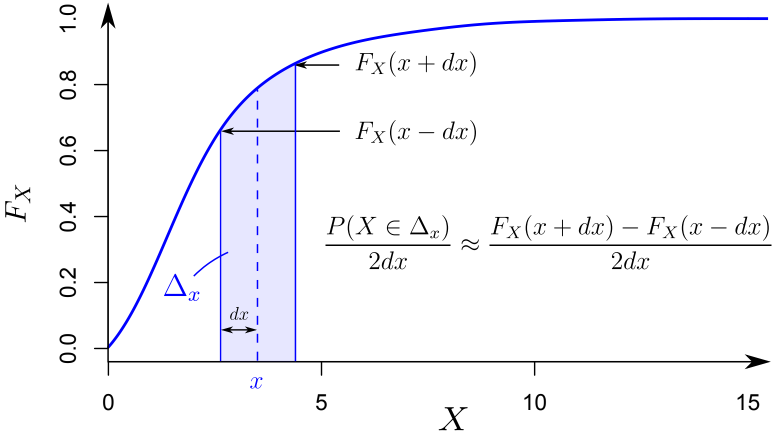


Densité de probabilité

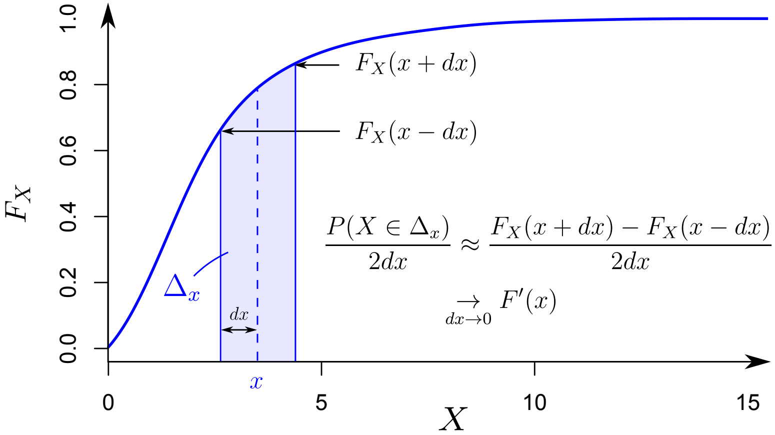



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
F_X
$F_X(x+dx)$
$F_X(x-dx)$
$P(X \in \Delta_x) \approx F_X(x+dx) - F_X(x-dx)$
Δ_x
dx
x
0
5
10
15
X

Densité de probabilité



Densité de probabilité



Densité de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (absolument) continue de fonction de répartition F_X. On appelle **densité de probabilité** de X, la fonction $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\pi(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

Densité de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle (absolument) continue de fonction de répartition F_X. On appelle **densité de probabilité** de X, la fonction $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\pi(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

Remarque : inversement, connaissant la densité π d'une variable aléatoire X, on peut en déduire sa fonction de répartition F_X :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \pi(x)dx$$

Densité de probabilité

Propriétés

- $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) \geqslant 0$
- $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \pi(x)dx = \mathbb{P}(X \in [a, b])$
- $\int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = 1$

Densité de probabilité

Propriétés

- $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) \geqslant 0$
- $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \pi(x)dx = \mathbb{P}(X \in [a, b])$
- $\int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = 1$

Théorème fondamental de l'analyse : $f = F'$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Densité de probabilité

Propriétés

- $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) \geqslant 0$
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \pi(x)dx = \mathbb{P}(X \in [a, b])$
- $\int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = 1$

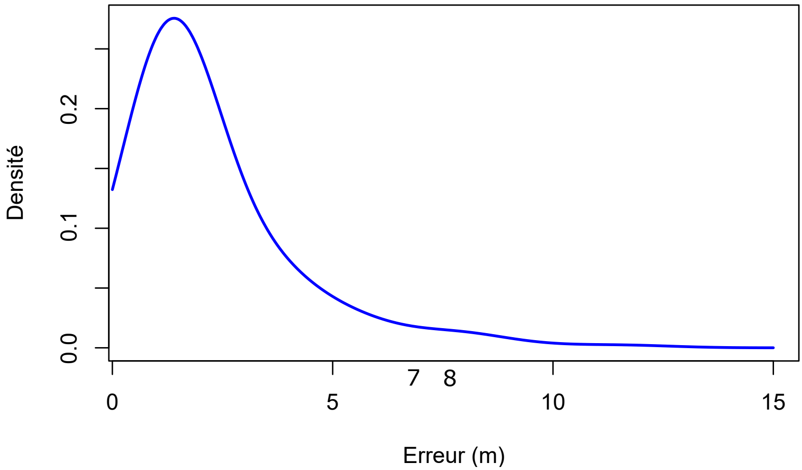
Théorème fondamental de l'analyse : $f = F'$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

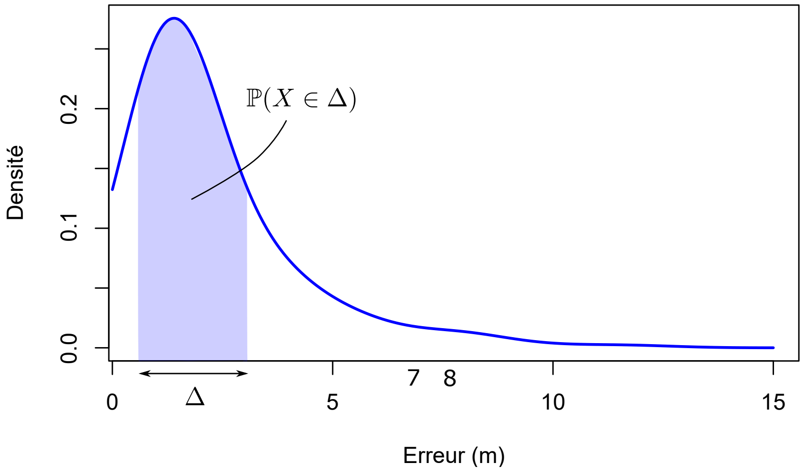
Attention : lorsqu'elle existe, π est positive et son aire sous la courbe vaut 1, mais $\pi(x)$ n'est pas une probabilité. En particulier, on peut avoir $\pi(x) > 1$. Pour obtenir une probabilité, on doit intégrer π.

Densité de probabilité

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)

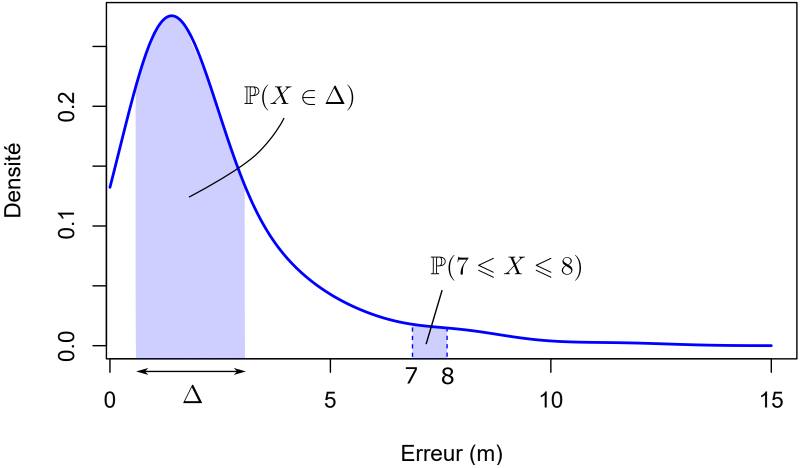


Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)

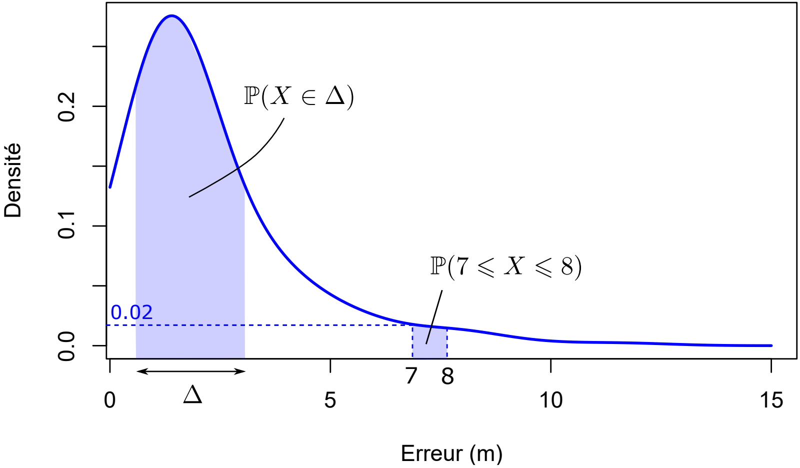


Densité de probabilité

Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)

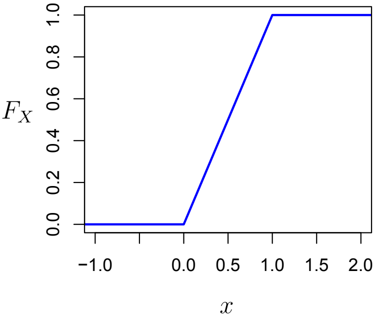


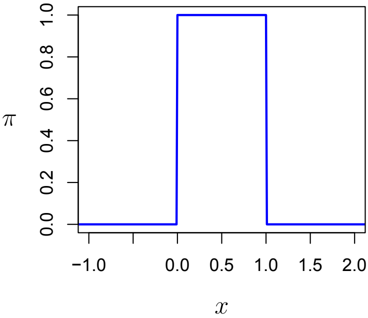
Observation GPS code station MITAKA - 14/11/2005 (24h)



Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}([0,1])$$

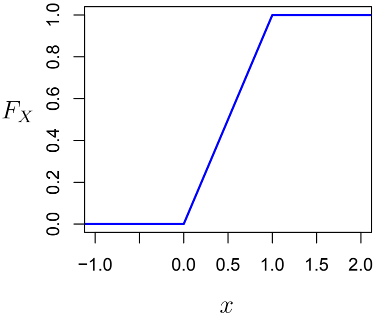


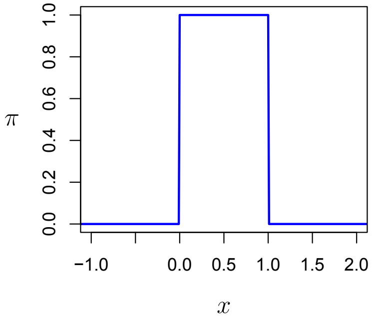


$$F_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}([0,1])$$

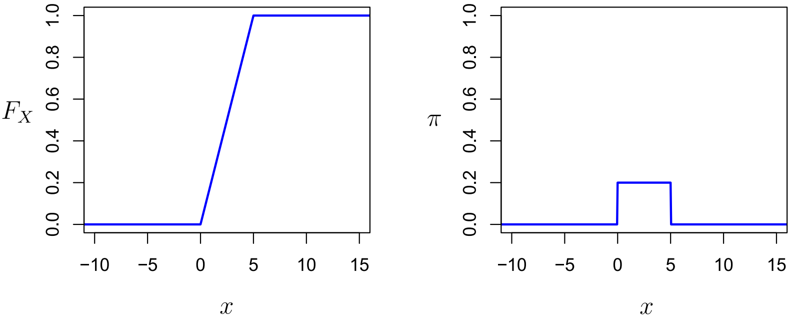




$$F_X(x) = x \times \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \qquad \pi(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

Loi uniforme

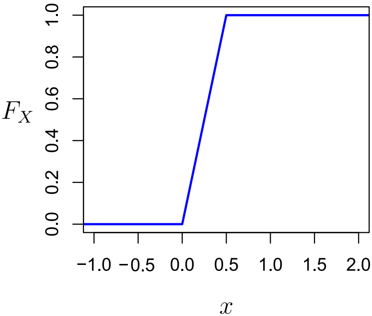
$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

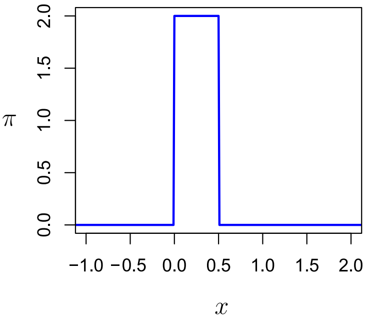


$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{(b-a)} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}([a,b])$$

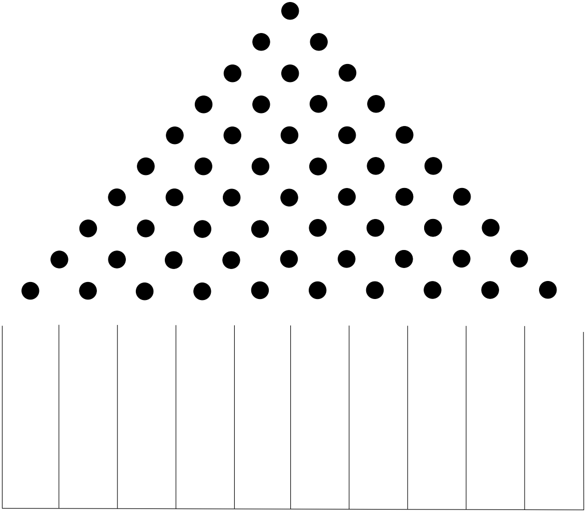




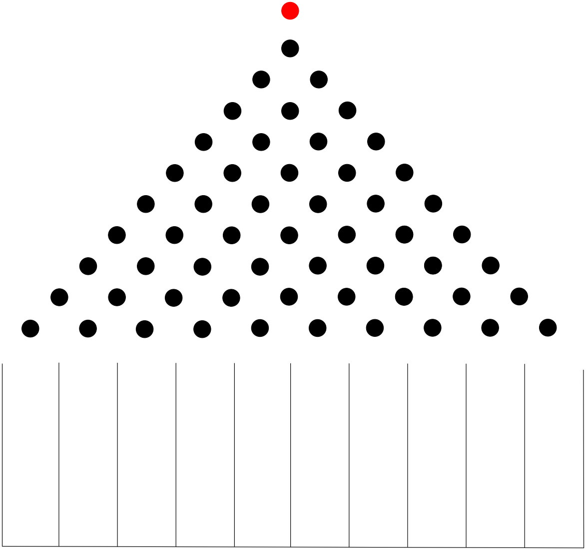
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{(b-a)} & \text{si } x \in [a,\, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

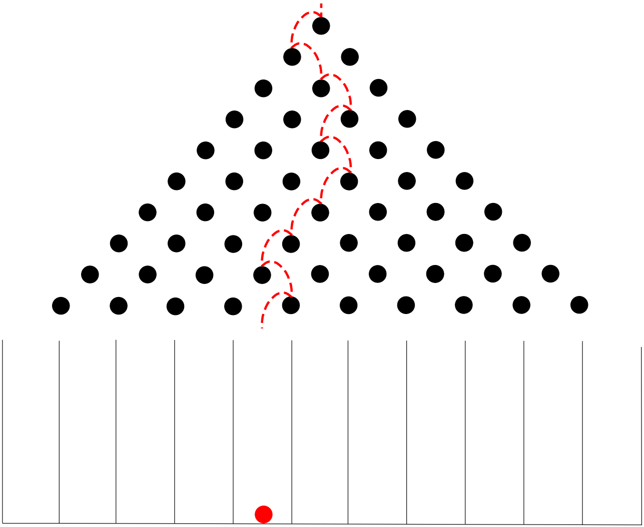
Quelques exemples de lois continues

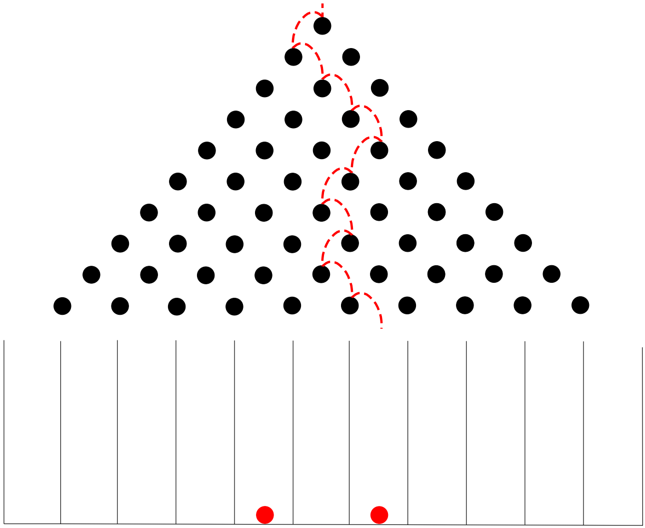


Quelques exemples de lois continues

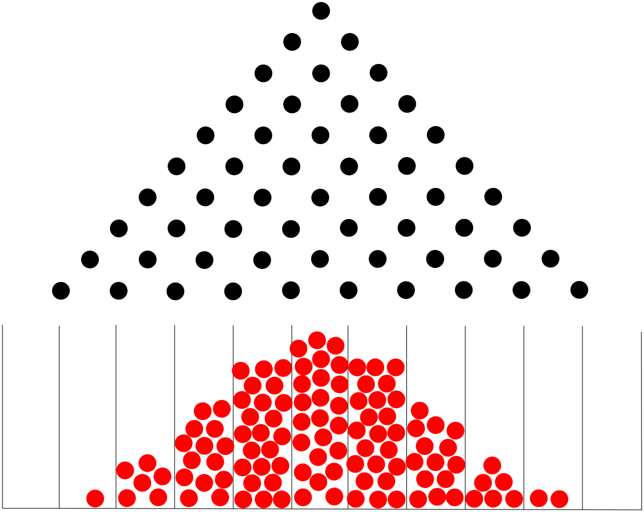


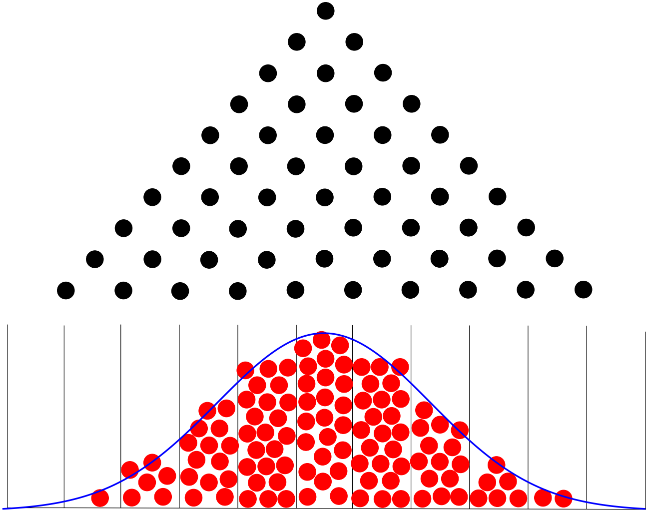
Quelques exemples de lois continues





Quelques exemples de lois continues

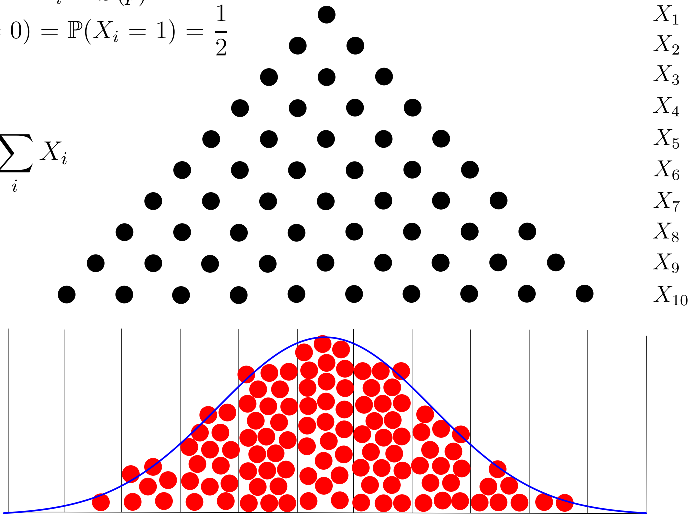




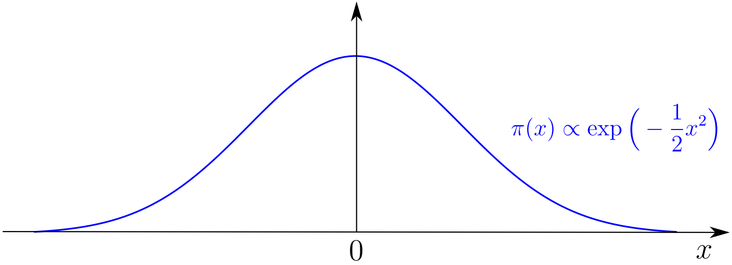
$$X_i \sim \mathcal{B}(p)$$

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

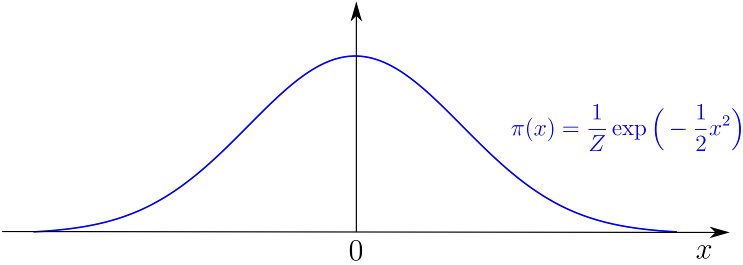
$$Y = \sum_i X_i$$



Quelques exemples de lois continues

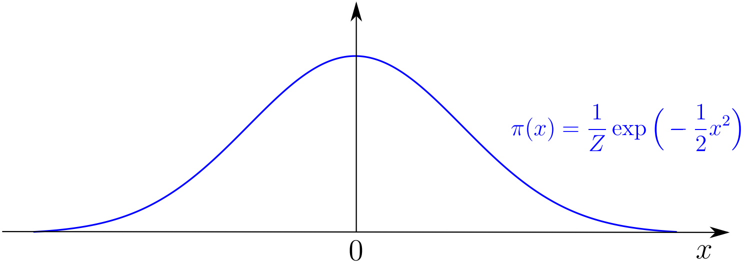


Quelques exemples de lois continues

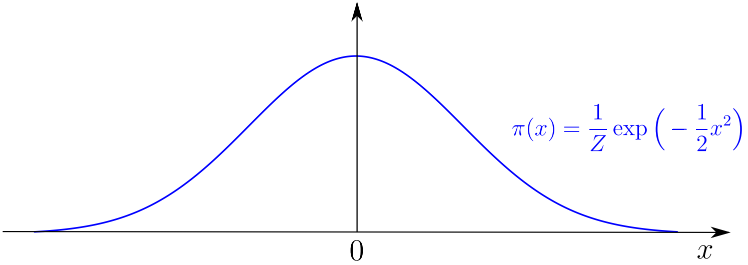


Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx$$

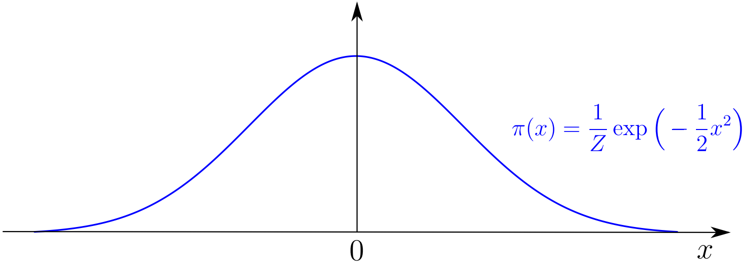


$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2 \Big) dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$



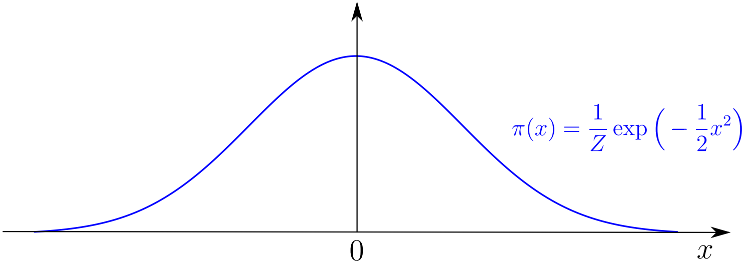
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2$$



$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

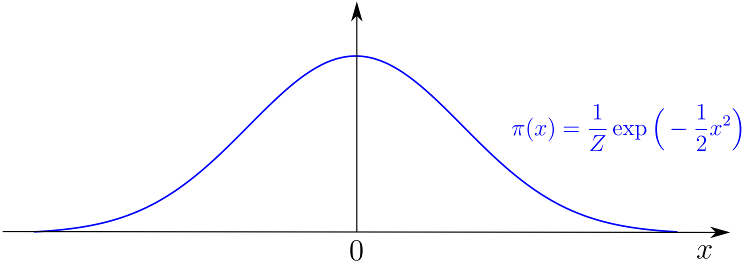
$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$



$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

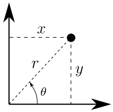
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy$$

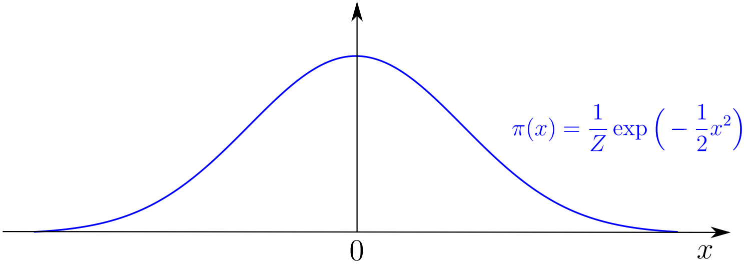


$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy$$



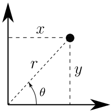


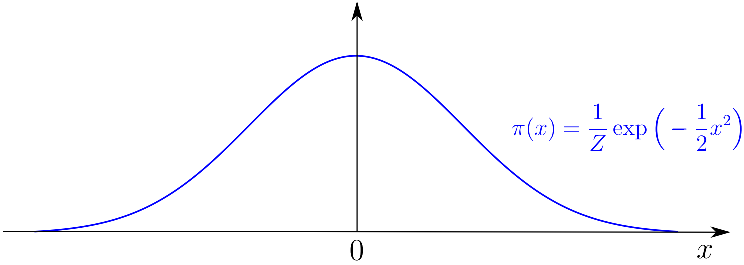
Quelques exemples de lois continues

$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$



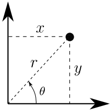


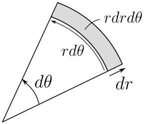
Quelques exemples de lois continues

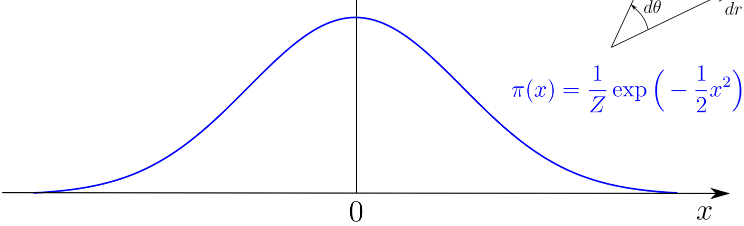
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$





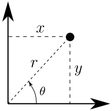


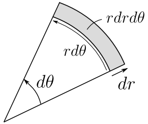
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

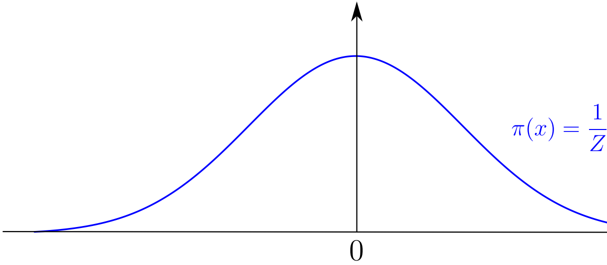
$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$







$$\pi(x) = \frac{1}{Z}\exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)$$

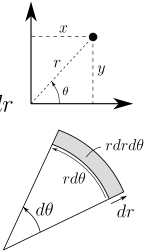
Quelques exemples de lois continues

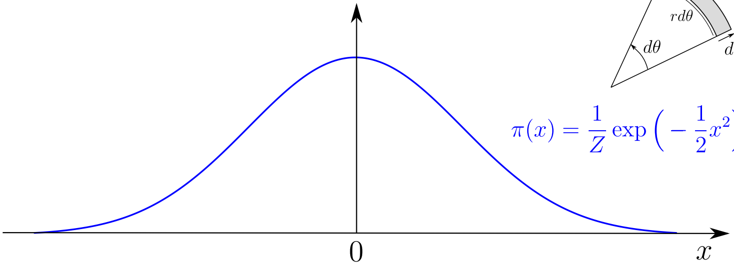
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{+\infty} r\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)dr$$





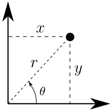
$$\pi(x) = \frac{1}{Z}\exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)$$

Quelques exemples de lois continues

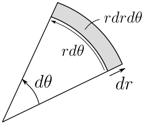
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

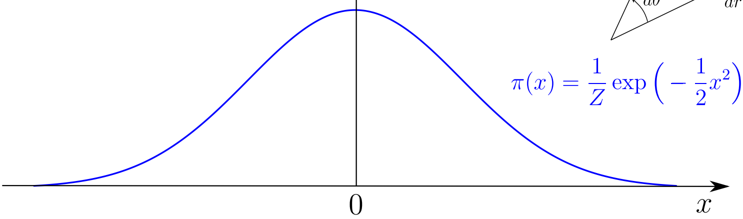
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$



$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{+\infty} r\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)dr$$



$$= 2\pi\Big[-\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)\Big]_0^{+\infty}$$

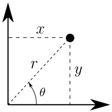


Quelques exemples de lois continues

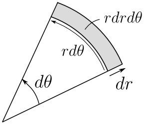
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

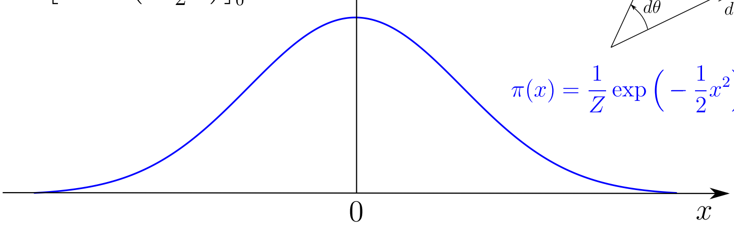
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$



$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{+\infty} r\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)dr$$



$$= 2\pi\Big[-\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)\Big]_0^{+\infty} = 2\pi$$

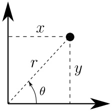


Quelques exemples de lois continues

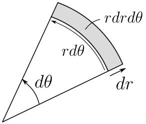
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$

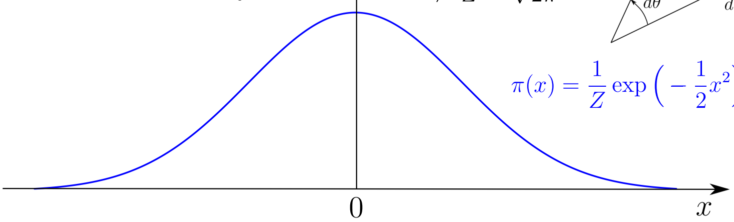


$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{+\infty} r\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)dr$$



$$= 2\pi\Big[-\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)\Big]_0^{+\infty} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad Z = \sqrt{2\pi}$$

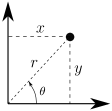


$$\pi(x) = \frac{1}{Z}\exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)$$

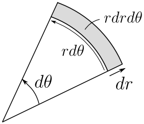
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

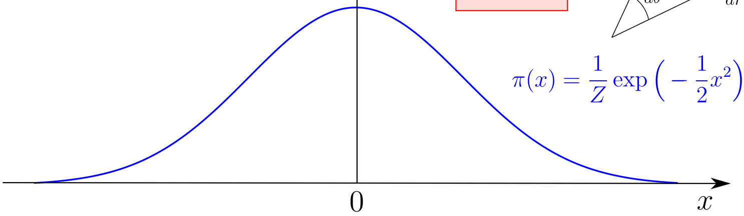
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$



$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{+\infty} r\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)dr$$



$$= 2\pi\Big[-\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)\Big]_0^{+\infty} = 2\pi \qquad \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{2\pi}}$$

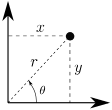


Quelques exemples de lois continues

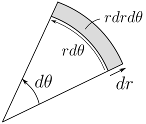
$$Z = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx \quad \longrightarrow \quad \text{Intégrale de Gauss}$$

$$Z^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y^2\Big)dy\Big)$$

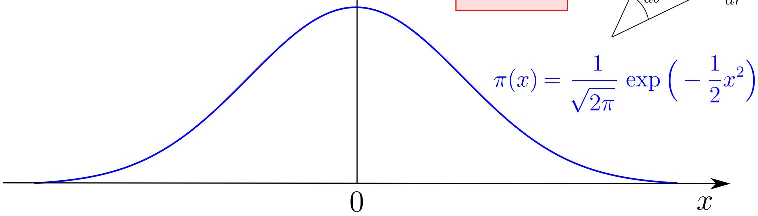
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta$$



$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{+\infty} r\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)dr$$

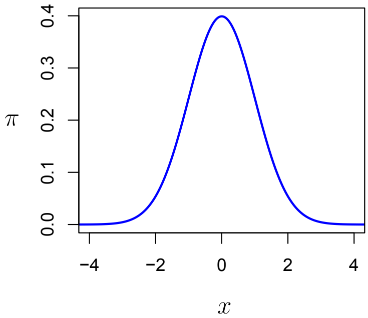


$$= 2\pi\Big[-\exp\Big(-\frac{1}{2}r^2\Big)\Big]_0^{+\infty} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = \sqrt{2\pi}}$$



Loi normale (standard)

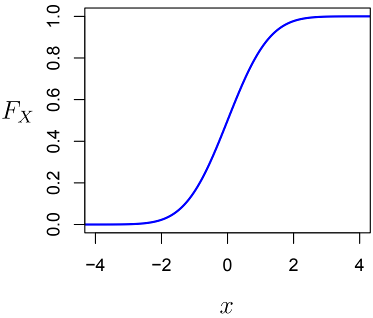
$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

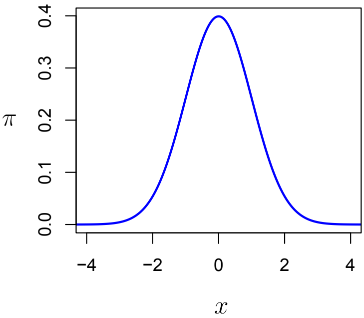


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

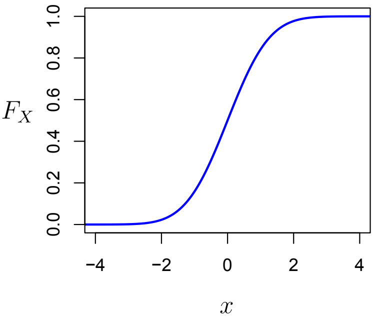


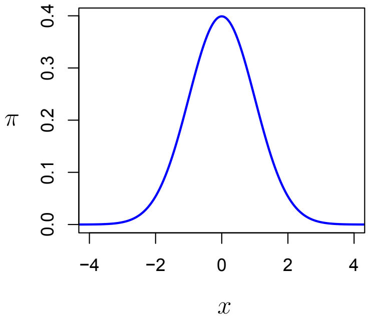


$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$



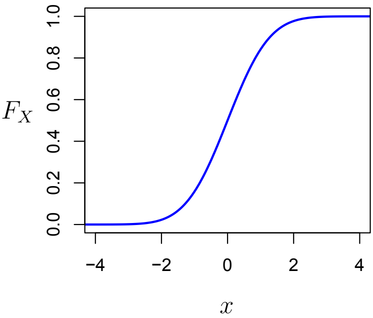


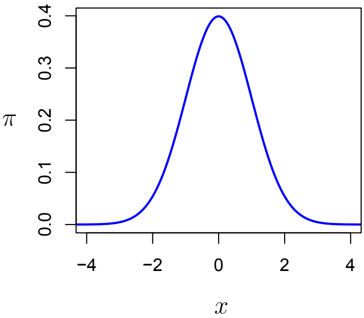
$$F_X(x) = \quad ?$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Loi normale (standard)

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$



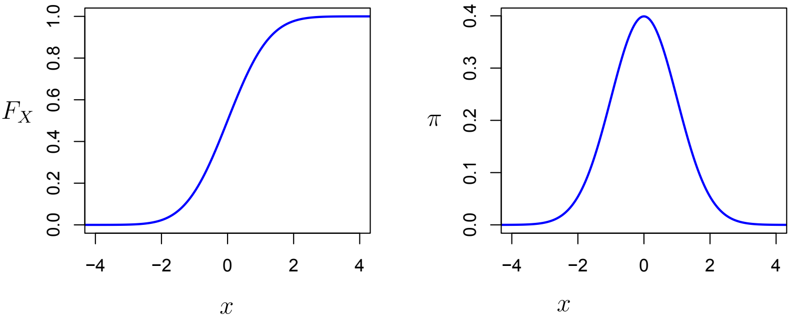


$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x)$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Loi normale (standard)

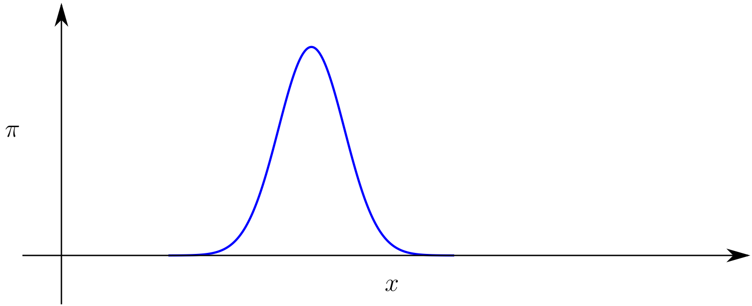
$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

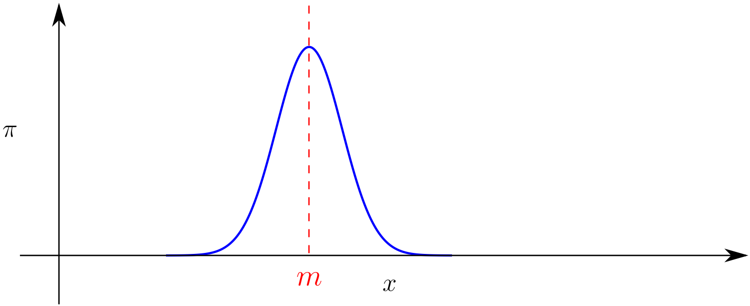
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

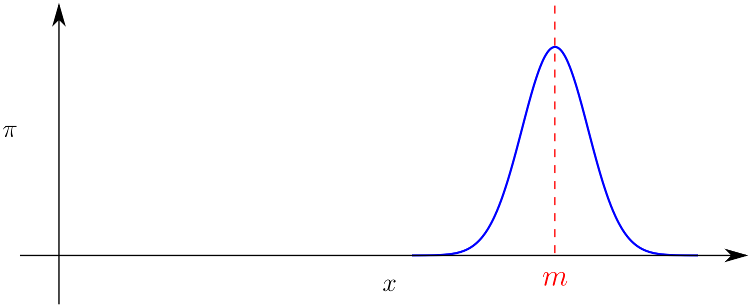
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

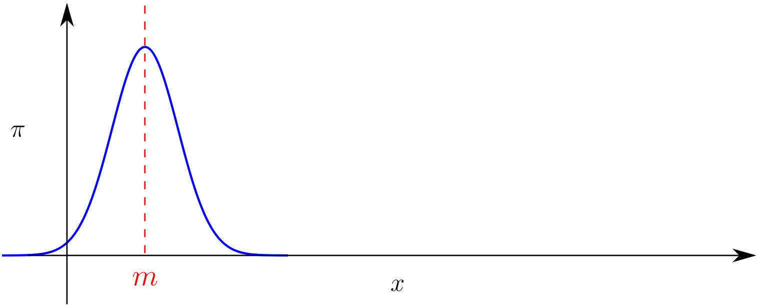
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \operatorname{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

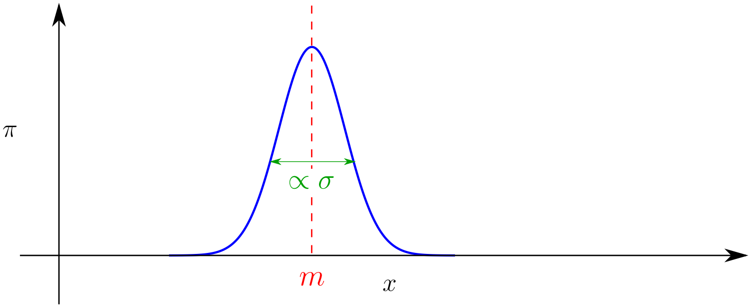
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

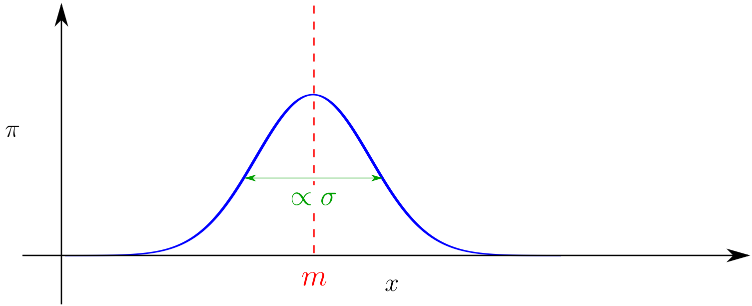
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

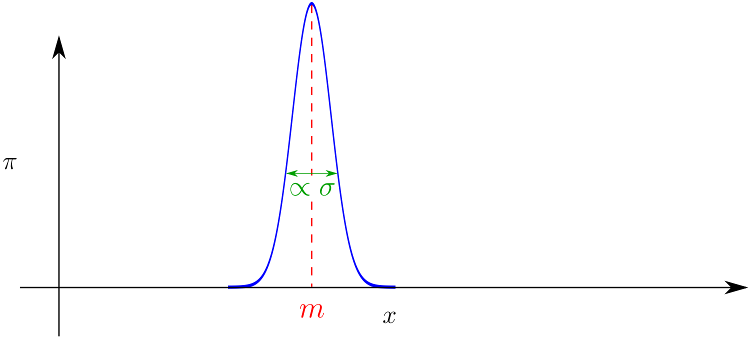
$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$



$$F_X(x) = \operatorname{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

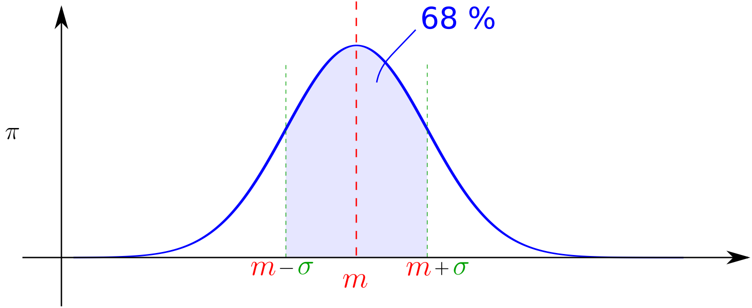
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Loi normale (standard)

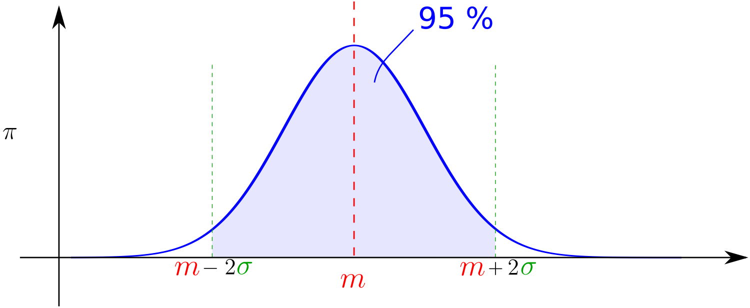
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

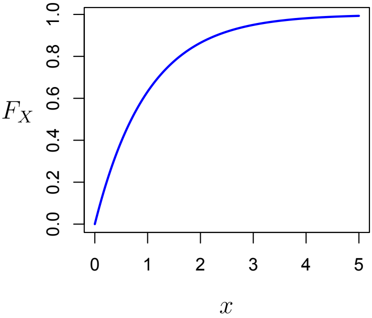
Loi normale (standard)

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$



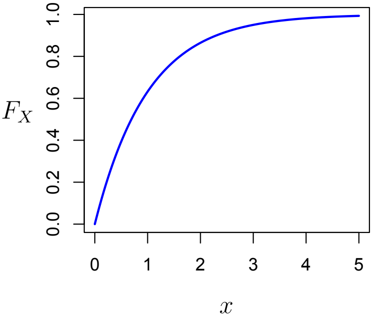
$$F_X(x) = \mathrm{erf}(x, m, \sigma^2) \qquad \pi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

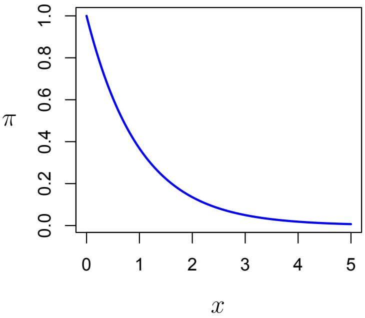
Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

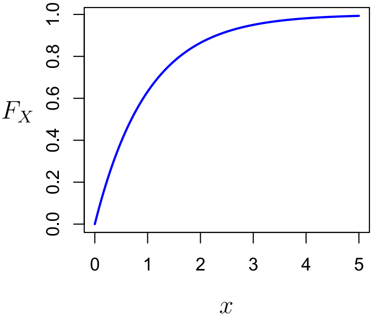


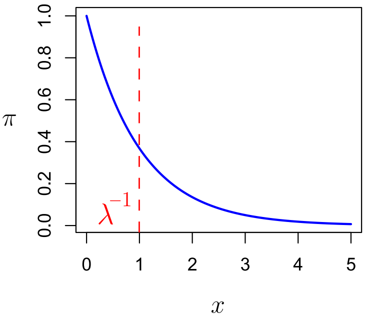


$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\pi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

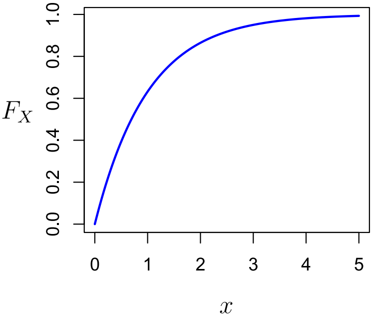


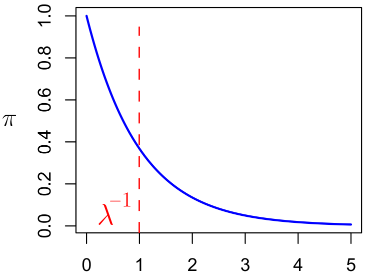


$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\pi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

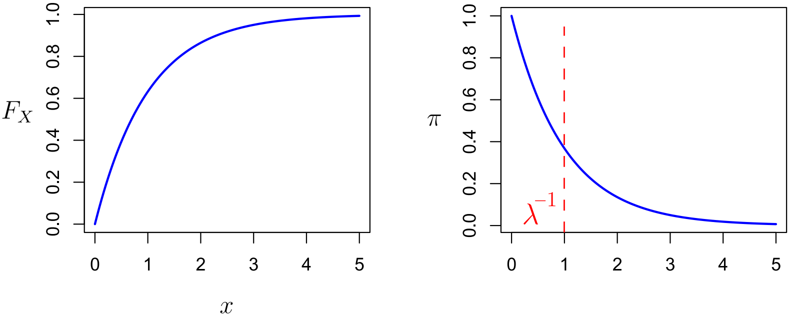
Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$





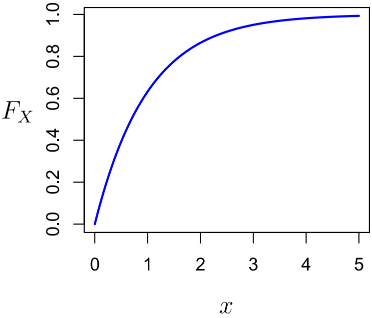
$\mathbb{P}(\Omega)$

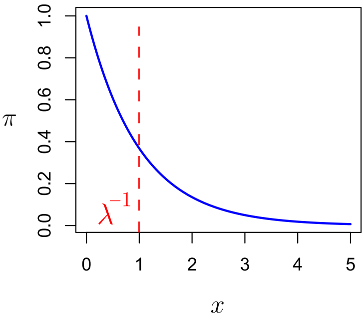
Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx$$

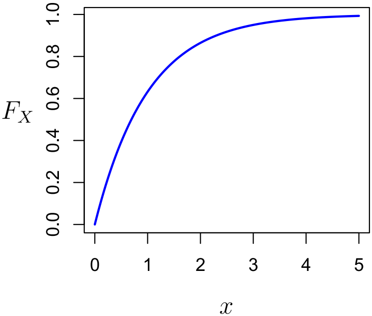
Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

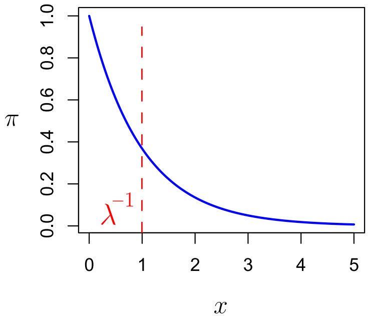




$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

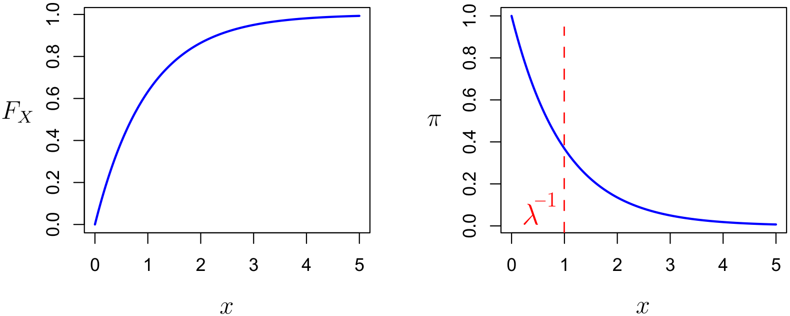
Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$





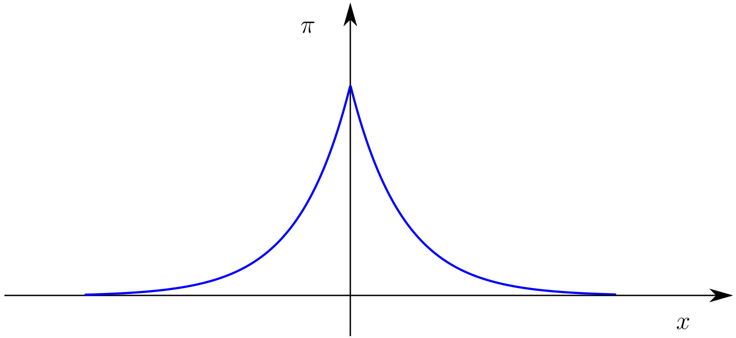
$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty}$$

Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$



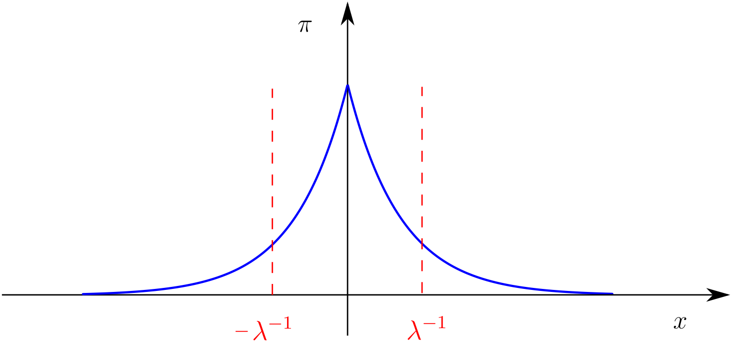
$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = 1$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



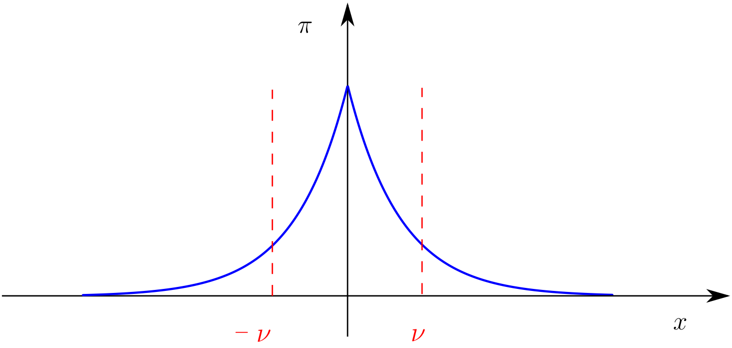
$$\pi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



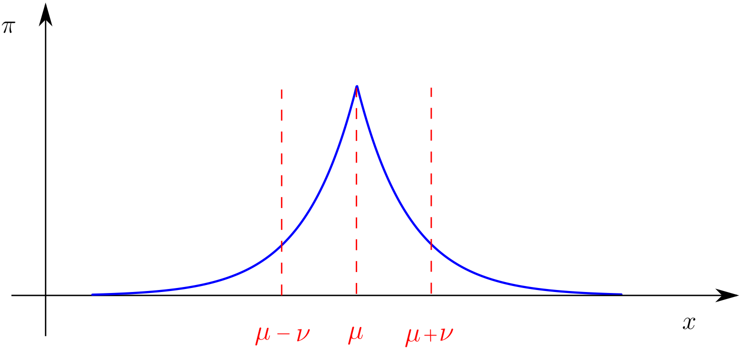
$$\pi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



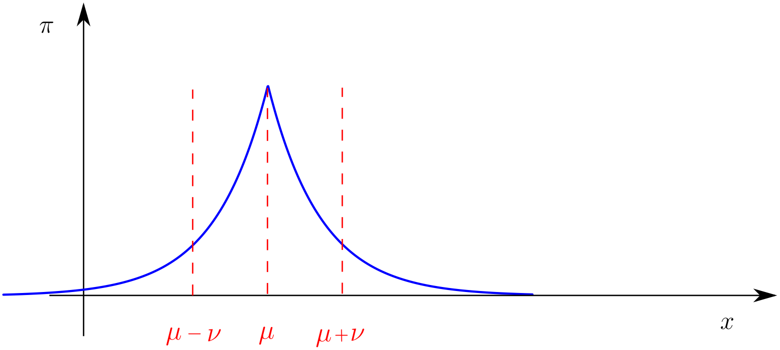
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} e^{-\frac{|x|}{\nu}}$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



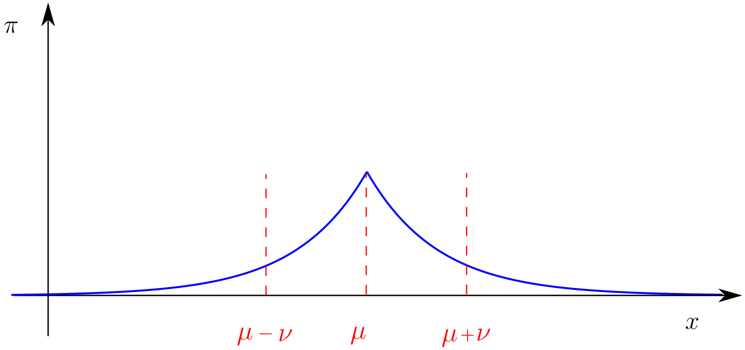
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(- \frac{|x - \mu|}{\nu} \right)$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



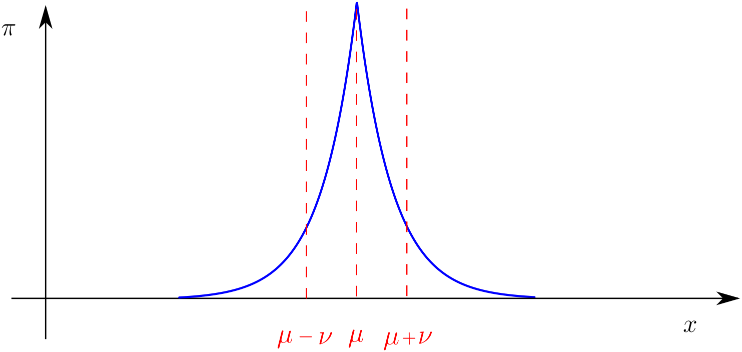
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(- \frac{|x - \mu|}{\nu} \right)$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



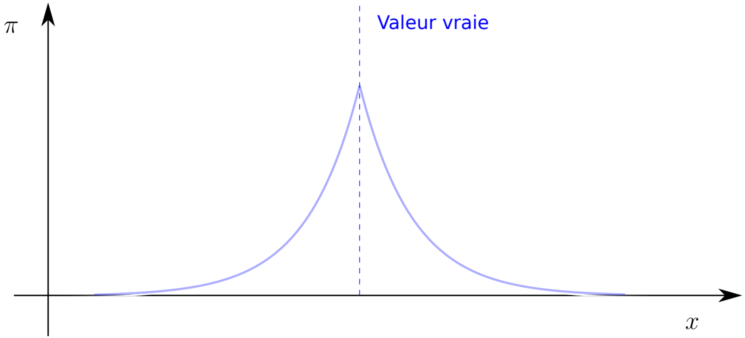
$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(- \frac{|x - \mu|}{\nu} \right)$$

Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$

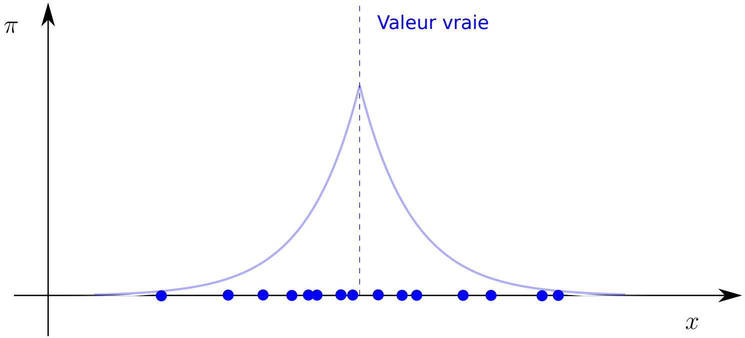


$$\pi(x) = \frac{1}{2\nu} \exp\left(- \frac{|x-\mu|}{\nu} \right)$$

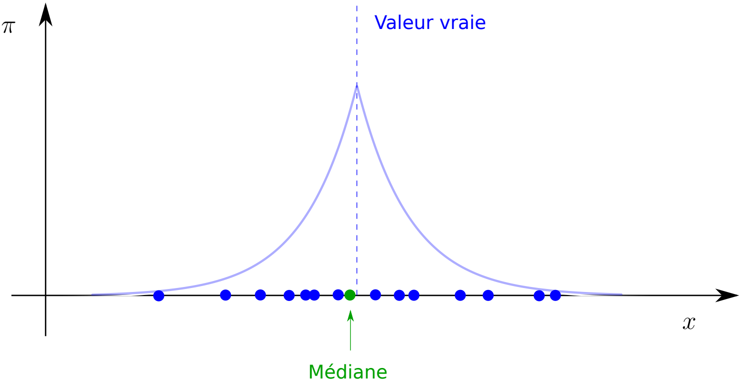
Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



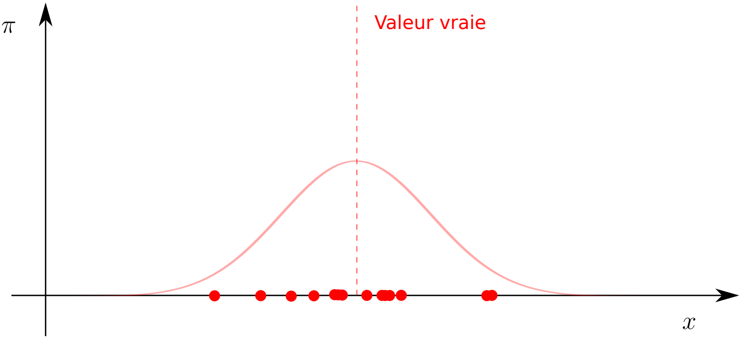
Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



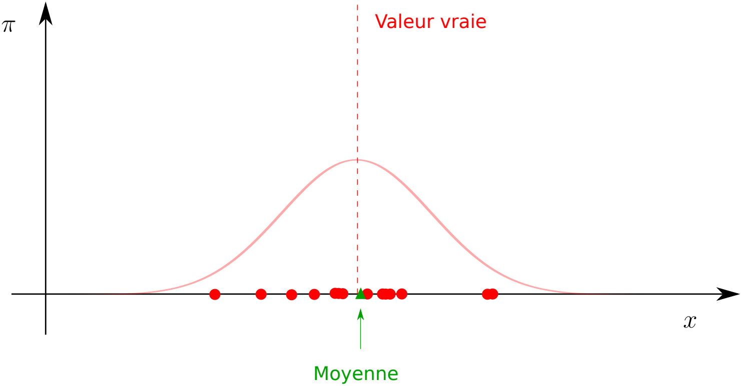
Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



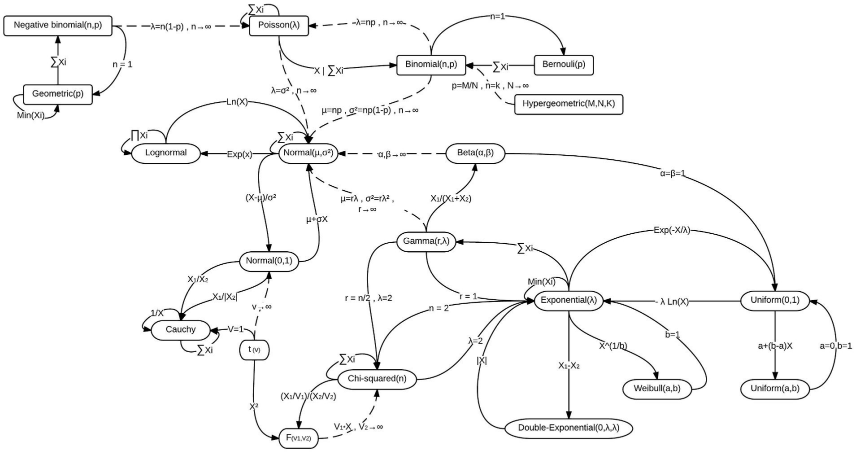
Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$



Loi de Laplace $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$

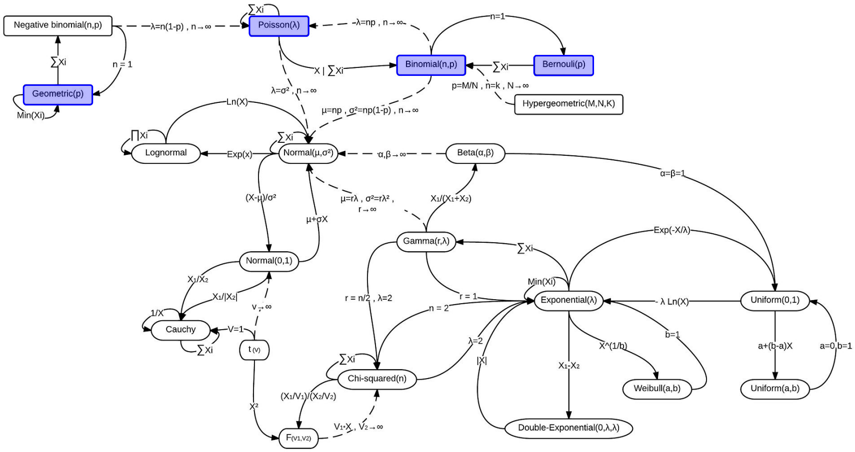


Et bien d'autres encore...



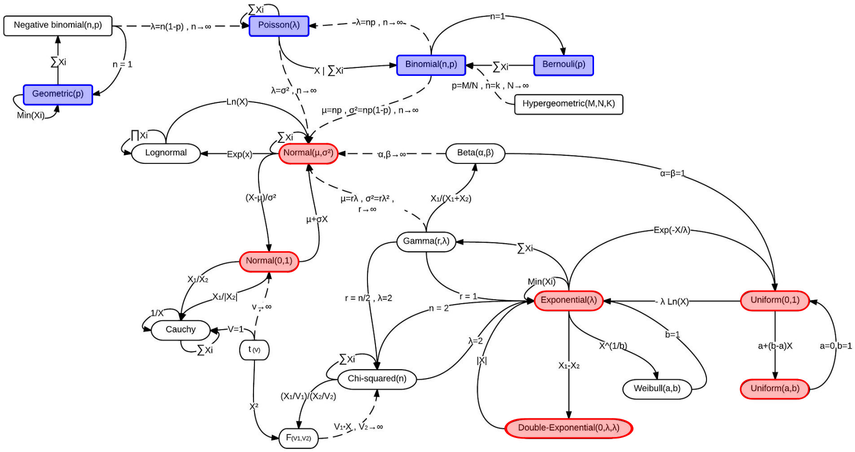
Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...



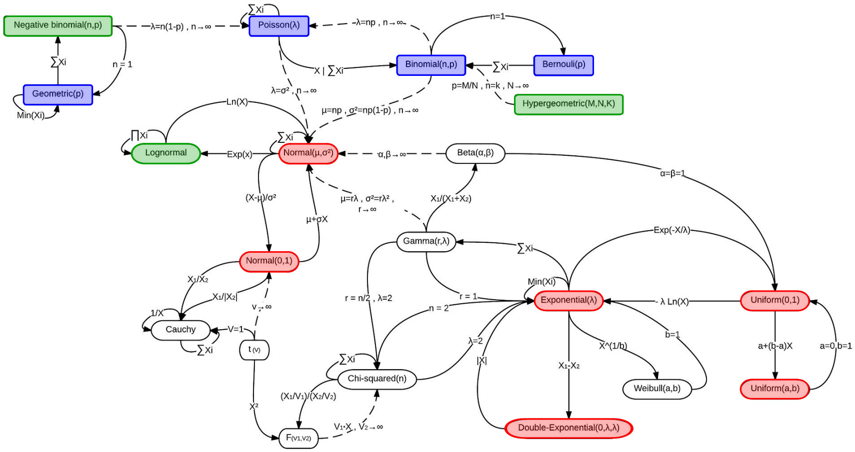
Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...

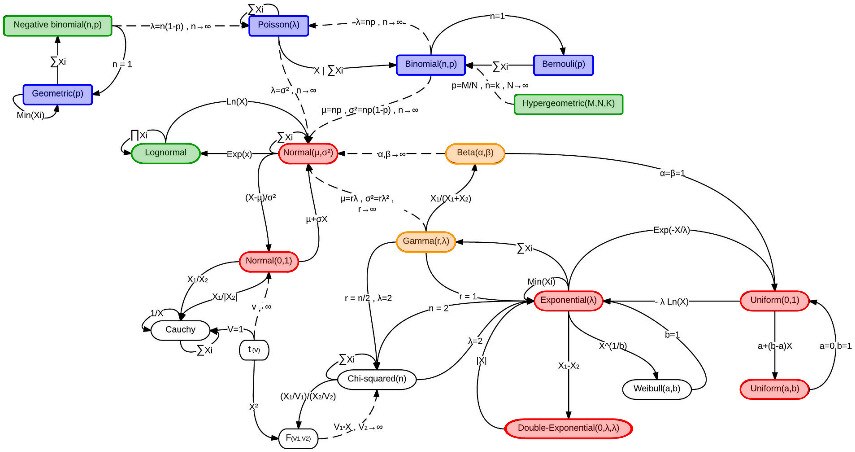


Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...

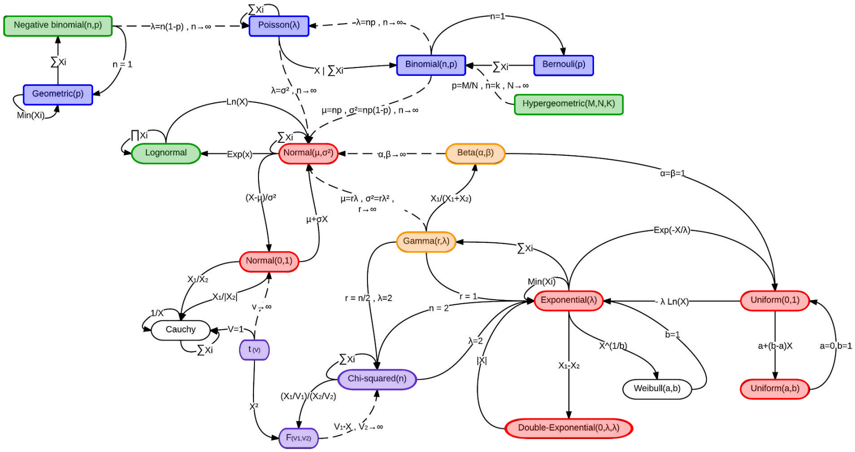


Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions



Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Et bien d'autres encore...



Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Contre-exemple : loi de Cantor

Contre-exemple : loi de Cantor

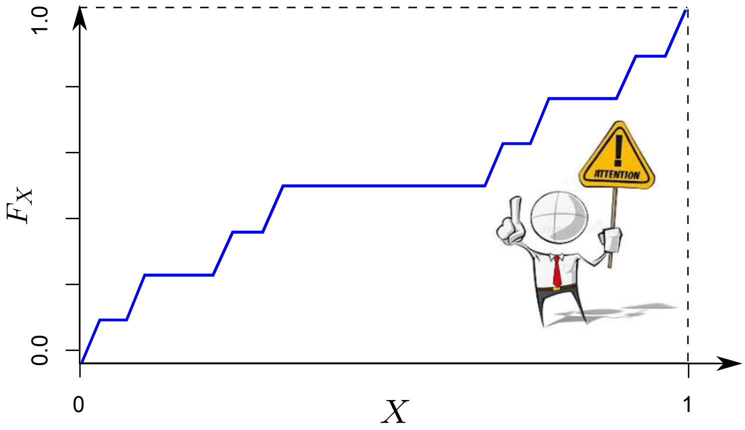
Contre-exemple : loi de Cantor

Contre-exemple : loi de Cantor

Existence de la densité de probabilité

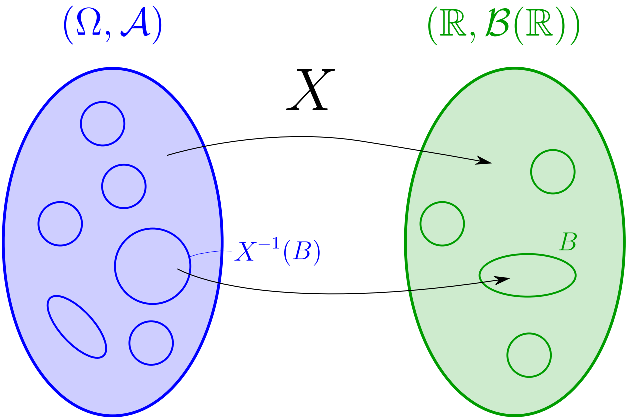
Contre-exemple : loi de Cantor

Contre-exemple : loi de Cantor



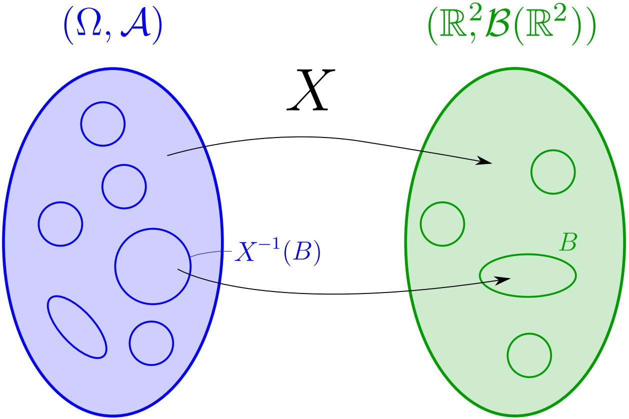
Un peu de multivarié…

- *Définition*
- *Marginalisation*
- *Conditionnement*
- *Indépendance*
- *Théorie de Bayes*

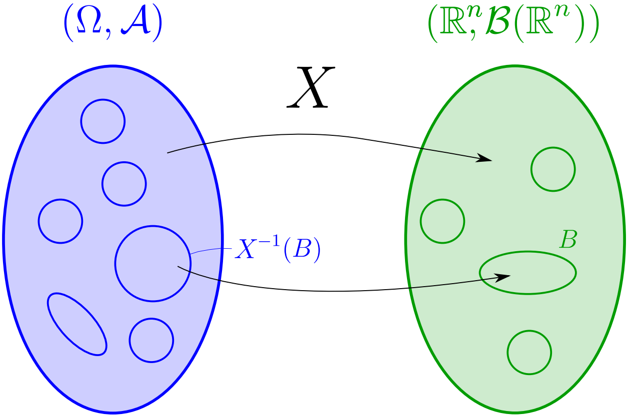


X mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

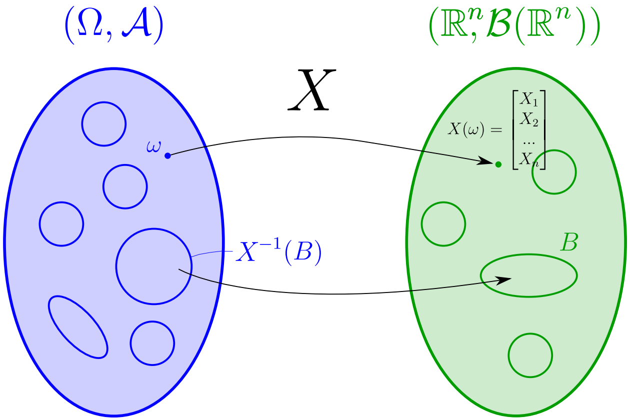
Un peu de multivarié...



X mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$



X mesurable $\quad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$



X mesurable $\qquad B \in \mathcal{F} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

Un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2 ... X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires réelles.

Fonction de répartition d'une loi multivariée

La *fonction de répartition* de $\mathbf{X}$ la fonction $F_{\mathbf{X}} \ : \ \mathbb{R}^n \to [0,1]$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1,\ x_2, ...\ x_n) = \mathbb{P}\big(X_1 \leqslant x_1,\ X_2 \leqslant x_2, ...\ X_n \leqslant x_n\big)$$

Un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2 ... X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires réelles.

Fonction de répartition d'une loi multivariée

La *fonction de répartition* de $\mathbf{X}$ la fonction $F_{\mathbf{X}} \; : \; \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1,\; x_2, ... \; x_n) = \mathbb{P}\big(X_1 \leqslant x_1,\; X_2 \leqslant x_2, ... \; X_n \leqslant x_n\big)$$

Remarque : pour un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est donc la probabilité de tirer un point dans le pavé délimité par $(-\infty, \infty, ... \infty)$ et $\mathbf{x}$.

Un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2 ... X_n)$ un vecteur de n variables aléatoires réelles.

Fonction de répartition d'une loi multivariée

La *fonction de répartition* de $\mathbf{X}$ la fonction $F_{\mathbf{X}} \ : \ \mathbb{R}^n \to [0,1]$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1,\ x_2, ... \ x_n) = \mathbb{P}\big(X_1 \leqslant x_1,\ X_2 \leqslant x_2, ... \ X_n \leqslant x_n\big)$$

Remarque : pour un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est donc la probabilité de tirer un point dans le pavé délimité par $(-\infty, \infty, ... \infty)$ et $\mathbf{x}$.

Densité de probabilité d'une loi multivariée

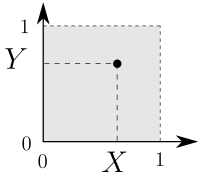
Lorsqu'elle existe, la densité de probabilité de $\mathbf{X}$ est la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$\pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}(\mathbf{x})$$

Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

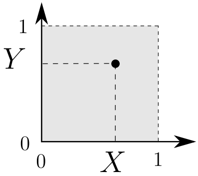
$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$



Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X,Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$



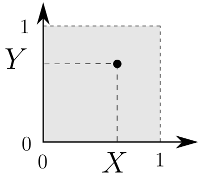
Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$



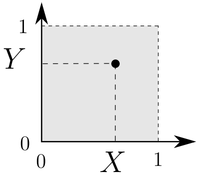
Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X,Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$



Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

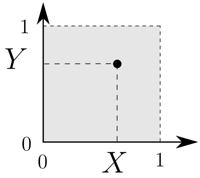
Densité de probabilité

$$\pi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$



Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

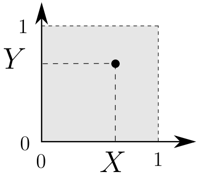
Densité de probabilité

$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X, Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X, Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$

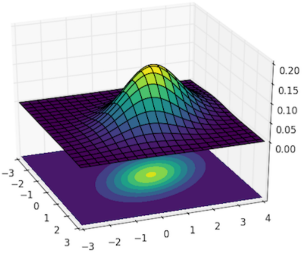


Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

Densité de probabilité

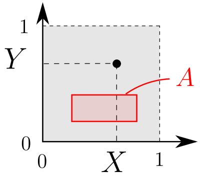
$$\pi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$



Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X,Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$

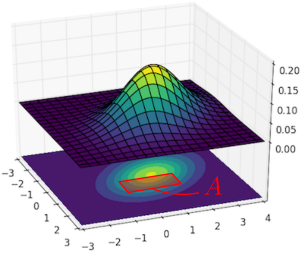


Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

Densité de probabilité

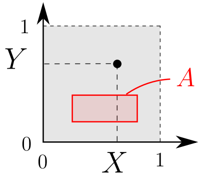
$$\pi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$



Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X,Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$



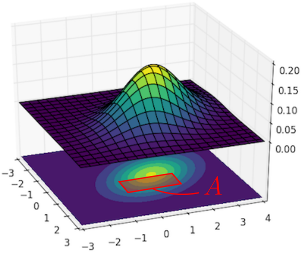
Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

Densité de probabilité

$$\pi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

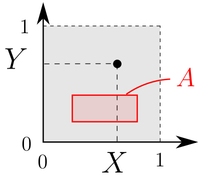
$$\mathbb{P}\Big((X,Y) \in A\Big) = \iint_A \pi(x,y)dxdy$$



Exemple : loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$

(X,Y) est un couple de variables aléatoires

$$(X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$$

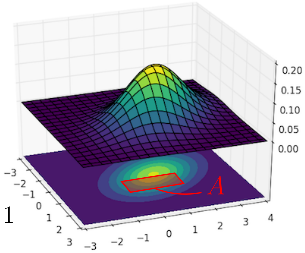


Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = xy$$

Densité de probabilité

$$\pi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$



$$\mathbb{P}\Big((X,Y) \in [0,1]^2]\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = \int_0^1\int_0^1 1.dxdy = 1$$

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY}.
La **loi marginale** P_X de la variable X est :

$$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x, y)$$

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$						

Un peu de multivarié...

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$						
♀						
♂						

Un peu de multivarié...

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂						

Un peu de multivarié...

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂						

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y)dy$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

Y	24	73	94	98	60	30

Marginalisation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y)dy$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm	X
♀	20	48	49	37	16	5	175
♂	4	25	45	61	44	25	204
Y	24	73	94	98	60	30	

Marginalisation

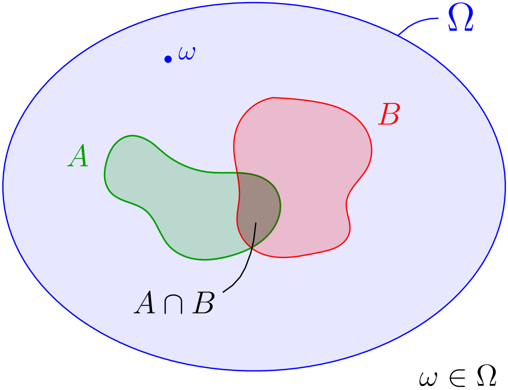
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité π_{XY}. La densité π_X de la **loi marginale** de X est :

$$\pi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{XY}(x, y) dy$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm	X
♀	20	48	49	37	16	5	175
♂	4	25	45	61	44	25	204
Y	24	73	94	98	60	30	379

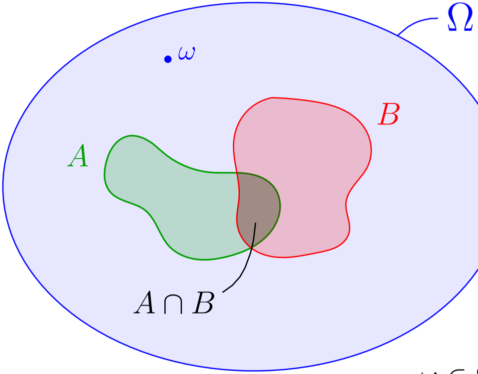
Un peu de multivarié...

Pour deux évènements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



Un peu de multivarié...

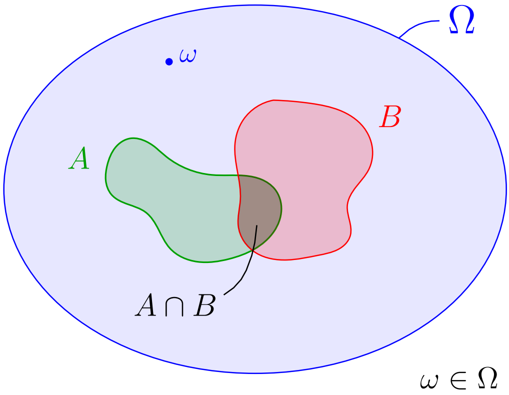
Pour deux évènements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



$\omega \in \Omega$

$$\mathbb{P}(A \mid B)$$

Pour deux évènements $A, B \subset \Omega$, sachant que la réalisation de B a été observée, quelle est la probabilité de A ?



$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY}.
La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY}.
La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes de loi P_{XY}.
La **loi conditionnelle** $P_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$P_{X|Y} = \frac{\mathbb{P}(X, Y)}{\mathbb{P}(Y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

Un peu de multivarié...

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \diagdown Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \setminus Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \diagdown Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀		48				
♂		25				

$$150 < Y < 160$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀		66%				
♂		34%				

$P_{X|Y}$ $\quad 150 < Y < 160$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \diagdown Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$X = ♂$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \diagdown Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀	20	48	49	37	16	5
♂	4	25	45	61	44	25

$$X = ♂$$

Conditionnement

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

$X \diagdown Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂	4	25	45	61	44	25

$X =$ ♂

Conditionnement

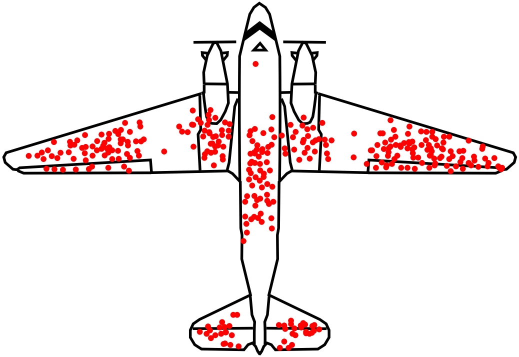
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe π_{XY} et de lois marginales π_X et π_Y. La densité de la **loi conditionnelle** $\pi_{X|Y=y}$ de X conditionnée à $Y = y$ est :

$$\pi_{X|Y=y}(x) = \frac{\pi_{XY}(x, y)}{\pi_Y(y)}$$

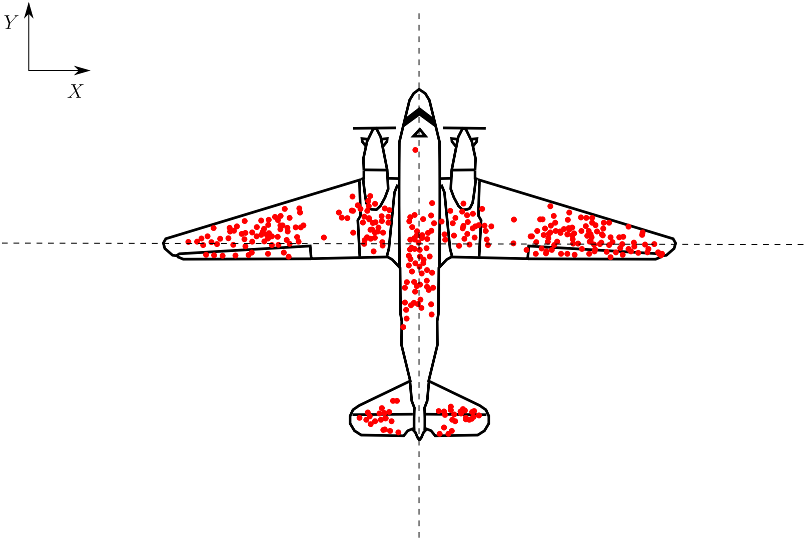
$X \backslash Y$	< 150 cm	> 150 cm < 160 cm	> 160 cm < 170 cm	> 170 cm < 180 cm	> 180 cm < 190 cm	> 190 cm
♀						
♂	2%	12%	22%	30%	22%	12%

$X = ♂$ $\quad P_{Y|X}$

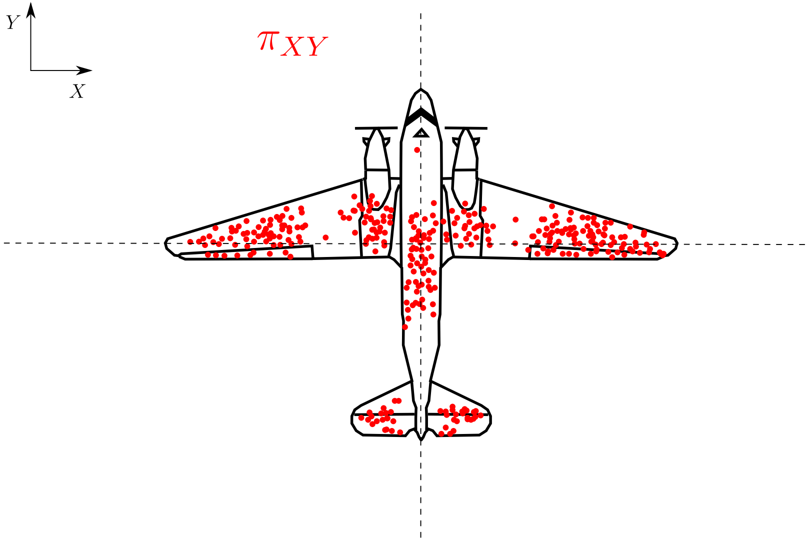
Un peu de multivarié...



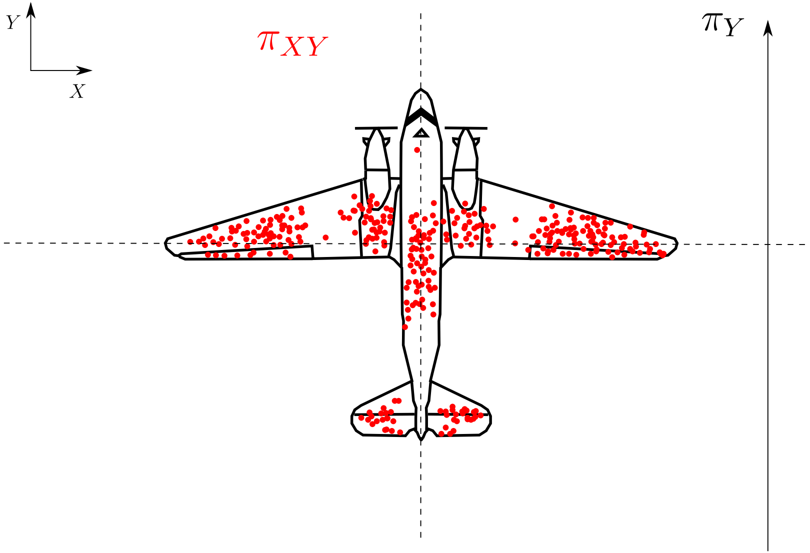
Un peu de multivarié...



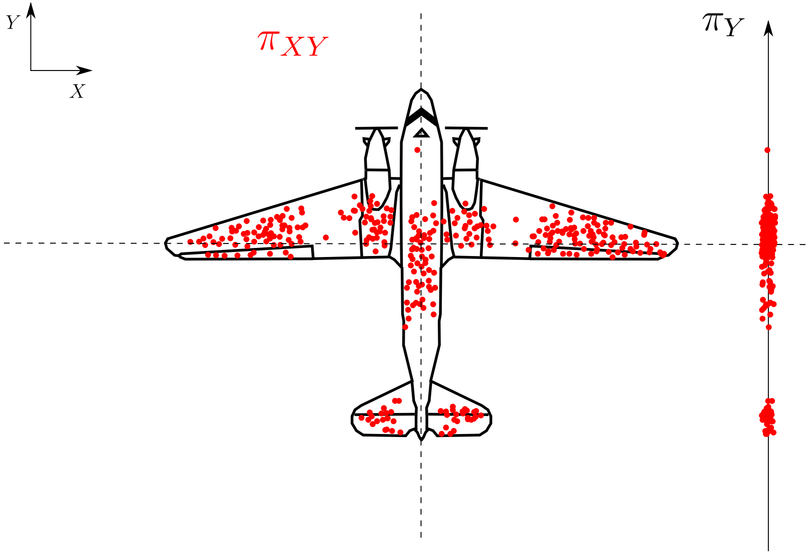
Un peu de multivarié...



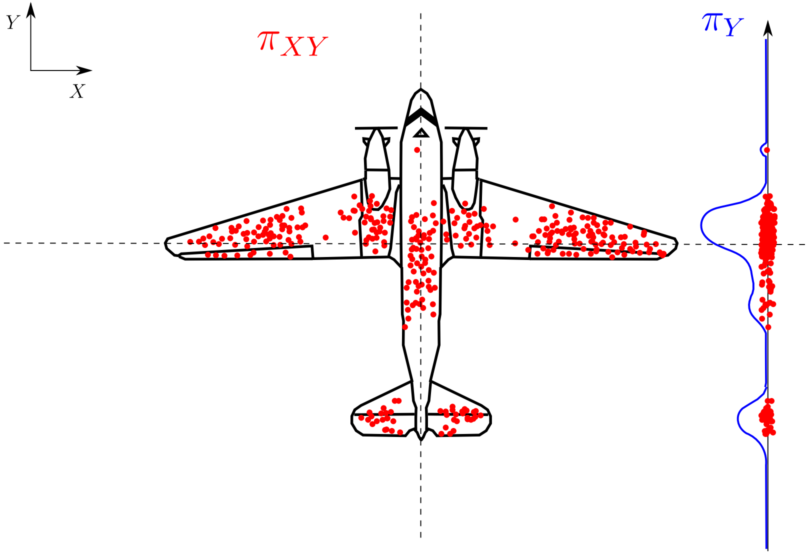
Un peu de multivarié...



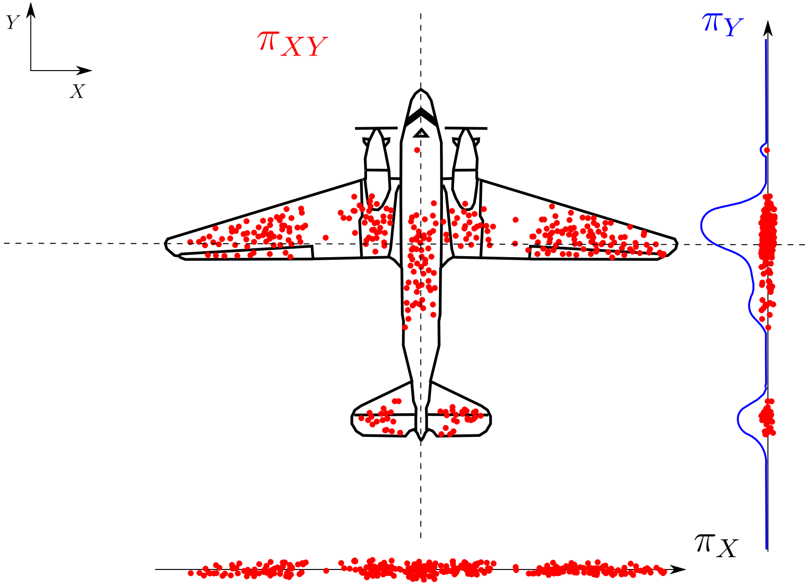
Un peu de multivarié...



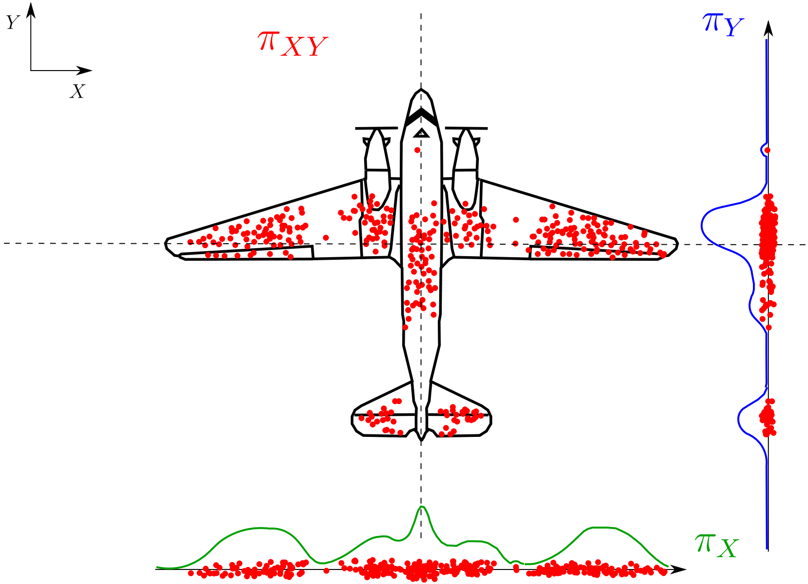
Un peu de multivarié...



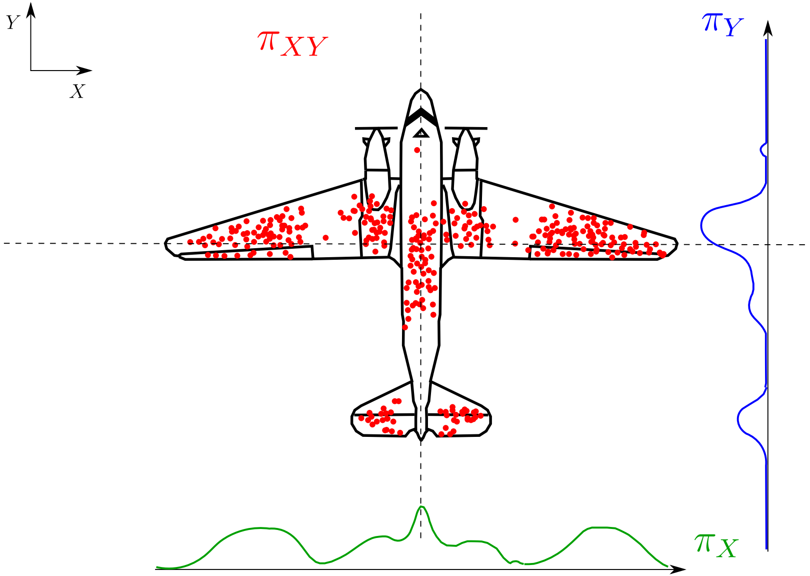
Un peu de multivarié...



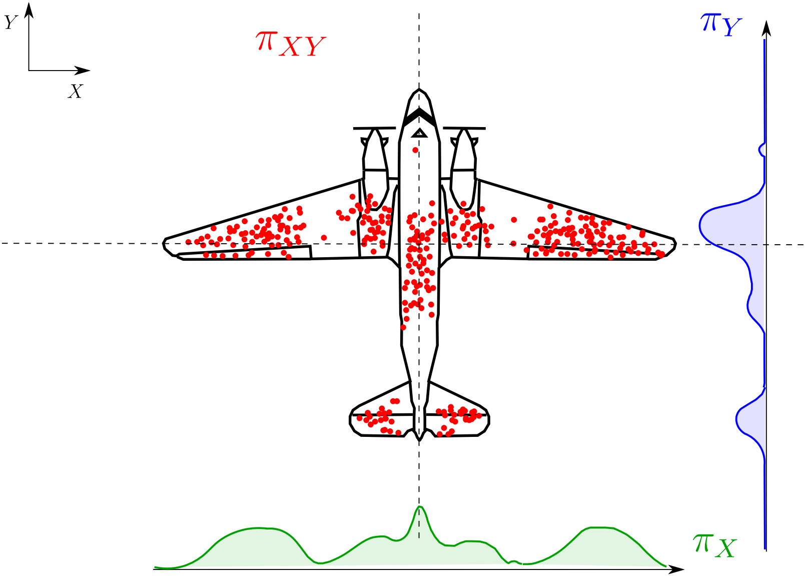
Un peu de multivarié...



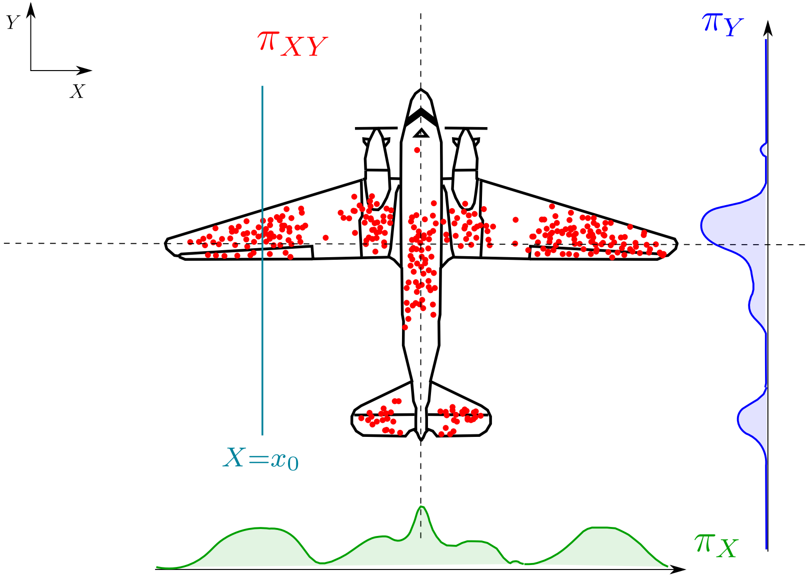
Un peu de multivarié...



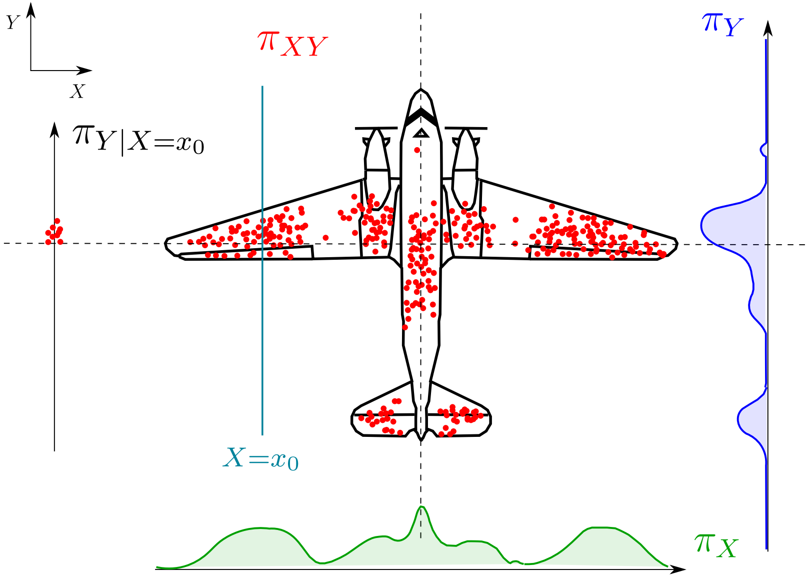
Un peu de multivarié...



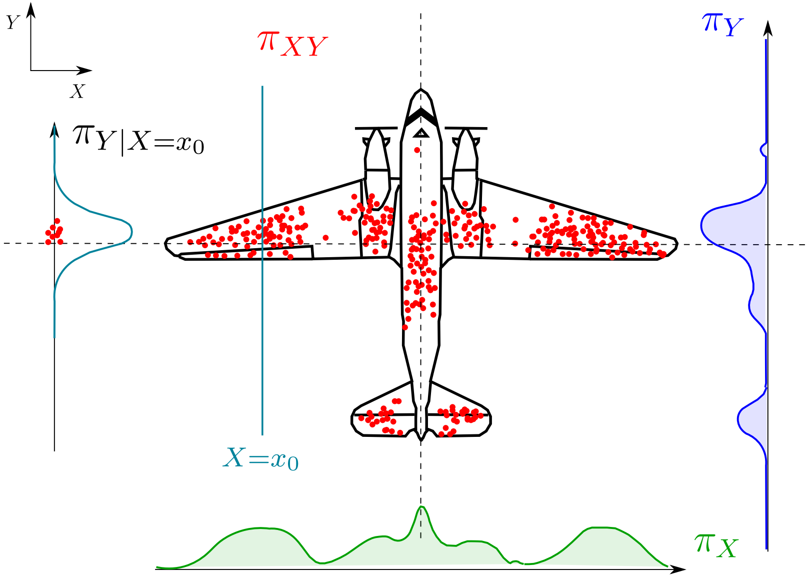
Un peu de multivarié...

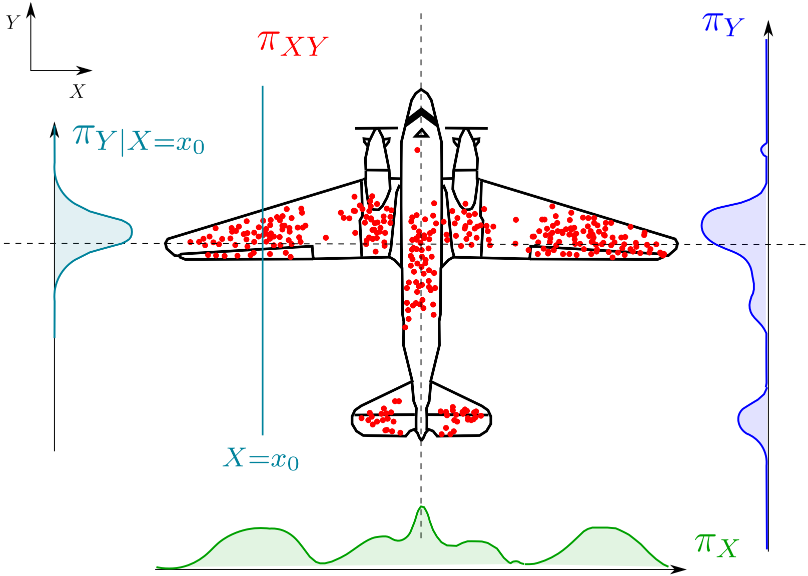


Un peu de multivarié...



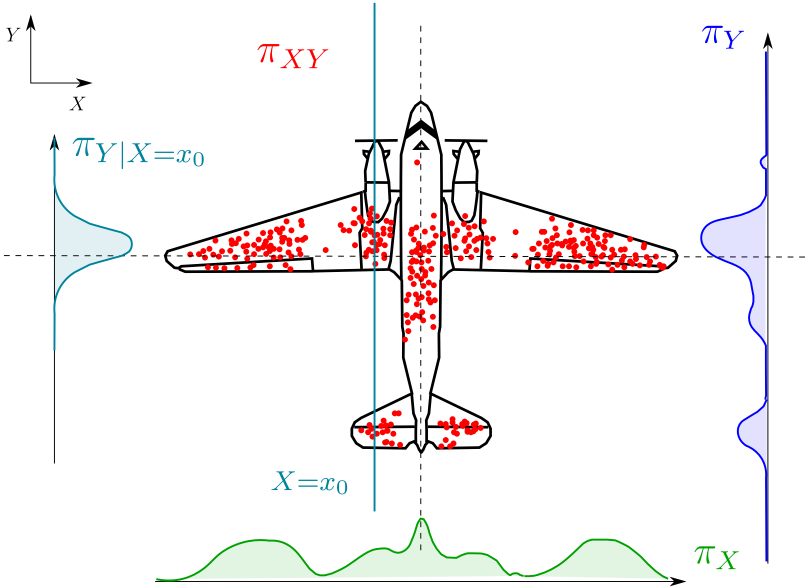
Un peu de multivarié...



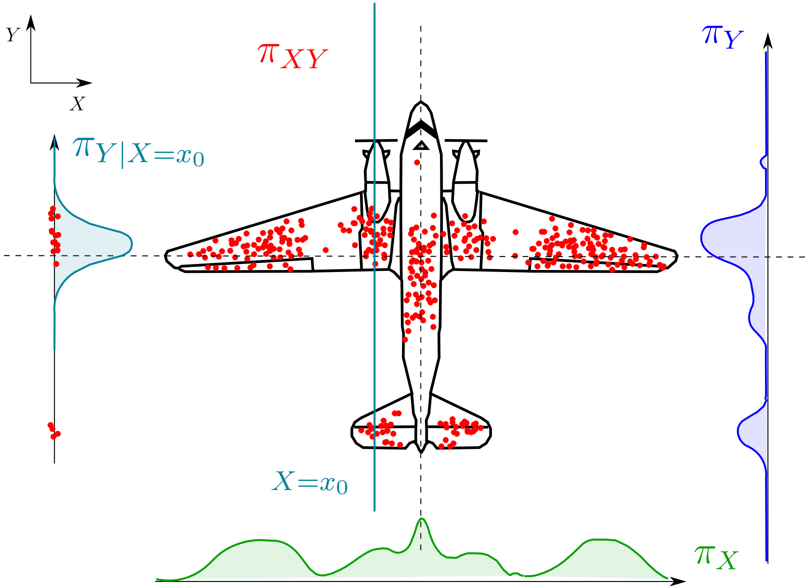


Y
X
π_{XY}
π_Y
$\pi_{Y|X=x_0}$
$X=x_0$
π_X

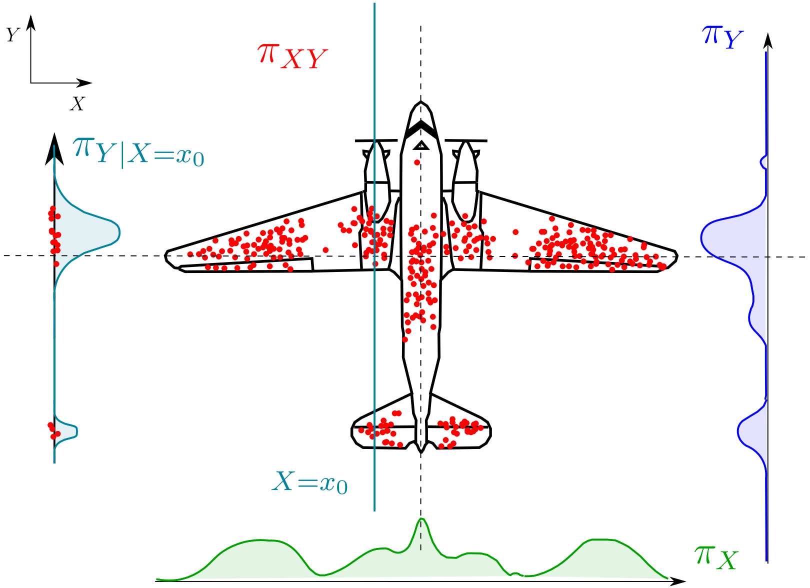
Un peu de multivarié...



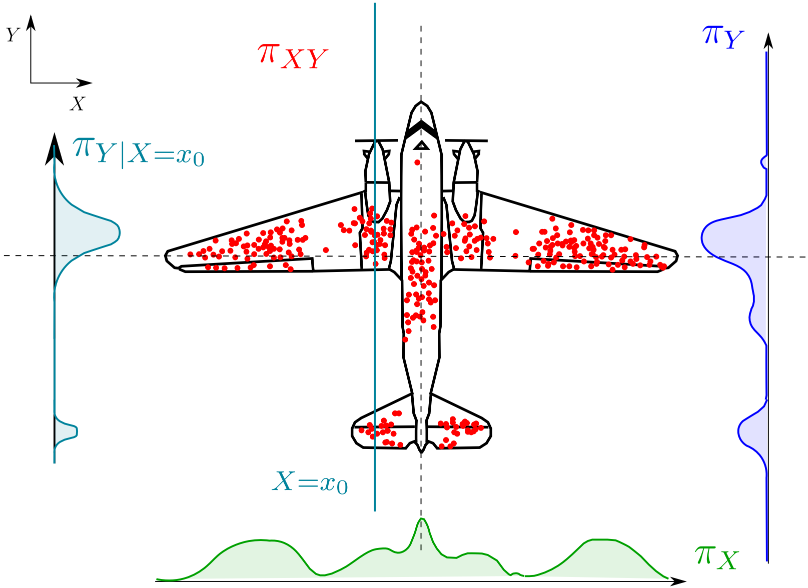
Un peu de multivarié...

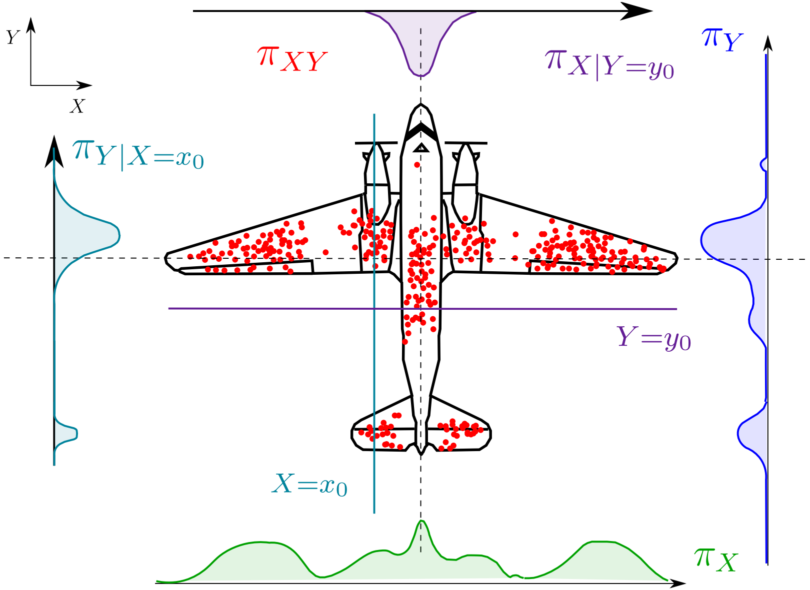


Un peu de multivarié...



Un peu de multivarié...





Y
X
π_{XY}
$\pi_{X|Y=y_0}$
π_Y
$\pi_{Y|X=x_0}$
$Y=y_0$
$X=x_0$
π_X

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X,Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X,Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X|Y) \times \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Exemple : $\mathbb{P}(\text{mardi}, \text{Joseph}) = \mathbb{P}(\text{mardi}) \times \mathbb{P}(\text{Joseph}))$

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X,Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Exemple : $0.042\% \quad = \quad 14\% \quad \times \quad 0.3\%$

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Exemple : $\mathbb{P}(\text{lunette}, \text{retraite}) \neq \mathbb{P}(\text{lunette}) \times \mathbb{P}(\text{retraite}))$

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X,Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Exemple : $\mathbb{P}(\text{lunette}, \text{retraite}) \quad \neq \quad 76\% \quad \times \quad 26\%$

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X, Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Exemple : $\mathbb{P}(\text{lunette}, \text{retraite}) \quad \neq \quad 76\% \quad \times \quad 26\% \quad = \quad 19\%$

Un peu de multivarié...

Dans certains cas, X et Y peuvent être traitées séparemment.

Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, l'observation de l'une d'entre elles n'apporte aucune information sur la loi de l'autre :

$$\mathbb{P}(X|Y) = \mathbb{P}(X) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(Y|X) = \mathbb{P}(Y)$$

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X,Y) = \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y)$$

Exemple : $24\% \quad \neq \quad 76\% \quad \times \quad 26\% \quad = \quad 19\%$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$P(\theta|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{P(\mathcal{D})}$$

Un peu de multivarié...

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$\widehat{\theta} = \max_{\theta\in\Theta} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{P(\mathcal{D})}$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$\widehat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{\sum_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D},\theta)}$$

Un peu de multivarié...

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$\widehat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} \frac{P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}{\sum_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)}$$

Un peu de multivarié...

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$\widehat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{Z} P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

$$\widehat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta)$$

Théorie bayésienne des probabilités

Théorème de Bayes

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

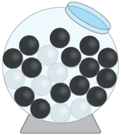
Preuve : $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X,Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$

Probabilités des causes : soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données observées et θ un jeu de causes (inconnues) ayant potentiellement généré $\mathcal{D}$.

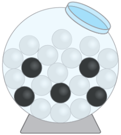
$$\widehat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} P(\mathcal{D}|\theta)$$

Un peu de multivarié...

$\frac{14}{20} = 0.7$



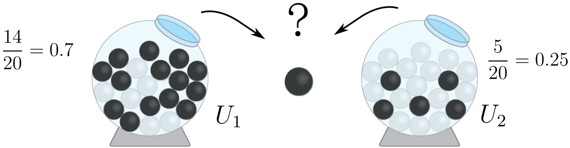
U_1



$\frac{5}{20} = 0.25$

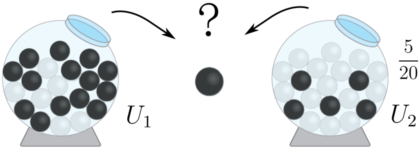
U_2

Un peu de multivarié...



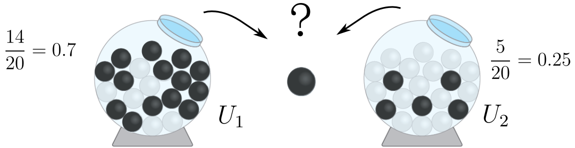
Un peu de multivarié...

$\frac{14}{20} = 0.7$



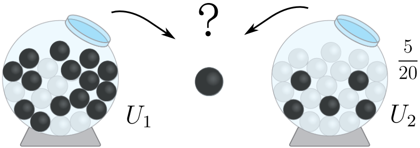
$\frac{5}{20} = 0.25$

$\mathbb{P}(U_1|\bullet)$



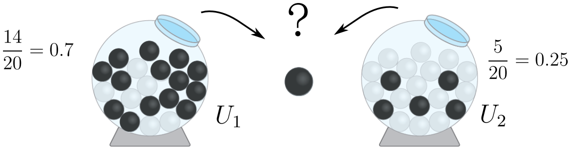
$$\mathbb{P}(U_1|\bullet) = \frac{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet)}$$

$\frac{14}{20} = 0.7$



$\frac{5}{20} = 0.25$

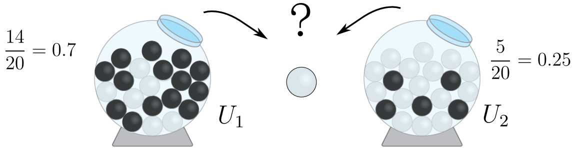
$$\mathbb{P}(U_1|\bullet) = \frac{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet)} = \frac{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bullet|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$



$$\mathbb{P}(U_1|\bullet) = \frac{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet)} = \frac{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bullet|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bullet|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\bullet|U_1)}{\mathbb{P}(\bullet|U_1) + \mathbb{P}(\bullet|U_2)} = \frac{0.7}{0.7 + 0.25} = 0.74$$

Un peu de multivarié...

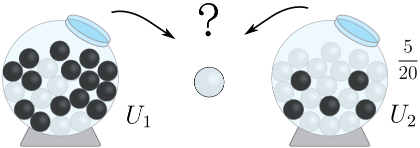


$$\mathbb{P}(U_1|\bigcirc) = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$

Un peu de multivarié...

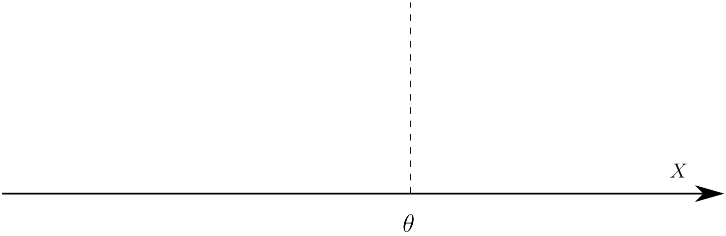
$\frac{14}{20} = 0.7$



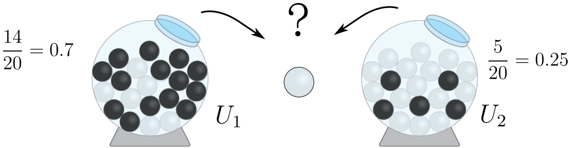
$\frac{5}{20} = 0.25$

$$\mathbb{P}(U_1|\circ) = \frac{\mathbb{P}(\circ|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circ)} = \frac{\mathbb{P}(\circ|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\circ|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\circ|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\circ|U_1)}{\mathbb{P}(\circ|U_1) + \mathbb{P}(\circ|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$

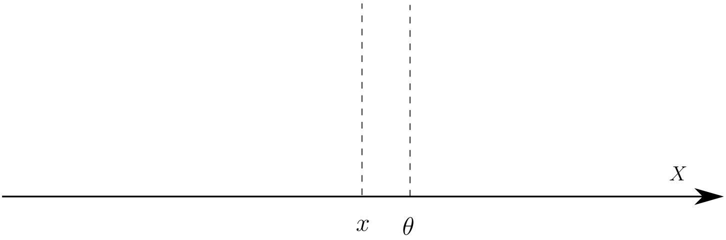


Un peu de multivarié...

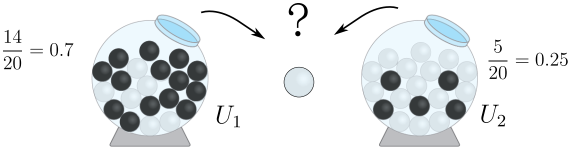


$$\mathbb{P}(U_1|\bigcirc) = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$

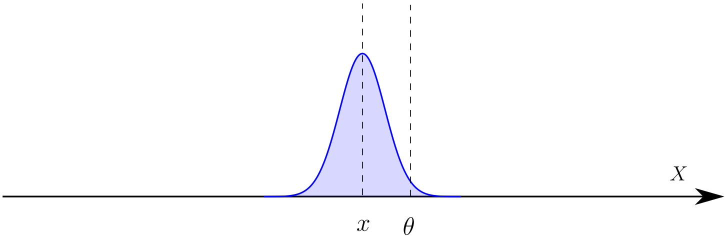


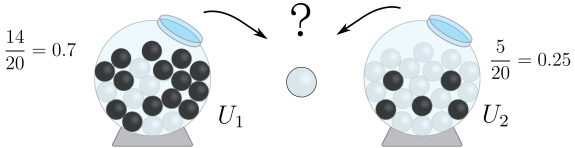
Un peu de multivarié...



$$\mathbb{P}(U_1|\bigcirc) = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

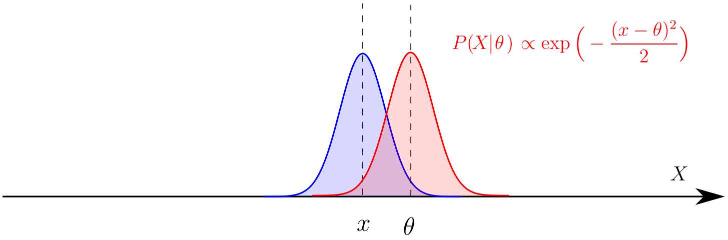
$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$



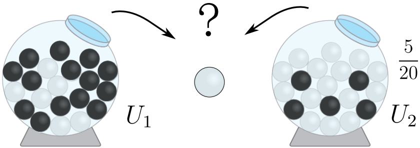


$$\mathbb{P}(U_1|\bigcirc) = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$



$\frac{14}{20} = 0.7$



$\frac{5}{20} = 0.25$

$$\mathbb{P}(U_1|\bigcirc) = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)\mathbb{P}(U_2)}$$

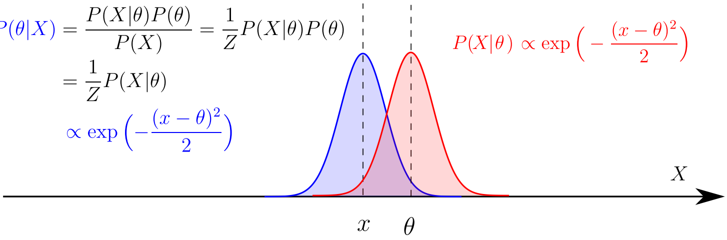
$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1)}{\mathbb{P}(\bigcirc|U_1) + \mathbb{P}(\bigcirc|U_2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.75} = 0.29$$

$$P(\theta|X) = \frac{P(X|\theta)P(\theta)}{P(X)} = \frac{1}{Z}P(X|\theta)P(\theta)$$

$$= \frac{1}{Z}P(X|\theta)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$$

$$P(X|\theta) \propto \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$$



Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?

Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?

Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :

Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :

Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

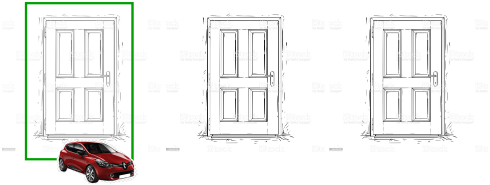
- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



Exercices : Bayes

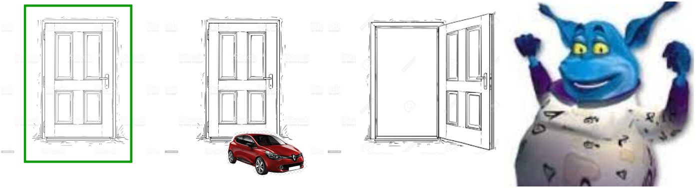
Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :

Exercices : Bayes

Joseph a 2 enfants.

- L'un est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'ainée est une fille. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- L'un est une fille née un mardi. $\mathbb{P}$ que l'autre soit une fille ?
- Problème de *Monty Hall* :



Exercices : Bayes (correction)

F_1 : *Joseph a (au moins) une fille* F_2 : *Joseph a deux filles*
F_A : *L'ainée de Joseph est une filles*

- $$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : *Joseph a (au moins) une fille* F_2 : *Joseph a deux filles*

F_A : *L'ainée de Joseph est une filles*

- $$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : *Joseph a (au moins) une fille* F_2 : *Joseph a deux filles*
F_A : *L'ainée de Joseph est une filles*

- $$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

- $$\mathbb{P}(F_2|F_A) = \frac{\mathbb{P}(F_A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_A)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

F_1 : *Joseph a (au moins) une fille* F_2 : *Joseph a deux filles*
F_A : *L'ainée de Joseph est une filles*

- $$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

- $$\mathbb{P}(F_2|F_A) = \frac{\mathbb{P}(F_A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_A)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

- F_{1M} : *Joseph a (au moins) une fille née un mardi*

Exercices : Bayes (correction)

F_1 : *Joseph a (au moins) une fille* F_2 : *Joseph a deux filles*
F_A : *L'ainée de Joseph est une filles*

- $$\mathbb{P}(F_2|F_1) = \frac{\mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

- $$\mathbb{P}(F_2|F_A) = \frac{\mathbb{P}(F_A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_A)} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

- F_{1M} : *Joseph a (au moins) une fille née un mardi*

$$\mathbb{P}(F_2|F_{1M}) = \text{...à terminer}$$

Exercices : Bayes (correction)

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.

Exercices : Bayes (correction)

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- $\mathcal{O}$: le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

Exercices : Bayes (correction)

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1,2,3\}$) contenant la voiture.
- $\mathcal{O}$: le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1,2,3\}$) ouverte par Bill.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{X}_1|\mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_{\mathbf{i}} \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_i)\mathbb{P}(\mathcal{X}_i)}
\end{aligned}
$$

Exercices : Bayes (correction)

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- $\mathcal{O}$: le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{X}_1|\mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_{\mathbf{i}} \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_i)\mathbb{P}(\mathcal{X}_i)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_2)\mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_3)\mathbb{P}(\mathcal{X}_3)}$$

Exercices : Bayes (correction)

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- $\mathcal{O}$: le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{X}_1|\mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_\mathbf{i} \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_i)\mathbb{P}(\mathcal{X}_i)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_2)\mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_3)\mathbb{P}(\mathcal{X}_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{1}{3}$$

Exercices : Bayes (correction)

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- $\mathcal{O}$: le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\mathbb{P}(\mathcal{X}_1|\mathcal{O}_2) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_{\mathbf{i}} \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_i)\mathbb{P}(\mathcal{X}_i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_2)\mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_3)\mathbb{P}(\mathcal{X}_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{X}_2|\mathcal{O}_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{X}_3|\mathcal{O}_2) = \frac{2}{3}$: il faut changer de porte !

- $\mathcal{X}$: le numéro de la porte ($\mathcal{X} \in \{1, 2, 3\}$) contenant la voiture.
- $\mathcal{O}$: le numéro de la porte ($\mathcal{O} \in \{1, 2, 3\}$) ouverte par Bill.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{X}_1|\mathcal{O}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_{\mathbf{i}} \mathbb{P}(\mathcal{O}_2, \mathcal{X}_i)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\sum_i \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_i)\mathbb{P}(\mathcal{X}_i)}
\end{aligned}$$

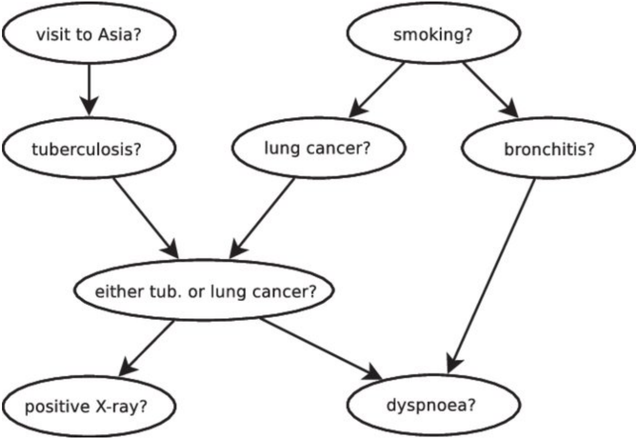
$$= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1)}{\mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_1)\mathbb{P}(\mathcal{X}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_2)\mathbb{P}(\mathcal{X}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{O}_2|\mathcal{X}_3)\mathbb{P}(\mathcal{X}_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{X}_2|\mathcal{O}_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{X}_3|\mathcal{O}_2) = \frac{2}{3}$: il faut changer de porte !

Un peu de multivarié...

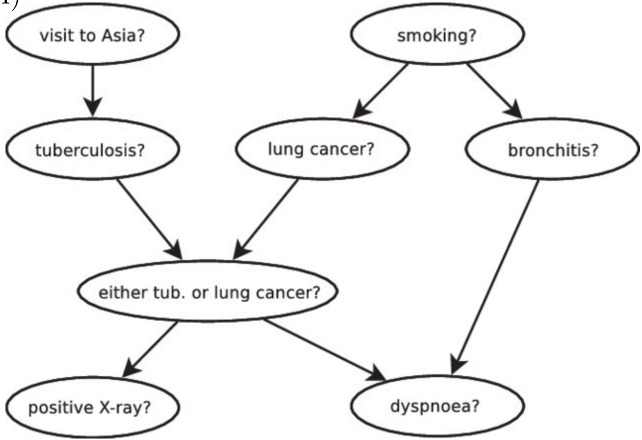
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)

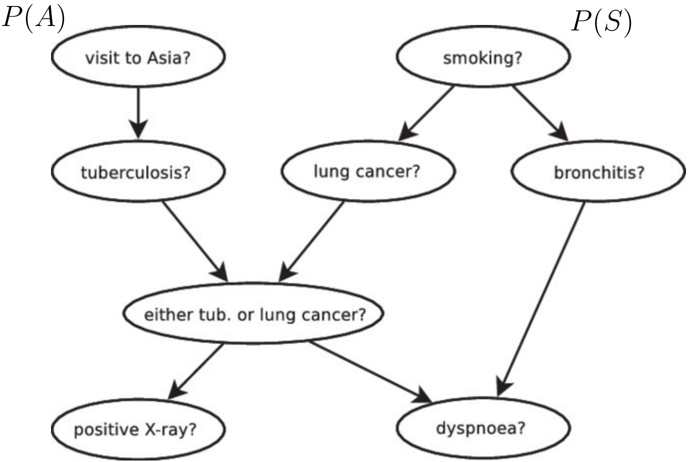
$P(A)$



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

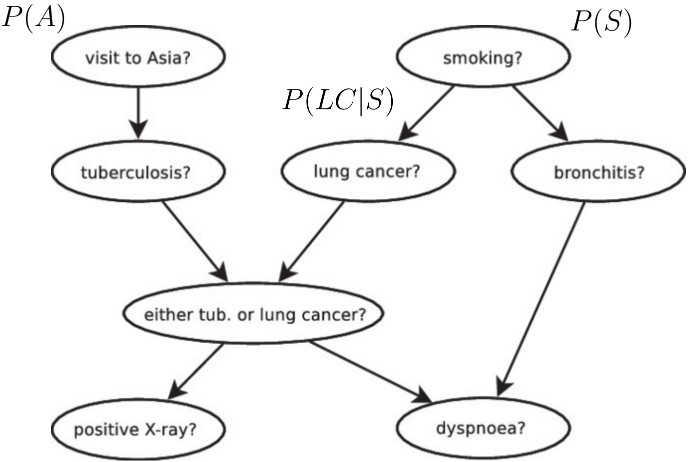
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

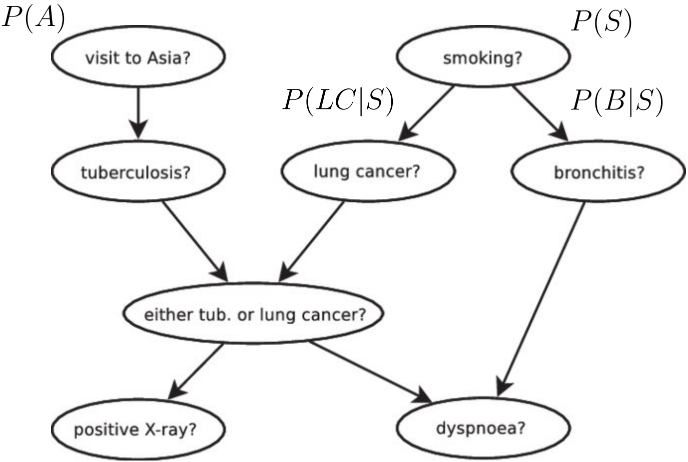
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

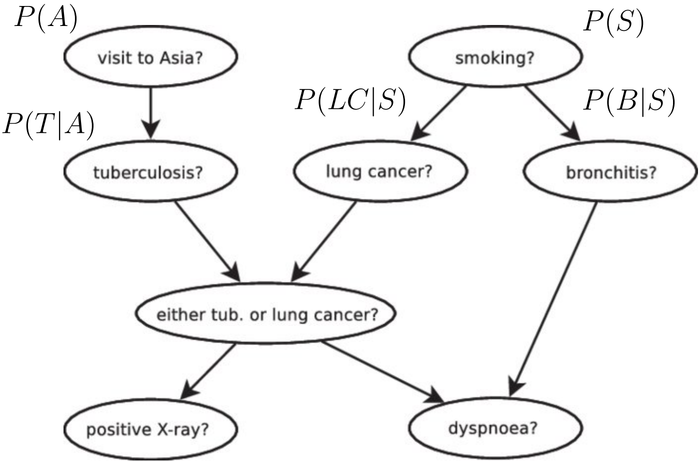
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

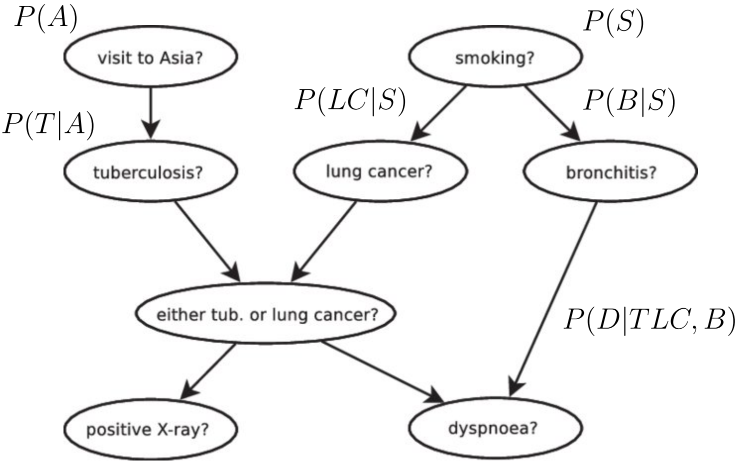
Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



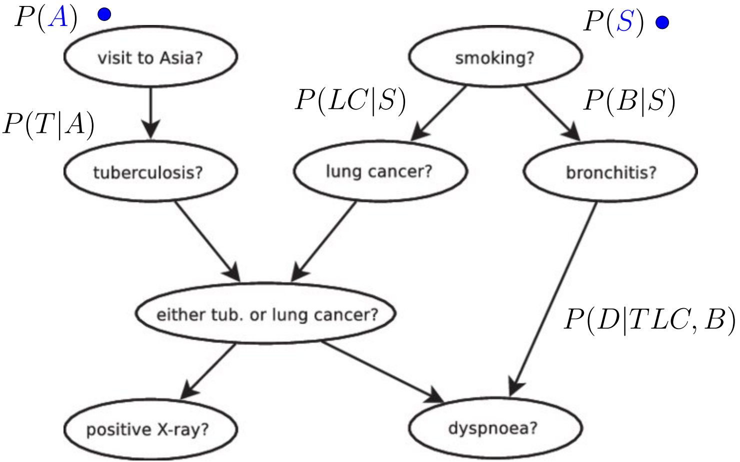
Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

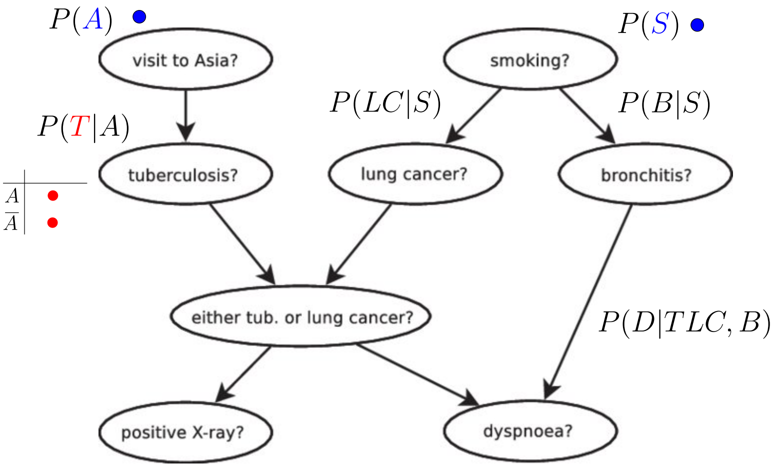
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

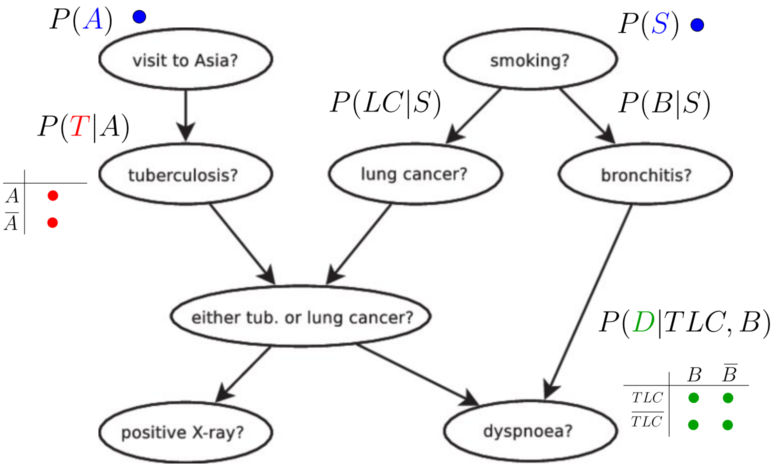
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_3 \arrow[r] & X_4
\end{tikzcd}
$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) =$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3)$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3)$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

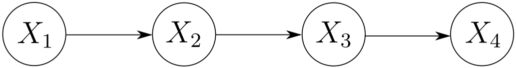
$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\ &= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$



$$
\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2)
\end{aligned}
$$

Un peu de multivarié...

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)
\end{aligned}$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_2 | X_1) P(X_1)
\end{aligned}$$

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)\, P(X_2 | X_1) P(X_3 | X_2) P(X_4 | X_3)$$

Chaîne de Markov

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$

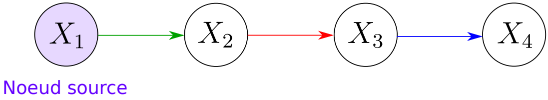
$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4 | X_1, X_2, X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4 | X_3) P(X_3 | X_2) P(X_2 | X_1) P(X_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)\, P(X_2 | X_1) P(X_3 | X_2) P(X_4 | X_3)}$$

Chaîne de Markov

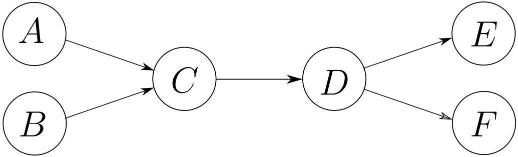
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{G}$$



$$\begin{aligned}
P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_4|X_1, X_2, X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_1, X_2, X_3) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_1, X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_1, X_2) \\
&= P(X_4|X_3)P(X_3|X_2)P(X_2|X_1)P(X_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)\,P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)}$$

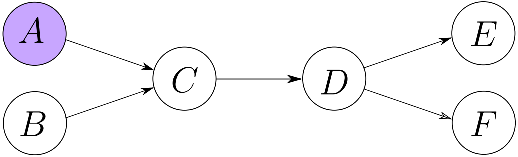
Cas général $A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



Un peu de multivarié...

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

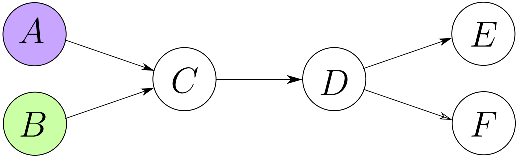


$P(A)$...

Un peu de multivarié...

Cas général

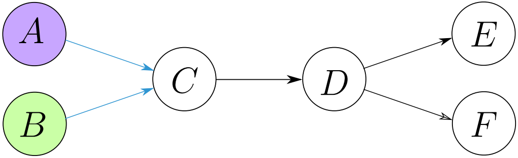
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \ldots$

Cas général

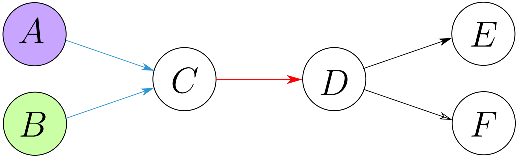
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \ldots$

Cas général

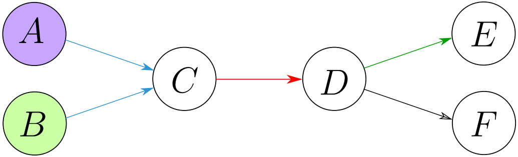
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C)$ ...

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

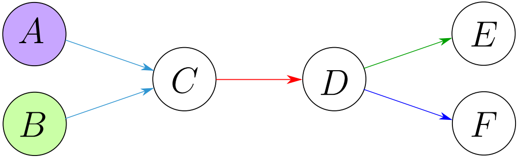


$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D)$ ...

Un peu de multivarié...

Cas général

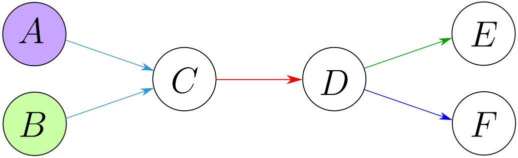
$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$



$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$

Un peu de multivarié...

Cas général $A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

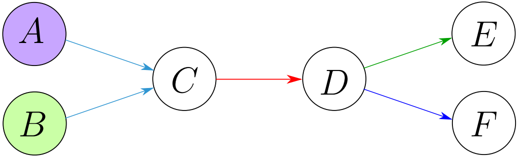


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

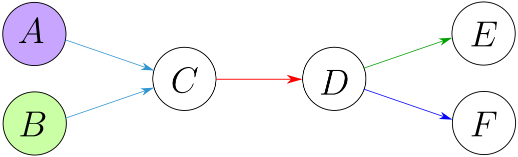


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$
$$= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Cas général

$$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$$



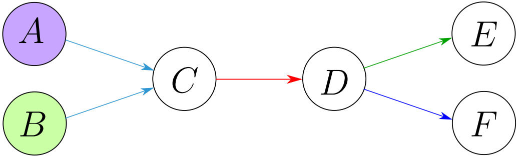
$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$
$$= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$
$$= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

Un peu de multivarié...

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

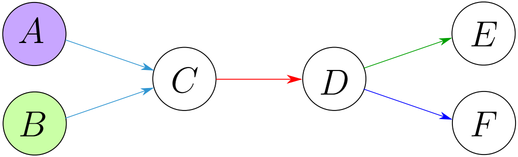


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D)
\end{aligned}$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

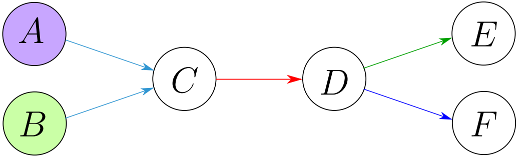


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A, B) \times P(C|A, B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C) \times P(D|A, B, C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C, D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A, B, C, D) \times P(E|A, B, C, D) \times P(F|D)
\end{aligned}$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

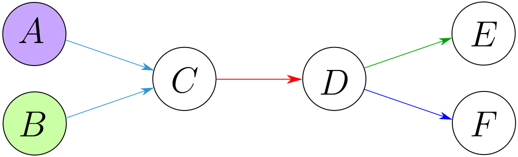


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|A,B,C,D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|D)
\end{aligned}$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

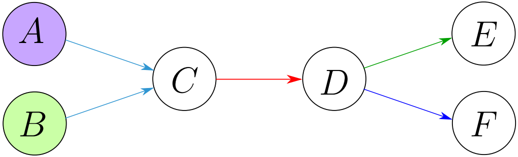


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|A,B,C,D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|A,B,C,D,E)
\end{aligned}$$

Cas général

$A, B, C, D, E, F \sim \mathcal{G}$

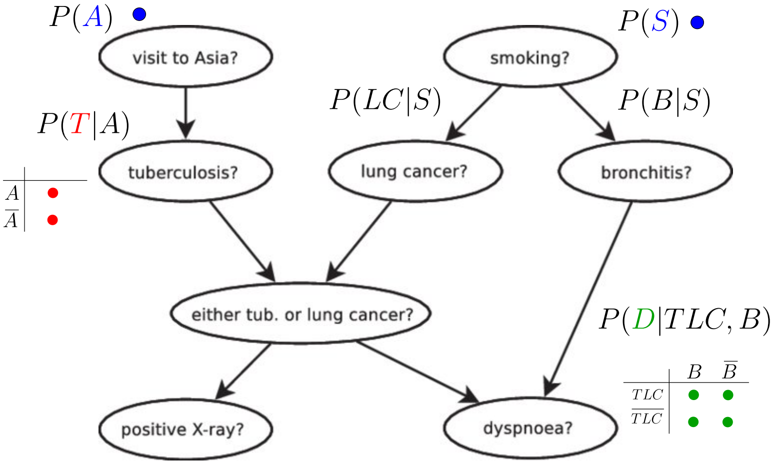


$$P(A) \times P(B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A,B) \times P(C|A,B) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C) \times P(D|A,B,C) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D) \times P(E|A,B,C,D) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|D) \\
&= P(A,B,C,D,E) \times P(F|A,B,C,D,E) = P(A,B,C,D,E,F) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

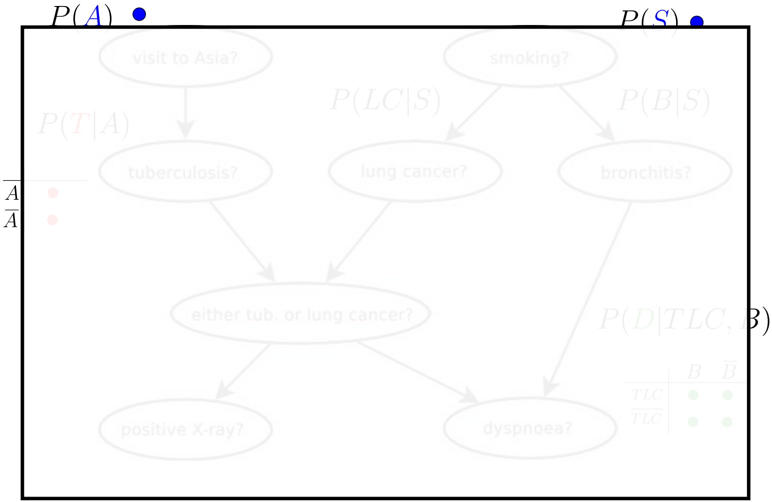
Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)



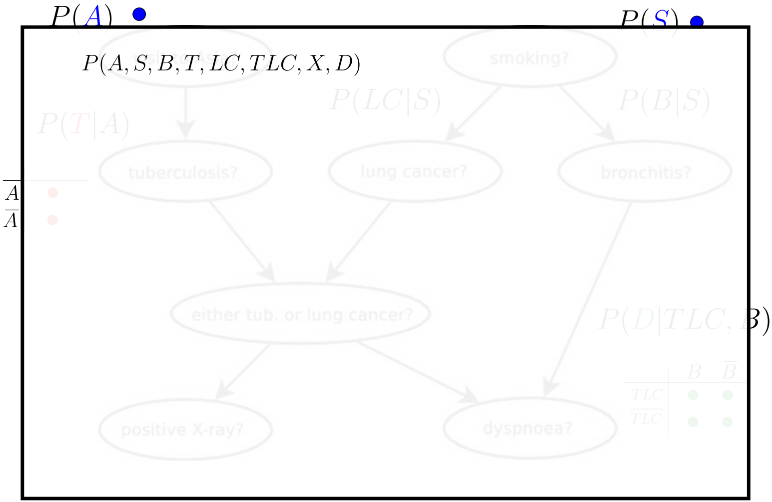
Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)



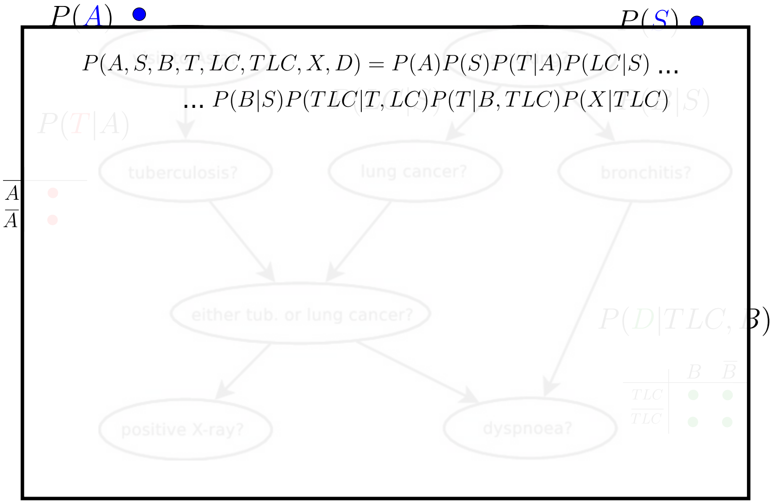
Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

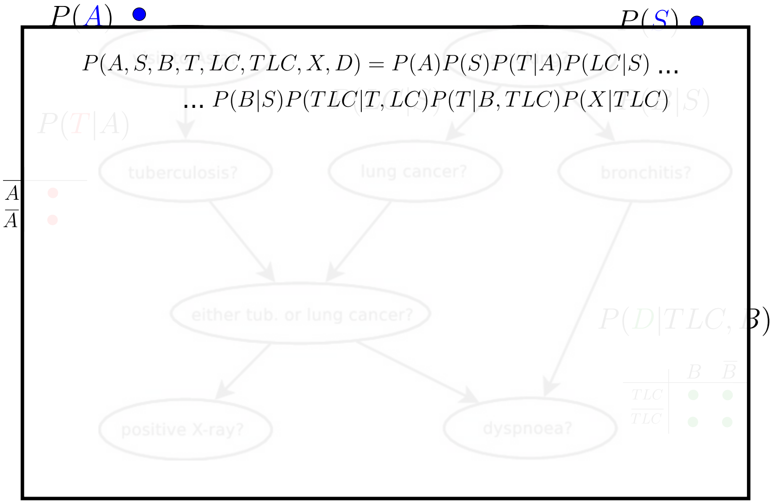
Réseau bayesien (Bayesian Network)



$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$
$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)



$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$
$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

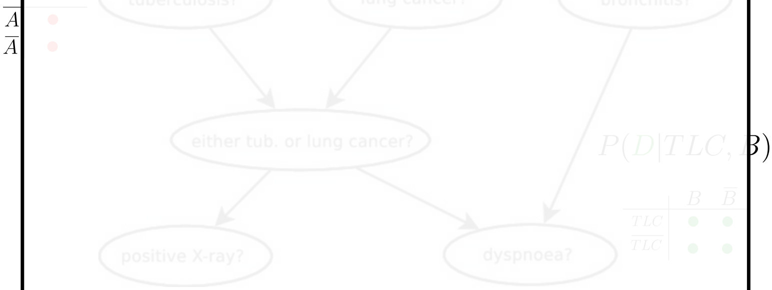
Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A)$ $P(S)$

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$

$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A)$ $P(S)$

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \text{ ...}$$

$$\text{... } P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

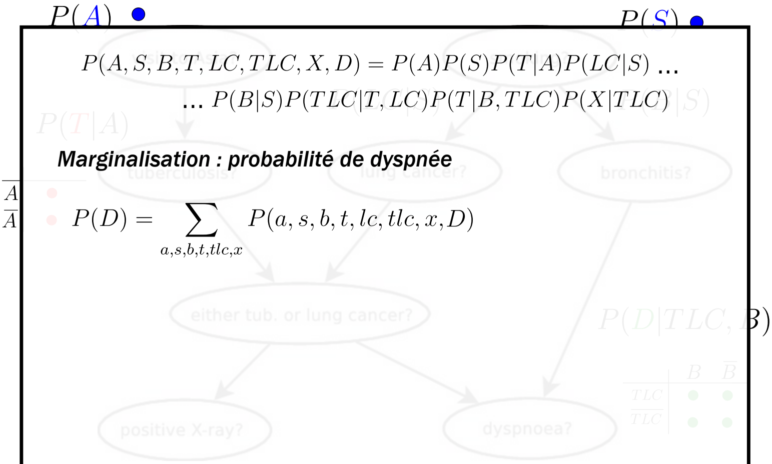
Marginalisation : probabilité de dyspnée

A

$\overline{A}$ $P(D)$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)



$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S)\ \ldots$$
$$\ldots\ P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,tlc,x} P(a,s,b,t,lc,tlc,x,D)$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$
$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,tlc,x} P(a,s,b,t,lc,tlc,x,D)$$

Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques ($\overline{X}$)

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A)$ $P(S)$

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$
$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,tlc,x} P(a,s,b,t,lc,tlc,x,D)$$

Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques ($\overline{X}$)

$$P(LC|D,\overline{X})$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$
$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,tlc,x} P(a,s,b,t,lc,tlc,x,D)$$

Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques ($\overline{X}$)

$$P(LC|D,\overline{X}) = \frac{P(LC,D,\overline{X})}{P(D,\overline{X})}$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A)$ $P(S)$

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$

$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,tlc,x} P(a,s,b,t,lc,tlc,x,D)$$

Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques ($\overline{X}$)

$$P(LC|D,\overline{X}) = \frac{P(LC,D,\overline{X})}{P(D,\overline{X})} = \frac{\sum_{a,s,b,t,tlc} P(a,s,b,t,LC,tlc,\overline{X},D)}{}$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

Réseau bayesien (Bayesian Network)

$P(A)$ $P(S)$

$$P(A,S,B,T,LC,TLC,X,D) = P(A)P(S)P(T|A)P(LC|S) \ldots$$
$$\ldots P(B|S)P(TLC|T,LC)P(T|B,TLC)P(X|TLC)$$

Marginalisation : probabilité de dyspnée

$$P(D) = \sum_{a,s,b,t,tlc,x} P(a,s,b,t,lc,tlc,x,D)$$

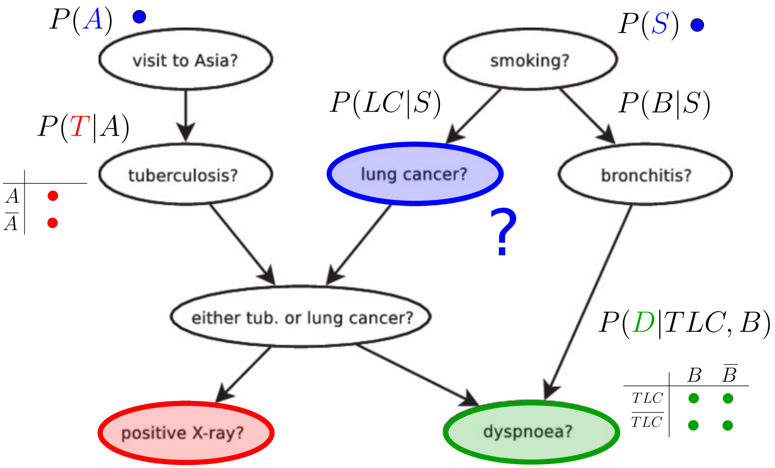
Conditionnement : probabilité de cancer des poumons sachant les résultats des examens cliniques (D) et radiologiques ($\overline{X}$)

$$P(LC|D,\overline{X}) = \frac{P(LC,D,\overline{X})}{P(D,\overline{X})} = \frac{\sum_{a,s,b,t,tlc} P(a,s,b,t,LC,tlc,\overline{X},D)}{\sum_{a,s,b,t,tlc,lc} P(a,s,b,t,lc,tlc,\overline{X},D)}$$

Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

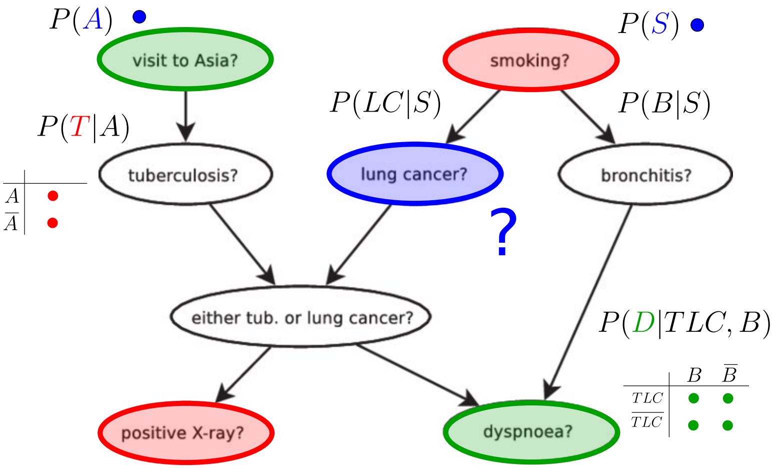
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

Un peu de multivarié...

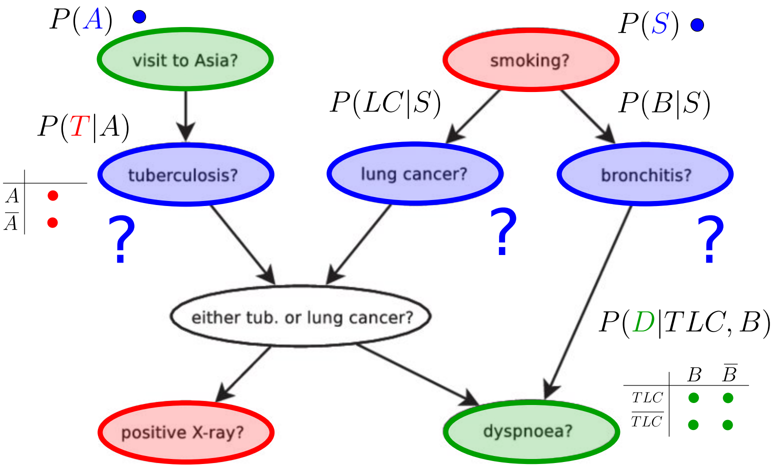
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

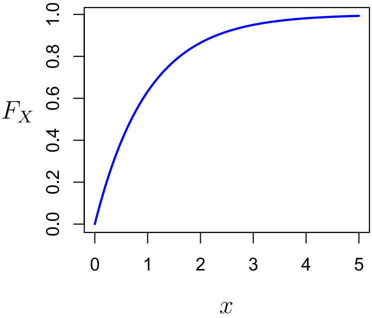
Un peu de multivarié...

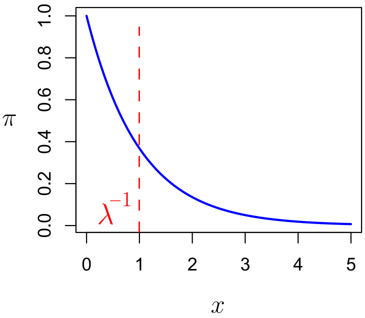
Réseau bayesien (Bayesian Network)



Exemple inspiré de Daly et al, 2011

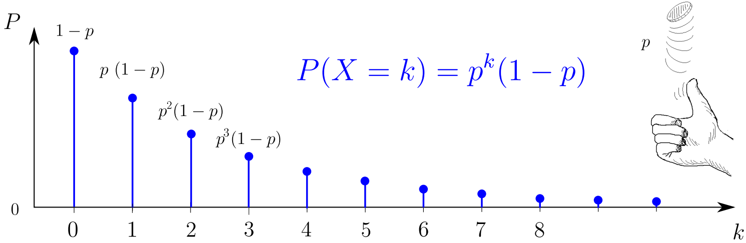
Loi exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$





$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\pi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$


P
1 − p
p (1 − p)
p²(1 − p)
p³(1 − p)
P(X = k) = p^k(1 − p)
p
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8
k

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geqslant t+\Delta t \mid X \geqslant t)$$

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geqslant t+\Delta t \mid X \geqslant t) = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t,\ X \geqslant t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)}$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geqslant t+\Delta t \mid X \geqslant t) = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t,\ X \geqslant t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)}$$

$$= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t)$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geqslant t+\Delta t \mid X \geqslant t) = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t,\ X \geqslant t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)}$$

$$= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t)$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t \mid X \geqslant t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t)$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geqslant t+\Delta t \mid X \geqslant t) = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t,\ X \geqslant t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)}$$

$$= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t)$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t \mid X \geqslant t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t) \quad \blacksquare$$

Retour sur la loi exponentielle

La variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ représente la durée de vie d'un composant.

Propriété

La loi de X est sans mémoire : la probabilité que le composant résiste sur une durée $t + \Delta t$ sachant qu'il est déjà agé de t est égale à celle d'une durée Δt en *sortie d'usine*.

$$\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t \mid X \geqslant t) = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t,\ X \geqslant t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t)}{\mathbb{P}(X \geqslant t)}$$

$$= \frac{1 - F_X(t + \Delta t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F_X(\Delta t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t)$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant t + \Delta t \mid X \geqslant t) = \mathbb{P}(X \geqslant \Delta t) \quad \blacksquare$$

On dit que $\mathcal{E}$ est la loi d'un processus sans vieillissement.

Moments

- Espérance
- Variance et écart-type
- Covariance
- Corrélation
- Propagation d'erreurs

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \mathbb{P}(A_2) + 21 \times \mathbb{P}(A_3) + 490 \times \mathbb{P}(A_4) + 95200 \times \mathbb{P}(A_5)$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{C_5^k \times C_{44}^{5-k}}{C_{49}^5}$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \mathbb{P}(A_2) + 21 \times \mathbb{P}(A_3) + 490 \times \mathbb{P}(A_4) + 95200 \times \mathbb{P}(A_5)$$

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 4 \times \frac{132440}{1906884} + 21 \times \frac{9460}{1906884} + 490 \times \frac{440}{1906884} + 95200 \times \frac{10}{1906884}$$

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : *le tirage contient exactement* k *numéros du joueur*

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] \approx 4 \times 0.069 + 21 \times 0.00496 + 490 \times 2.3 \times 10^{-4} + 95200 \times 5.24 \times 10^{-6}$$

Espérance d'une variable aléatoire

Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la valeur moyenne que l'on peut obtenir sur un grand nombre de réalisations de X (loi des grands nombres).

A_k : le tirage contient exactement k numéros du joueur

$$X(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega \in A_2 \\ 21 & \text{si } \omega \in A_3 \\ 490 & \text{si } \omega \in A_4 \\ 95200 & \text{si } \omega \in A_5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X] \approx 0.99$

Définition générale

L'espérance de X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Définition générale

L'espérance de X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P_X(k)$$

Définition générale

L'espérance de X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P_X(k)$$

- Cas continu de densité π_X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \pi_X(x) dx$$

Espérance d'une variable aléatoire

Définition générale

L'espérance de X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P_X(k)$$

- Cas continu de densité π_X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \pi_X(x) dx$$

Sous réserve que $kP_X(k)$ (resp. $x\pi_X$) soit sommable (resp. intégrable).

Exercice : espérance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \ : \qquad P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice : espérance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ \ : \qquad P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \ : \qquad P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Pour chacune des deux lois ci-dessus, calculer $\mathbb{E}[X]$.

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques et $a \in \mathbb{R}$ un constante (déterministe) :

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques et $a \in \mathbb{R}$ un constante (déterministe) :

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles $\sum$ et $\int$.

Espérance d'une variable aléatoire

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques et $a \in \mathbb{R}$ un constante (déterministe) :

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles $\sum$ et $\int$.

Remarque : l'espérance est un opérateur linéaire, donc en général, pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque, $\mathbb{E}\big[f(X)\big]$ n'est pas égale à $f\big(\mathbb{E}[X]\big)$ (sauf en particulier quand f est linéaire).

En particulier, $\mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}[X]^2$ et $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Variance d'une variable aléatoire

Définition générale

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) d'espérance $\mathbb{E}[X] < \infty$. On définit la variance de X comme la valeur moyenne (lorsqu'elle existe) du carré des écarts de X à son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\Big]$$

Variance d'une variable aléatoire

Définition générale

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) d'espérance $\mathbb{E}[X] < \infty$. On définit la variance de X comme la valeur moyenne (lorsqu'elle existe) du carré des écarts de X à son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\Big]$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{V}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \big(k - \mathbb{E}[X]\big)^2 P_X(k)$$

Variance d'une variable aléatoire

Définition générale

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) d'espérance $\mathbb{E}[X] < \infty$. On définit la variance de X comme la valeur moyenne (lorsqu'elle existe) du carré des écarts de X à son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right]$$

- Cas discret de loi P_X

$$\mathbb{V}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(k - \mathbb{E}[X]\right)^2 P_X(k)$$

- Cas continu de densité π_X

$$\mathbb{V}[X] = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \mathbb{E}[X]\right)^2 \pi_X(x) dx$$

Ecart-type d'une variable aléatoire

Définition

On appelle écart-type d'une variable aléatoire X la quantité :

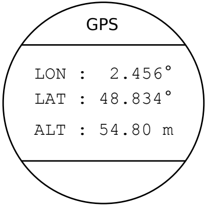
$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Définition

On appelle écart-type d'une variable aléatoire X la quantité :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Exemple : un GPS de randonnée affiche les coordonnées géographiques de l'utilisateur avec 3 décimales.



Indiquer l'écart-type (en m) sur les coordonnées ($R_T = 6378$ km).

Cas d'école : le bruit de normalisation $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Le bruit de normalisation intervient quand une variable prend de manière uniforme ses valeurs dans un intervalle donné (a priori le moins informatif pour une distribution à support compact). Il permet de modéliser, les erreurs d'arrondi, de rasterisation, de lecture de graduations...

Cas d'école : le bruit de normalisation $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

Le bruit de normalisation intervient quand une variable prend de manière uniforme ses valeurs dans un intervalle donné (a priori le moins informatif pour une distribution à support compact). Il permet de modéliser, les erreurs d'arrondi, de rasterisation, de lecture de graduations...

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\big[(X - \hat{X})^2\big] = \int_a^b (x - \hat{x})^2 dx = (b-a)^2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

Cas d'école : le bruit de normalisation $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

Le bruit de normalisation intervient quand une variable prend de manière uniforme ses valeurs dans un intervalle donné (a priori le moins informatif pour une distribution à support compact). Il permet de modéliser, les erreurs d'arrondi, de rasterisation, de lecture de graduations...

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\big[(X - \hat{X})^2\big] = \int_a^b (x-\hat{x})^2 dx = (b-a)^2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$\boxed{\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \;\approx\; 0.29(b-a)}$$

Erreur sur l'affichage des coordonnées :

Réponse :

$\Delta_Y(1°) = R_T \frac{\pi}{180} = 111\ km$

$\Delta_X(1°) = R_T \frac{\pi}{180} \cos(\varphi) = 73\ km$

D'où :

$$\sigma_X = \frac{\Delta_X(1°)}{\sqrt{12}} 10^{-3} = 21\ m$$

$$\sigma_Y = \frac{\Delta_Y(1°)}{\sqrt{12}} 10^{-3} = 32\ m$$

Variance

Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

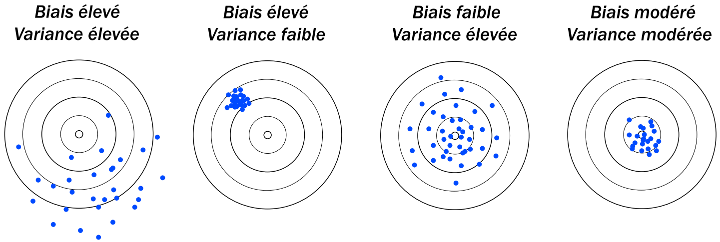
Preuve : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\Big] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}\big[X\mathbb{E}[X]\big] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}\big[X\big] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Preuve : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[X]\right] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

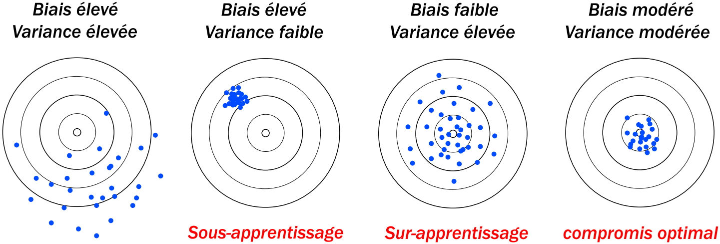


Forme alternative

Soit X une variable aléatoire. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe alors :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Preuve : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[X]\right] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$



Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ \ : \qquad P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad : \qquad P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad : \qquad P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Pour chacune des deux lois ci-dessus, calculer $\mathbb{V}[X]$.

Exercice : variance

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_{+*}$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ :\qquad P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

La v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\pi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Pour chacune des deux lois ci-dessus, calculer $\mathbb{V}[X]$.

Indication : pour le calcul de la variance de la loi de Poisson, on pourra commencer par évaluer la quantité $\mathbb{E}[X(X-1)]$.

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles $\sum$ et $\int$.

Variance - Covariances de variables aléatoires

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles $\sum$ et $\int$.

Covariance

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la covariance par la quantité :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big]$$

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{V}[a] = 0$
- $\mathbb{V}[aX + Y] = a^2\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

Preuve : immédiat par linéarité des symboles $\sum$ et $\int$.

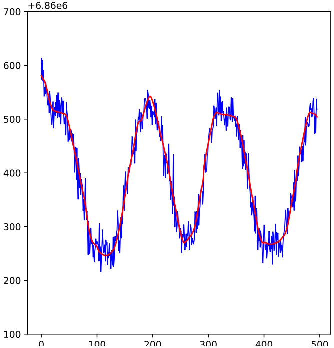
Covariance

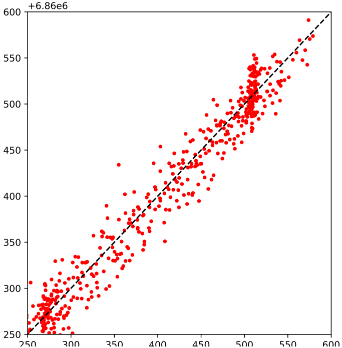
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la covariance par la quantité :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big]$$

Remarque : l'opérateur de covariance peut-être considéré comme un produit scalaire. En particulier, il est symétrique ($\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$) et bilinéaire ($\text{Cov}(aX+Y, Z) = a\text{Cov}(X, Y)+\text{Cov}(Y, Z)$).

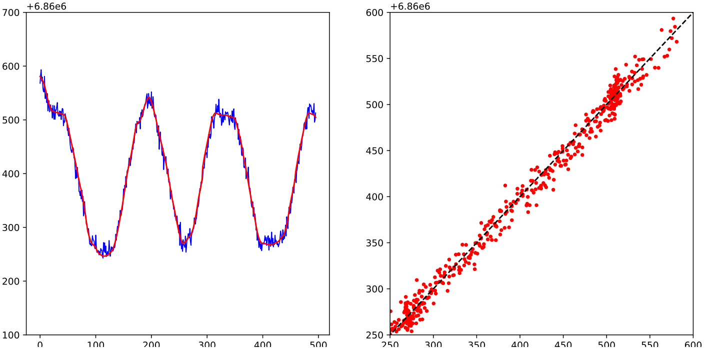
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.





La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

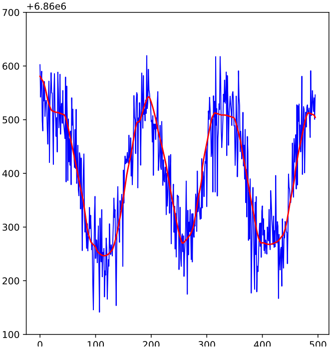
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.

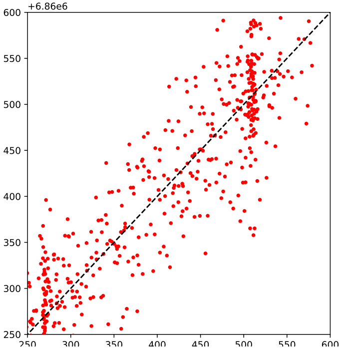


La quantité $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.

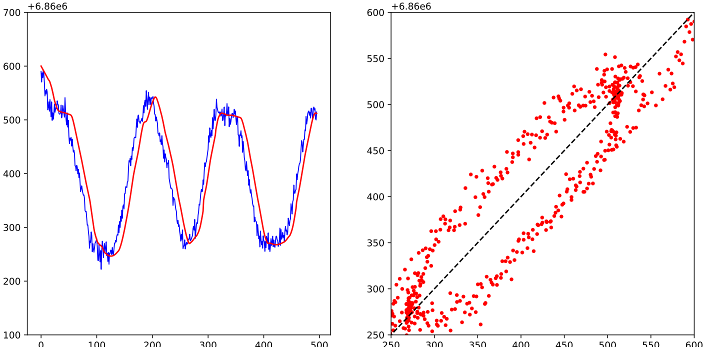




La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

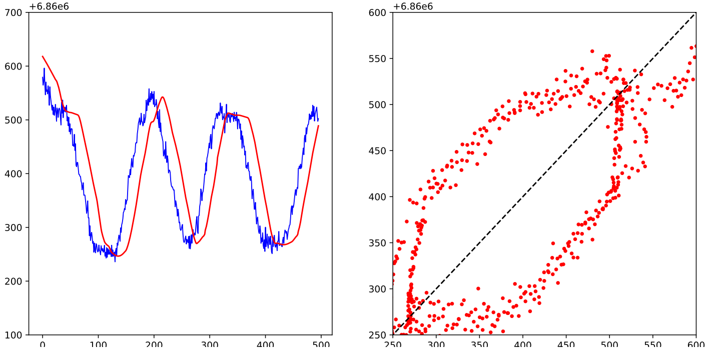
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité Cov(X, Y) est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

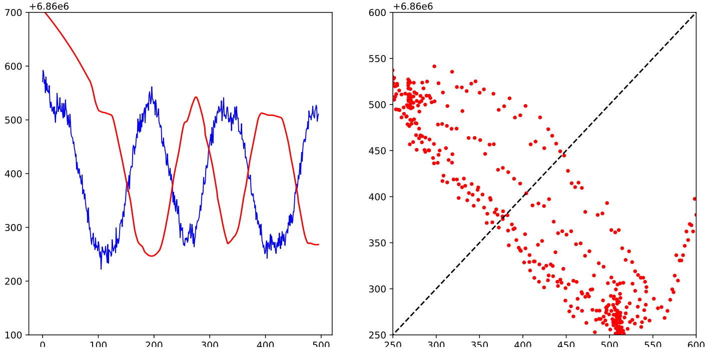
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

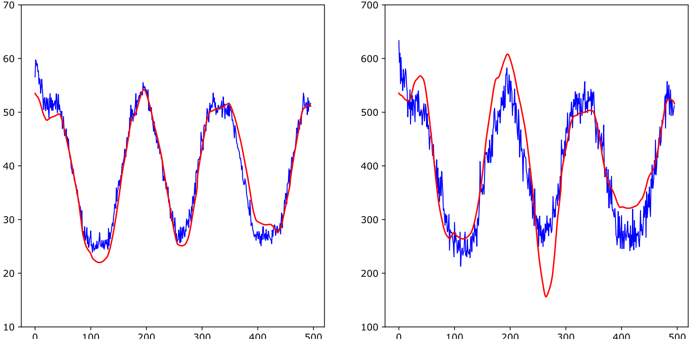
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\text{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

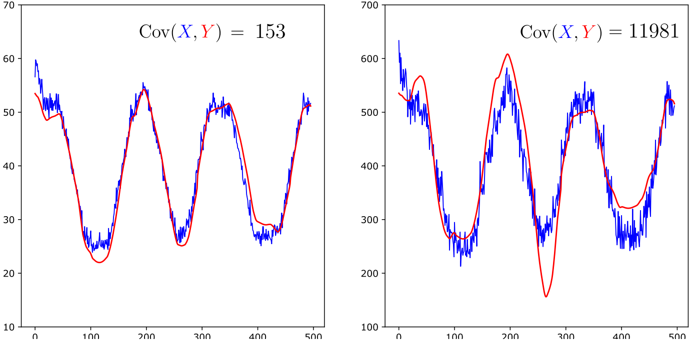
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Covariance

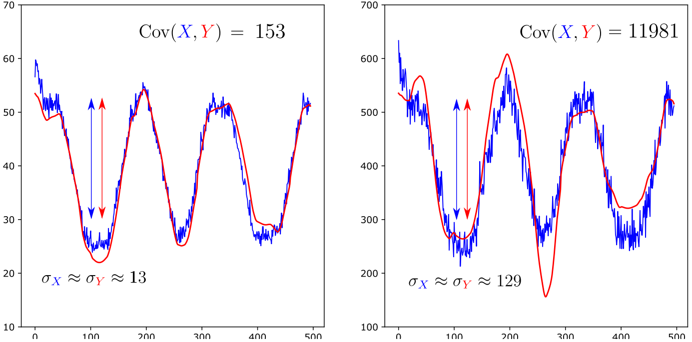
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité Cov(X, Y) est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

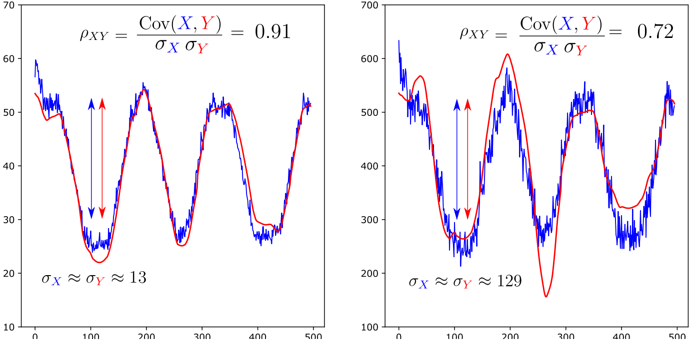
Covariance

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\mathrm{Cov}(X,Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x,y) sont alignés.

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.



La quantité $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est un réel positif indiquant la ressemblance entre les valeurs prises par les réalisations de X et de Y. Plus elle est élevée, plus les points (x, y) sont alignés.

Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la corrélation par la quantité :

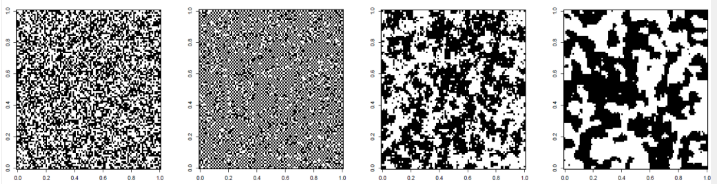
$$\rho_{XY} = \frac{\mathsf{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Covariance

Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la corrélation par la quantité :

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

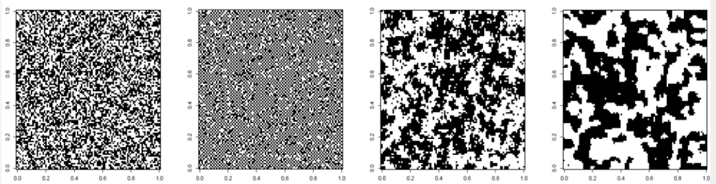


$\rho = 0$ $\quad$ $\rho < 0$ $\quad$ $\rho > 0$ $\quad$ $\rho \gg 0$

Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la corrélation par la quantité :

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



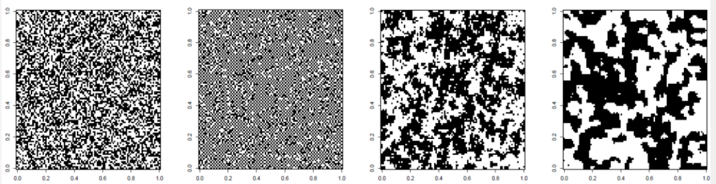
$\rho = 0$ $\quad$ $\rho < 0$ $\quad$ $\rho > 0$ $\quad$ $\rho \gg 0$

$$-1 \geqslant \rho_{XY} \geqslant +1$$

Corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On définit (lorsqu'elle existe) la corrélation par la quantité :

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



$\rho = 0$ $\rho < 0$ $\rho > 0$ $\rho \gg 0$

$$-1 \geqslant \rho_{XY} \geqslant +1 \quad \text{(Cauchy-Schwarz : } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{y}\|\text{)}$$

Corrélation vs. dépendance

Corrélation vs. dépendance

La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Corrélation vs. dépendance

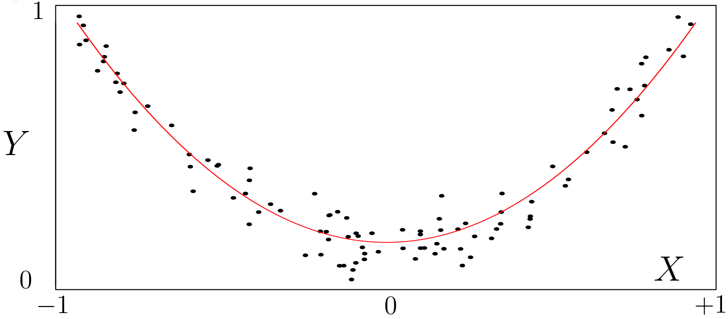
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$

Corrélation vs. dépendance

La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

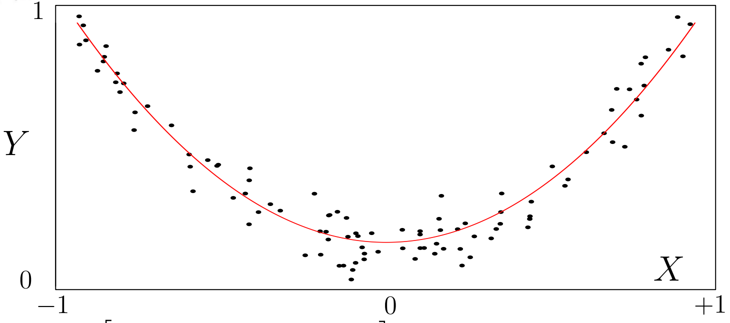
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



Corrélation vs. dépendance

La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$

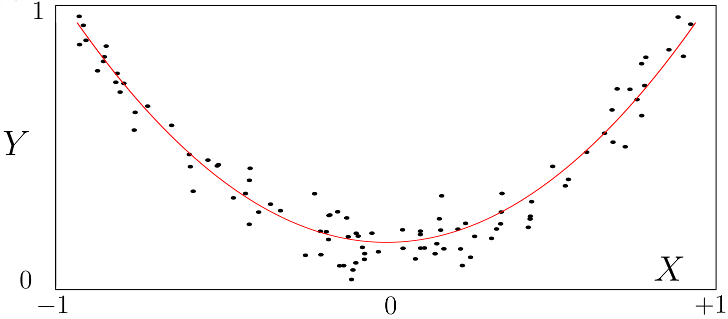


$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big]$$

Corrélation vs. dépendance

La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

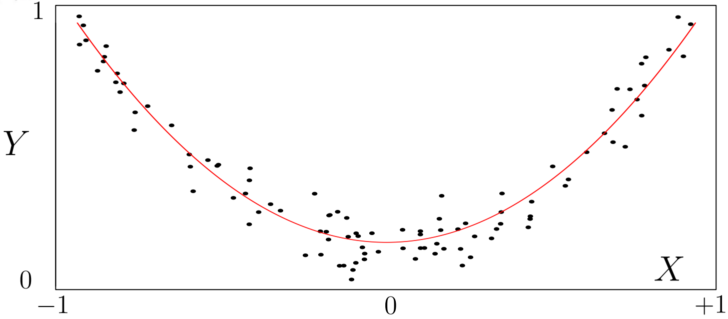
Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



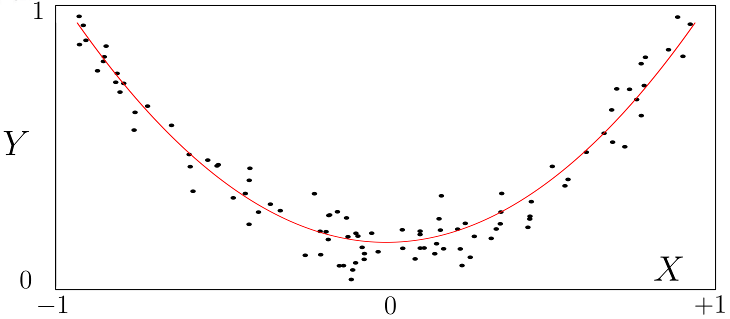
$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X-\mathbb{E}[X]\big)\big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3]$$

Corrélation vs. dépendance

La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$

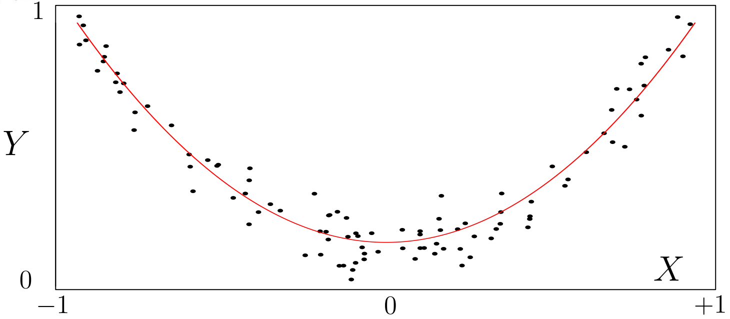


$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx$$

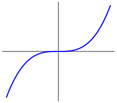
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



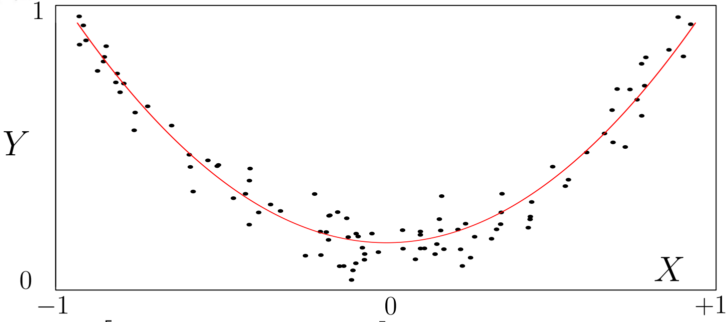
$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx$$



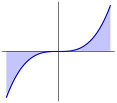
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1, +1])$ et $Y = X^2$



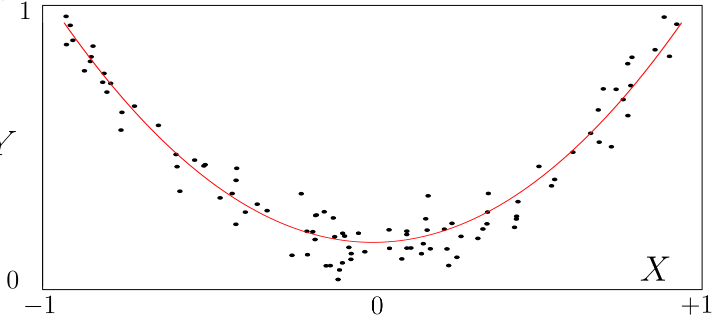
$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx$$



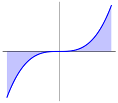
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

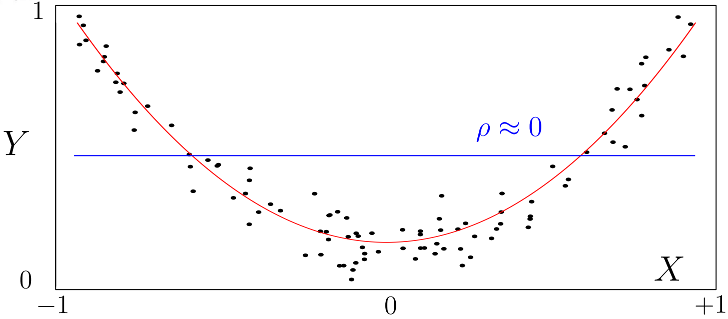
$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$



Corrélation vs. dépendance

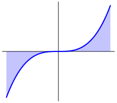
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

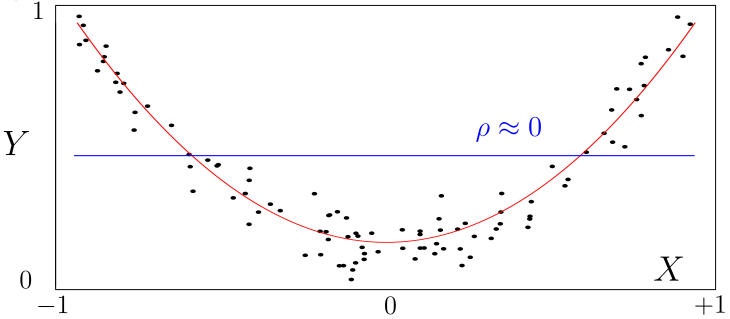
$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$



Corrélation vs. dépendance

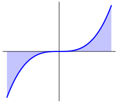
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

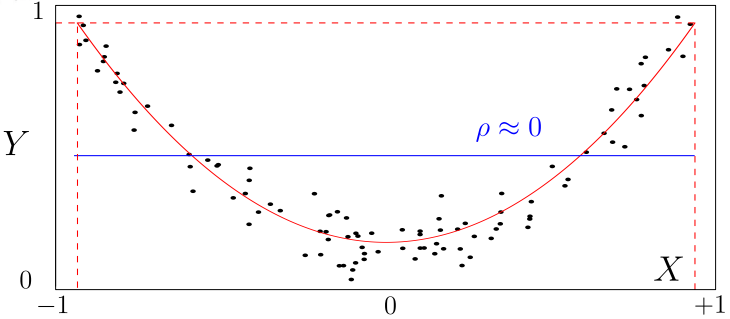


$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1)$$

Corrélation vs. dépendance

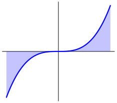
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)\big(Y - \mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

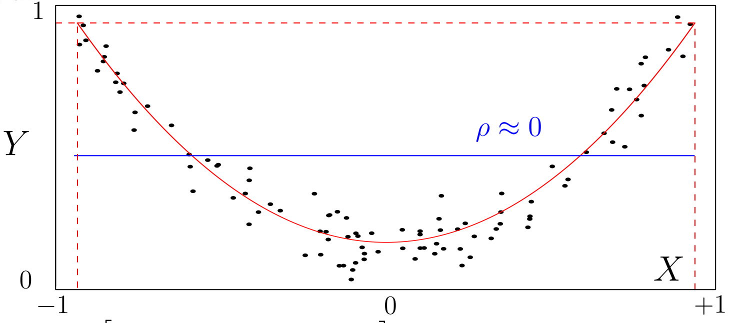
$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$



$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1)$$

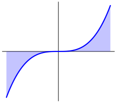
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X-\mathbb{E}[X]\big)\big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$

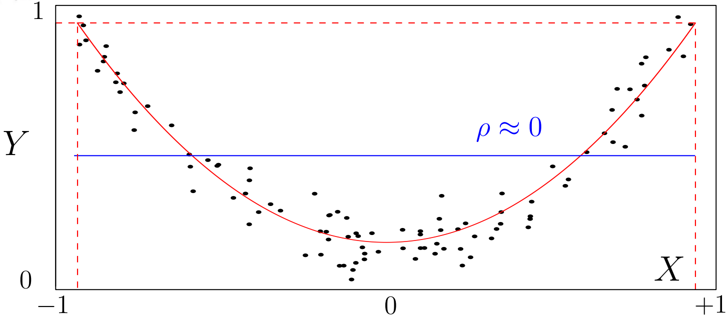


$$\mathbb{P}(X=1|Y=1) = \frac{1}{2}$$

Corrélation vs. dépendance

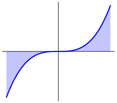
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X-\mathbb{E}[X]\big)\big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

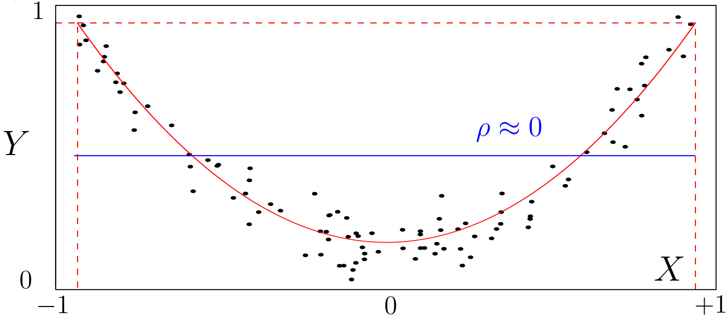
$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$



$$\mathbb{P}(X=1|Y=1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(X=1)$$

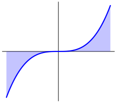
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X-\mathbb{E}[X]\big)\big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

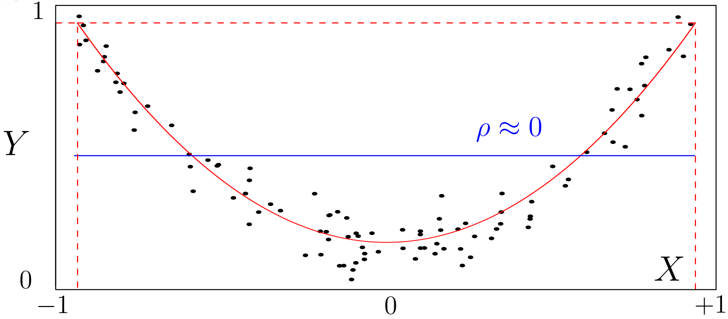
$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$ décorrélation



$$\mathbb{P}(X=1|Y=1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(X=1)$$

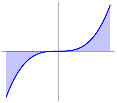
La corrélation ne mesure que la dépendance linéaire

Contre-exemple : $X \sim \mathcal{U}([-1,+1])$ et $Y = X^2$



$$\rho_{XY} \propto \mathbb{E}\Big[\big(X-\mathbb{E}[X]\big)\big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)\Big] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0$$ décorrélation



$$\mathbb{P}(X=1|Y=1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(X=1)$$ dépendance

Encore un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, ...X_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de n variables aléatoires réelles. On a $\mathbb{V}[X_i] = \text{Cov}(X_i, X_i)$. On peut donc former une matrice $\Sigma_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de terme général $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}$$

Encore un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, ...X_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de n variables aléatoires réelles. On a $\mathbb{V}[X_i] = \text{Cov}(X_i, X_i)$. On peut donc former une matrice $\Sigma_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de terme général $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}$$

Propagation d'incertitudes

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de covariance $\Sigma_{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors, la matrice de covariance de $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ est :

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{Y}}\mathbf{A}^T$$

Encore un peu de multivarié...

Soit $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, ...X_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de n variables aléatoires réelles. On a $\mathbb{V}[X_i] = \text{Cov}(X_i, X_i)$. On peut donc former une matrice $\Sigma_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de terme général $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}[X_2] & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \mathbb{V}[X_n] \end{pmatrix}$$

Propagation d'incertitudes

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de covariance $\Sigma_{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors, la matrice de covariance de $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ est :

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{Y}}\mathbf{A}^T$$

Preuve : aucun souci en partant de la définition $\Sigma_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\Big[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T\Big]$...

- Montrer que : $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X,Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X-Y]$?

Exercices : propagation d'incertitudes

- Montrer que : $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X,Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X-Y]$?

- A l'issue d'un examen, un étudiant reçoit 5 notes (sur 20 points) : mathématiques (coeff 12), physique-chimie (coeff 7), informatique (coeff 7), français (coeff 4) et anglais (coeff 2).

Exercices : propagation d'incertitudes

- Montrer que : $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X,Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X-Y]$?

- A l'issue d'un examen, un étudiant reçoit 5 notes (sur 20 points) : mathématiques (coeff 12), physique-chimie (coeff 7), informatique (coeff 7), français (coeff 4) et anglais (coeff 2).

  On suppose que l'écart-type de l'erreur d'évaluation de chaque copie est de 3 points. Par ailleurs un seul et même évaluateur corrige les copies de mathématiques et d'informatique, ce que nous modéliserons par une corrélation ($\rho = 50\%$) des erreurs d'évaluation sur ces deux épreuves.

- Montrer que : $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X,Y)$. Quid de $\mathbb{V}[X-Y]$?

- A l'issue d'un examen, un étudiant reçoit 5 notes (sur 20 points) : mathématiques (coeff 12), physique-chimie (coeff 7), informatique (coeff 7), français (coeff 4) et anglais (coeff 2).

  On suppose que l'écart-type de l'erreur d'évaluation de chaque copie est de 3 points. Par ailleurs un seul et même évaluateur corrige les copies de mathématiques et d'informatique, ce que nous modéliserons par une corrélation ($\rho = 50\%$) des erreurs d'évaluation sur ces deux épreuves.

  Calculer l'incertitude sur la moyenne de l'étudiant. Qu'en est-t-il si on suppose à présent les corrections indépendantes.

$Z = X + Y = (1\ 1)\mathbf{X}$ avec $\mathbf{X} = (X, Y)^T$.

Exercices : propagation d'incertitudes (correction)

$Z = X + Y = (1\ 1)\mathbf{X}$ avec $\mathbf{X} = (X, Y)^T$.

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \mathrm{Cov(X,Y)} \\ \mathrm{Cov(X,Y)} & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$Z = X + Y = (1\ 1)\mathbf{X}$ avec $\mathbf{X} = (X, Y)^T$.

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov(X,Y)} \\ \text{Cov(X,Y)} & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$Z = X - Y = (+1\ \ -1)\mathbf{X}$ avec $\mathbf{X} = (X, Y)^T$.

$Z = X + Y = (1\ 1)\mathbf{X}$ avec $\mathbf{X} = (X, Y)^T$.

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov(X,Y)} \\ \text{Cov(X,Y)} & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$Z = X - Y = (+1\ \ -1)\mathbf{X}$ avec $\mathbf{X} = (X, Y)^T$.

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X] & \text{Cov(X,Y)} \\ \text{Cov(X,Y)} & \mathbb{V}[Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\text{Cov}(X, Y)$$

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec $\mathbf{X}$ le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec $\mathbf{X}$ le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec $\mathbf{X}$ le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

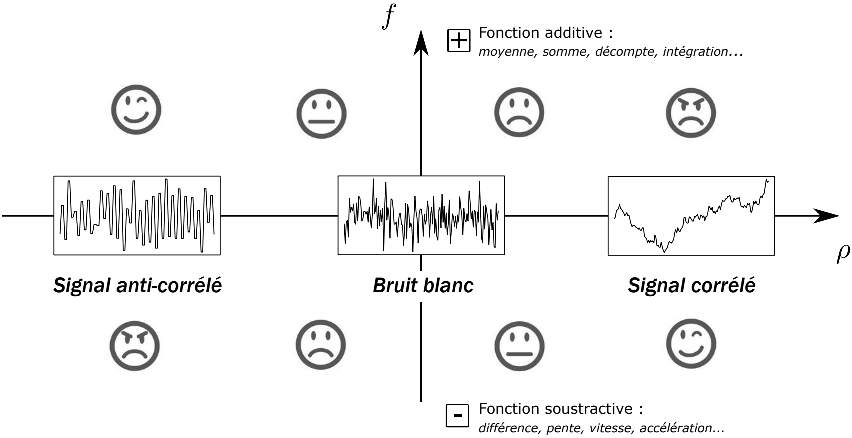
$$\mathsf{Var}[\mu] = \frac{1}{32^2}\mathbf{A}\Sigma_X\mathbf{A}^T = 3.04$$

En notant $\mathbf{A} = [12, 7, 7, 4, 2]$ le vecteur des coefficients, on exprime sous forme matricielle la moyenne de l'étudiant : $\mu = \frac{1}{32}\mathbf{AX}$, avec $\mathbf{X}$ le vecteur aléatoire des notes obtenues, de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Var}[\mu] = \frac{1}{32^2}\mathbf{A}(9I_5)\mathbf{A}^T = \frac{9}{32^2}\mathbf{AA}^T = 2.30$$

Impact de la corrélation des inputs



Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ?

Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ? Soit f une fonction scalaire non-linéaire, et X une variable aléatoire de variance $\mathbb{V}[X]$.

Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ? Soit f une fonction scalaire non-linéaire, et X une variable aléatoire de variance $\mathbb{V}[X]$.

$$f(X) \approx f(a)+f'(a)(X-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2}(X-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\big[f(X)\big] &\approx \mathbb{V}\big[f(a)+f'(a)(X-a)\big] \\
&= \mathbb{V}\big[f(a)\big] + f'(a)^2\mathbb{V}[X-a] \\
&= f'(a)^2\mathbb{V}[X]
\end{aligned}$$

Propagation d'incertitudes : cas général

Que faire lorsque l'application n'est pas linéaire ? Soit f une fonction scalaire non-linéaire, et X une variable aléatoire de variance $\mathbb{V}[X]$.

$$f(X) \approx f(a)+f'(a)(X-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2}(X-a)^2+ \ldots +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\big[f(X)\big] &\approx \mathbb{V}\big[f(a) + f'(a)(X-a)\big] \\ &= \mathbb{V}\big[f(a)\big] + f'(a)^2\mathbb{V}[X-a] \\ &= f'(a)^2\mathbb{V}[X]\end{aligned}$$

Exemple : prenons le cas de $f : x \mapsto x^2$, et supposons que l'on travaille au voisinage de $a = 1$. On a alors :

$$\mathbb{V}[X^2] = (2a)^2\mathbb{V}[X] = 4\mathbb{V}[X]$$

Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ...f_m$ sont les composantes de f.

Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ... f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$

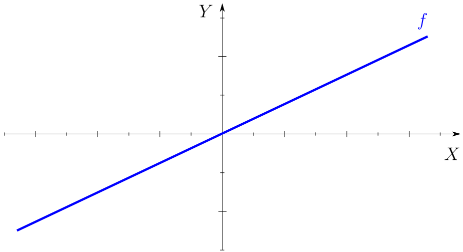
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ...f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



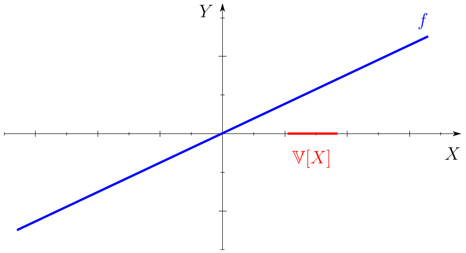
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, \dots f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



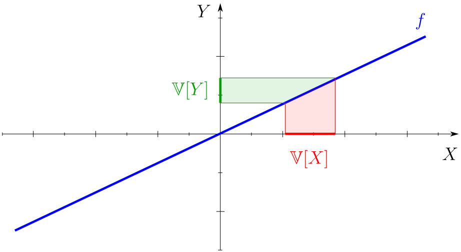
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ...f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



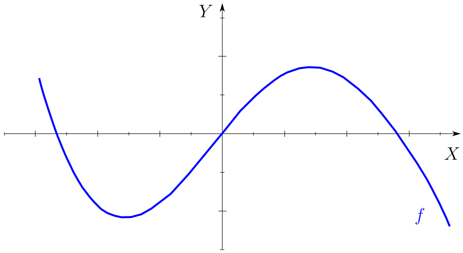
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ... f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



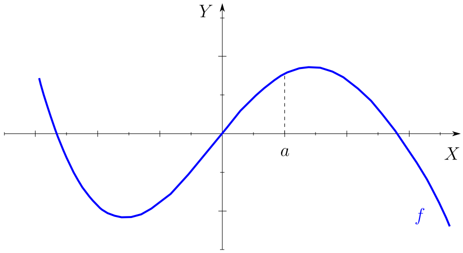
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ...f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



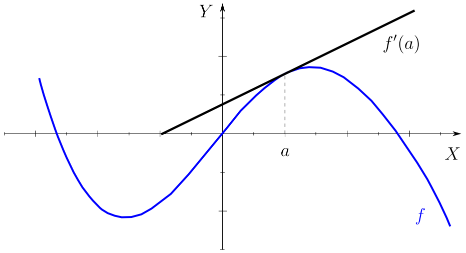
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, ... f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$

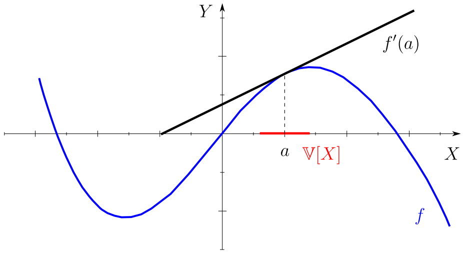


Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, \ldots f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



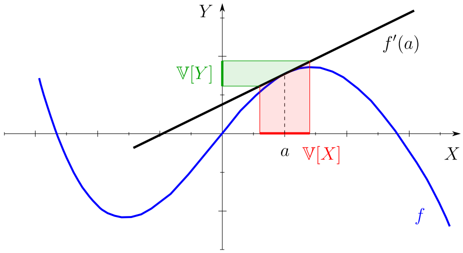
Propagation d'incertitudes : cas général

Pour $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{J}$ est la matrice jacobienne de terme général $(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $f_1, f_2, \ldots f_m$ sont les composantes de f.

Loi de propagation des variances

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, une fonction régulière de matrice jacobienne $\mathbf{J}$ et $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ_X :

$$\Sigma_{f(\mathbf{X})} = \mathbf{J}\Sigma_X\mathbf{J}^T$$



Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.

Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.

- **Etape 2 :** repérer dans F, la liste des grandeurs entâchées d'incertitudes : $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ...x_n)$.

Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.
- **Etape 2 :** repérer dans F, la liste des grandeurs entâchées d'incertitudes : $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ...x_n)$.
- **Etape 3 :** pour chaque grandeur x_i évaluer son écart-type σ_i (en considérant la nature de l'incertitude)

Méthode de propagation des variances : méthodologie

- **Etape 1 :** écrire l'expression analytique F des grandeurs à calculer.
- **Etape 2 :** repérer dans F, la liste des grandeurs entâchées d'incertitudes : $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ...x_n)$.
- **Etape 3 :** pour chaque grandeur x_i évaluer son écart-type σ_i (en considérant la nature de l'incertitude)
- **Etape 4 :** étudier les corrélations potentielles entre variables et les évaluer (si non négligeables) : Cov$(x_i, x_j) \quad \forall\ (i, j) \quad i \neq j$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\mathbf{\Sigma_X}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \mathrm{Cov}(x_i, x_j)$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\mathbf{\Sigma_X}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \mathsf{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en $\mathbf{X}$, si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{X})$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\mathbf{\Sigma_X}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en $\mathbf{X}$, si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{X})$
- **Etape 7 :** propager les variances avec : $\mathbf{\Sigma_F} = \mathbf{J\Sigma_X J}^t$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\mathbf{\Sigma_X}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \mathrm{Cov}(x_i, x_j)$

- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en $\mathbf{X}$, si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{X})$

- **Etape 7 :** propager les variances avec : $\mathbf{\Sigma_F} = \mathbf{J\Sigma_X J}^t$

- **Etape 8 :** récupérer les écart-types : $\sigma(F_i) = \sqrt{\mathbf{\Sigma_F}_{ii}}$

Méthode de propagation des variances : méthodologie (suite)

- **Etape 5 :** former la matrice de variances-covariances des entrées $\mathbf{\Sigma_X}$: $(\Sigma_X)_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$
- **Etape 6 :** calculer la matrice jacobienne de F en $\mathbf{X}$, si besoin par dérivation numérique : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{X})$
- **Etape 7 :** propager les variances avec : $\mathbf{\Sigma_F} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma_X}\mathbf{J}^t$
- **Etape 8 :** récupérer les écart-types : $\sigma(F_i) = \sqrt{\mathbf{\Sigma_F}_{ii}}$
- **Etape 9 :** dériver des intervalles de confiance $F_i(\mathbf{X}) \pm k\sigma(F_i)$ et calculer des probabilités de dépassement de seuil.

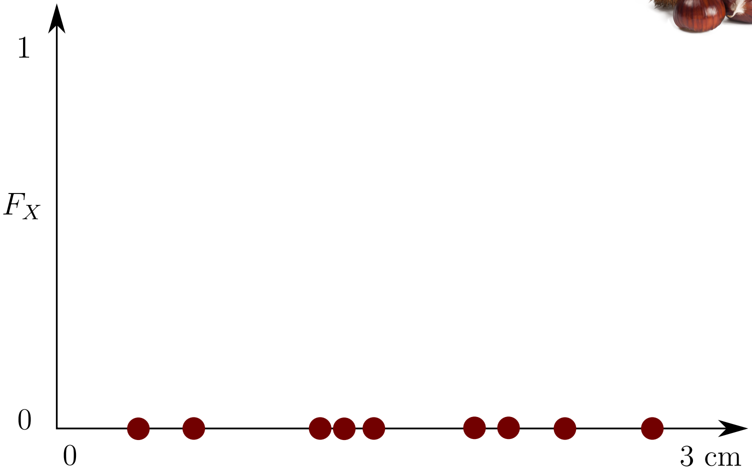
Aspects numériques

- *inférence*
- *simulations*

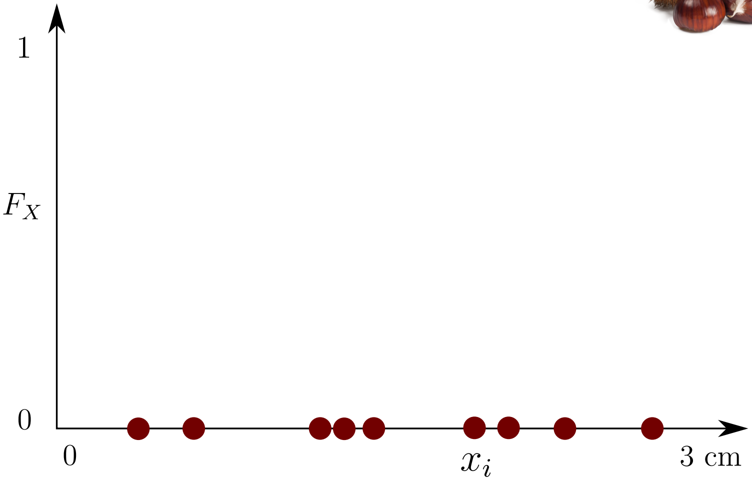
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

Inférence : fonction de répartition

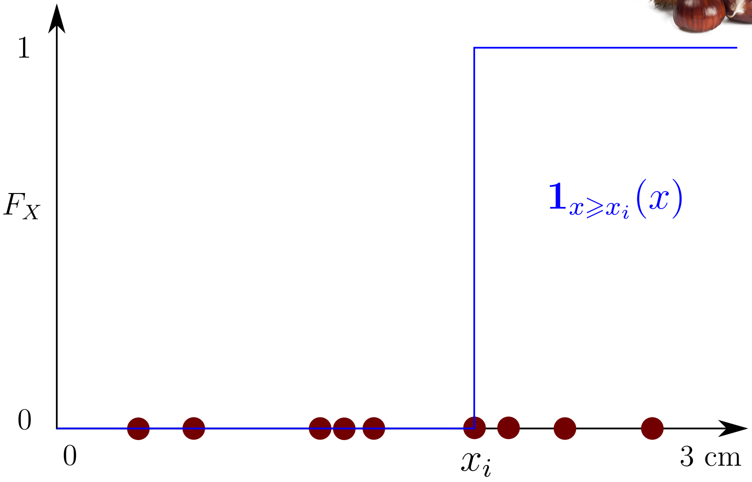
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



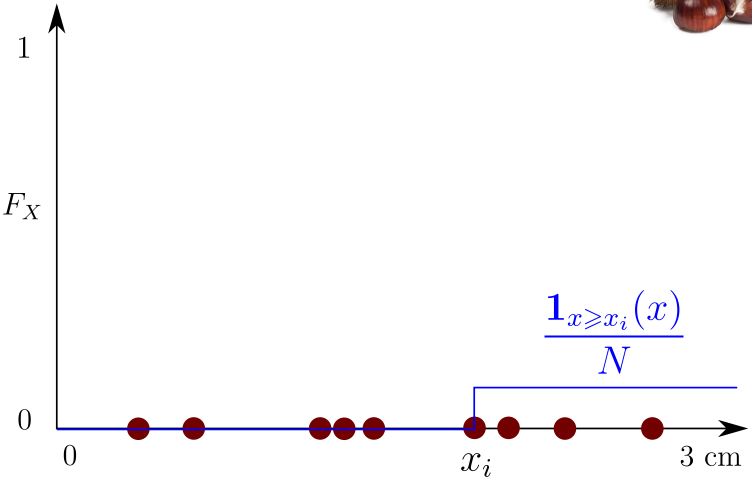
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

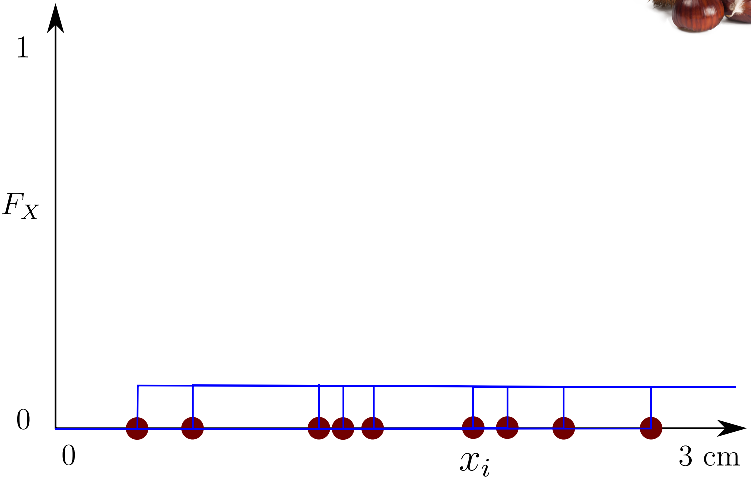


X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



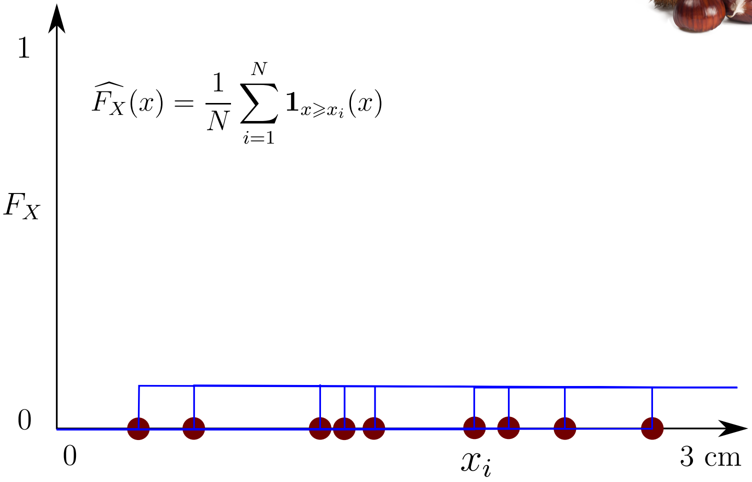
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



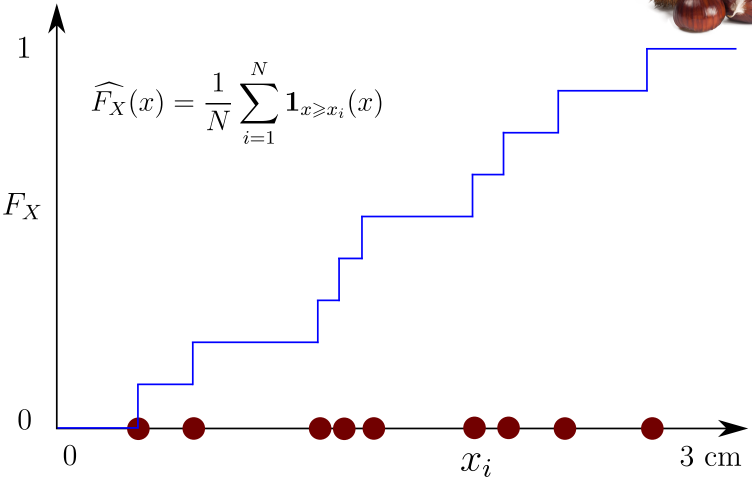
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$



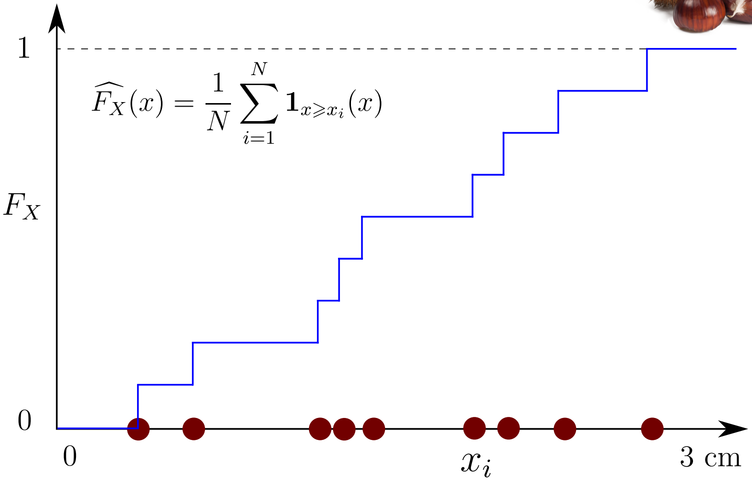
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

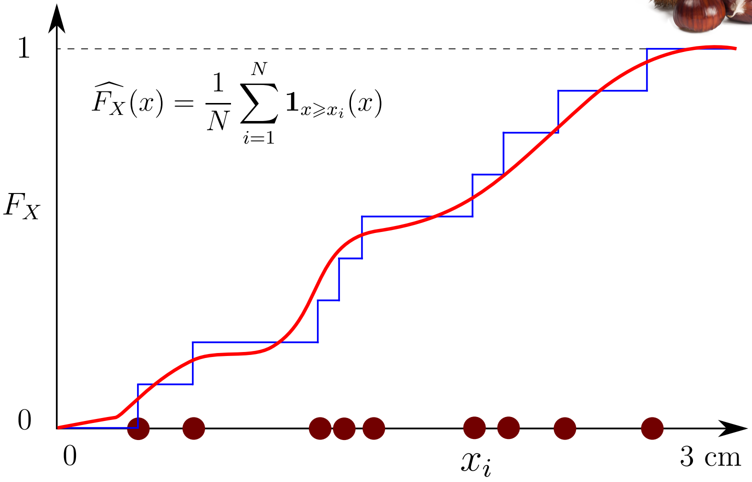


Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



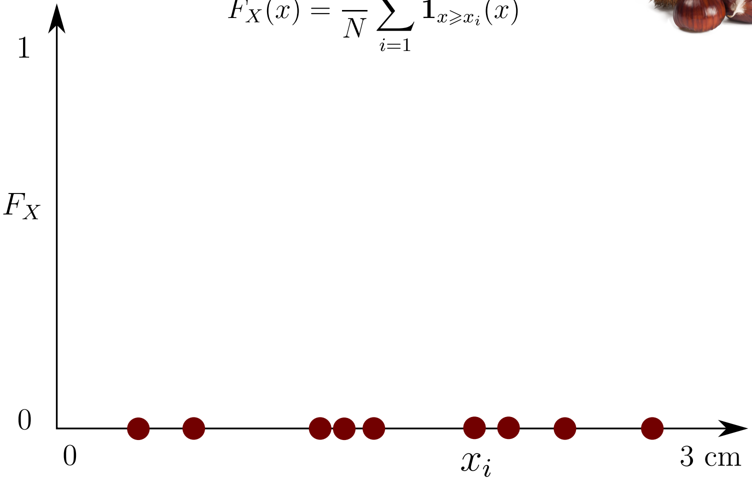
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

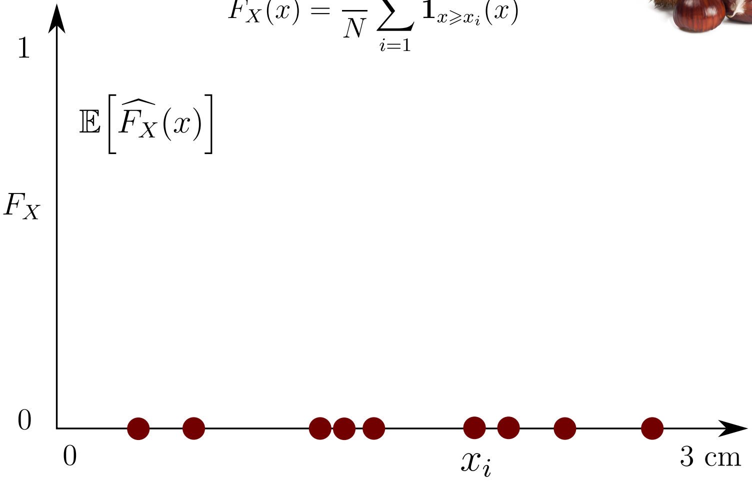
$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$



Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

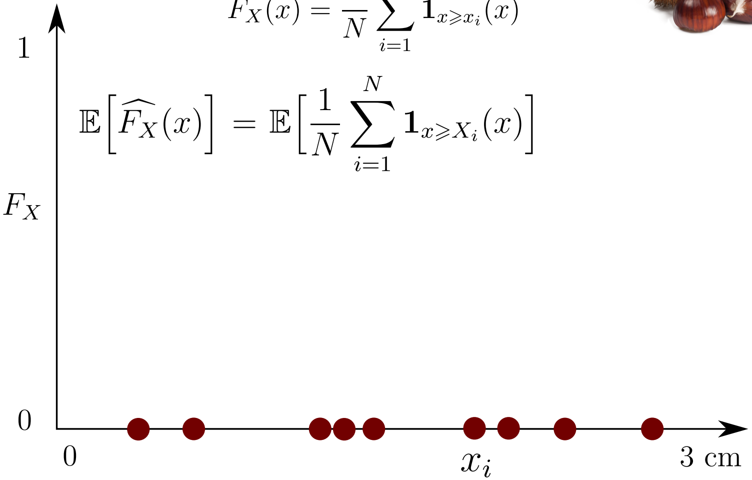
$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$



X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right]$$



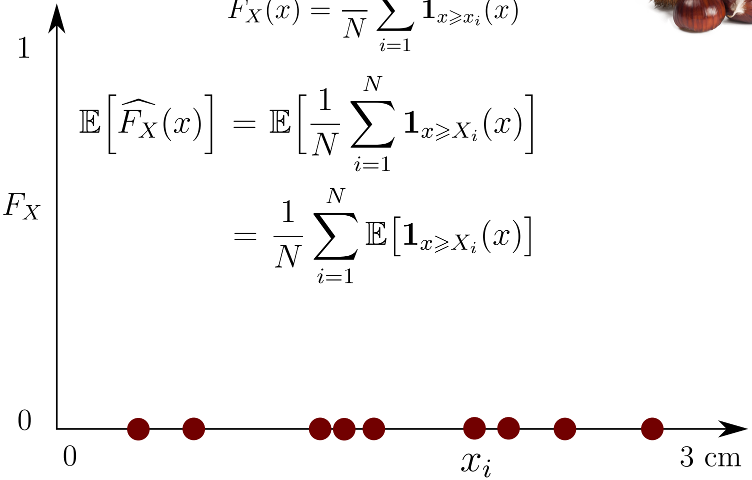
Inférence : fonction de répartition

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right]$$

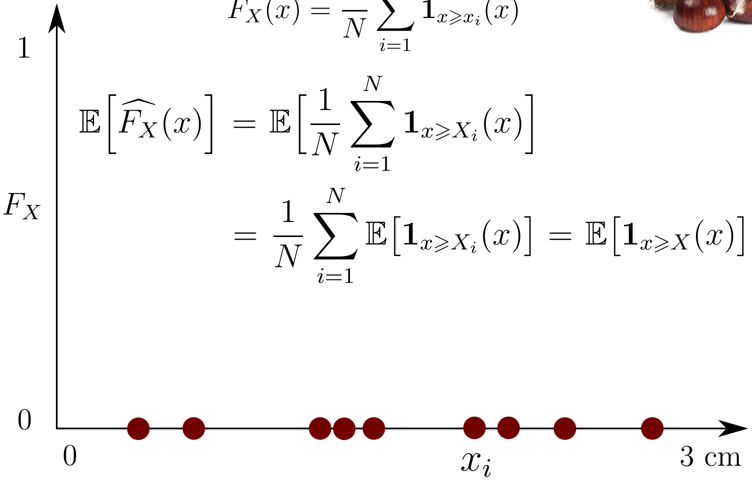


X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X}(x)\right]$$



X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X}(x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X \leqslant x}(x)\right]
\end{aligned}$$

1

F_X

0

0

x_i

3 cm

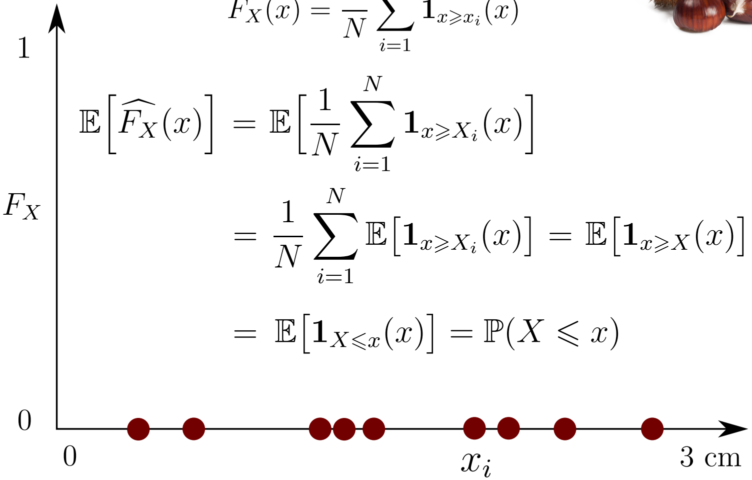
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X}(x)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X \leqslant x}(x)\right] = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$



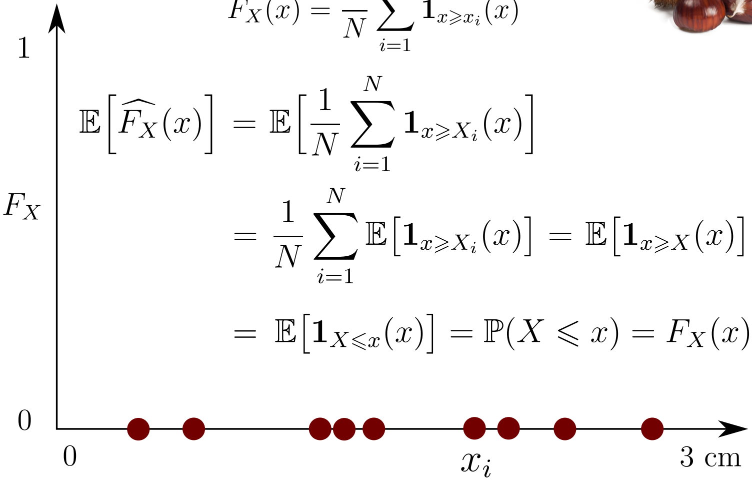
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X}(x)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X \leqslant x}(x)\right] = \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x)$$



X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant x_i}(x)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widehat{F_X}(x)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X_i}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{x \geqslant X}(x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X \leqslant x}(x)\right] = \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x)
\end{aligned}$$

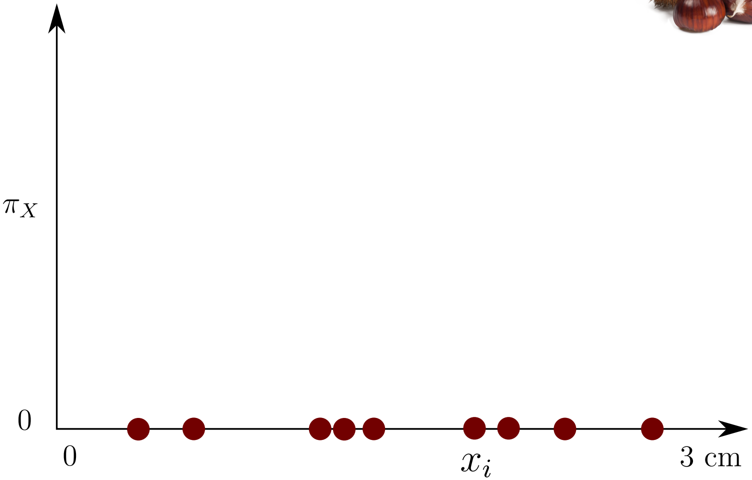
1

F_X

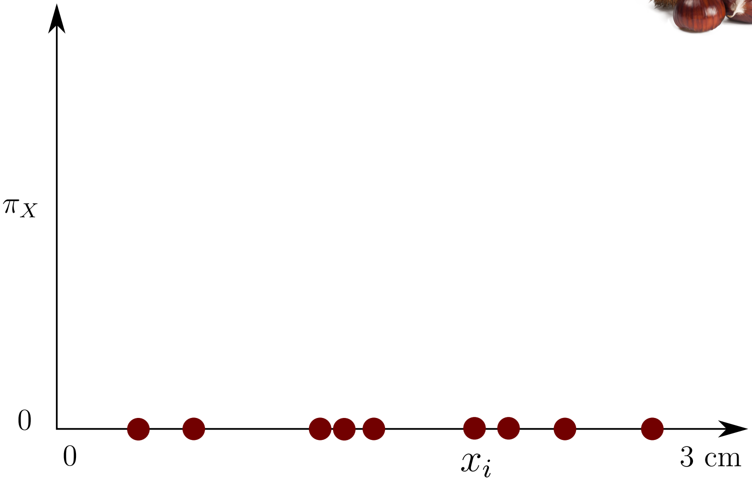
0

0 x_i 3 cm

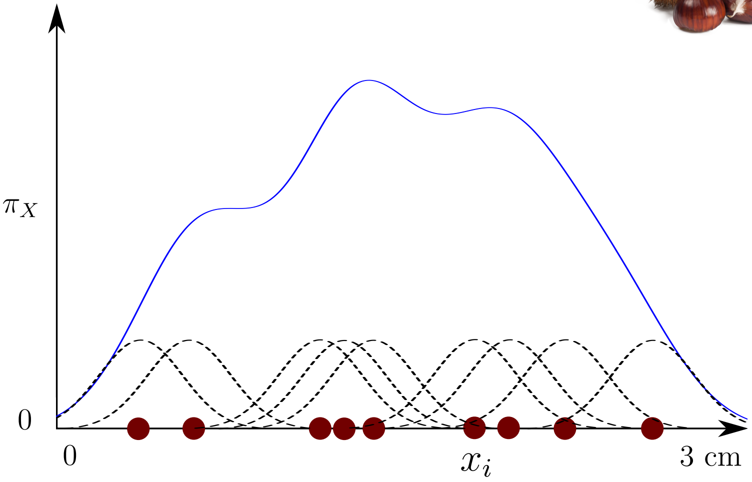
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



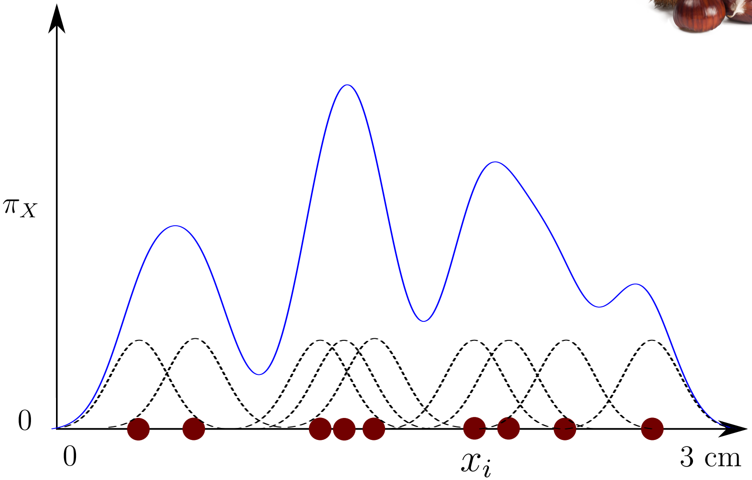
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne

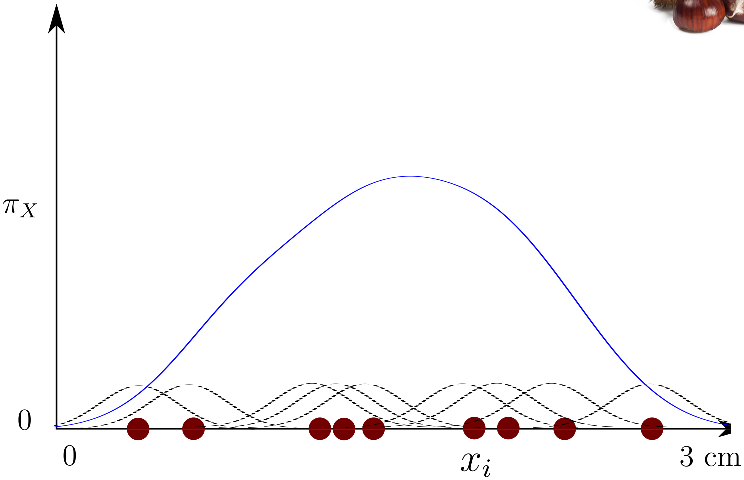


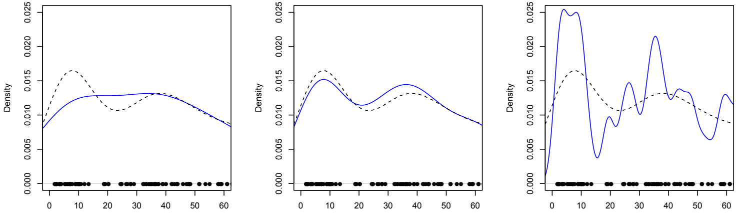
X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



Inférence : densité de probabilité

X : v.a. réelle représentant la taille d'une châtaigne



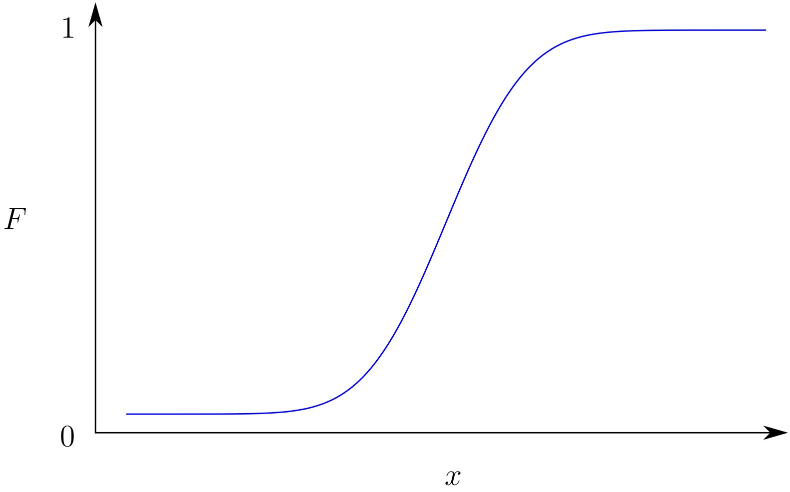


h = 12 m

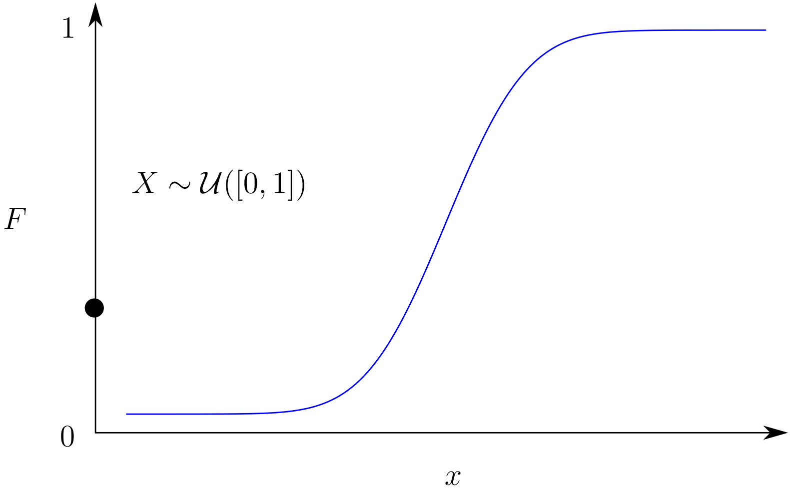
h* = 7.681 m

h = 2 m

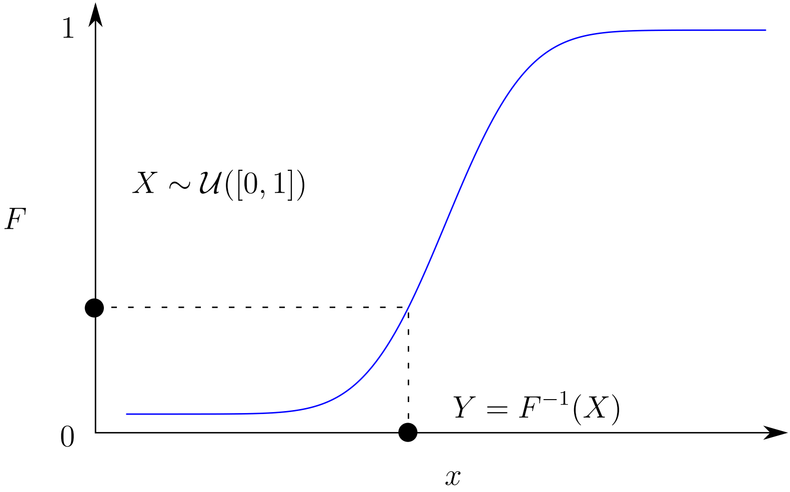
Simulation : fonction de répartition

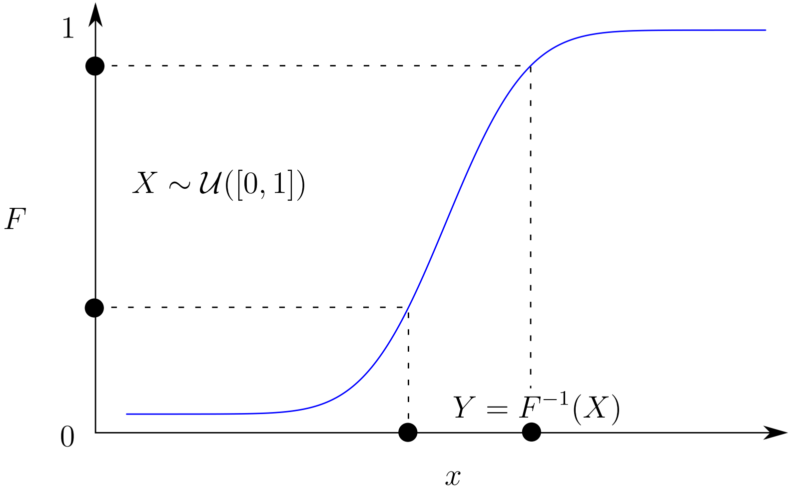


Simulation : fonction de répartition

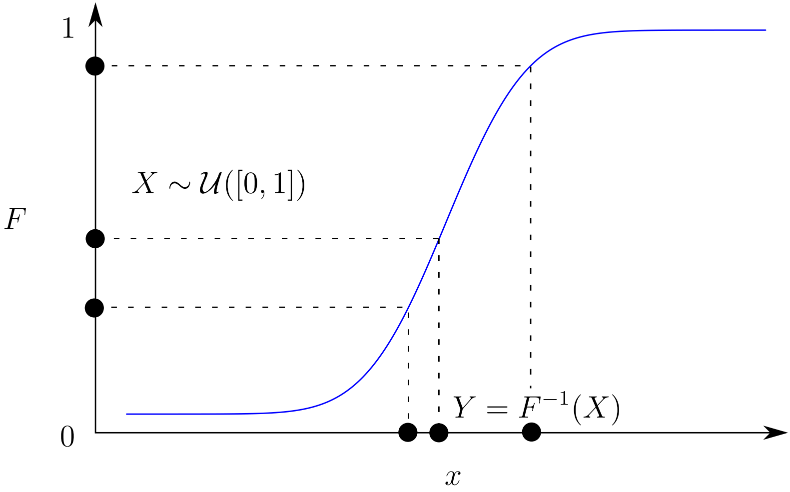


Simulation : fonction de répartition

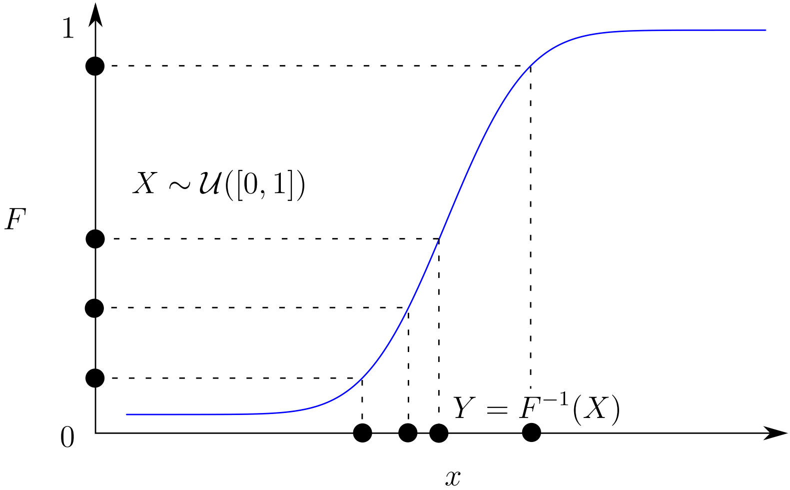



1
$X \sim \mathcal{U}([0,1])$
F
$Y = F^{-1}(X)$
0
x

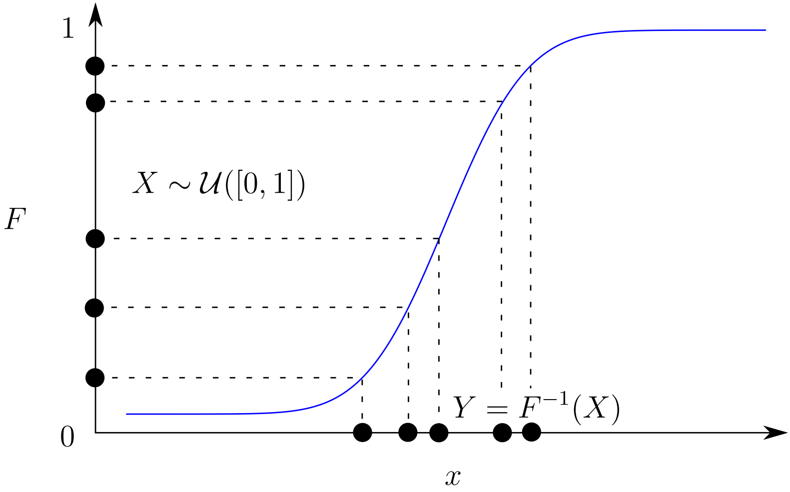
Simulation : fonction de répartition



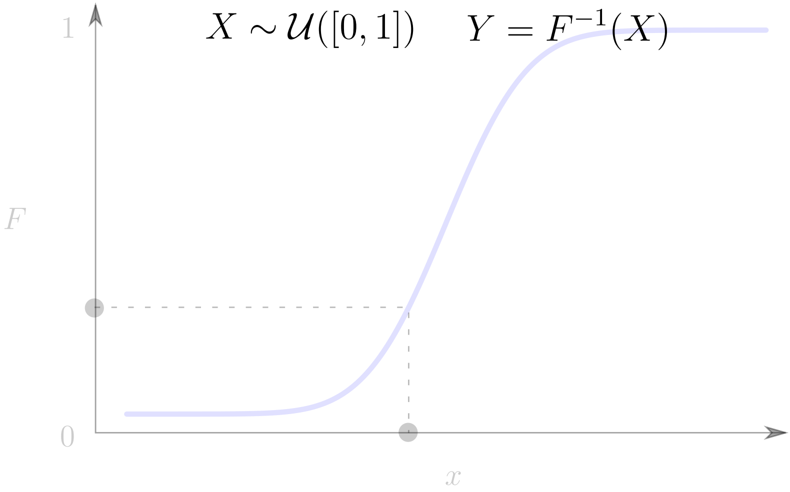
Simulation : fonction de répartition



Simulation : fonction de répartition

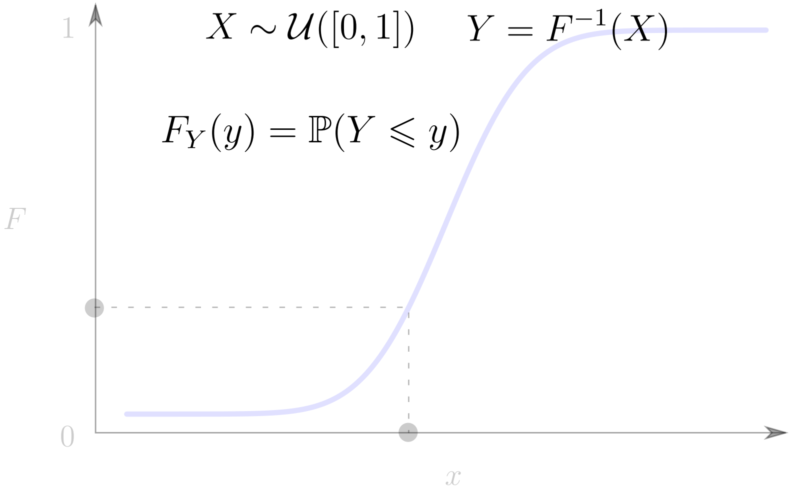


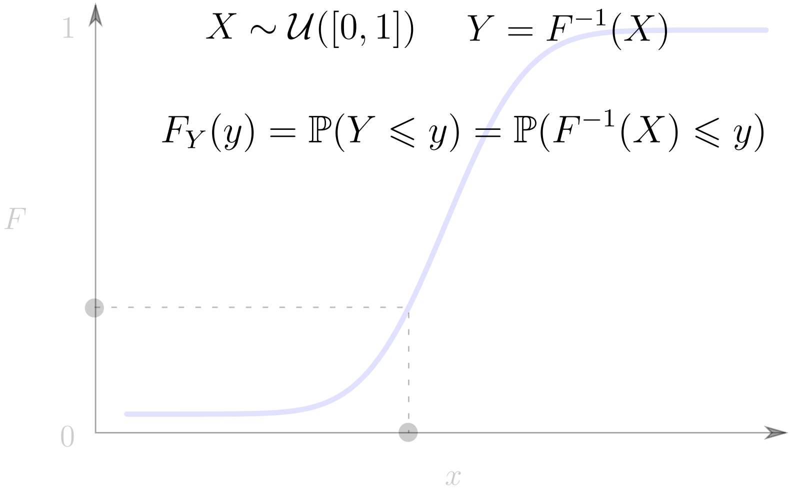
Simulation : fonction de répartition



$$X \sim \mathcal{U}([0,1]) \qquad Y = F^{-1}(X)$$

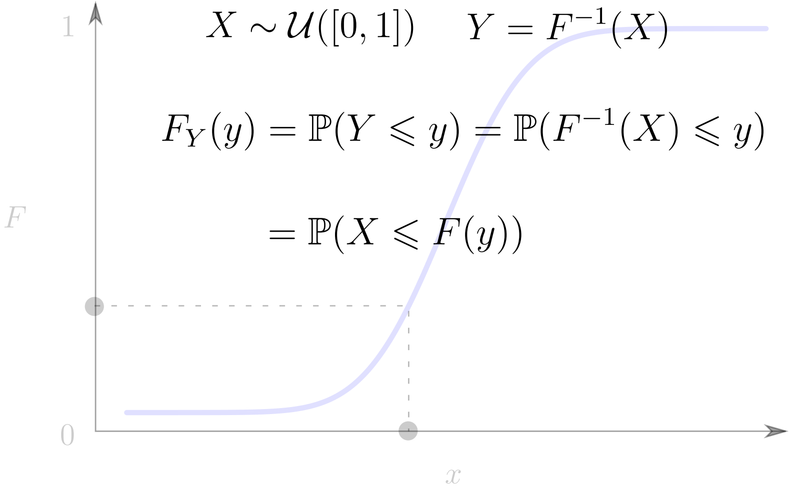
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y)$$





$$X \sim \mathcal{U}([0,1]) \qquad Y = F^{-1}(X)$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \leqslant y)$$



$$X \sim \mathcal{U}([0,1]) \qquad Y = F^{-1}(X)$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \leqslant y)$$

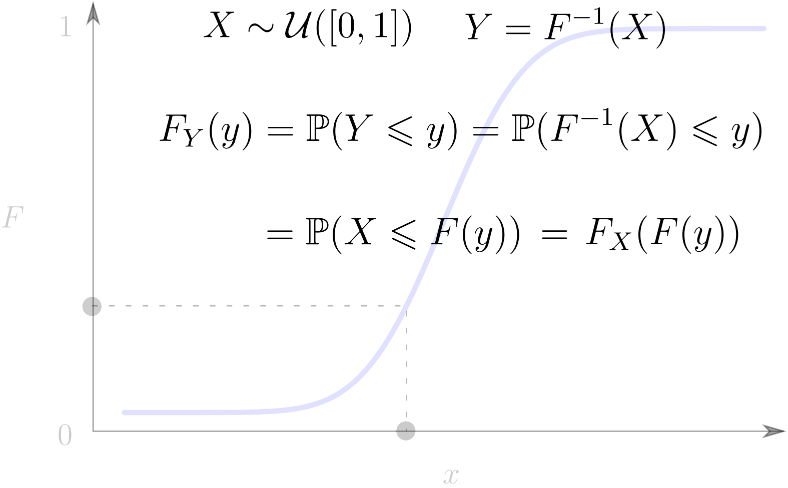
$$= \mathbb{P}(X \leqslant F(y))$$

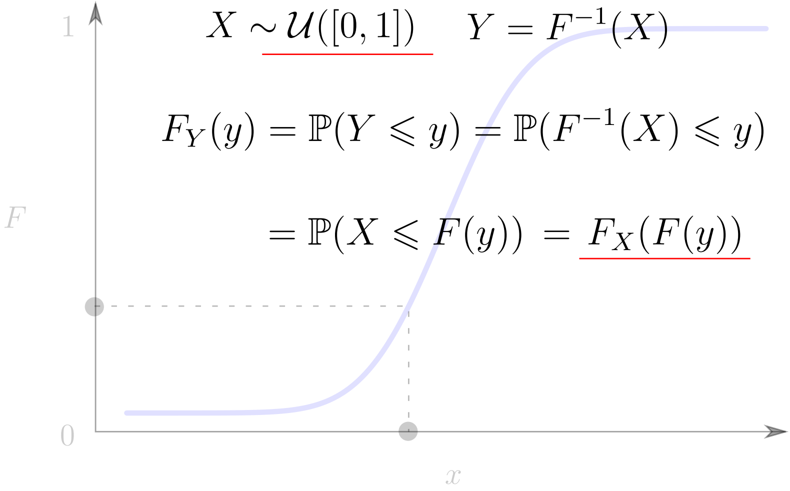
Simulation : fonction de répartition

$$X \sim \mathcal{U}([0,1]) \qquad Y = F^{-1}(X)$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \leqslant y)$$

$$= \mathbb{P}(X \leqslant F(y)) \; = \; F_X(F(y))$$

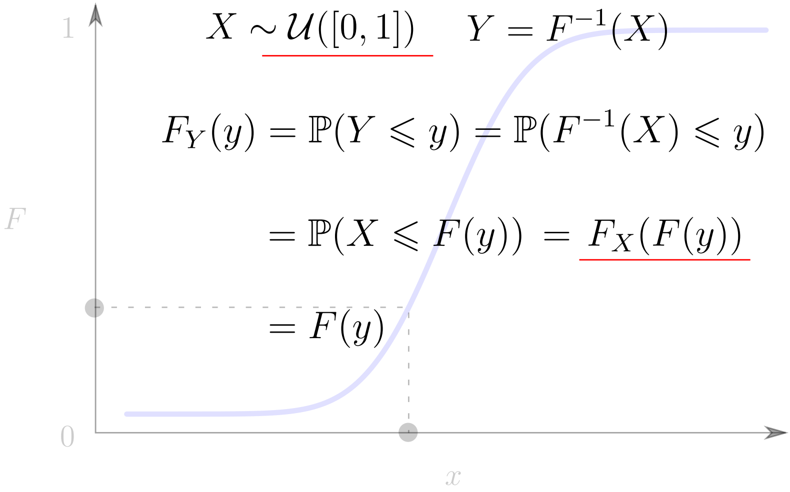




$$X \sim \underline{\mathcal{U}([0,1])} \qquad Y = F^{-1}(X)$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \leqslant y)$$

$$= \mathbb{P}(X \leqslant F(y)) = \underline{F_X(F(y))}$$



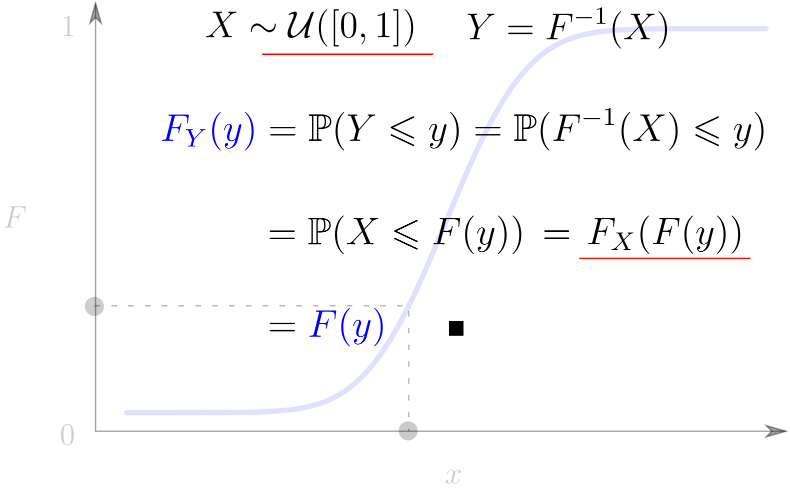
$$X \sim \underline{\mathcal{U}([0,1])} \qquad Y = F^{-1}(X)$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \leqslant y)$$

$$= \mathbb{P}(X \leqslant F(y)) = \underline{F_X(F(y))}$$

$$= F(y)$$

Simulation : fonction de répartition



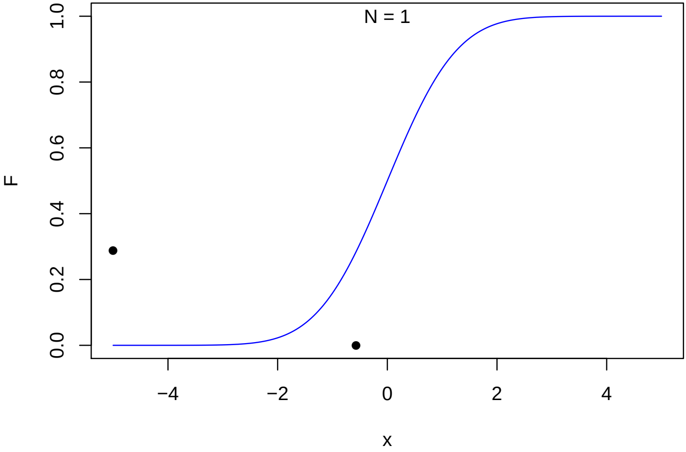
$$X \sim \underline{\mathcal{U}([0,1])} \qquad Y = F^{-1}(X)$$

$$\color{blue}{F_Y(y)} = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \leqslant y)$$

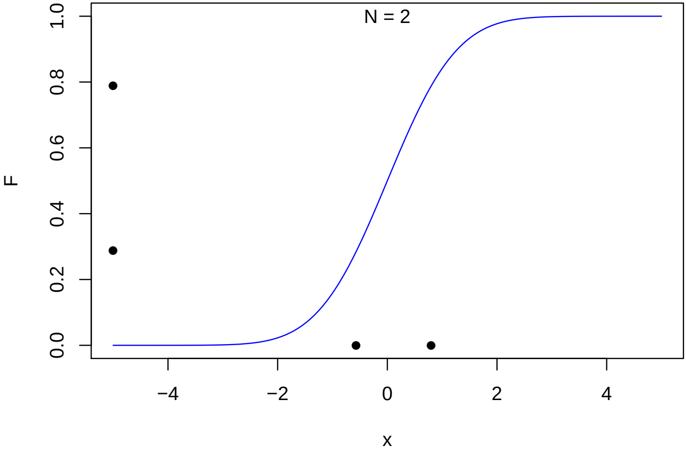
$$= \mathbb{P}(X \leqslant F(y)) = \underline{F_X(F(y))}$$

$$= \color{blue}{F(y)} \quad \blacksquare$$

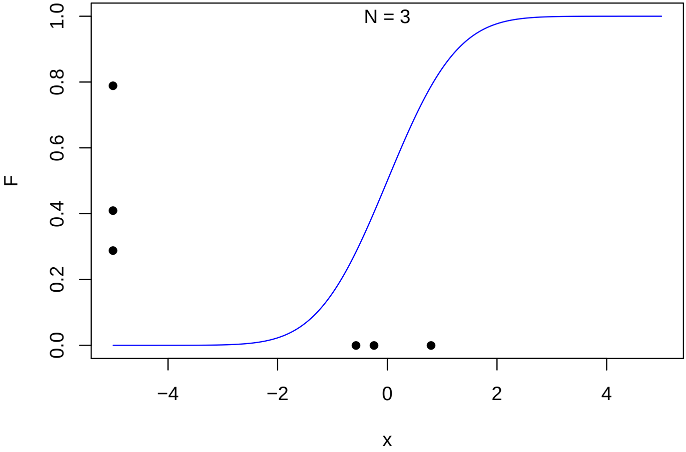
Simulation : fonction de répartition



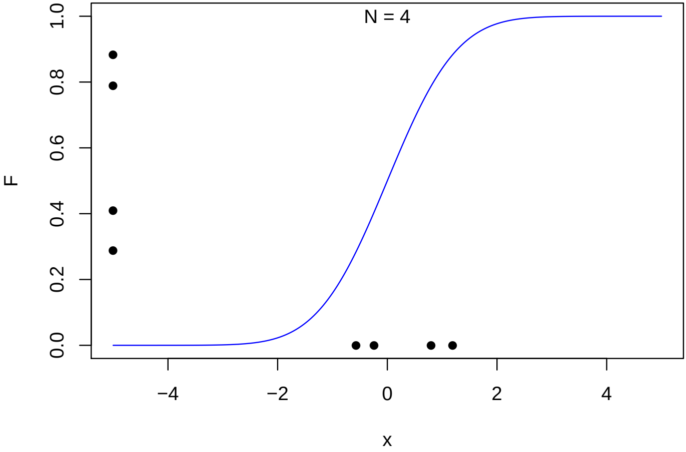
Simulation : fonction de répartition



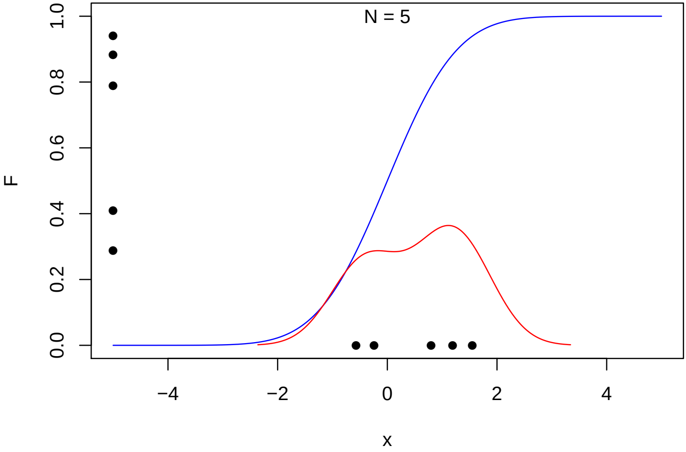
Simulation : fonction de répartition



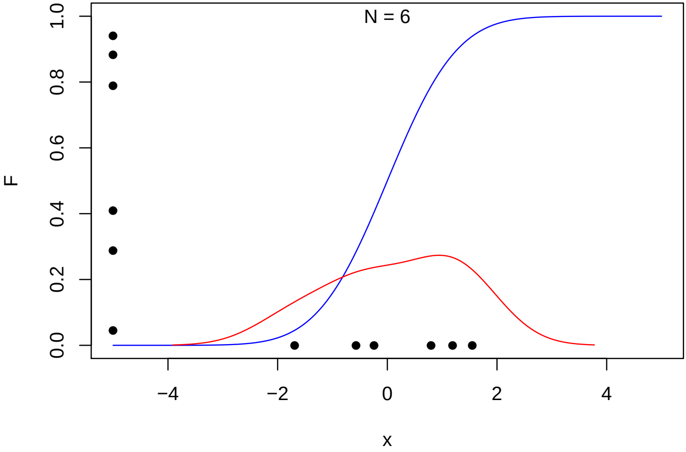
Simulation : fonction de répartition



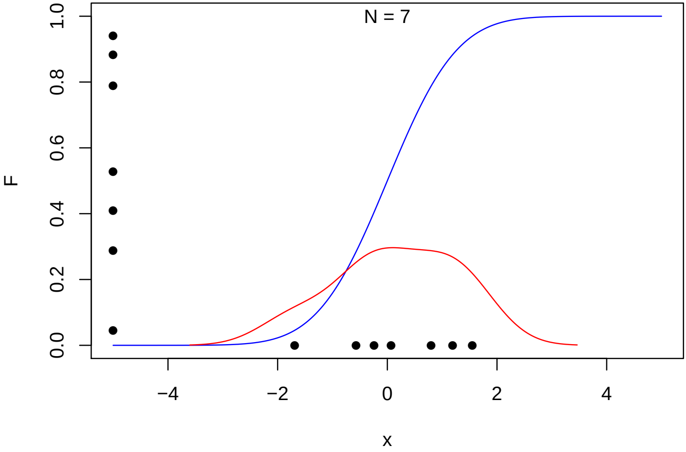
Simulation : fonction de répartition



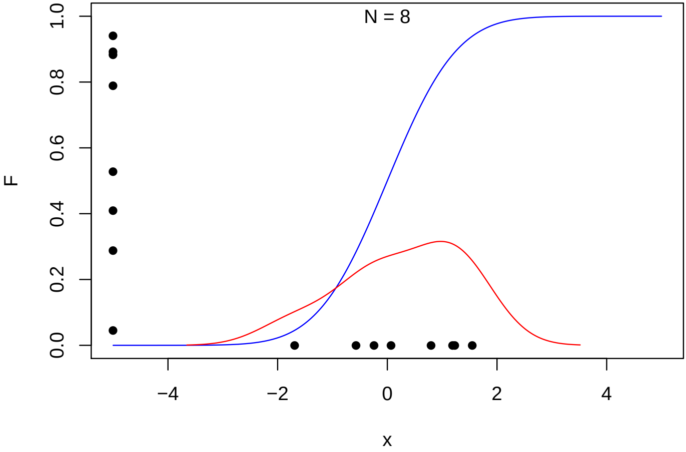
Simulation : fonction de répartition



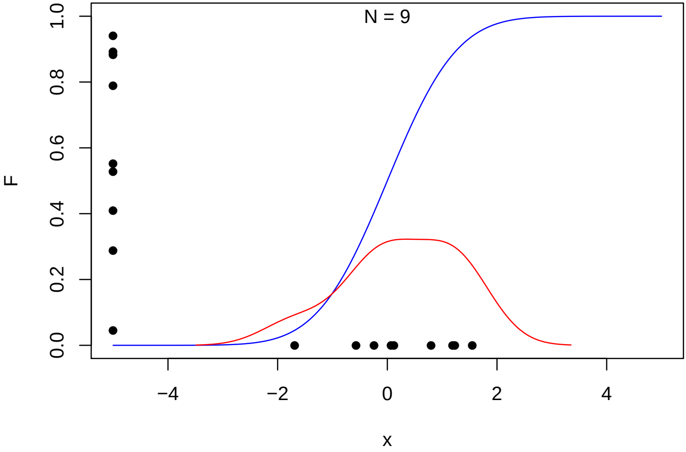
Simulation : fonction de répartition



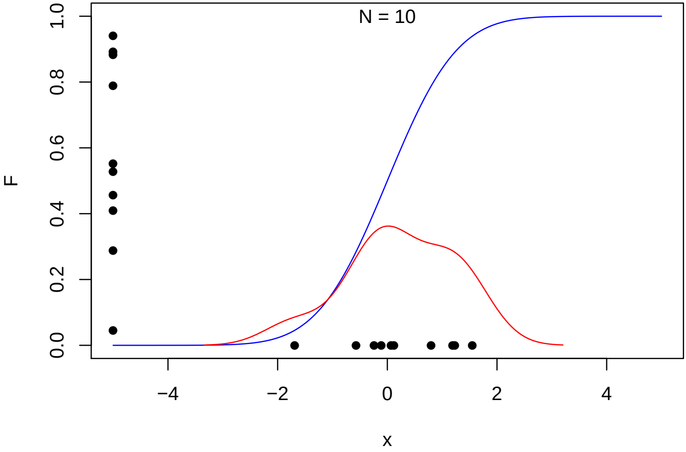
Simulation : fonction de répartition

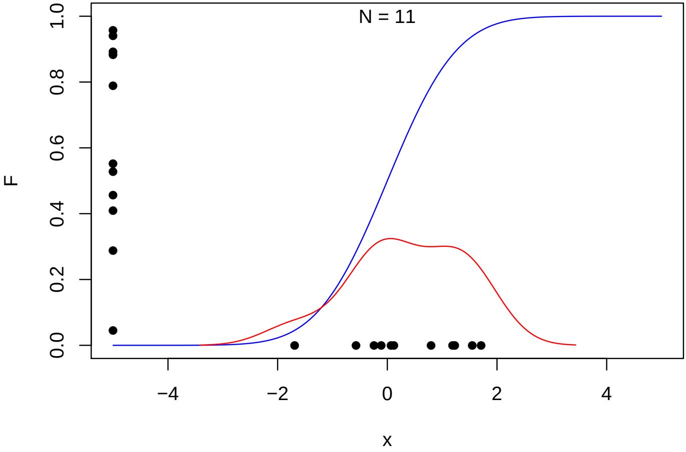


Simulation : fonction de répartition

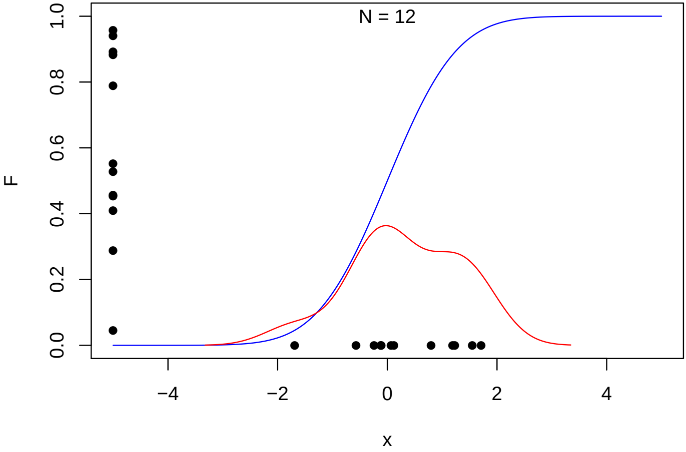


Simulation : fonction de répartition

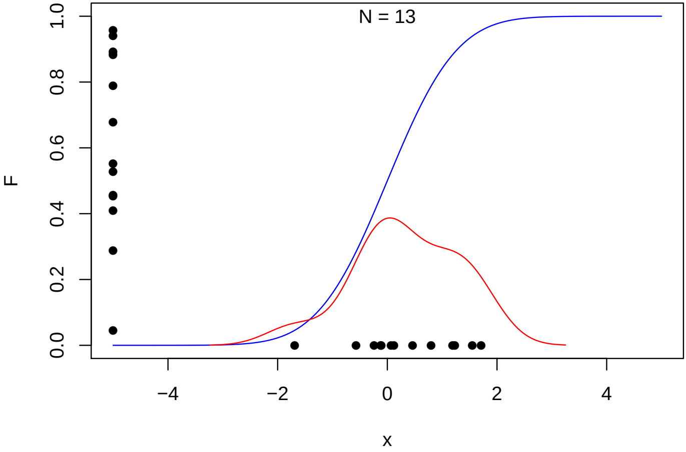



N = 11
F
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
x

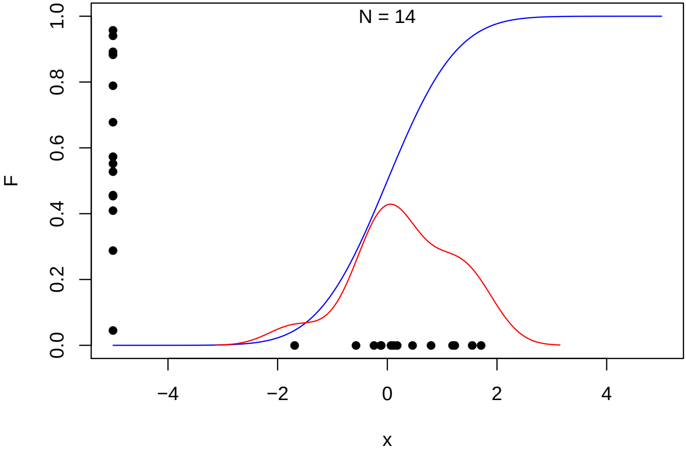
Simulation : fonction de répartition



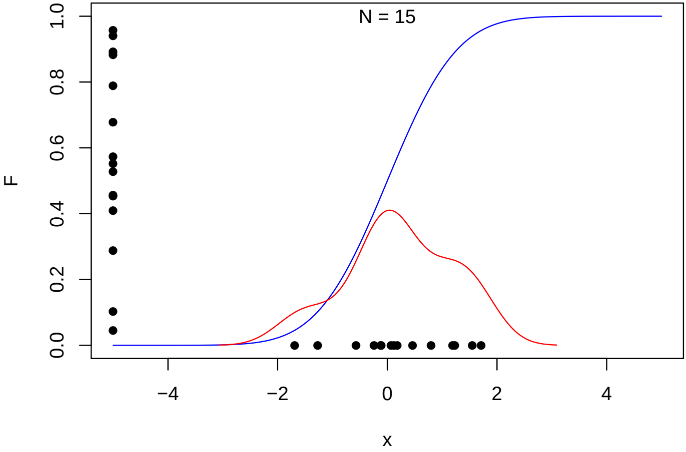
Simulation : fonction de répartition



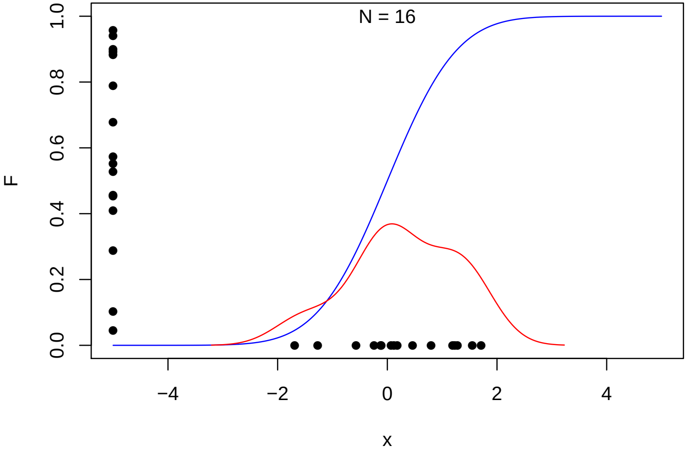
Simulation : fonction de répartition



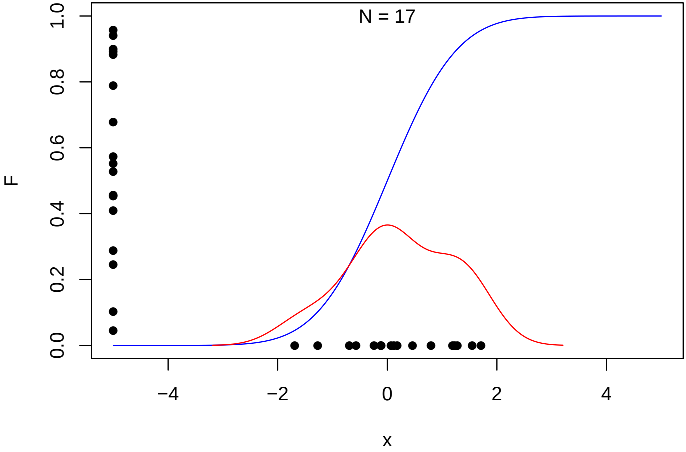
Simulation : fonction de répartition



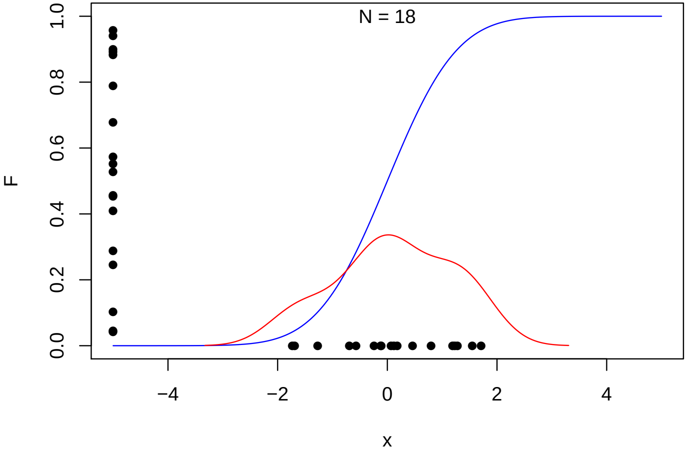
Simulation : fonction de répartition



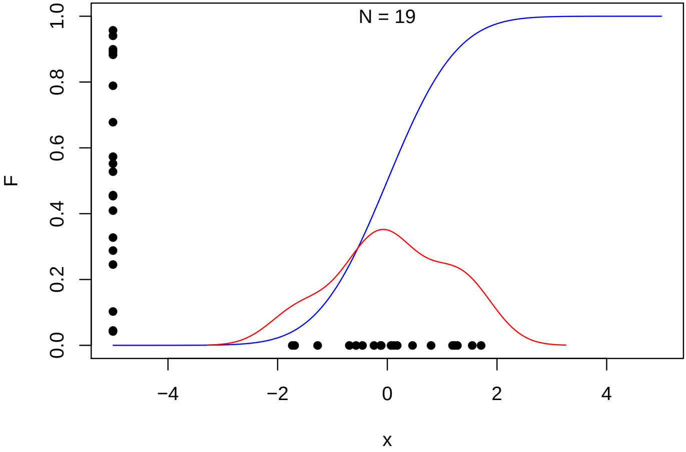
Simulation : fonction de répartition



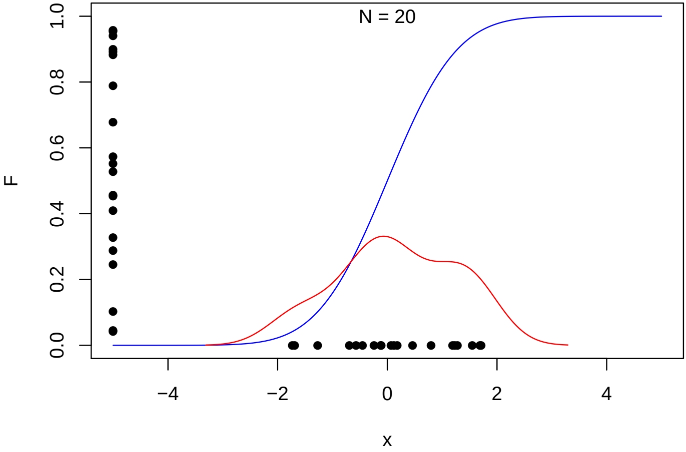
Simulation : fonction de répartition



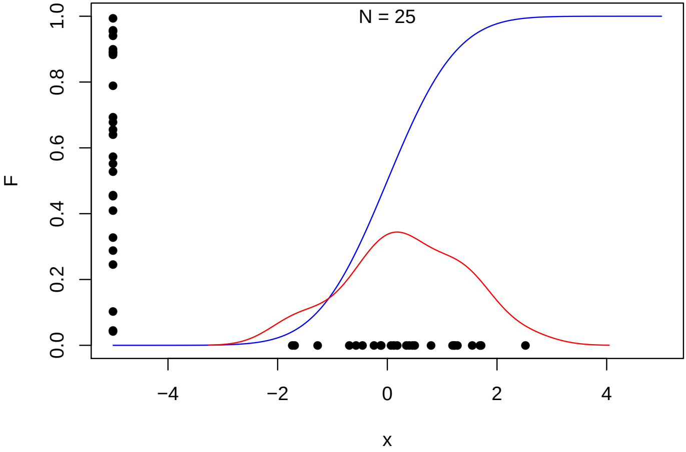
Simulation : fonction de répartition



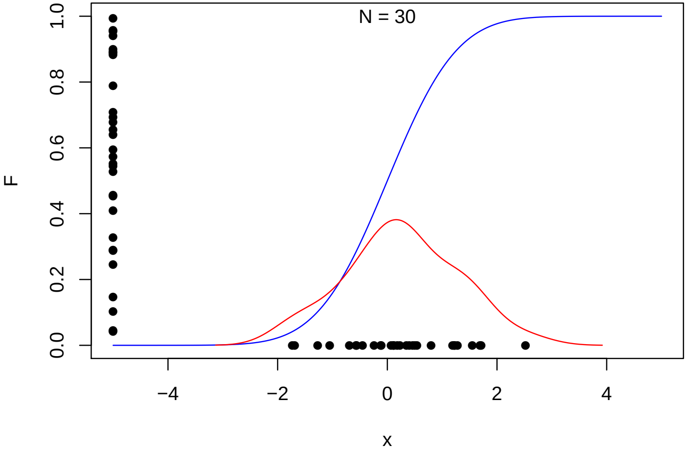
Simulation : fonction de répartition



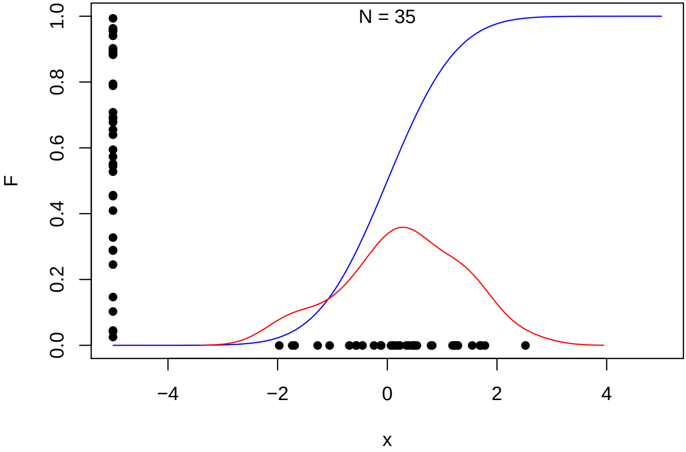
Simulation : fonction de répartition



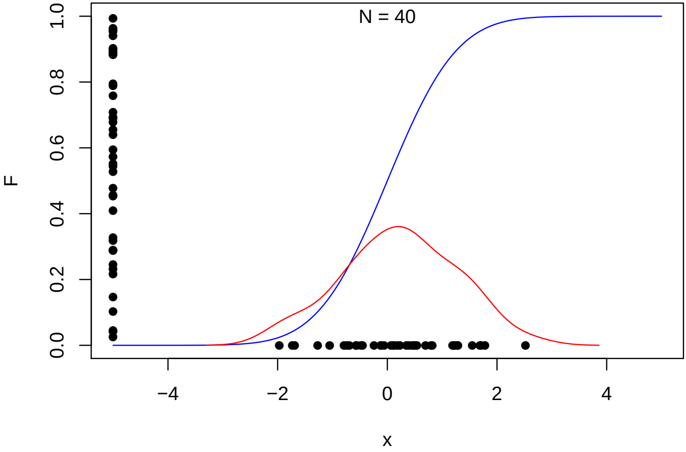
Simulation : fonction de répartition



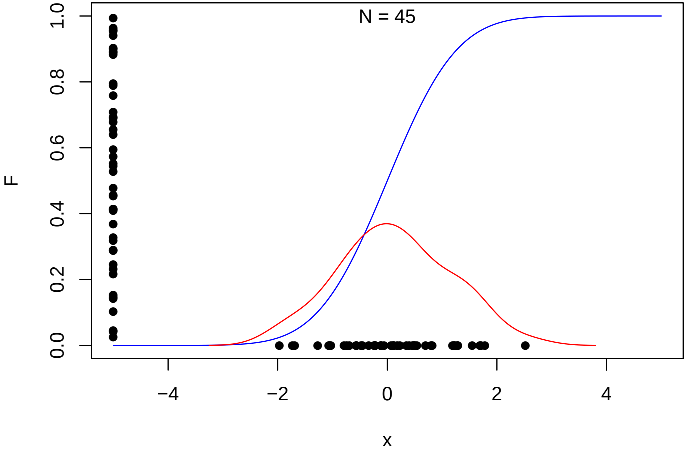
Simulation : fonction de répartition



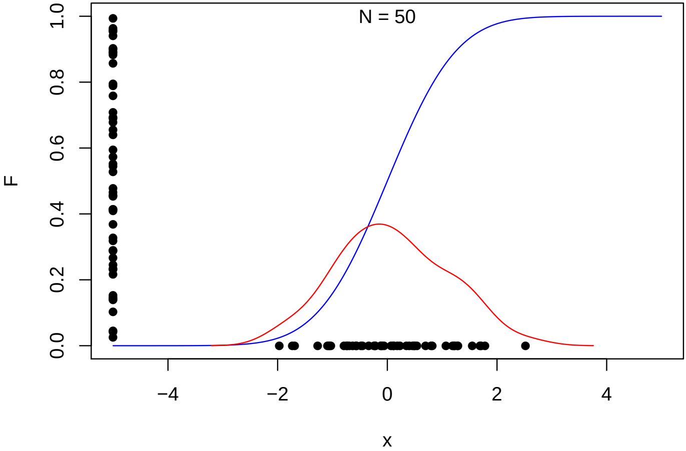
Simulation : fonction de répartition

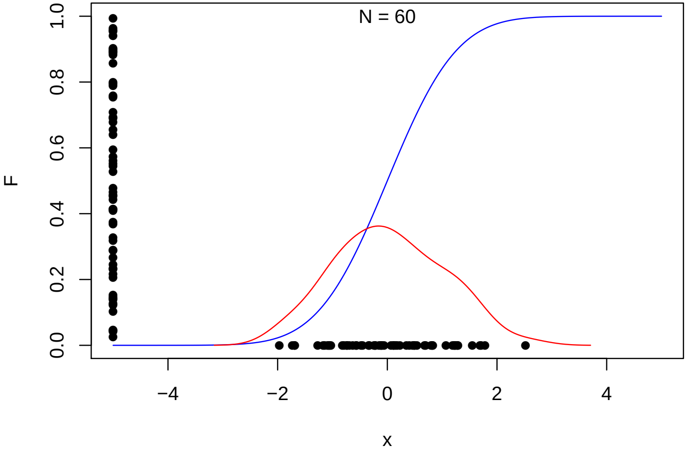


Simulation : fonction de répartition

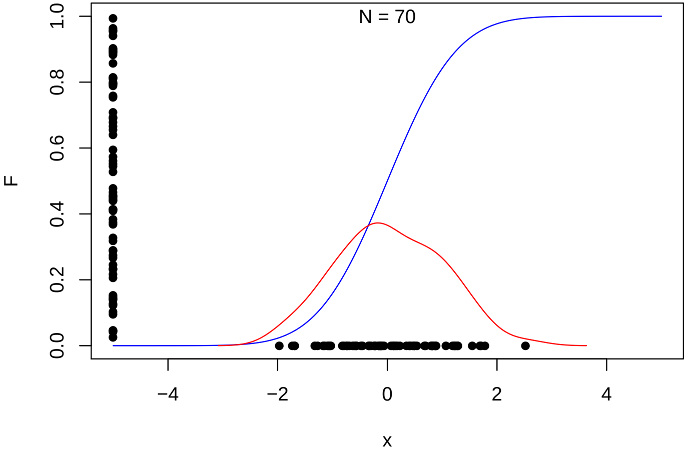


Simulation : fonction de répartition

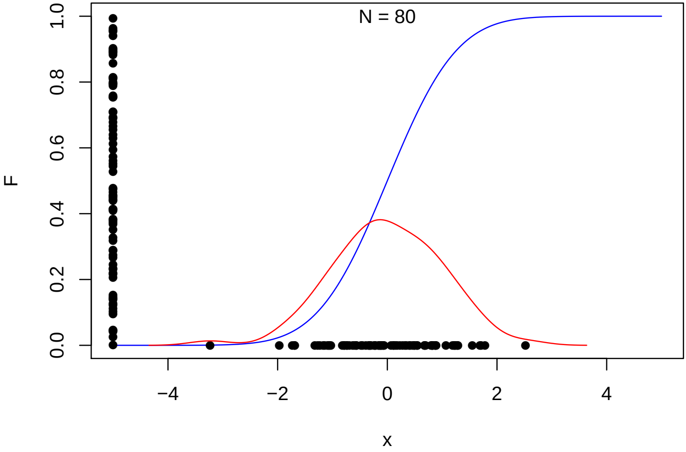



N = 60
F
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4

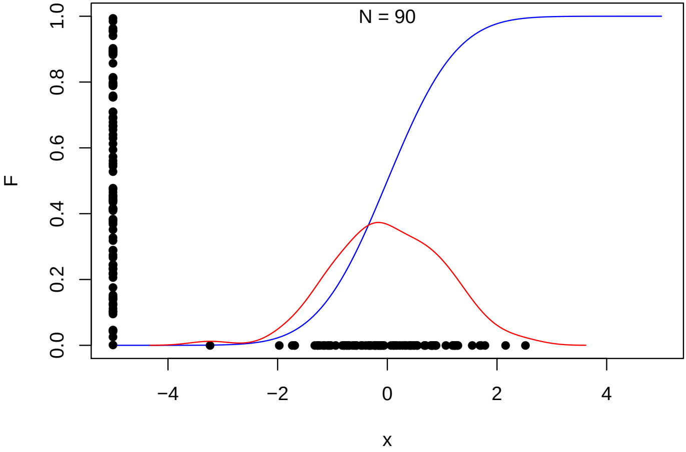
Simulation : fonction de répartition



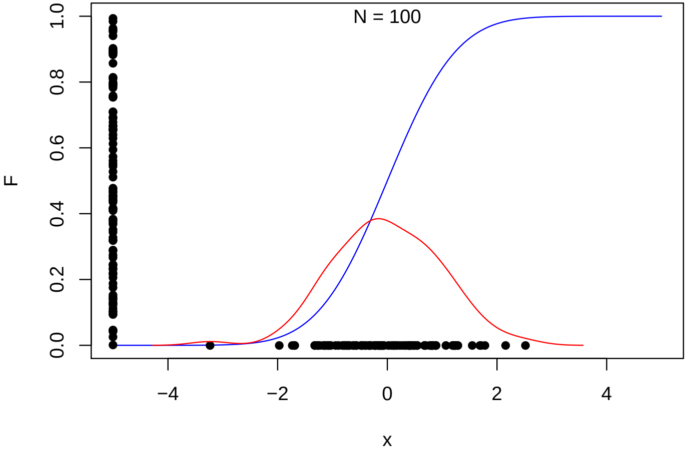
Simulation : fonction de répartition



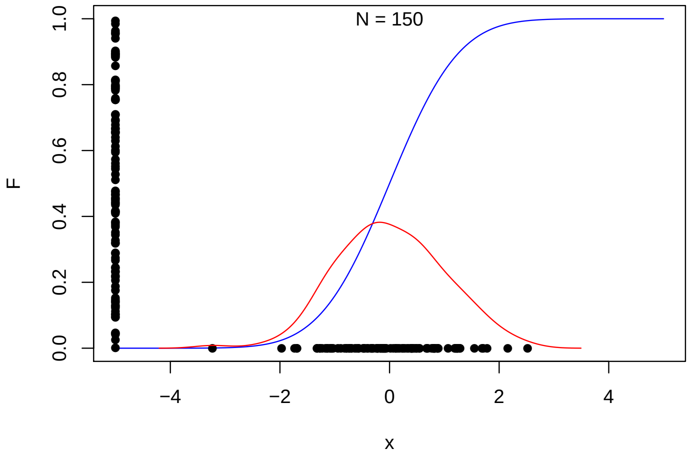
Simulation : fonction de répartition



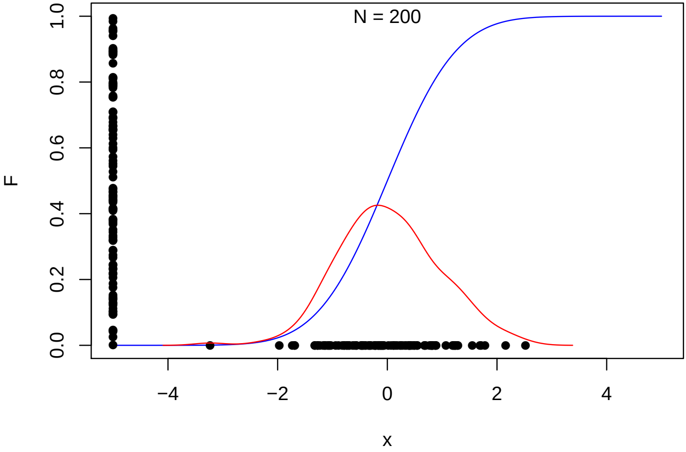
Simulation : fonction de répartition



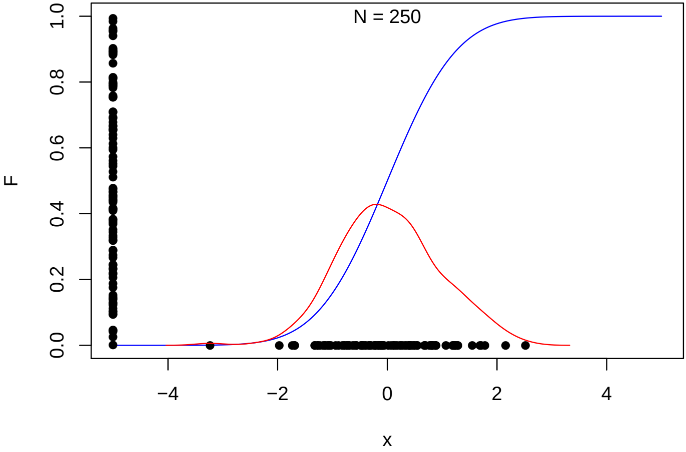
Simulation : fonction de répartition



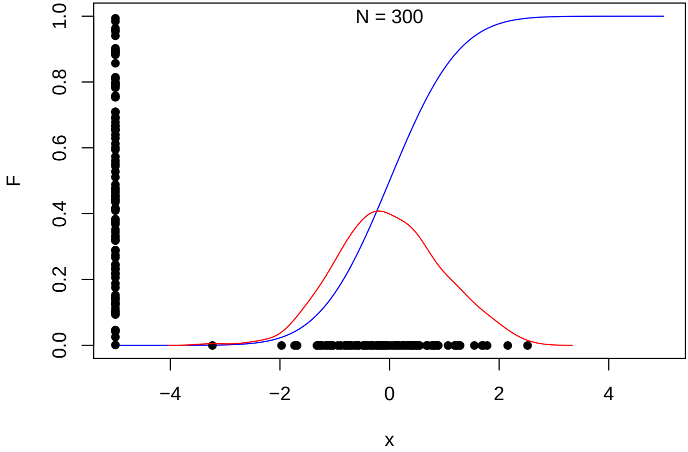
Simulation : fonction de répartition



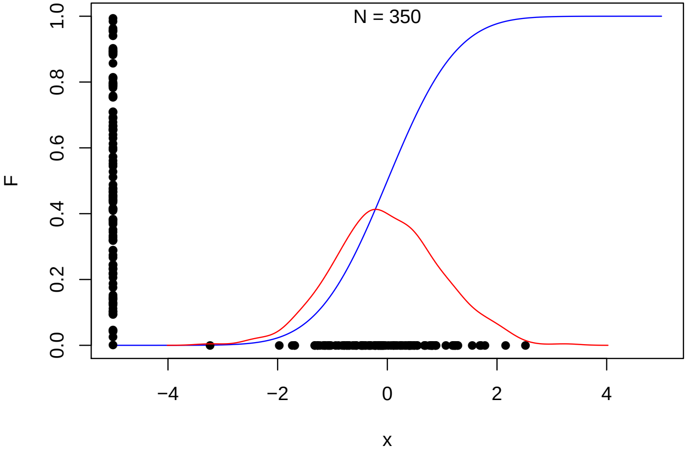
Simulation : fonction de répartition

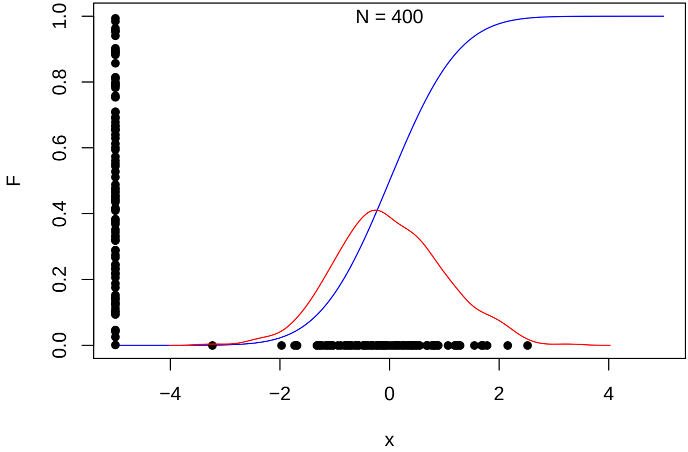


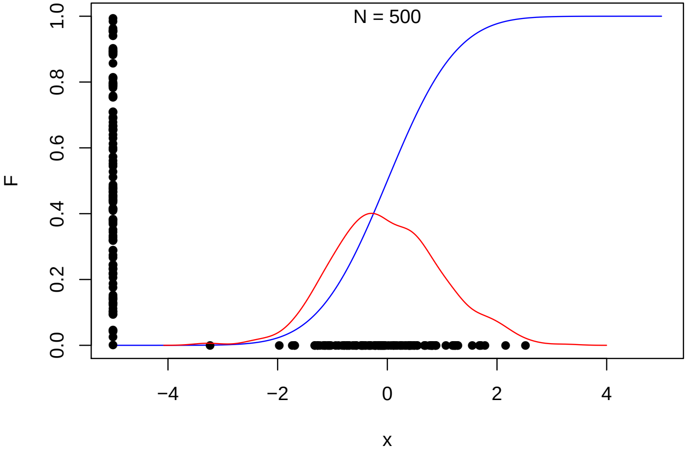
Simulation : fonction de répartition



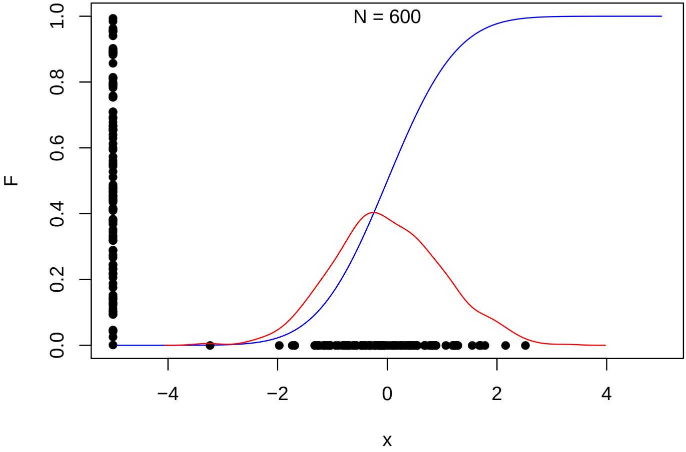
Simulation : fonction de répartition



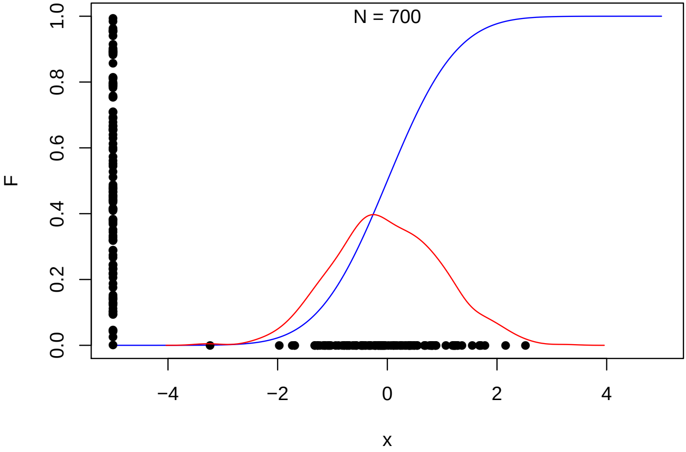

N = 400
F
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
x


N = 500
F
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
x

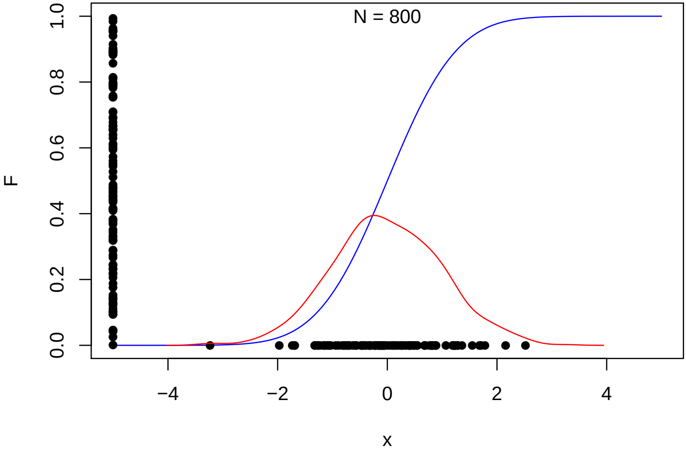
Simulation : fonction de répartition



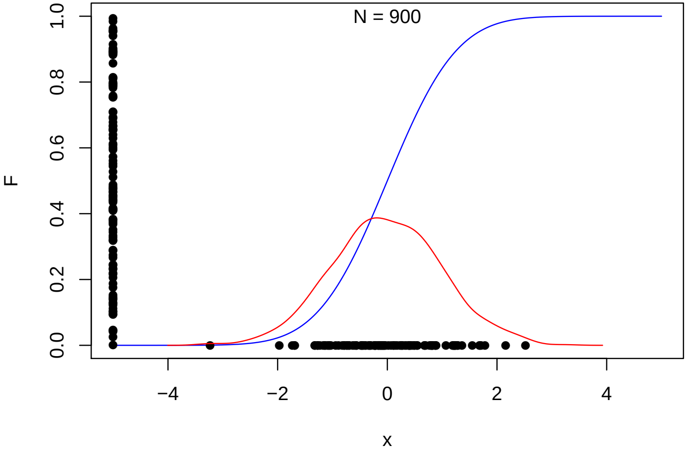
Simulation : fonction de répartition



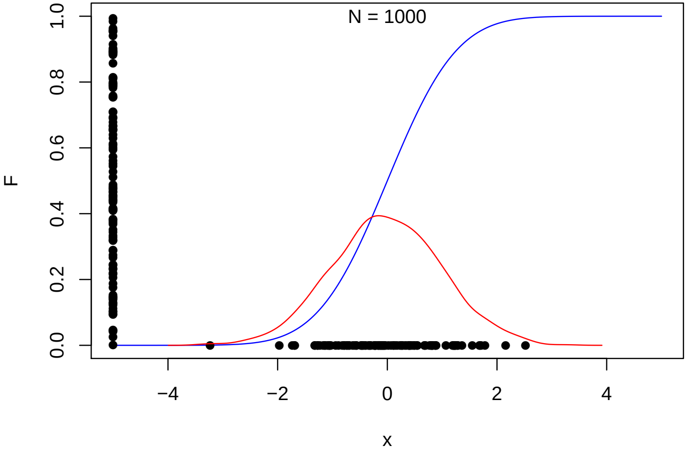
Simulation : fonction de répartition



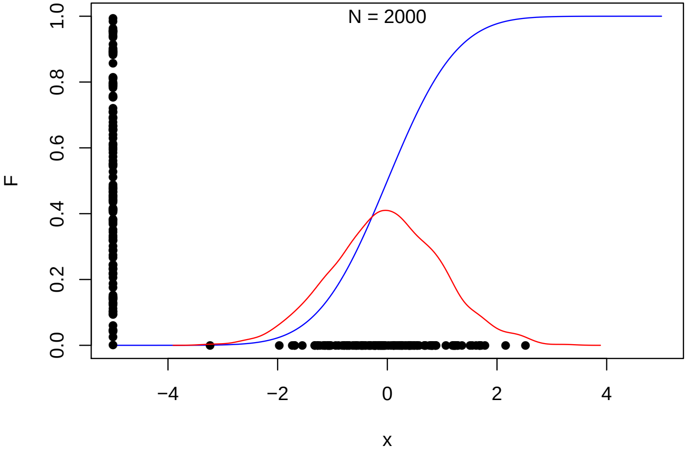
Simulation : fonction de répartition



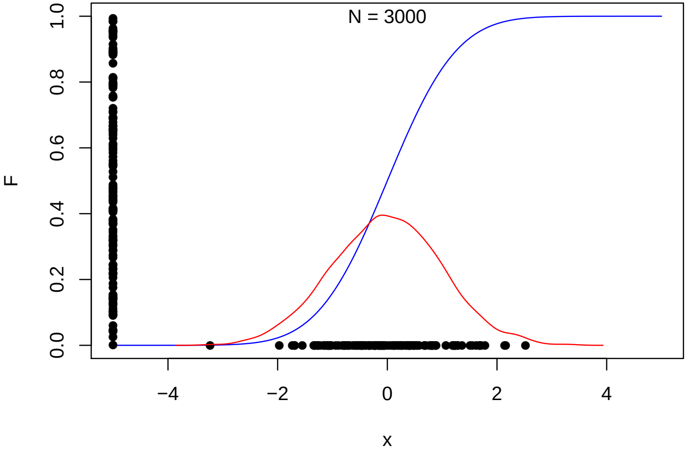
Simulation : fonction de répartition



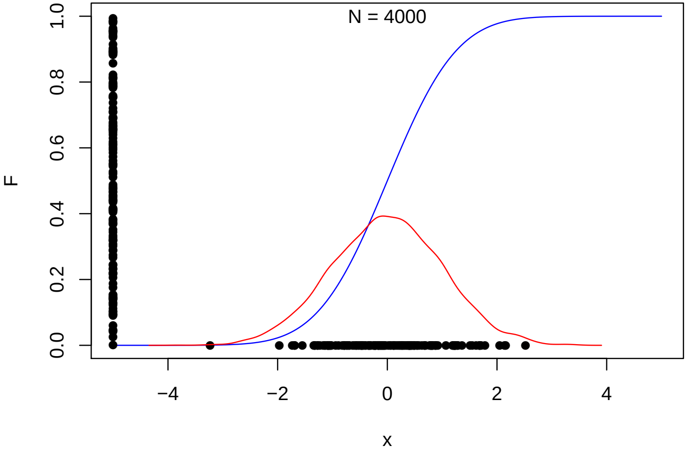
Simulation : fonction de répartition



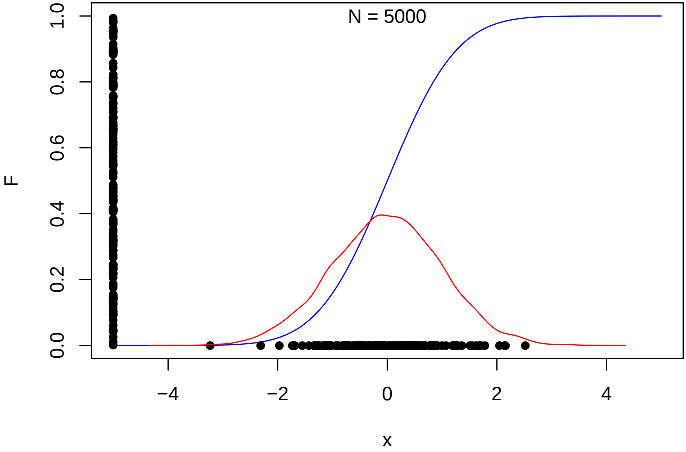
Simulation : fonction de répartition

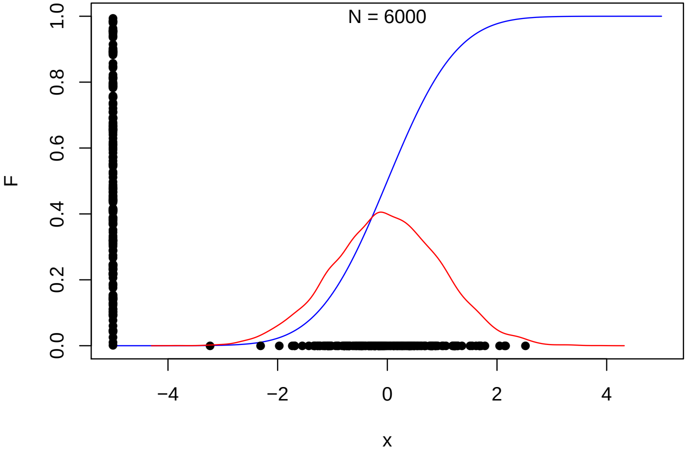


Simulation : fonction de répartition

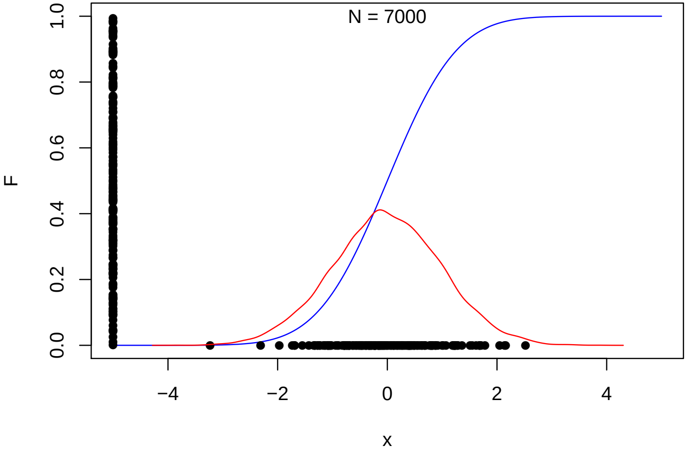


Simulation : fonction de répartition

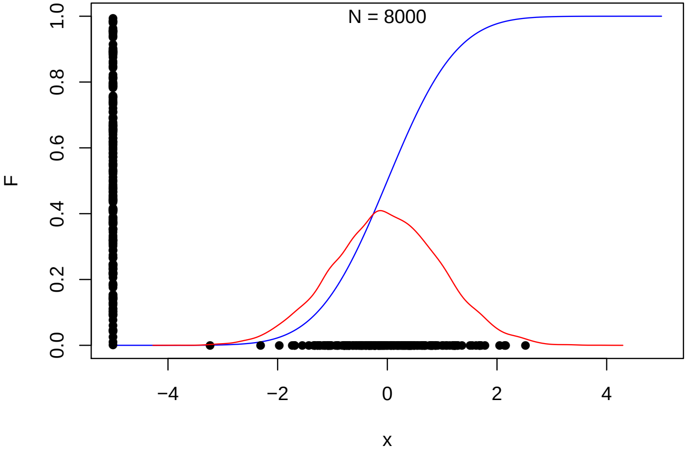



N = 6000
F
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
x

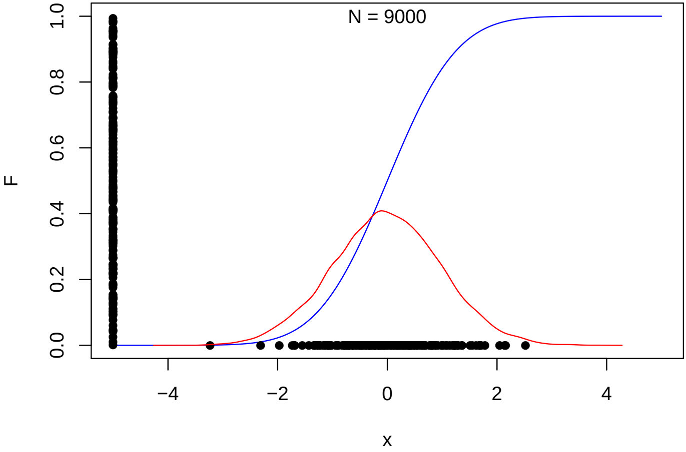
Simulation : fonction de répartition



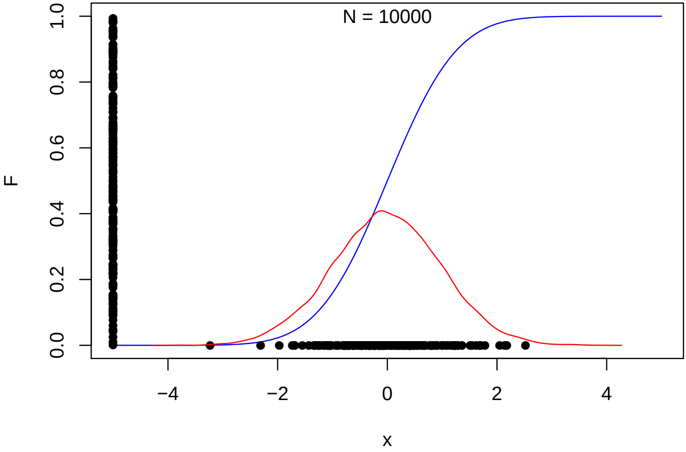
Simulation : fonction de répartition



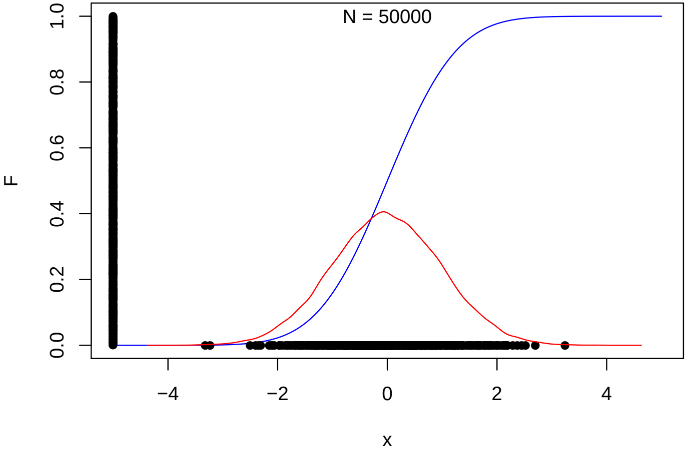
Simulation : fonction de répartition



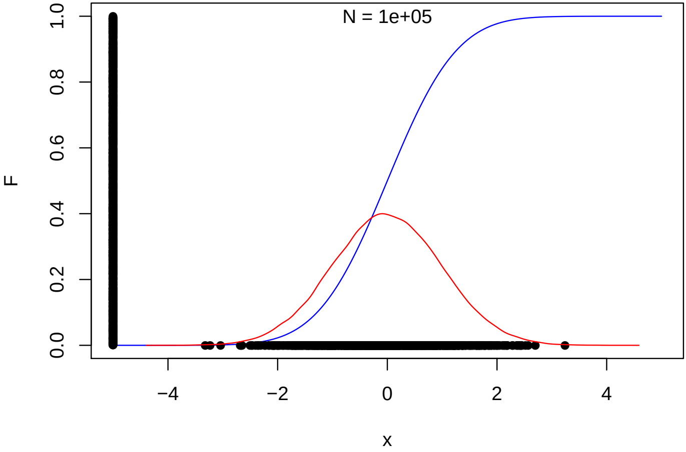
Simulation : fonction de répartition



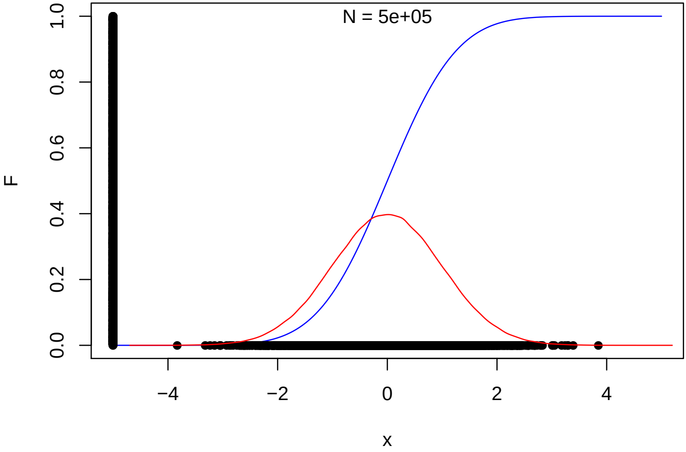
Simulation : fonction de répartition



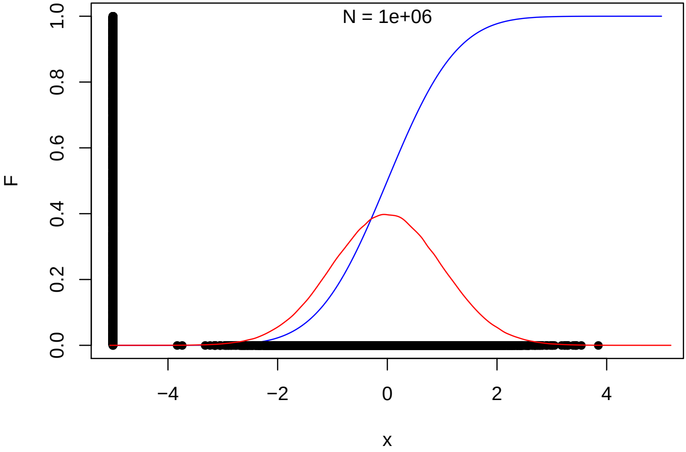
Simulation : fonction de répartition



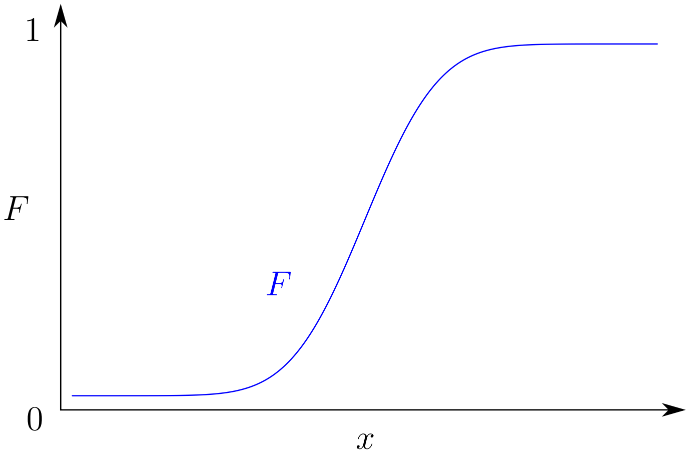
Simulation : fonction de répartition



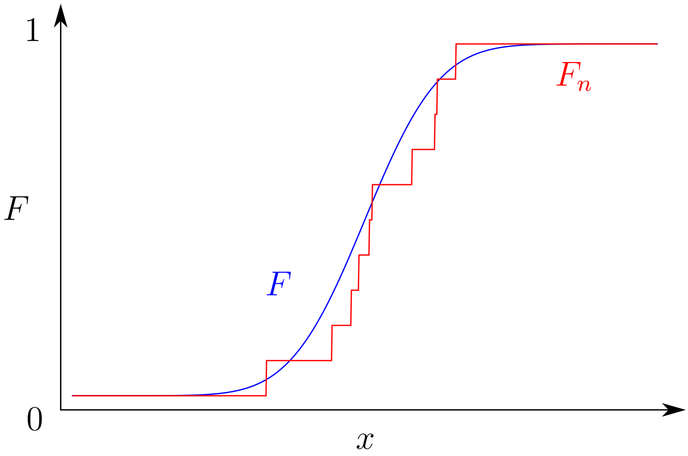
Simulation : fonction de répartition



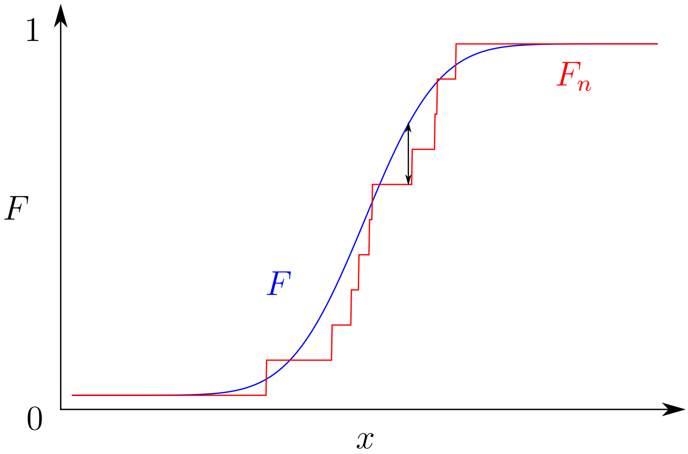
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



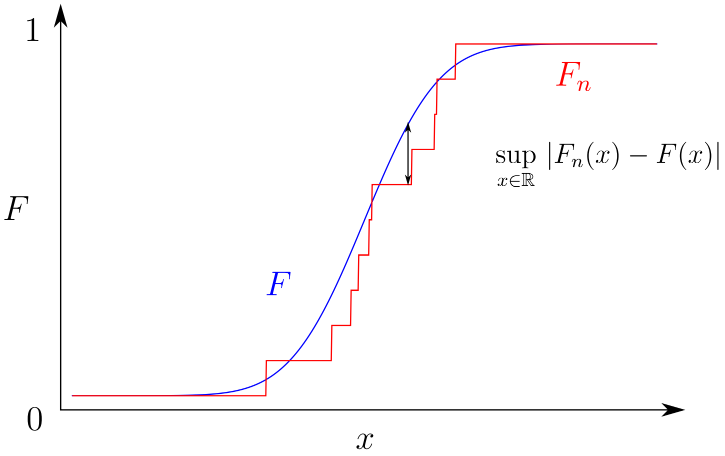
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



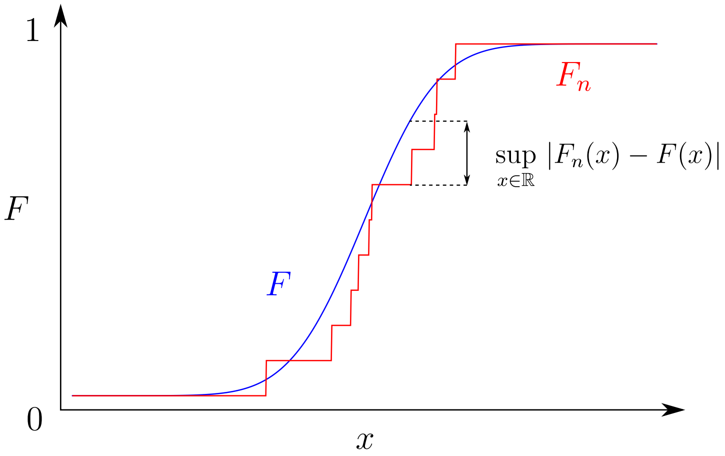
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



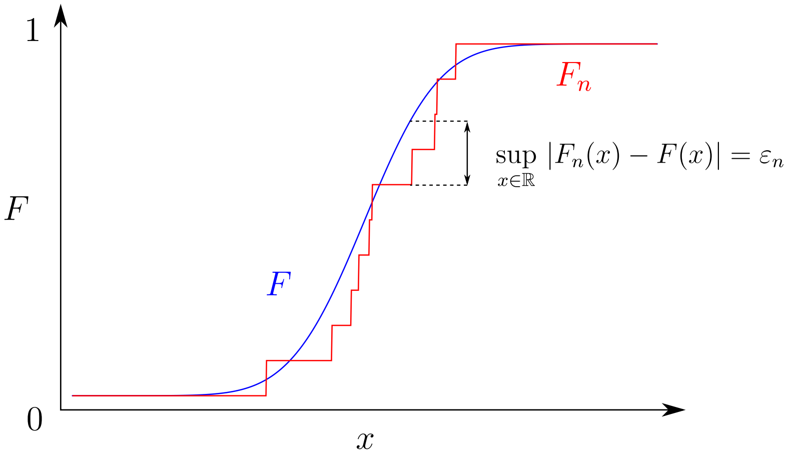
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

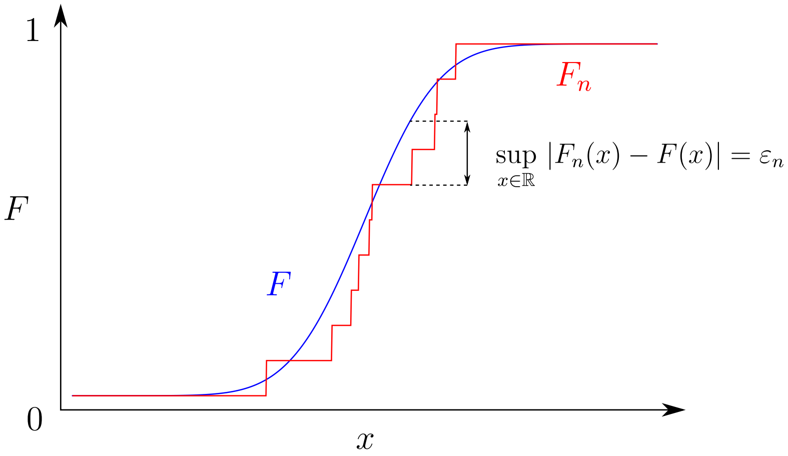


Comment contrôler la qualité de la simulation ?



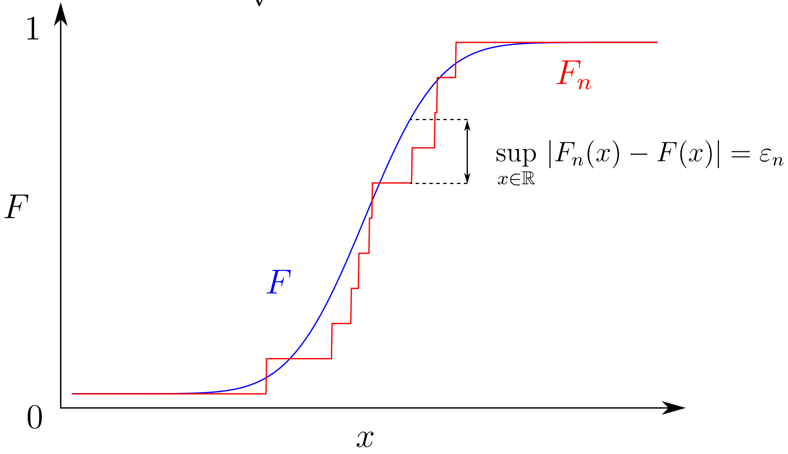
Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\big(\varepsilon_n \geqslant \ ?\ \big) = \ ?$$



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

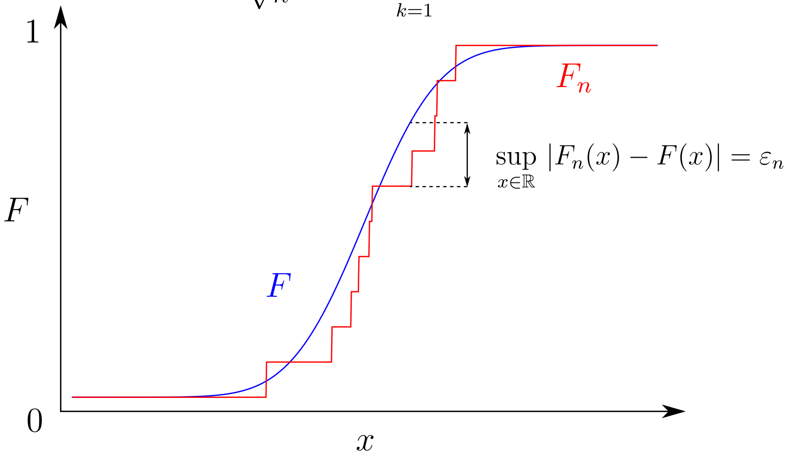
$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$



Simulation : fonction de répartition

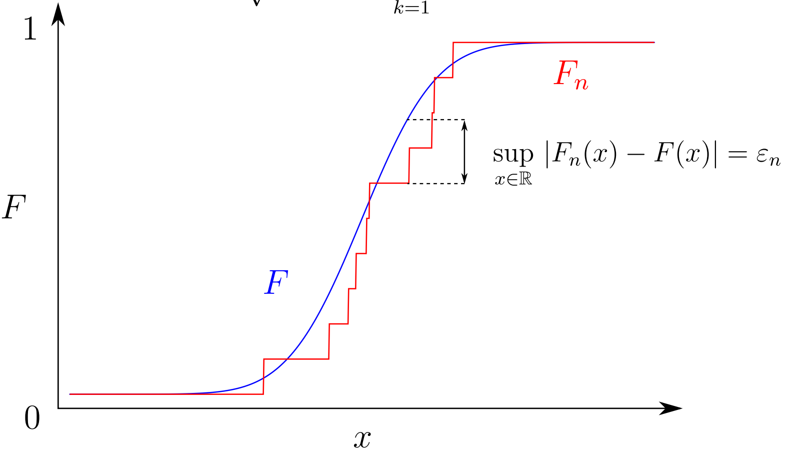
Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\Big(\varepsilon_n \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\big(-2c^2k^2\big)$$



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\Big(\varepsilon_n \geqslant \frac{\overset{1.36}{c}}{\sqrt{n}}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\big(-2c^2k^2\big)$$



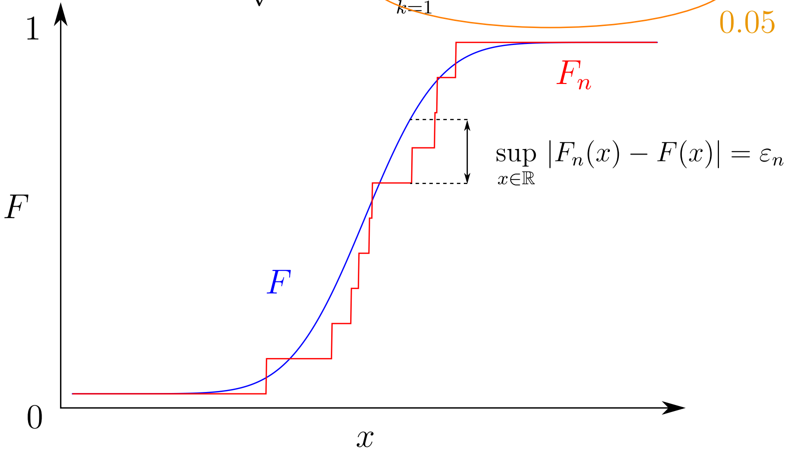
Simulation : fonction de répartition

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

1.36

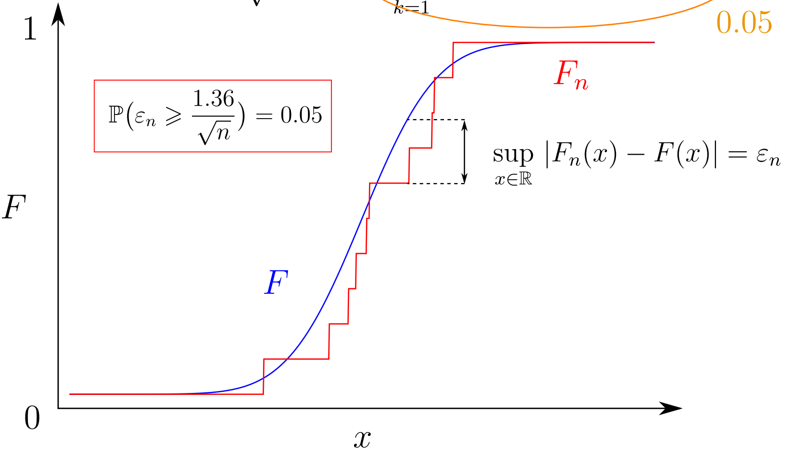
$$\mathbb{P}\Big(\varepsilon_n \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\big(-2c^2k^2\big)$$

0.05



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

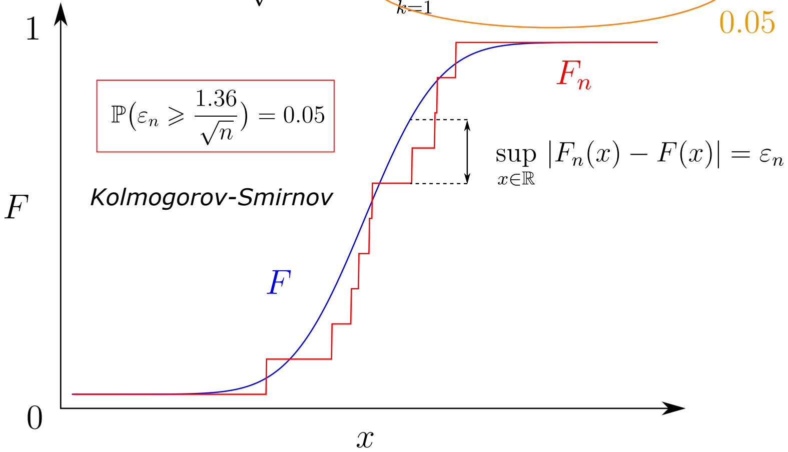
$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \geqslant \frac{\overset{1.36}{c}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\left(-2c^2k^2\right)}_{0.05}$$



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\Big(\varepsilon_n \geqslant \frac{\overset{1.36}{c}}{\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\big(-2c^2k^2\big)$$

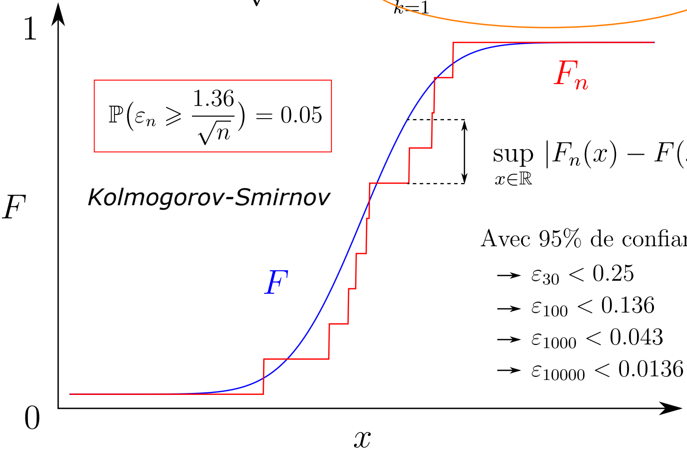
0.05



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\Big(\varepsilon_n \geqslant \frac{\overset{1.36}{c}}{\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\big(-2c^2k^2\big)$$

0.05



$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\varepsilon_n \geqslant \frac{1.36}{\sqrt{n}}\Big) = 0.05}$$

Kolmogorov-Smirnov

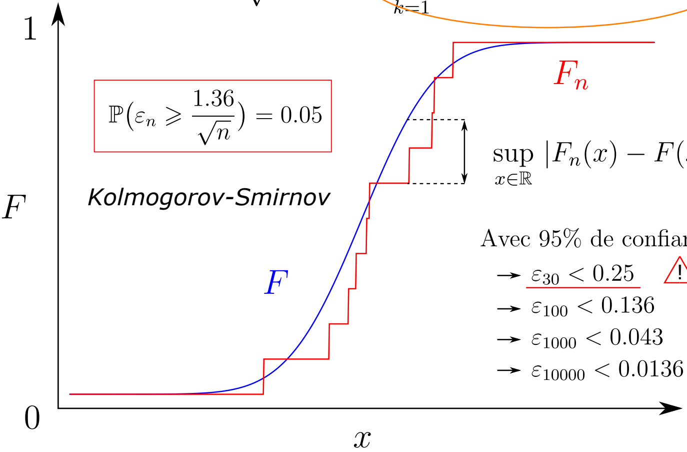
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = \varepsilon_n$$

Avec 95% de confiance :

- → $\varepsilon_{30} < 0.25$
- → $\varepsilon_{100} < 0.136$
- → $\varepsilon_{1000} < 0.043$
- → $\varepsilon_{10000} < 0.0136$

Comment contrôler la qualité de la simulation ?

$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \geqslant \frac{\overset{1.36}{c}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp\left(-2c^2k^2\right) \quad 0.05$$



$$\boxed{\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \geqslant \frac{1.36}{\sqrt{n}}\right) = 0.05}$$

Kolmogorov-Smirnov

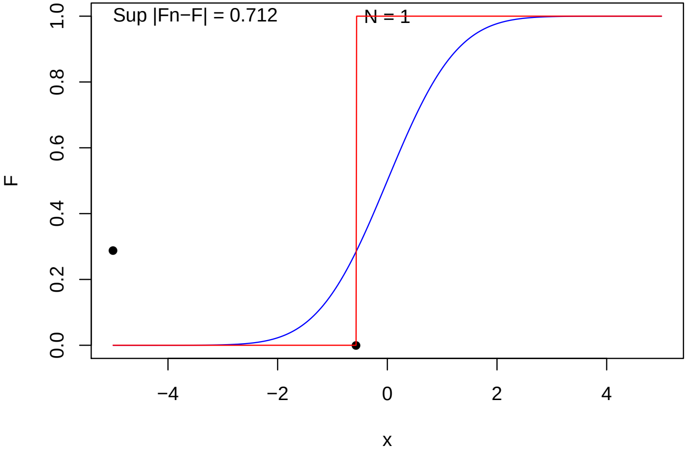
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = \varepsilon_n$$

Avec 95% de confiance :

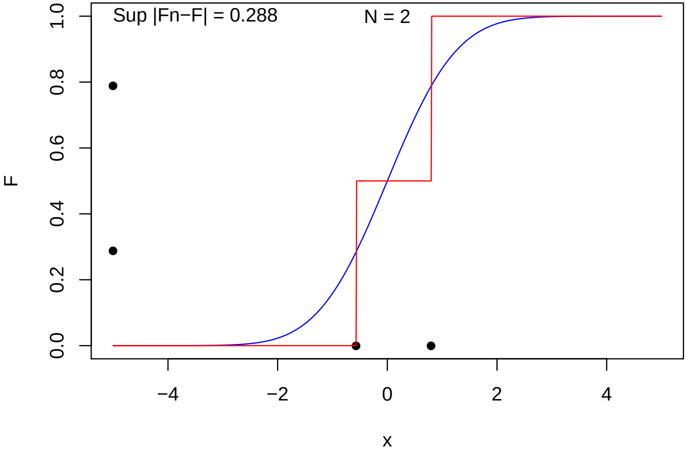
- $\varepsilon_{30} < 0.25$ ⚠
- $\varepsilon_{100} < 0.136$
- $\varepsilon_{1000} < 0.043$
- $\varepsilon_{10000} < 0.0136$

Simulation : fonction de répartition

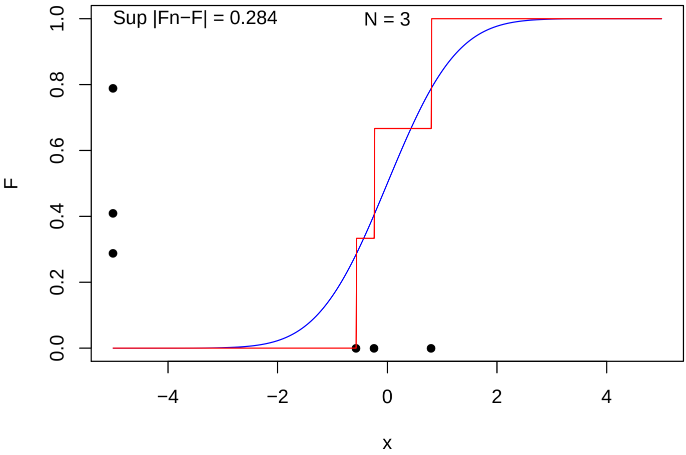
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



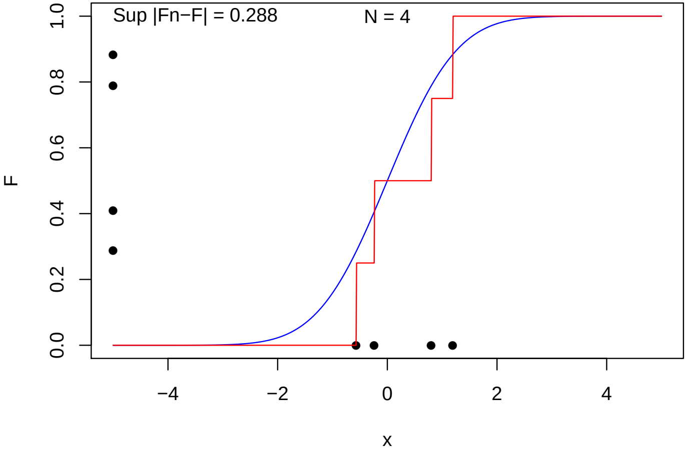
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



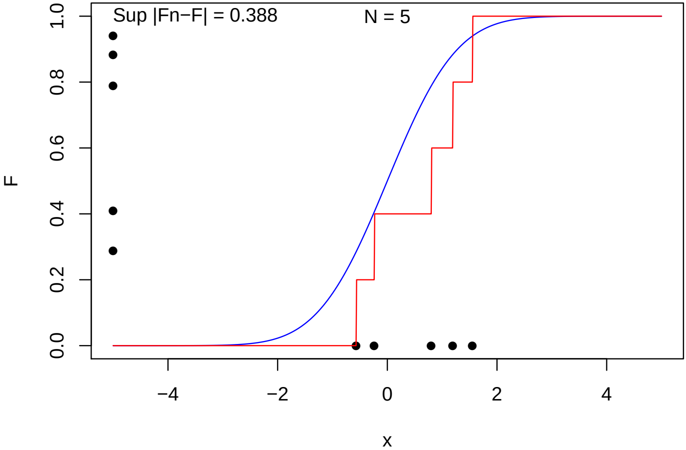
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



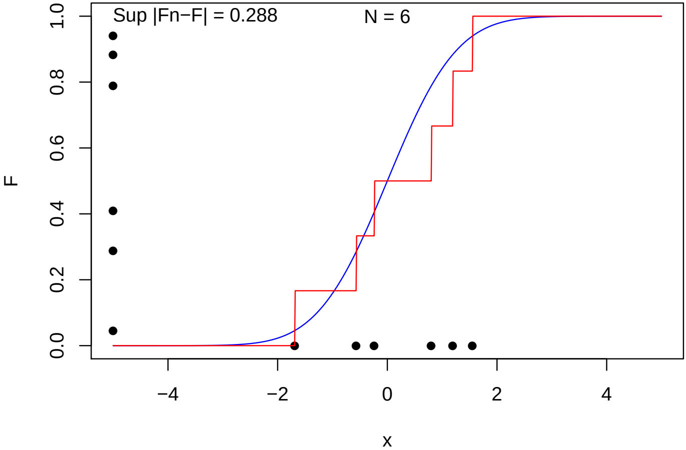
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



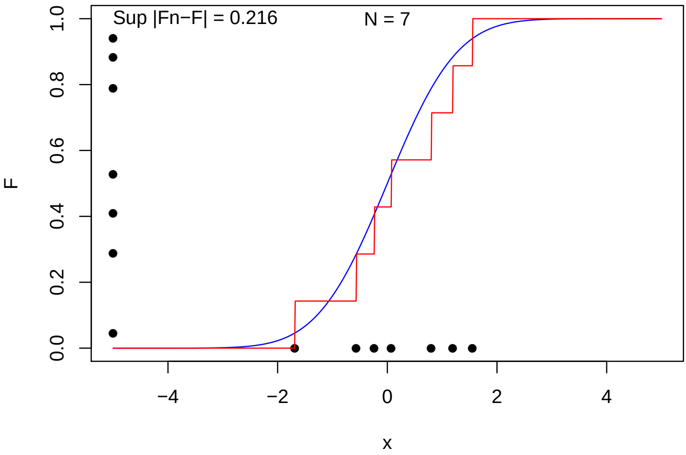
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



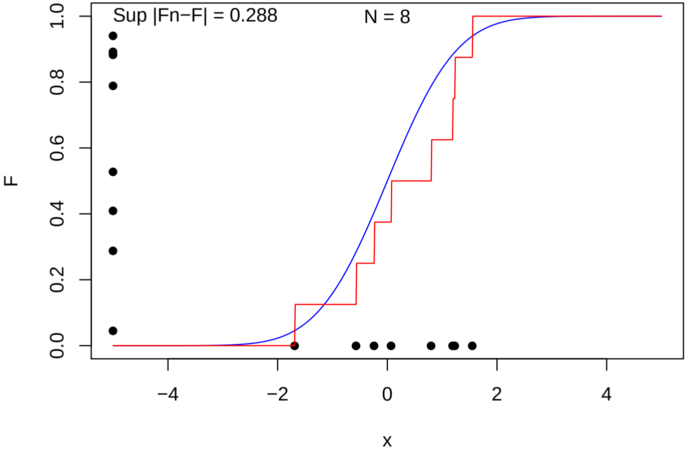
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



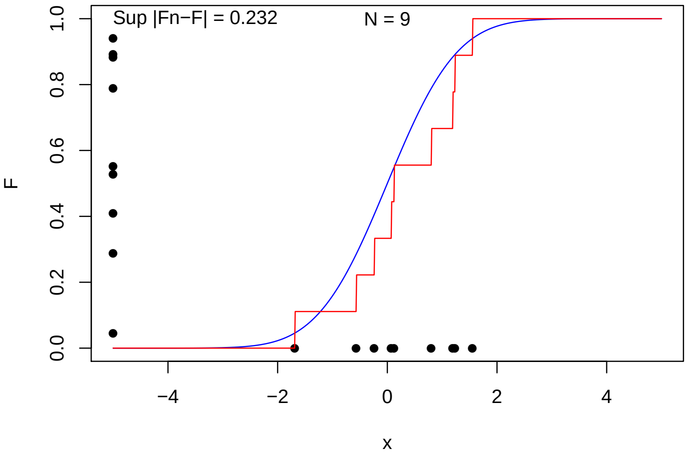
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



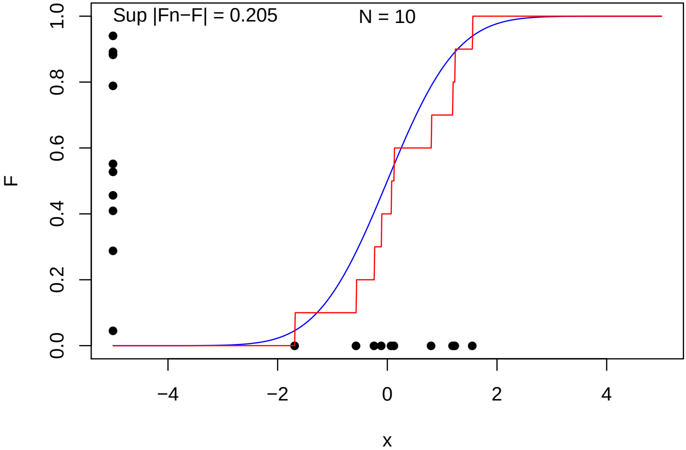
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



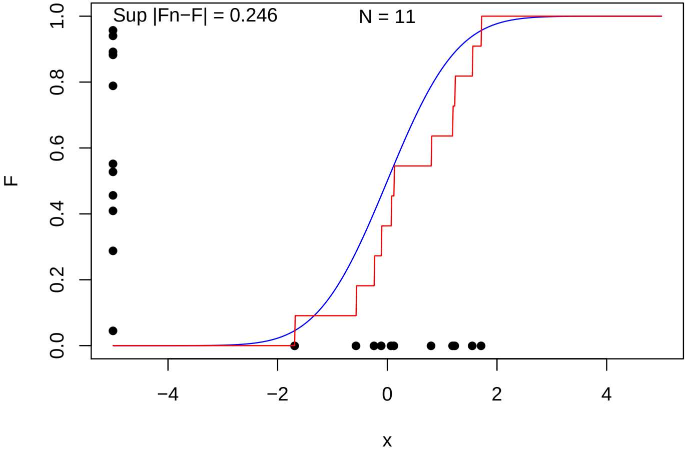
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



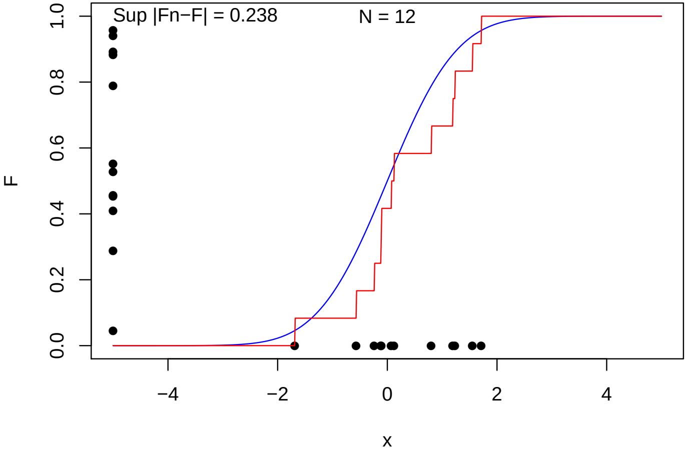
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



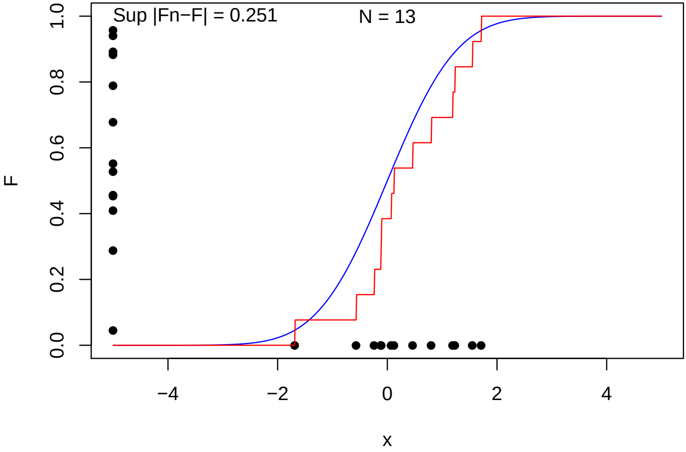
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



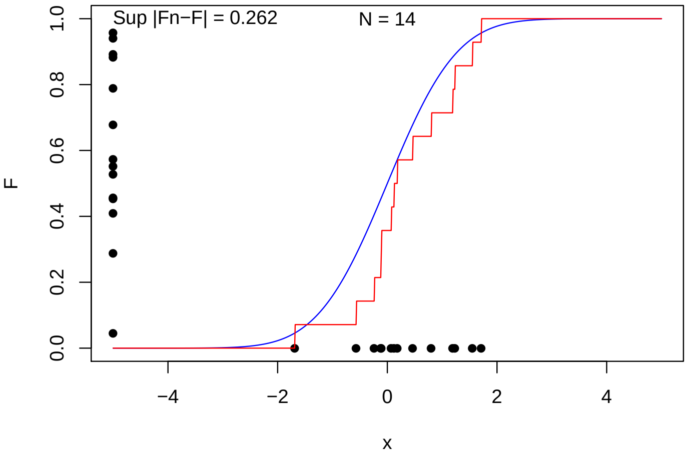
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



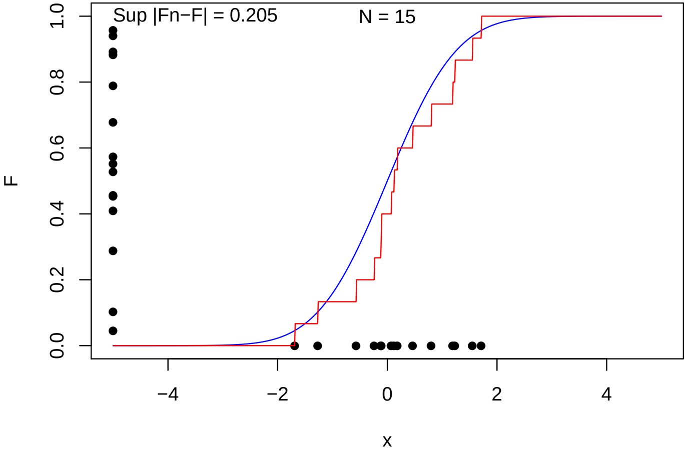
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



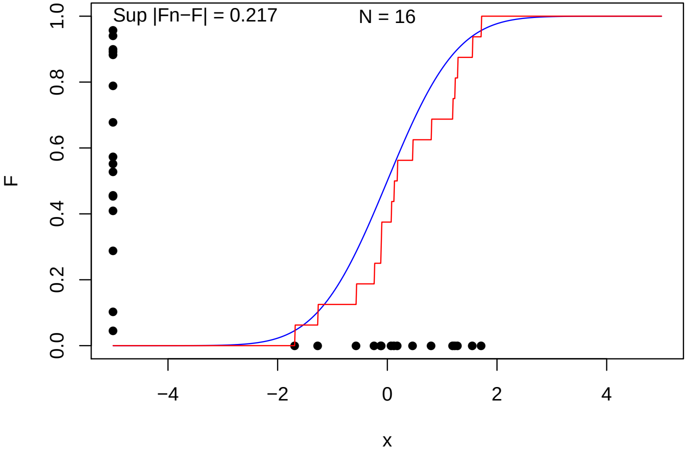
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



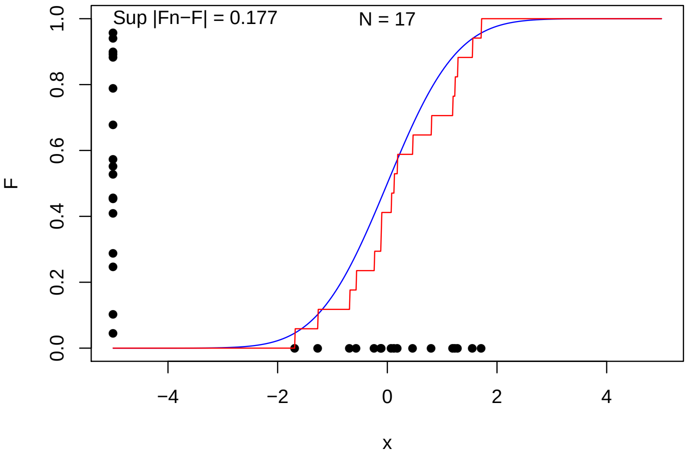
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



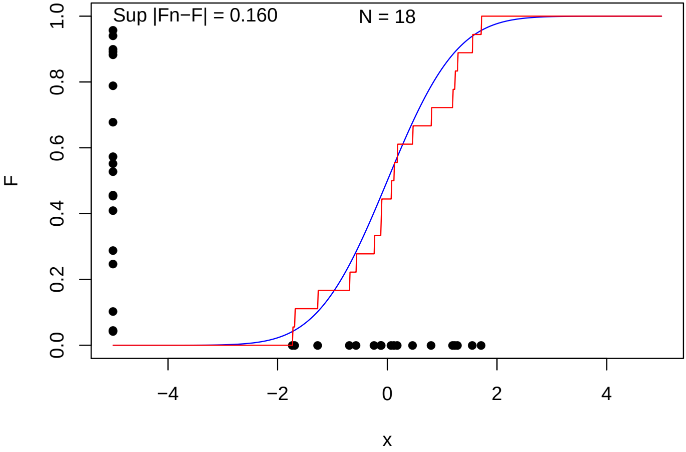
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



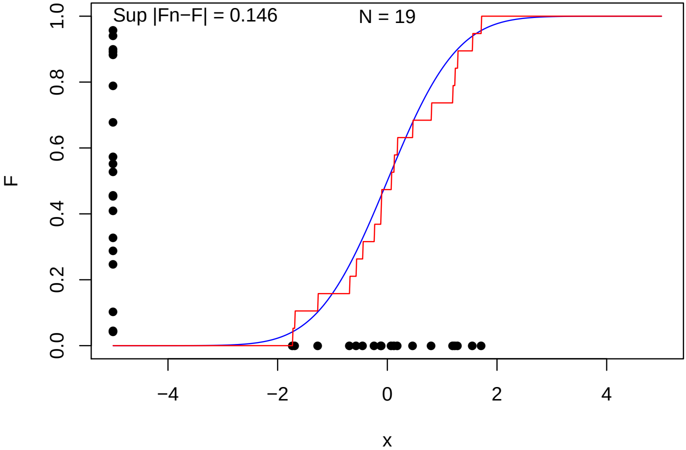
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



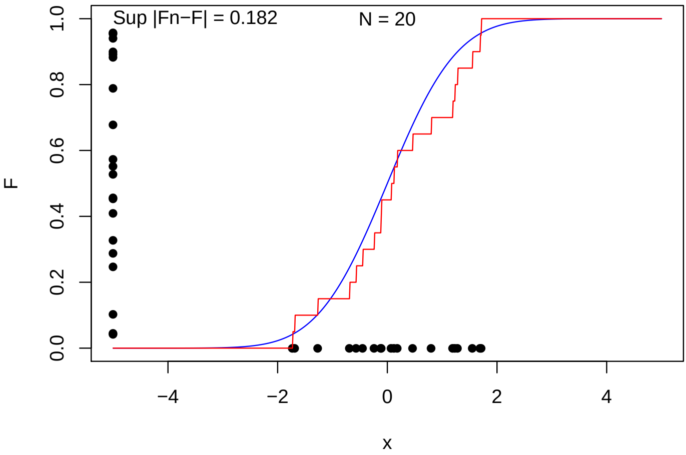
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



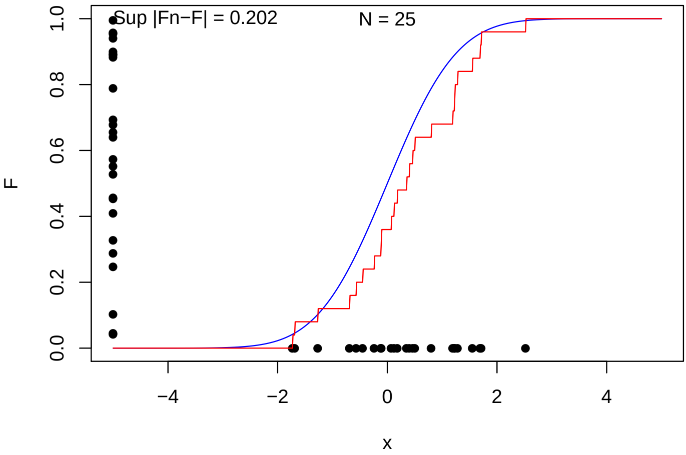
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



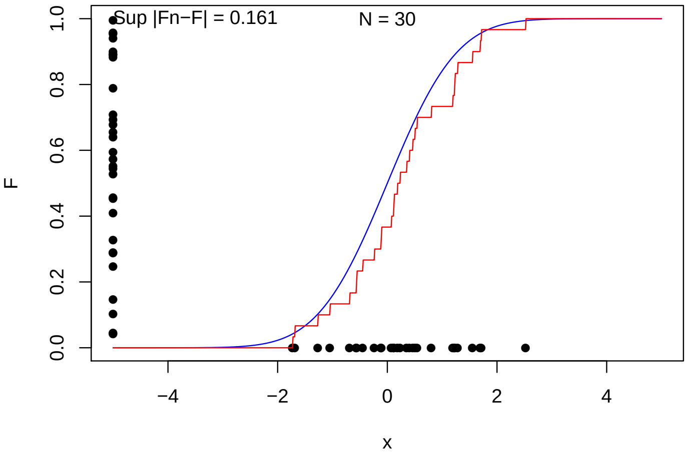
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



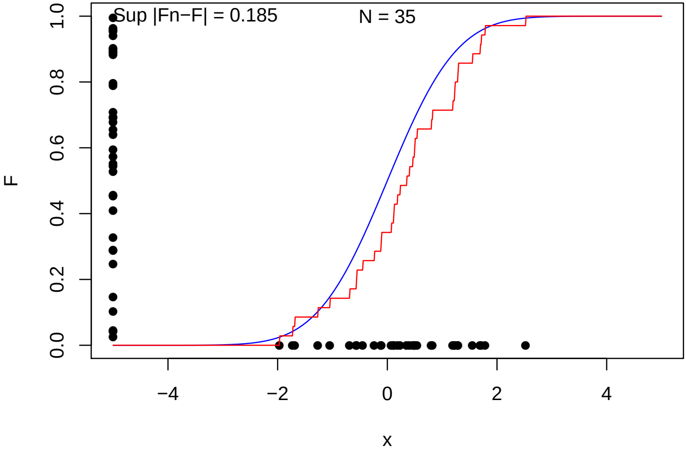
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



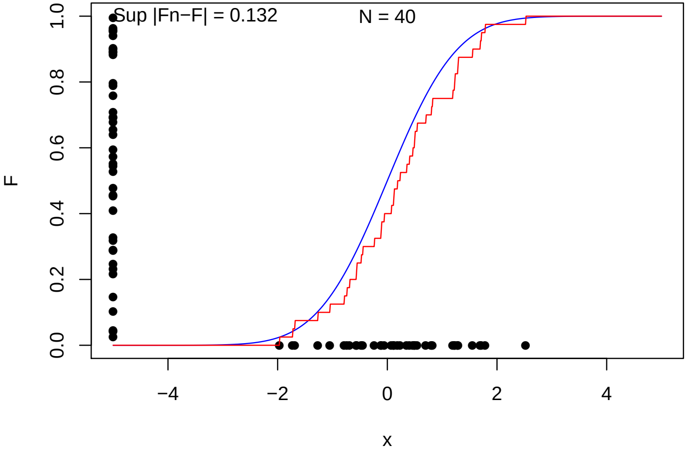
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



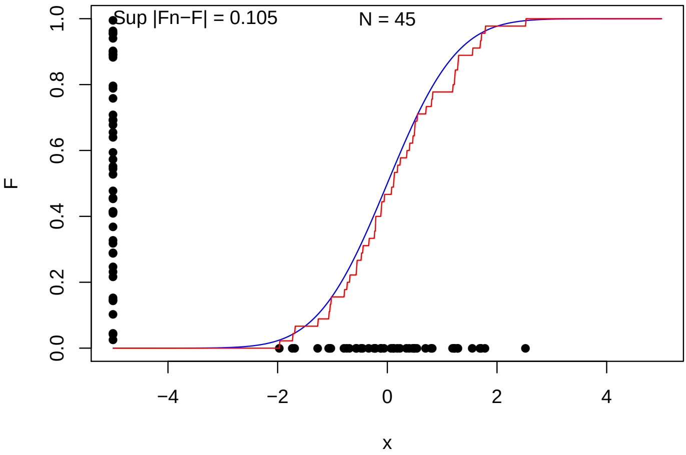
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



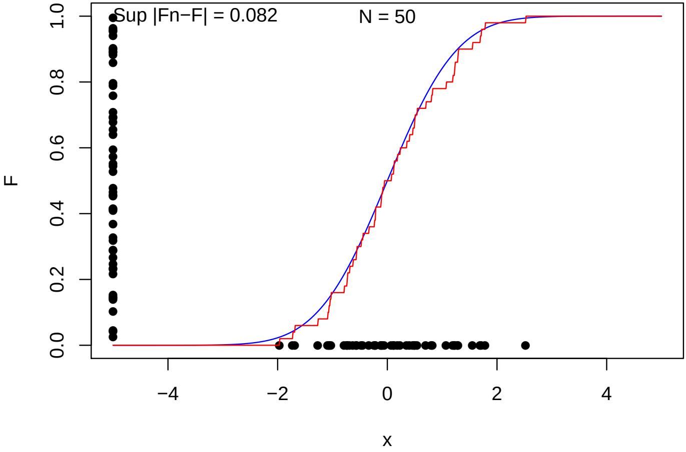
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



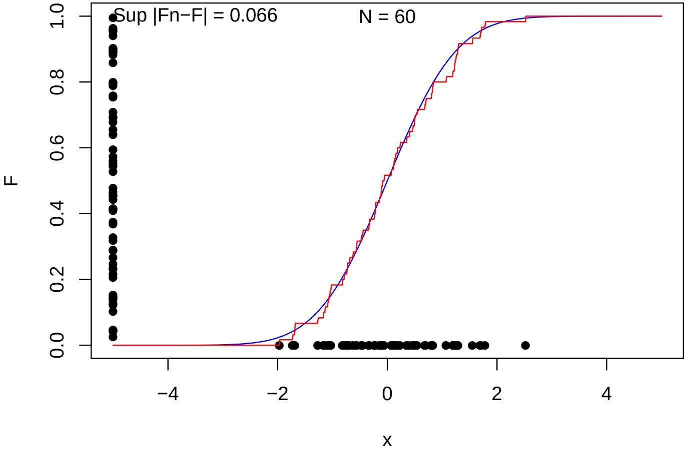
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



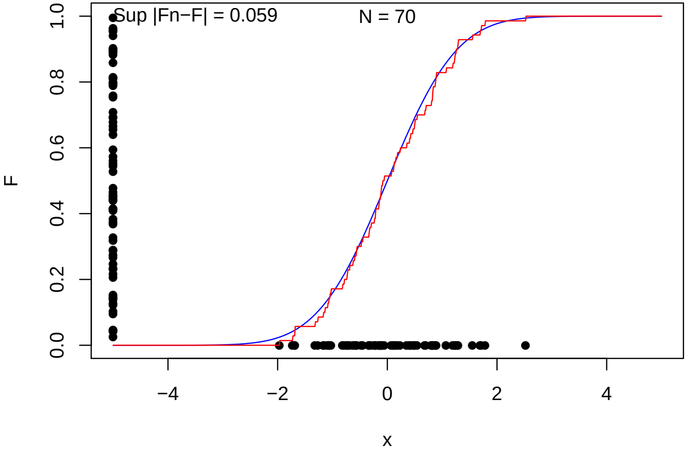
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



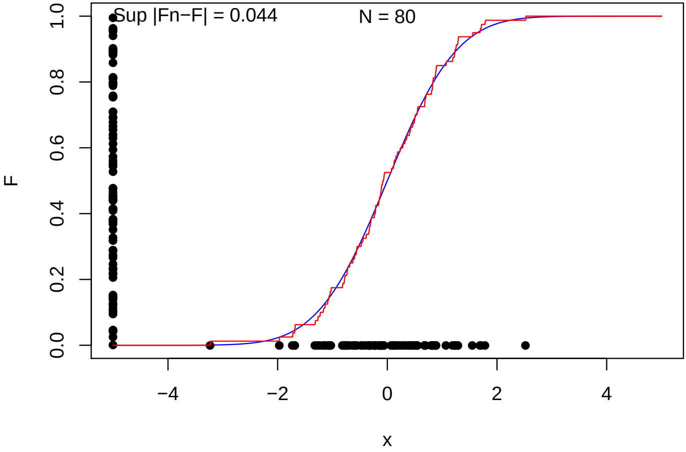
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



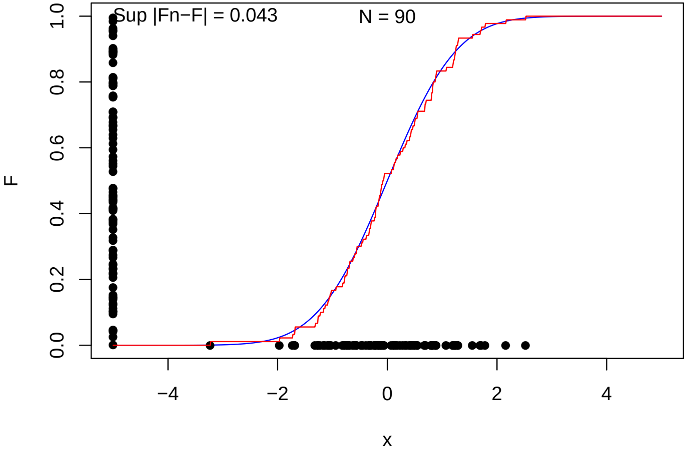
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

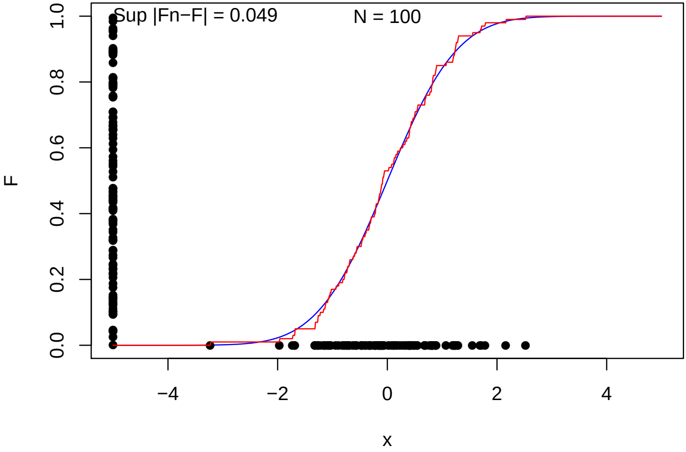


Comment contrôler la qualité de la simulation ?

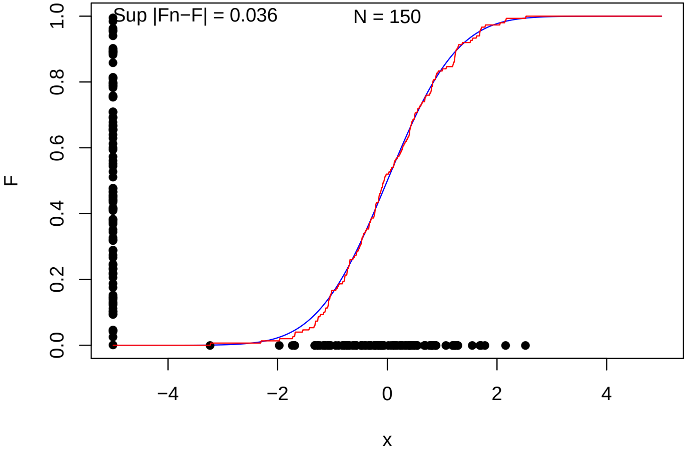


Simulation : fonction de répartition

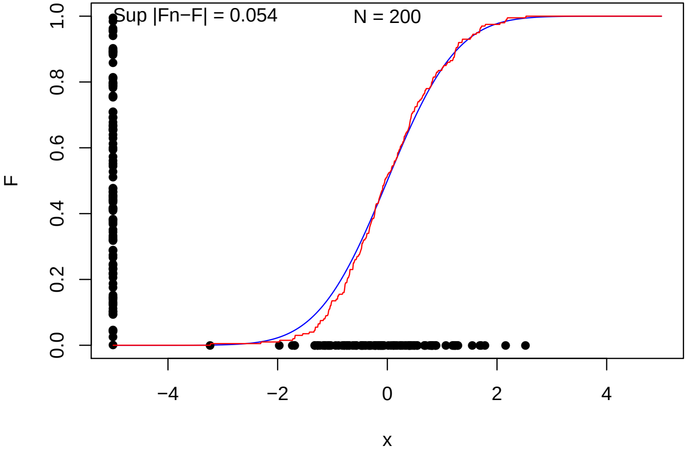
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



Comment contrôler la qualité de la simulation ?

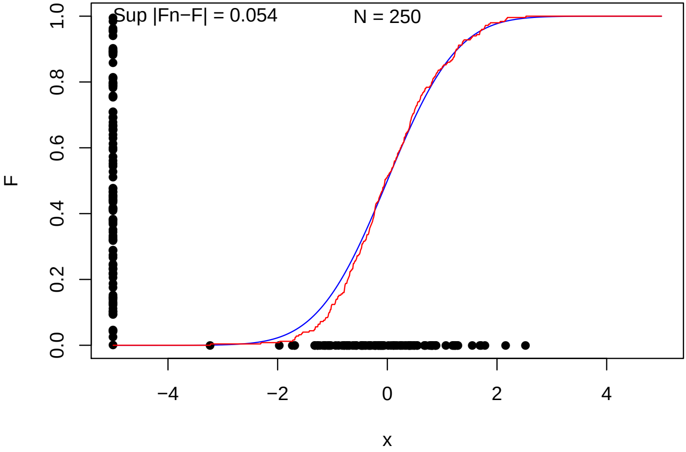


Comment contrôler la qualité de la simulation ?

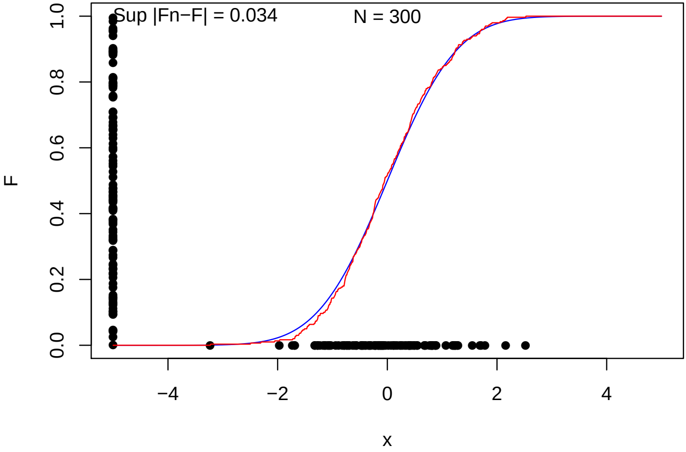


Simulation : fonction de répartition

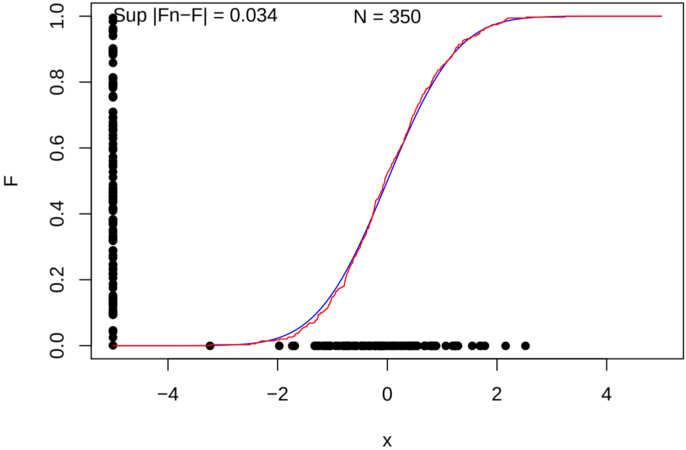
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



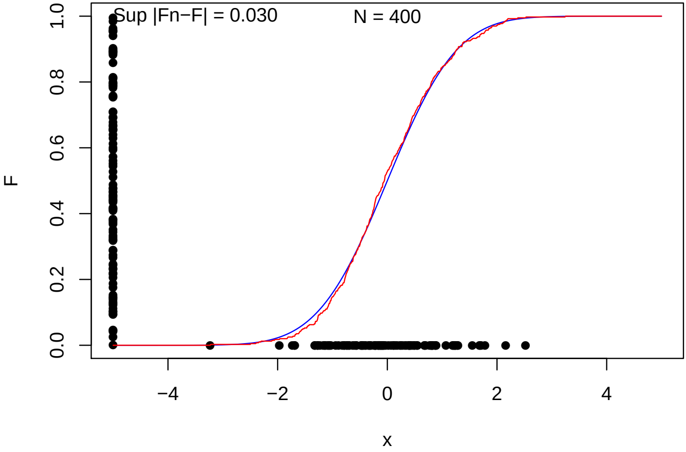
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



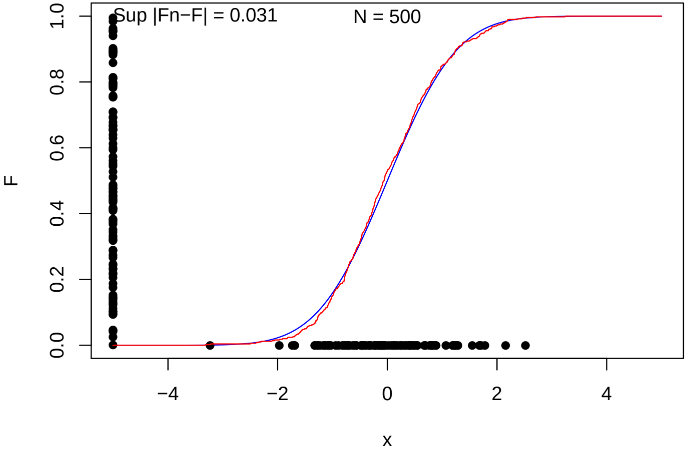
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



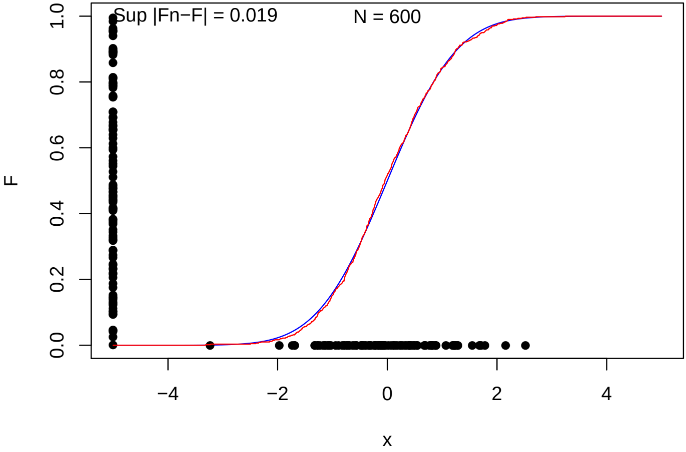
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



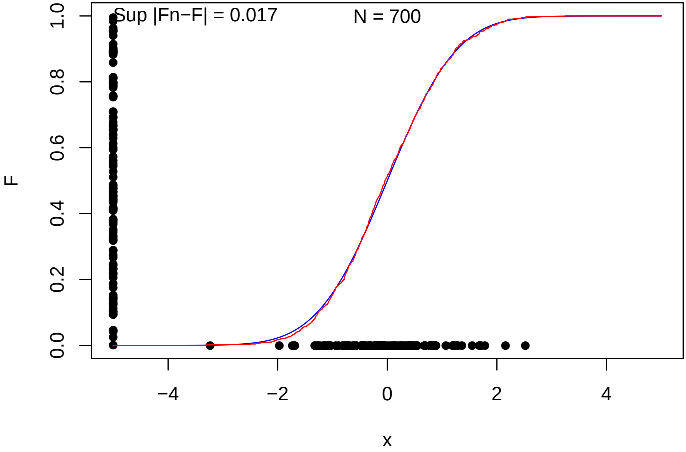
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



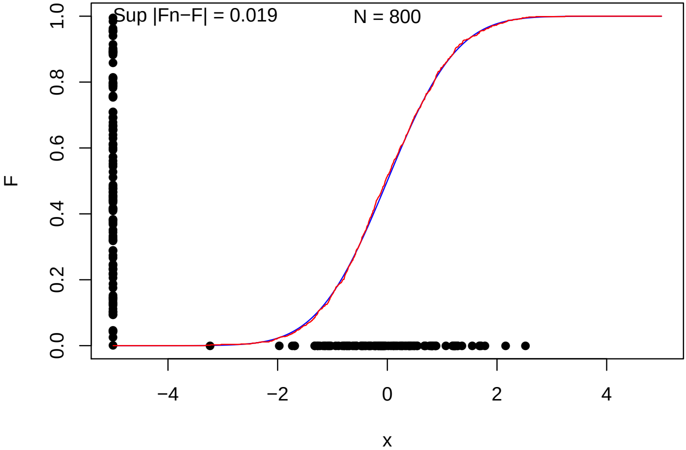
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



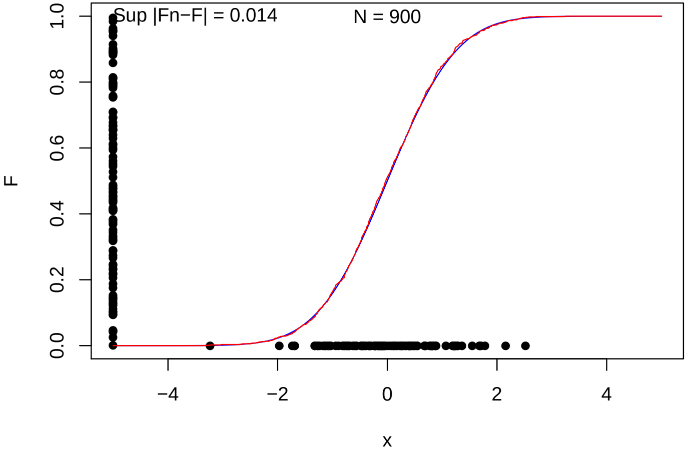
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



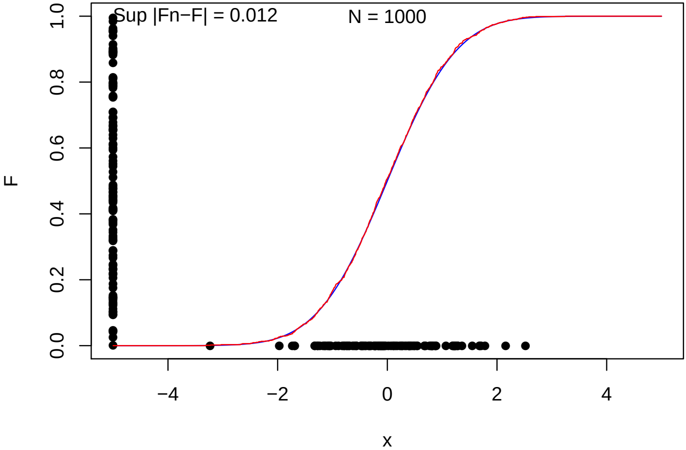
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



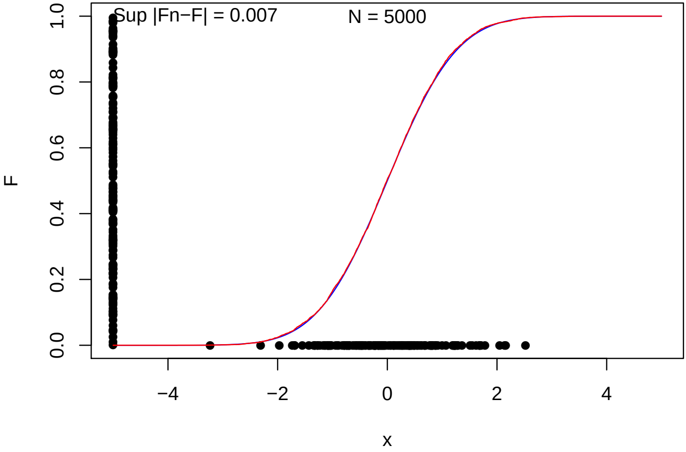
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



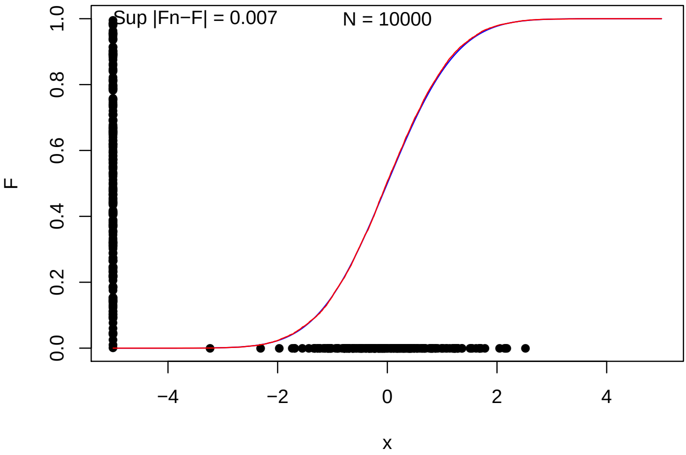
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



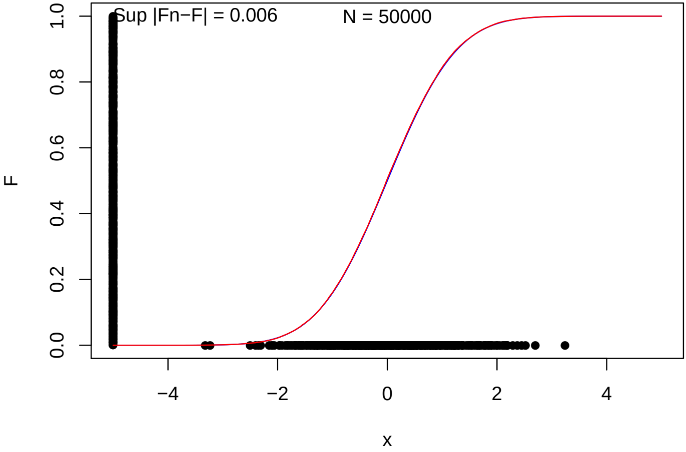
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



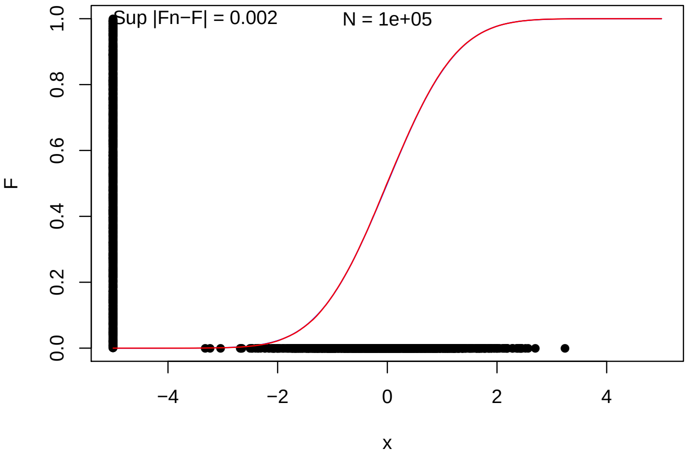
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



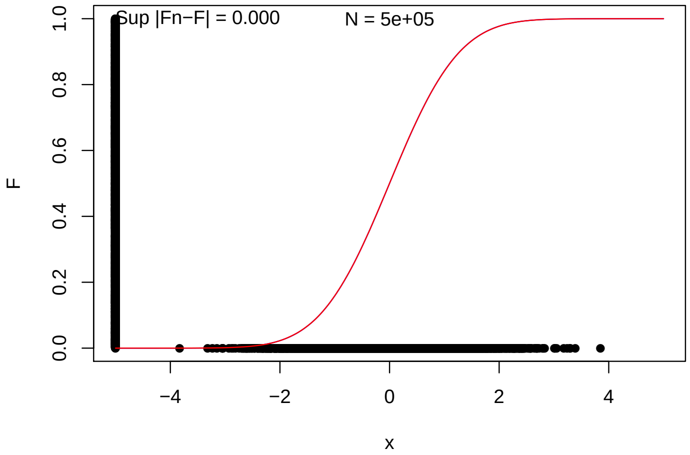
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



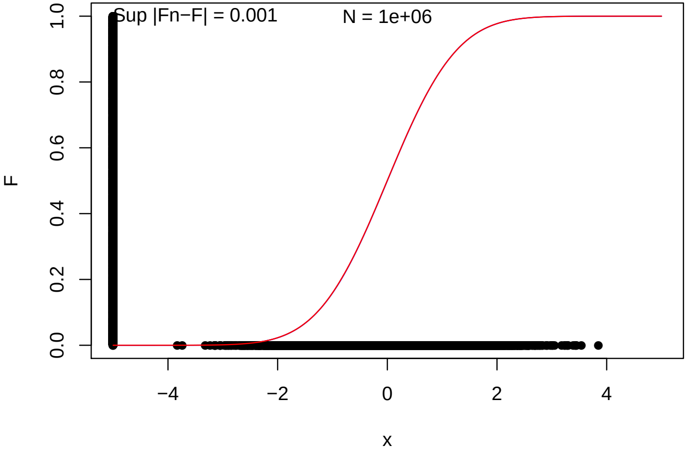
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



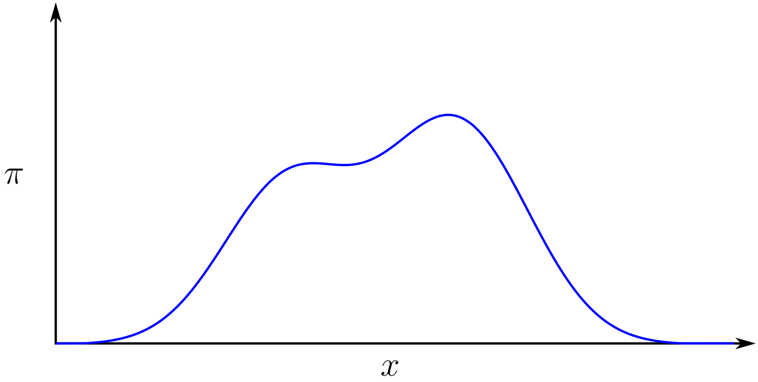
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



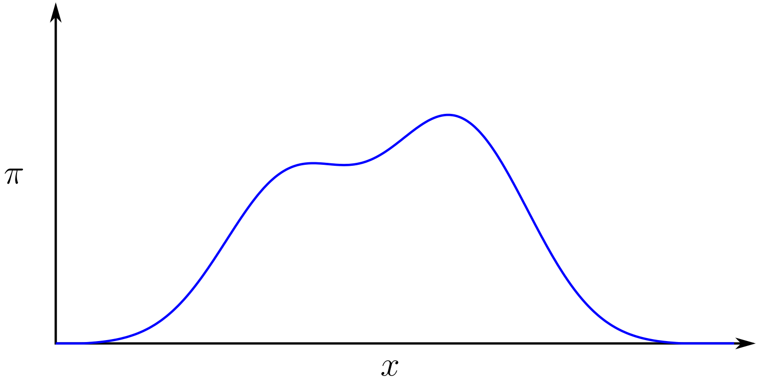
Comment contrôler la qualité de la simulation ?



Metropolis-Hastings

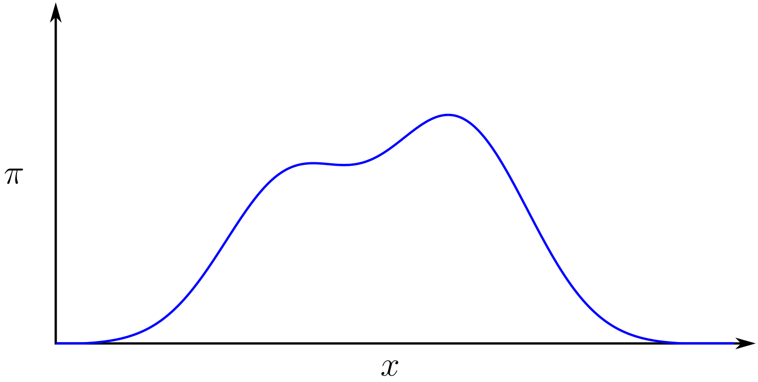


Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)



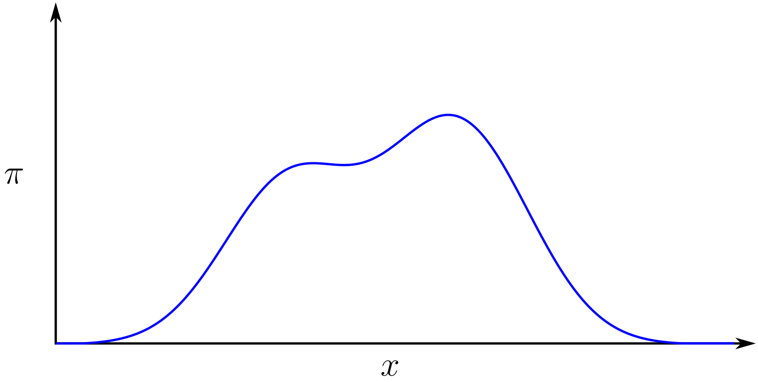
Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n$$



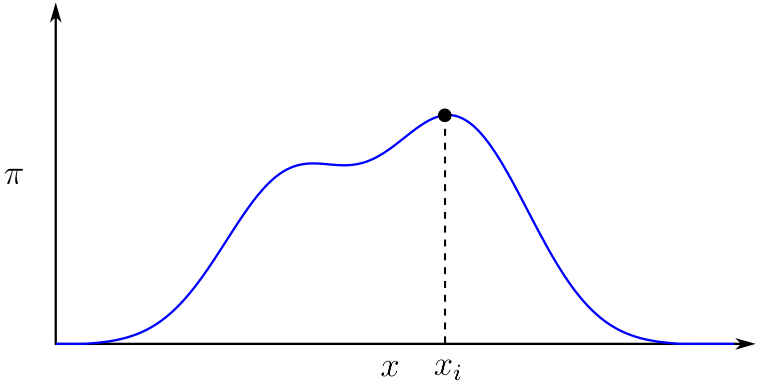
Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



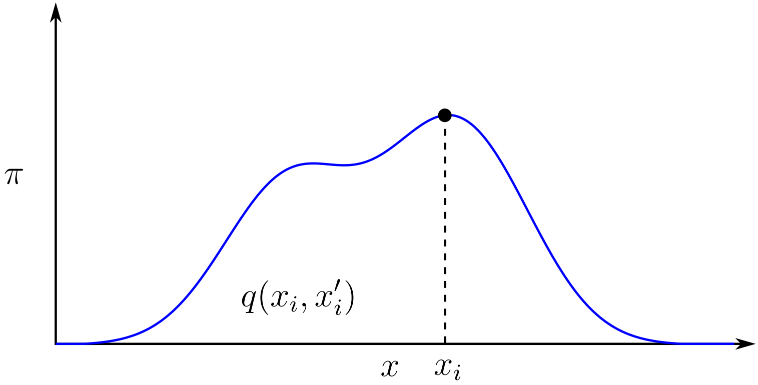
Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \dots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



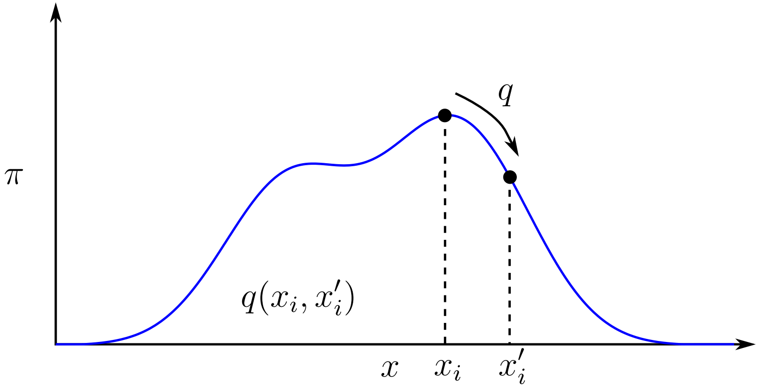
Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



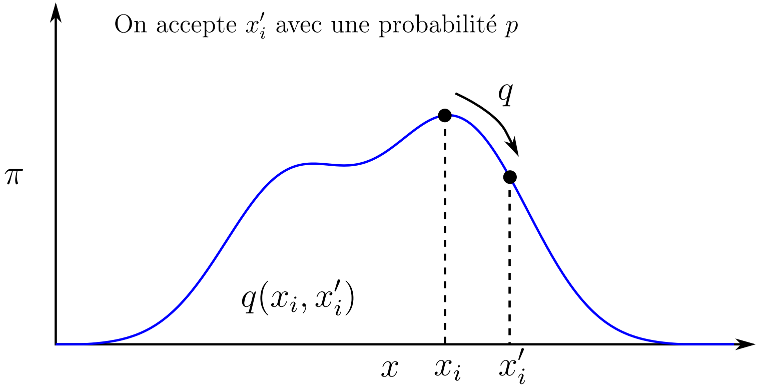
Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

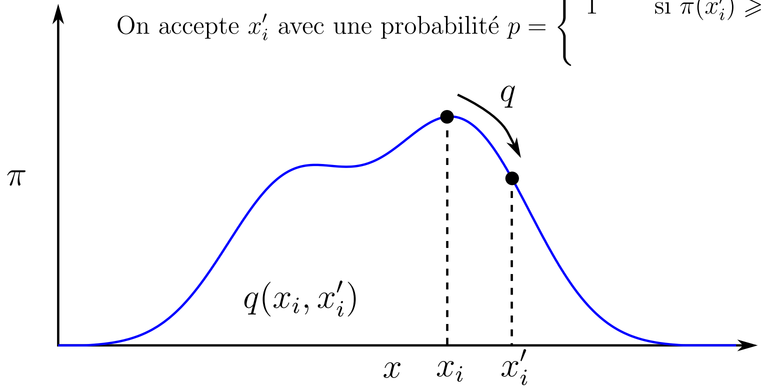
$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$



Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

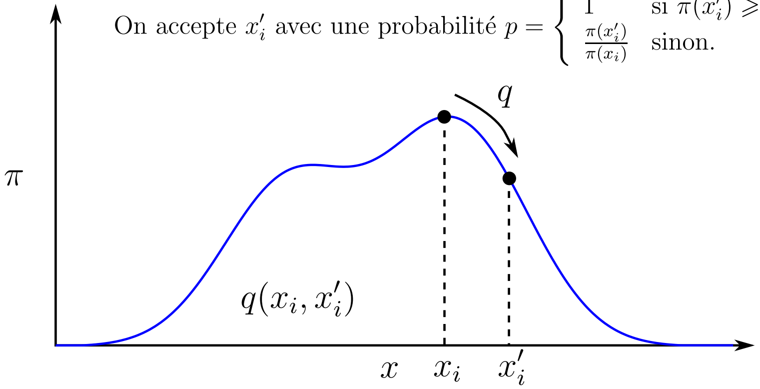
On accepte x_i' avec une probabilité $p = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(x_i') \geqslant \pi(x_i) \\ & \end{cases}$



Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

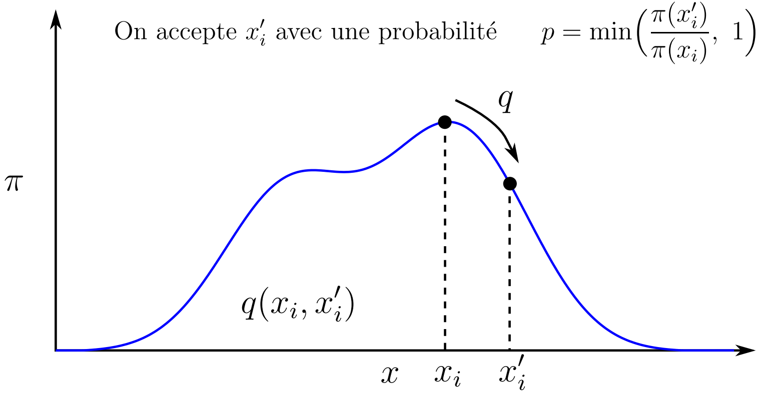
On accepte x'_i avec une probabilité $p = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(x'_i) \geqslant \pi(x_i) \\ \frac{\pi(x'_i)}{\pi(x_i)} & \text{sinon.} \end{cases}$



Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

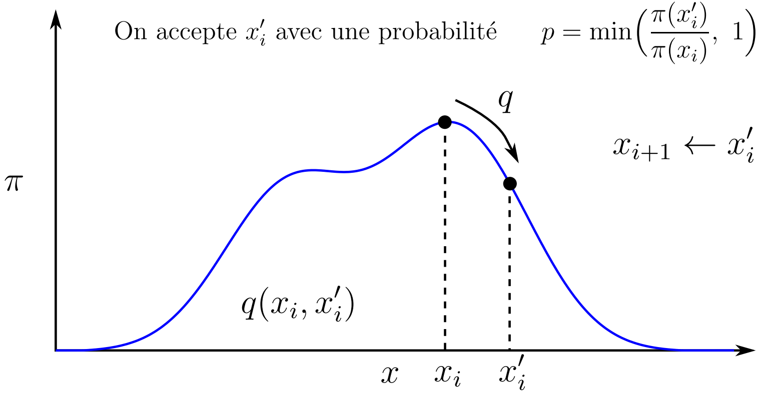
On accepte x_i' avec une probabilité $\quad p = \min\left(\frac{\pi(x_i')}{\pi(x_i)},\ 1\right)$

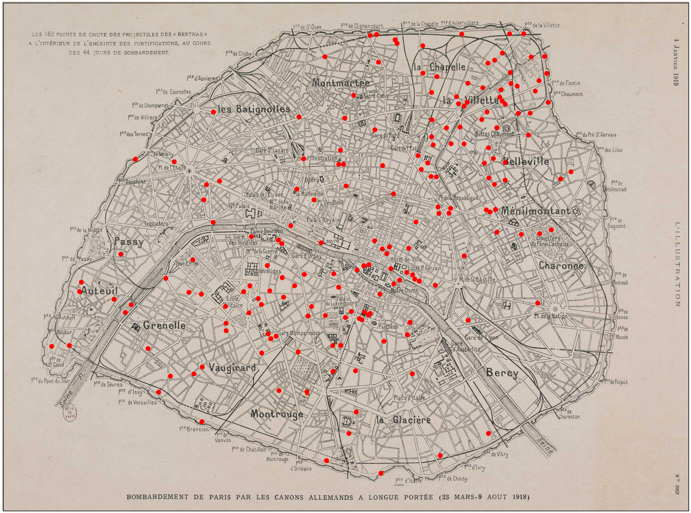


Metropolis-Hastings MCMC (Markov Chain - Monte Carlo)

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\infty}{\sim} \pi$$

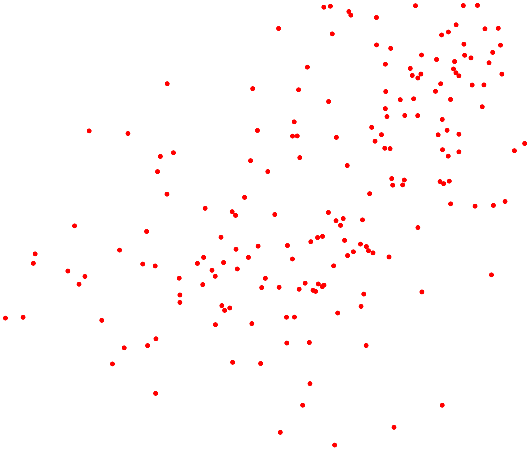
On accepte x_i' avec une probabilité $\quad p = \min\left(\frac{\pi(x_i')}{\pi(x_i)},\ 1\right)$



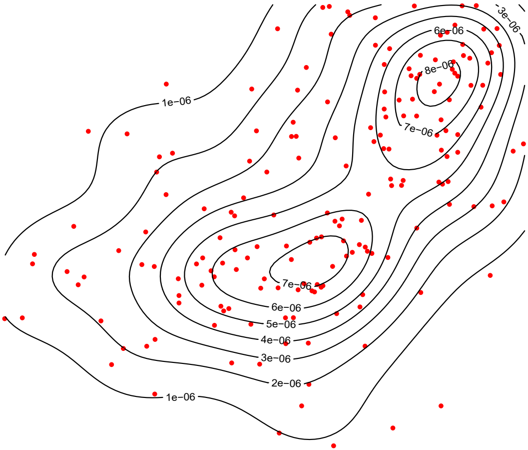


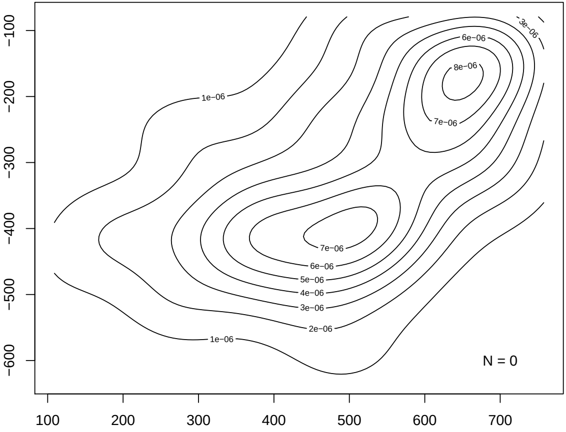
http://quotidien-parisiens-grande-guerre.paris.fr

Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

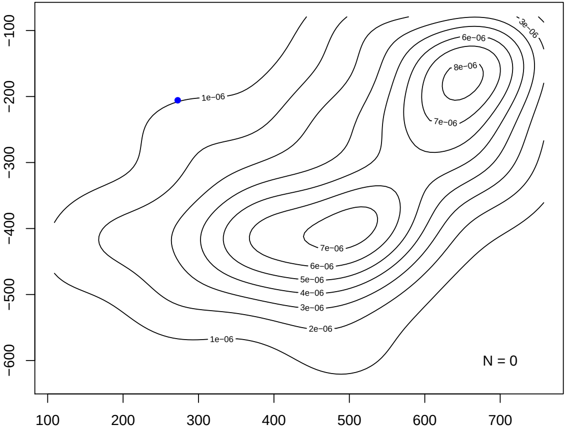


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



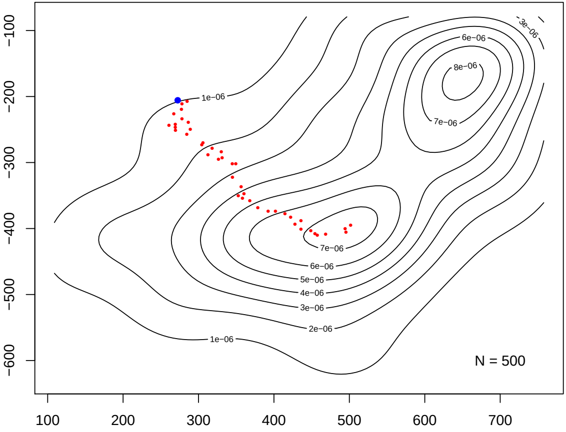


1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 0
−100
−200
−300
−400
−500
−600
100
200
300
400
500
600
700

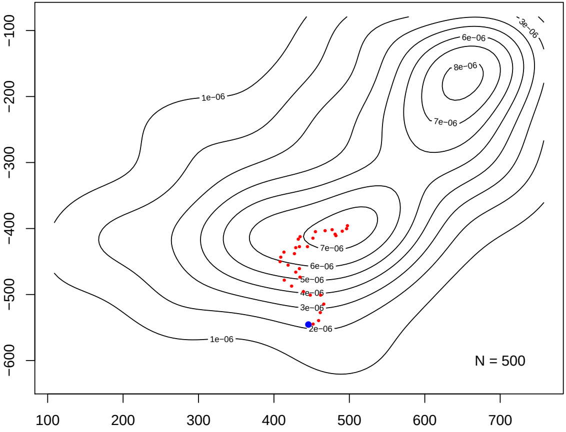


−100
−200
−300
−400
−500
−600
100
200
300
400
500
600
700
1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 0

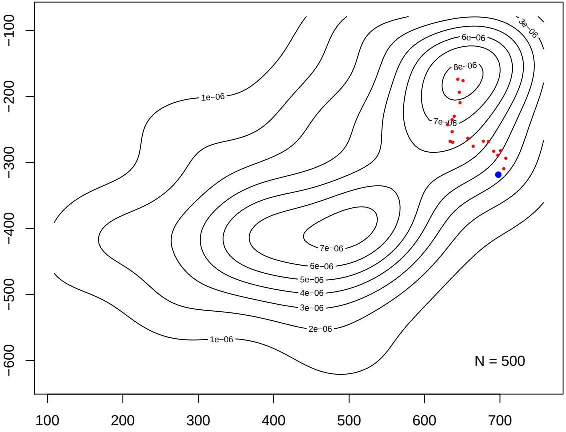
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



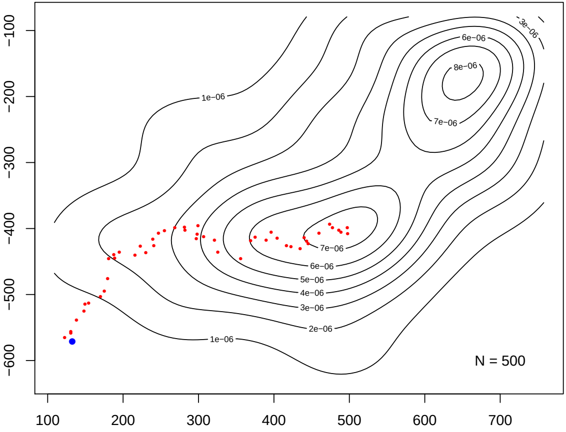
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

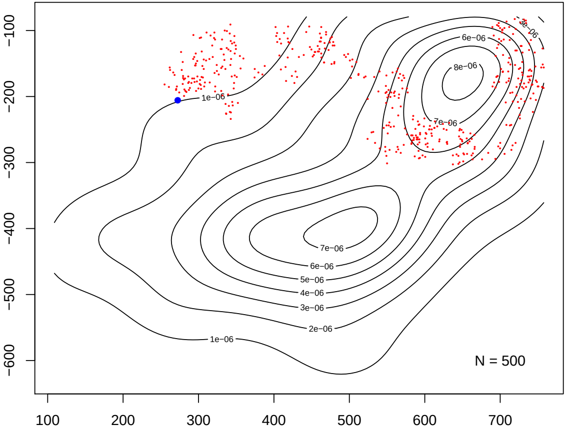


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

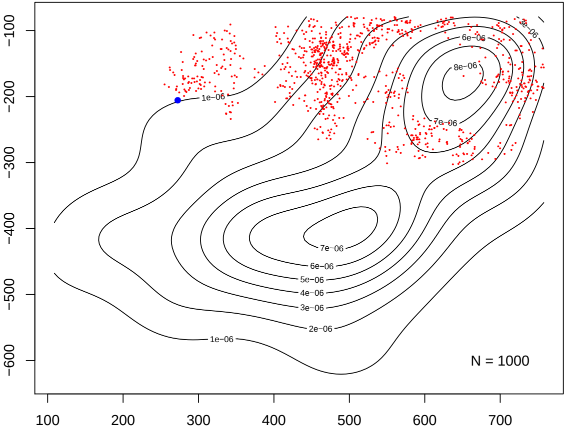


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

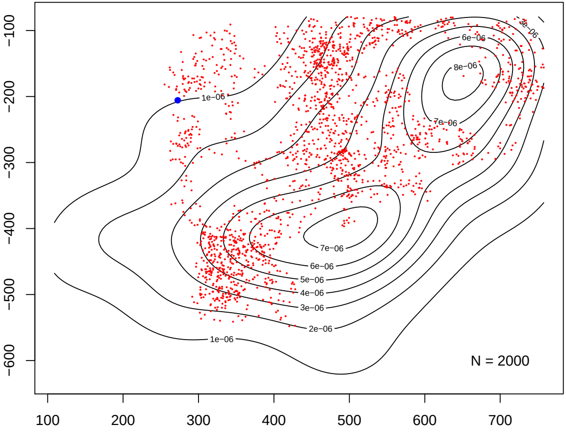


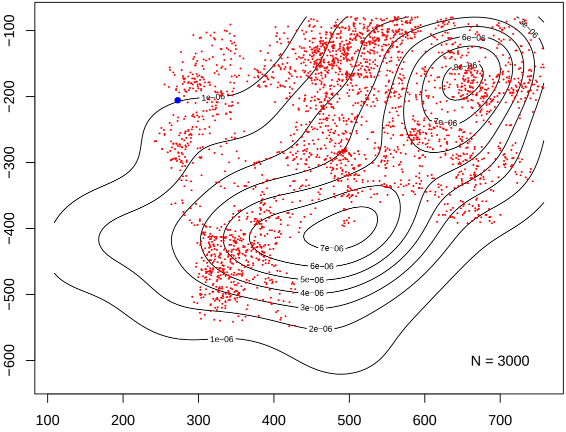


−100
−200
−300
−400
−500
−600
100
200
300
400
500
600
700
1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 500



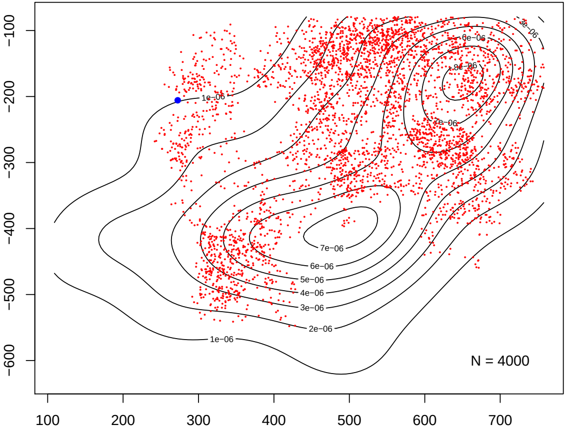
1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 1000
100
200
300
400
500
600
700
−100
−200
−300
−400
−500
−600


1e−06
1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
6e−06
8e−06
7e−06
3e−06
N = 2000
−100
−200
−300
−400
−500
−600
100
200
300
400
500
600
700

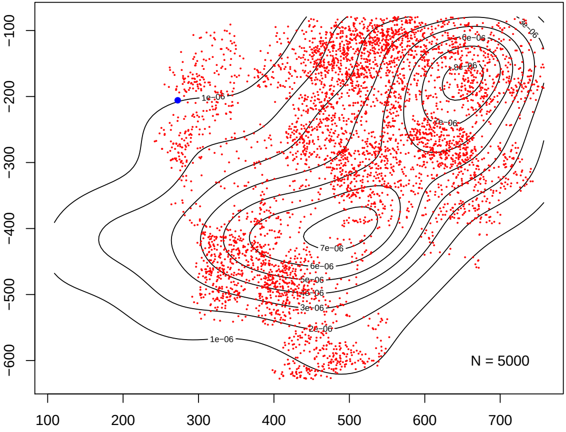


1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 3000
−100
−200
−300
−400
−500
−600
100
200
300
400
500
600
700

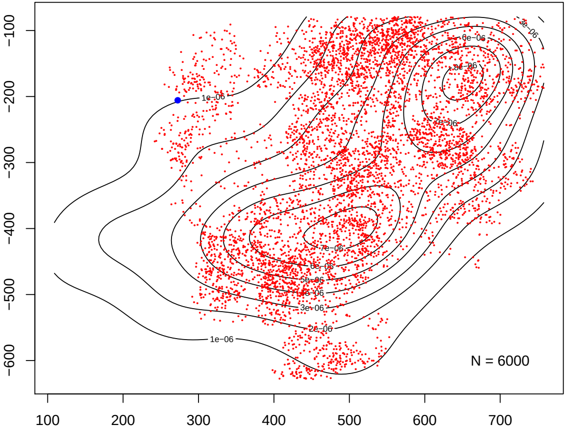
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



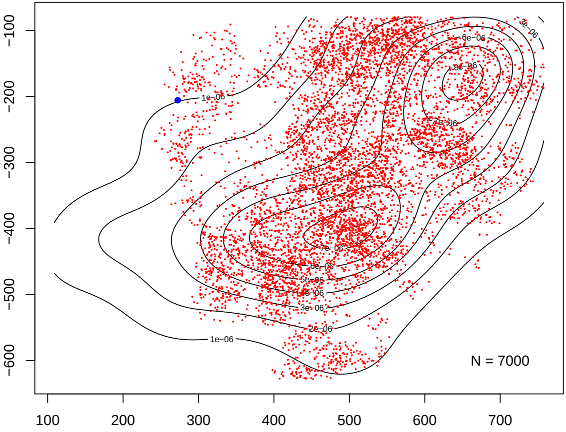
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



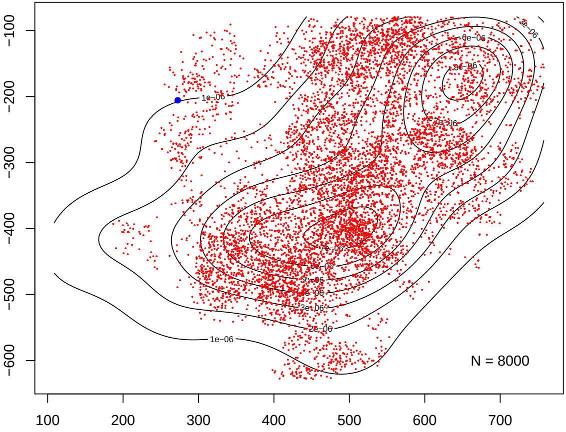
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

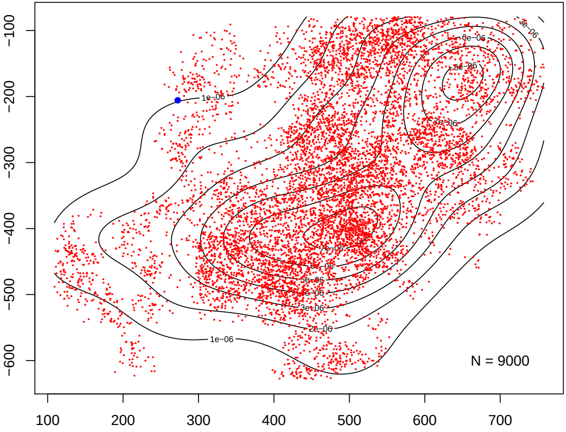


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

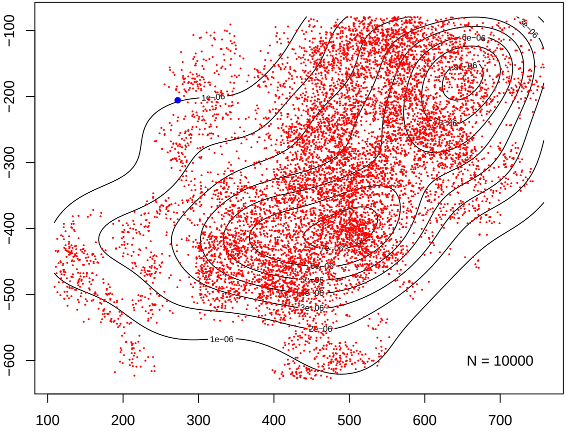


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

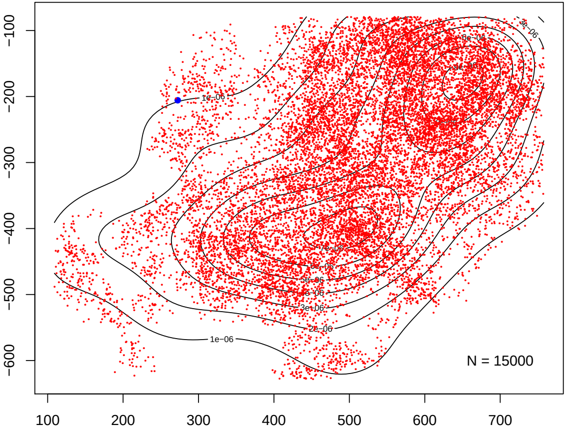



1e−06
2e−06
3e−06
6e−06
7e−06
N = 9000
100
200
300
400
500
600
700
−100
−200
−300
−400
−500
−600

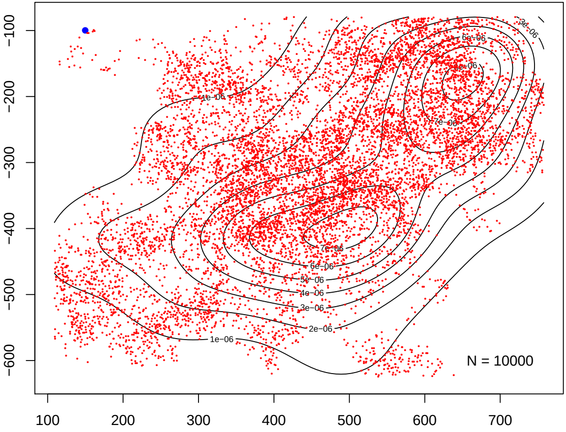
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



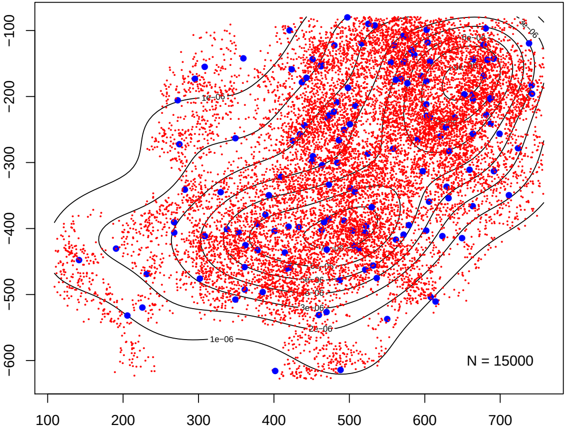
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

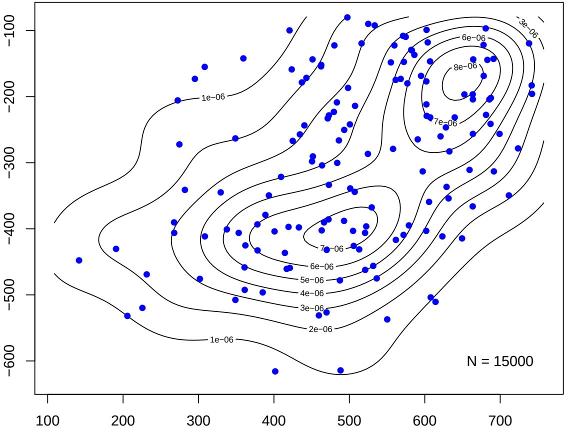


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



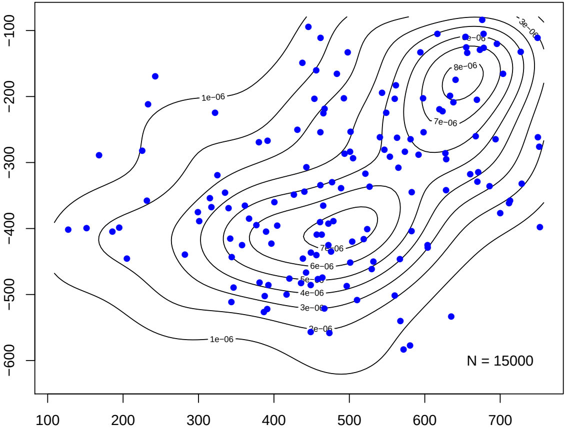
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



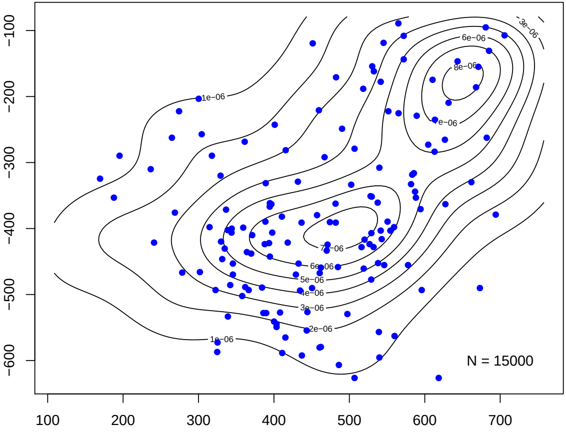


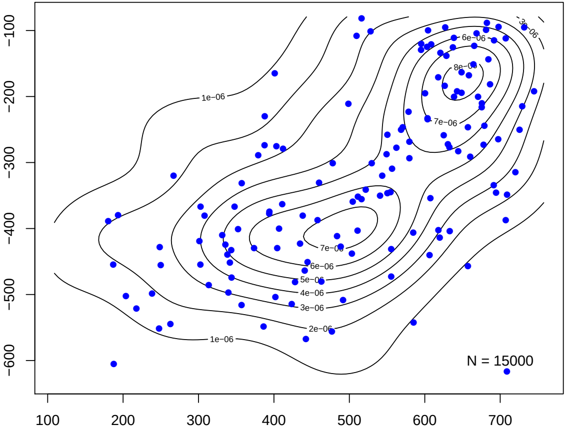
1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 15000
−100
−200
−300
−400
−500
−600
100
200
300
400
500
600
700

Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

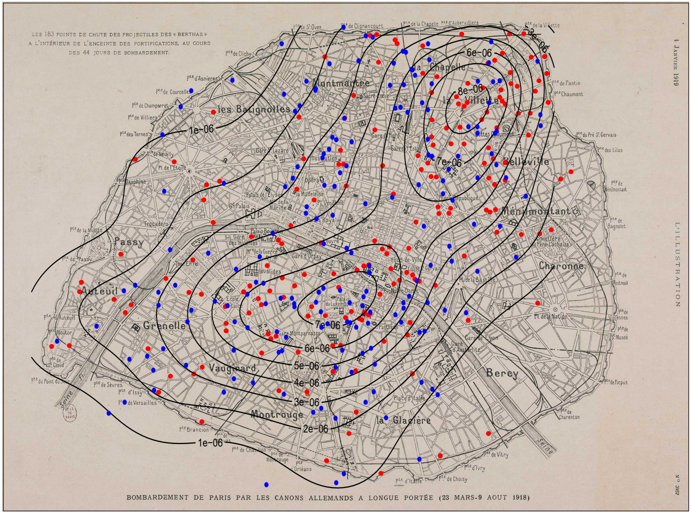


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



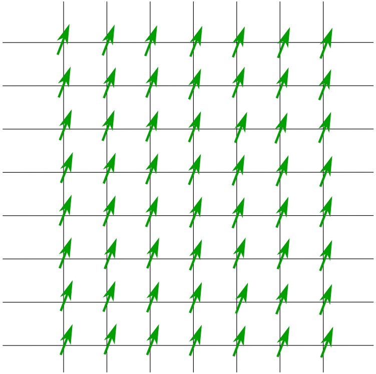

1e−06
2e−06
3e−06
4e−06
5e−06
6e−06
7e−06
8e−06
N = 15000
100
200
300
400
500
600
700
−100
−200
−300
−400
−500
−600

Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

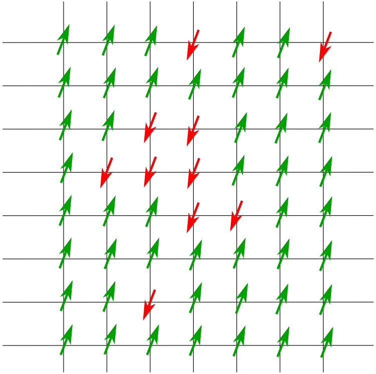


http://quotidien-parisiens-grande-guerre.paris.fr

Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

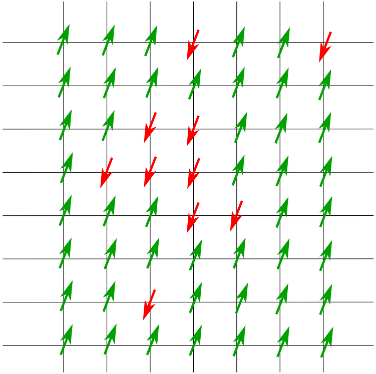


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$

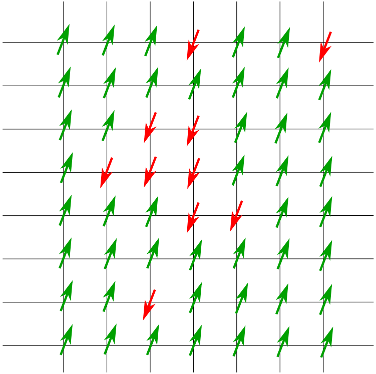


$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$

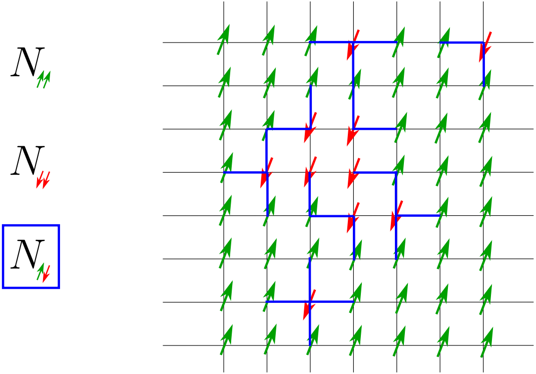
$N_{\uparrow\uparrow}$

$N_{\downarrow\downarrow}$

$N_{\uparrow\downarrow}$



$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$

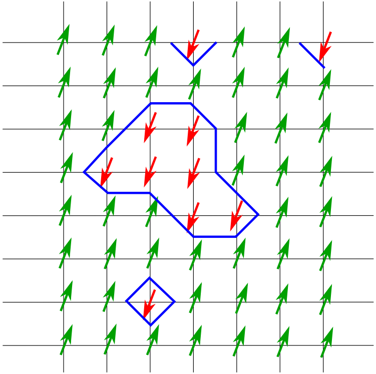


$$\pi(x) \propto \exp(-kE)$$

$N_{\uparrow\uparrow}$

$N_{\downarrow\downarrow}$

$\boxed{N_{\uparrow\downarrow}}$



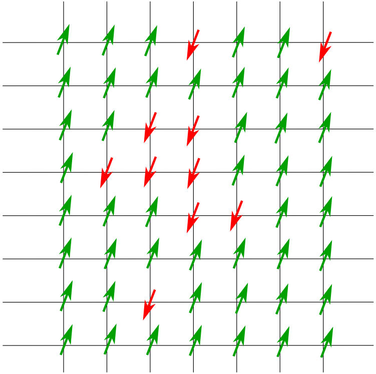
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-k N_{\uparrow\downarrow})$$

$N_{\uparrow\uparrow}$

$N_{\downarrow\downarrow}$

$N_{\uparrow\downarrow}$



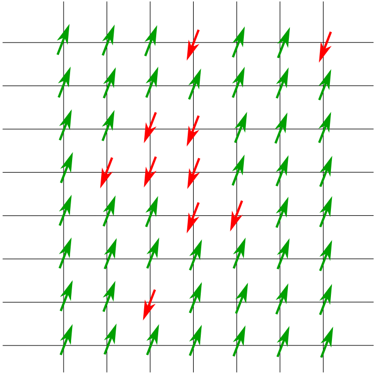
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-k N_{\uparrow\downarrow})$$

$N_{\uparrow\uparrow}$

$N_{\downarrow\downarrow}$

$N_{\uparrow\downarrow}$



$$N_{\uparrow\downarrow} = 23$$

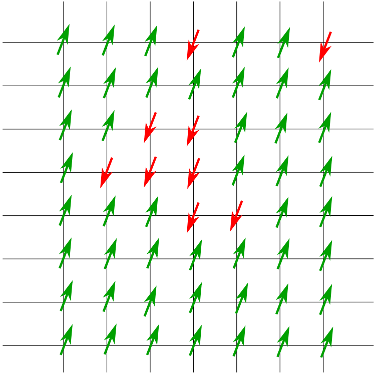
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-k N_{\uparrow\downarrow})$$

$N_{\uparrow\uparrow}$

$N_{\downarrow\downarrow}$

$N_{\uparrow\downarrow}$



$$N_{\uparrow\downarrow} = 19$$

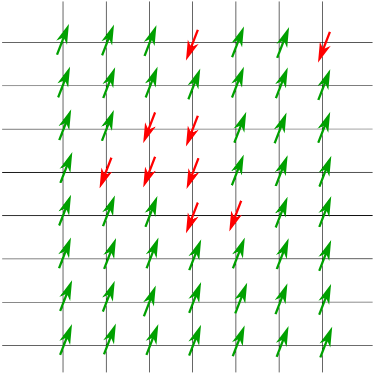
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

$$\pi(x) \propto \exp(-k N_{\uparrow\downarrow})$$

$N_{\uparrow\uparrow}$

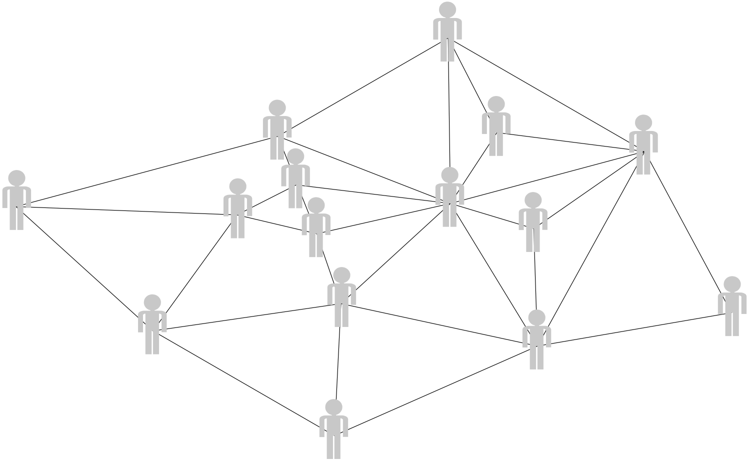
$N_{\downarrow\downarrow}$

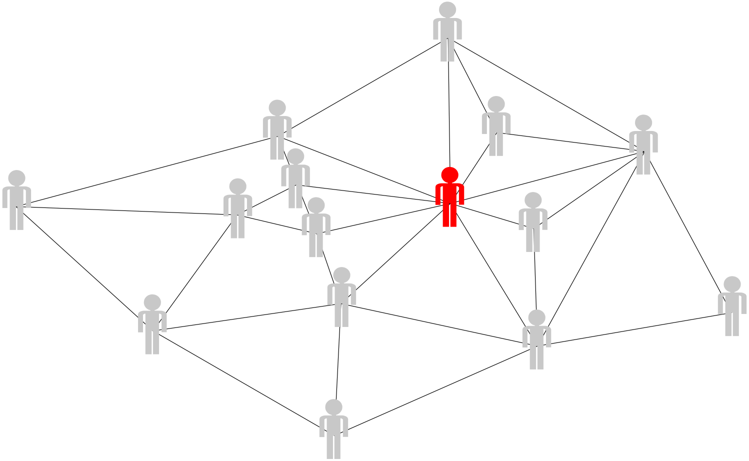
$N_{\uparrow\downarrow}$



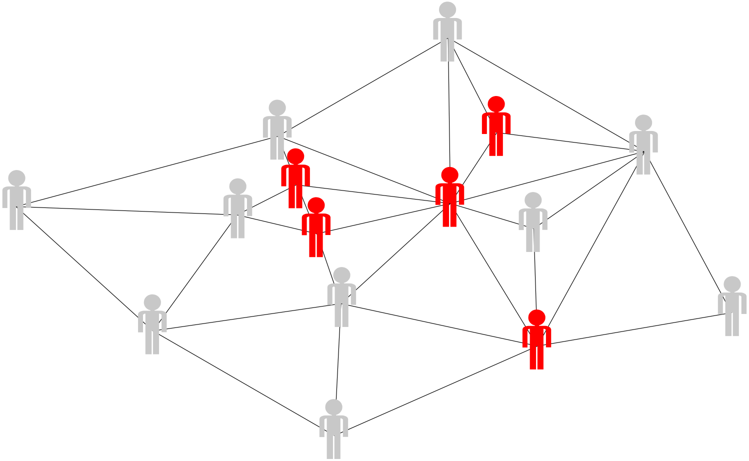
$$\frac{\pi(x')}{\pi(x)} = \frac{\exp(-19k)}{\exp(-23k)} = \exp(4k)$$

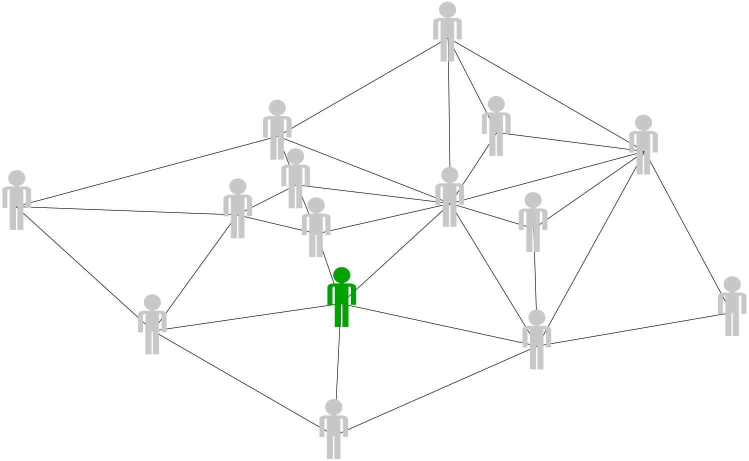
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



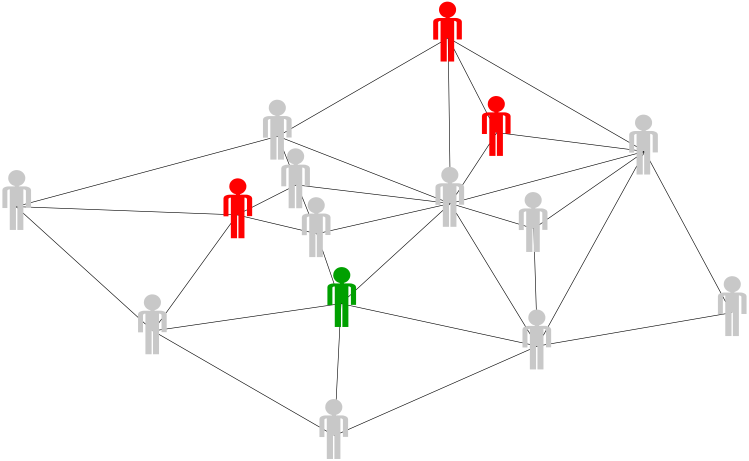


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

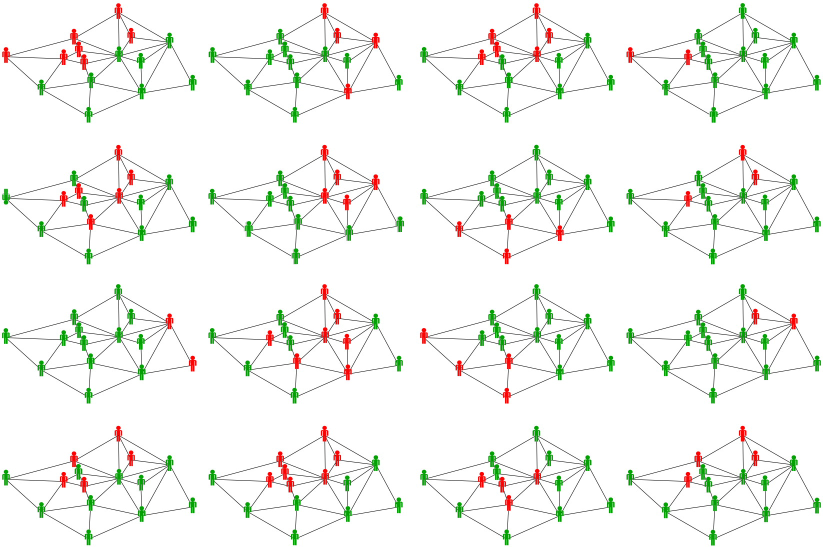


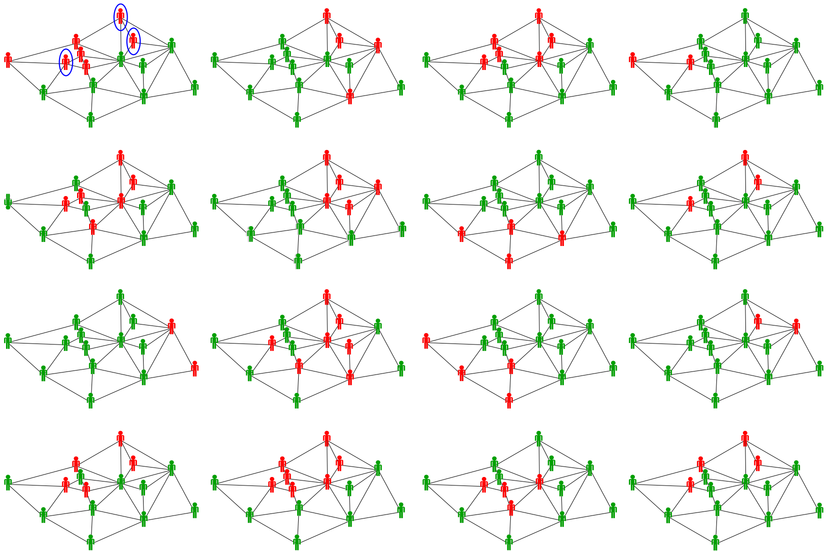


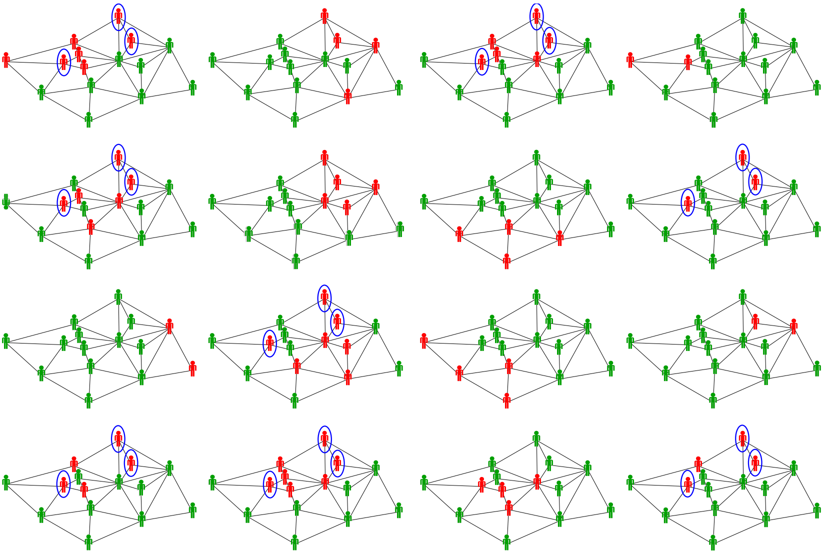
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



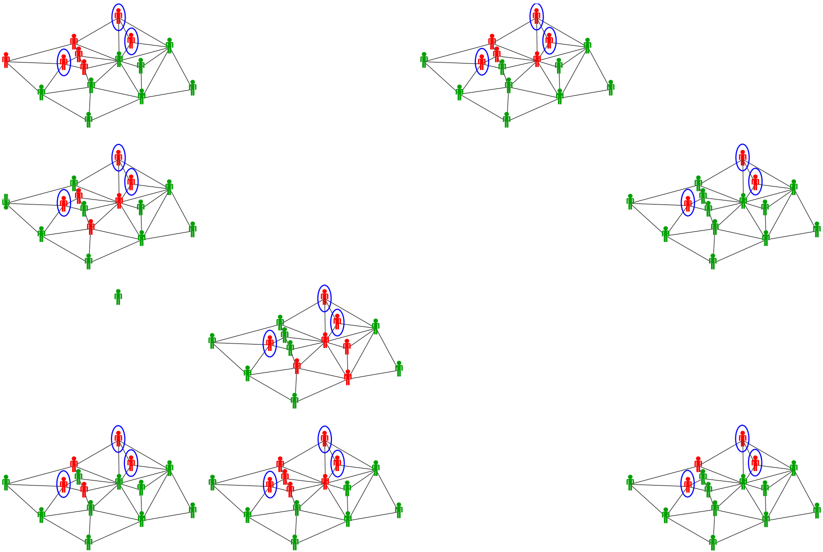
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$



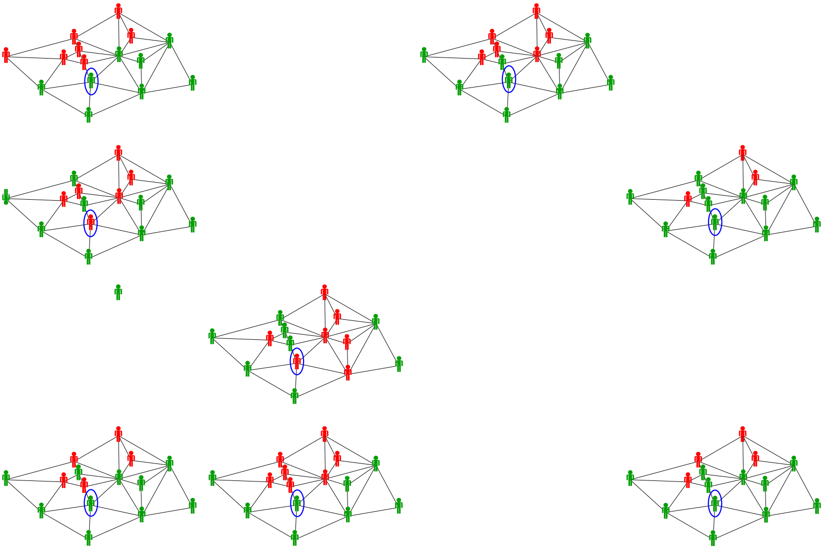


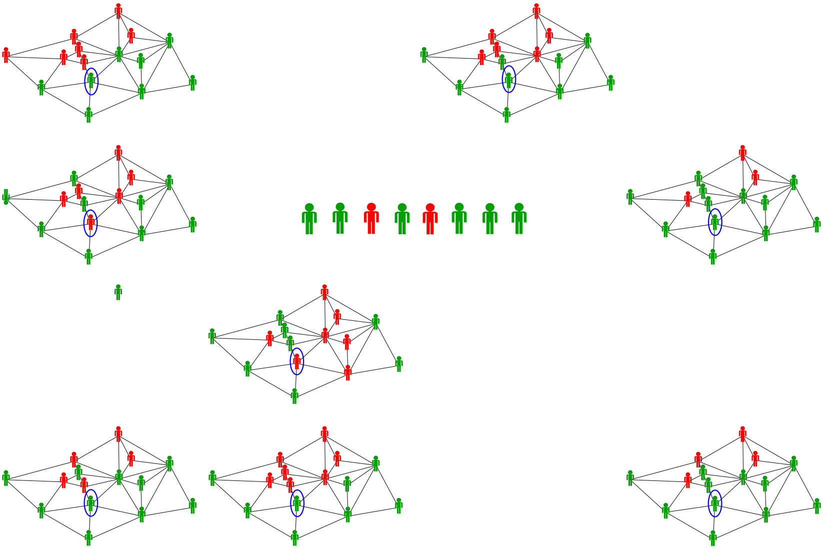


Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$

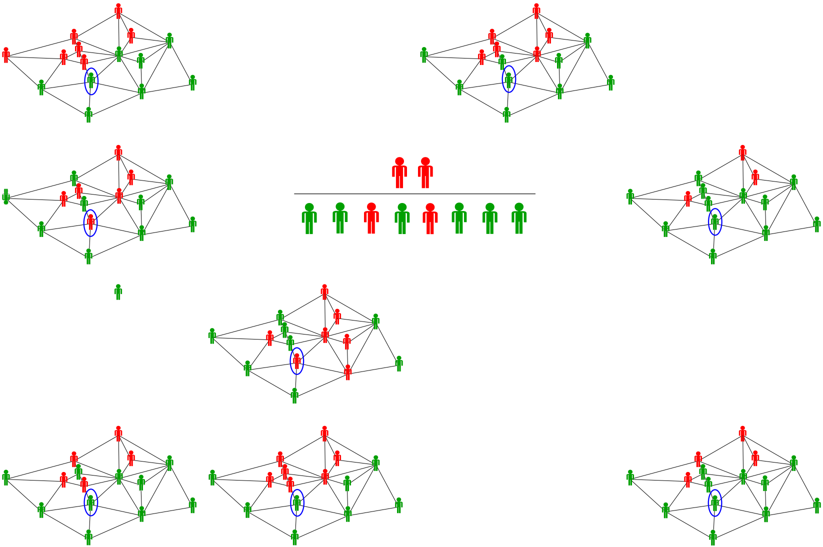


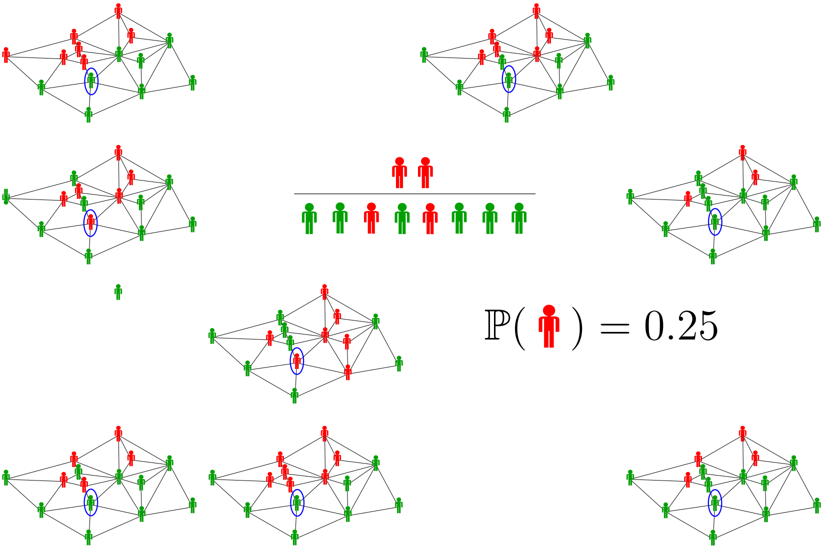
Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$





Simulation : densité de probabilité $\pi(x)$ ou loi $P_X(X = x)$




$\mathbb{P}(\;) = 0.25$

Références bibliographiques

[1] La Guerre du Péloponnèse, ou Histoire de la guerre du Péloponnèse, ouvrage de l'historien athénien Thucydide écrit à la fin du V e siècle av. J. -C

[2] Samueli, J. J., & Boudenot, J. C. (2009). Histoire des probabilités : des origines à 1900. Ellipses

[3] Barbin, E., Lamarche J.P. (2004). Histoires de probabilités et de statistiques. Editions Ellipses.

[4] Tieszen, R. L., & Tieszen, R. (2011). After Gödel : Platonism and rationalism in mathematics and logic. Oxford University Press

[5] Behrisch, L. (2016). Statistics and Politics in the 18th Century. Historical Social Research/Historische Sozialforschung, 238-257.

[6] Johnson, A. (1995). Geometric probability. Geometry and its applications. COMAP, Inc.

[7] https ://www.statistics.com/statistics-at-war/

[8] https ://www.eadan.net/blog/german-tank-problem/

[9] Smith, G. (2014). Standard deviations : Flawed assumptions, tortured data, and other ways to lie with statistics. Abrams.

[10] Koller, D., & Friedman, N. (2009). Probabilistic graphical models : principles and techniques. MIT press.

Références bibliographiques

[11] Tribus, M. (2016). Rational Descriptions, Decisions and Designs : Pergamon Unified Engineering Series. Elsevier.

[12] Daly, R., Shen, Q., & Aitken, S. (2011). Learning Bayesian networks : approaches and issues. The knowledge engineering review, 26(2), 99-157.

[13] Lecoutre, J. P. (2002). Statistique et probabilités. Dunod.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. there was some unprocessed data that should have been added the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page go away, because LaTeX now knows how many pages to expect this document.