1　剰余の定理

$P(a)$ を a に関する多項式とする

$$P(a) = (a-k)Q(a) + R \qquad (P(a) \text{ を } (a-k) \text{ で割る})$$

ここで、$a = k$ を代入すると

$$P(k) = (k-k)Q(k) + R$$

$$P(k) = R = 0$$

$$\text{よって } P(a) = (a-k)Q(a) + P(k)$$

$$\text{つまり } P(k) = 0 \Leftrightarrow P(a) \text{ を } (a-k) \text{ で割り切れる。}$$

具体例

$P(a) = a^n - b^n$ とすると、$P(b) = b^n - b^n = 0$ なので、$(a-b)$ は $a^n - b^n$を割り切れる

実際に、$a^n - b^n = (a-b)(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k)$

$n = 3$ のとき、$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2　$-1 \times -1 = 1$ の証明

$$-1 + 1 = 0 \qquad (\text{マイナスの定義} -a + a = 0)$$

$$-1 \times (-1 + 1) = -1 \times 0 \qquad (-1 \text{ をかける})$$

$$(-1) \times (-1) + (-1) \times 1 = 0 \qquad (\text{分配法則と、} a \times 0 = 0)$$

$$(-1) \times (-1) + (-1) = 0 \qquad (a \times 1 = a)$$

$$(-1) \times (-1) = 1 \qquad (\text{両辺に } 1 \text{ を足す})$$