

関数

2次関数

2次関数を $y = a(x - p)^2 + q$ で表すことを考える。

$a > 0$ の場合、 $(x - p)^2$ は必ず0以上なので、 $(x - p)$ が0の時、yは最小値、qとなる。

$a < 0$ の場合、 $(x - p)$ が0の時、yは最大値、qとなる

$(x - p)$ は $x = p$ のとき0になるので、2次関数を $y = a(x - p)^2 + q$ で表せる時、その頂点は (p, q) となる

平方完成

2次関数を $y = a(x - p)^2 + q$ で表現できると頂点の情報がえられる。

そこで、一般的な2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を上記の形に変換する方法を考える。これを平方完成という。

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\y &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\y &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\end{aligned}$$

したがって、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点は

$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ となる。

なお、3次関数以上はどうするかというと、微分する。

解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{ただし } a \neq 0)$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0 \quad (\text{a で } < < \text{る})$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \quad (\text{a を分配})$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad (\text{両辺の root をとる})$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sqrt{A^2} = |A| \text{ より}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) \geq 0 \text{ のとき } \left|x + \frac{b}{2a}\right| = x + \frac{b}{2a} \quad (\text{絶対値なので場合分けする})$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& \left(x + \frac{b}{2a} \right) < 0 \text{ のとき } \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right| = -\left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (\text{絶対値が負の場合}) \\
& -\left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2} \\
(1), (2) \text{ より } & x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$