

数

ルート

\sqrt{a} は 2乗して a になる数のうち正のものを表す(定義)

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

2乗して a^2 になる数は a と $-a$ がある。 $a < 0$ のとき ($a = -2$)、2乗して 4 になる正の数は $-a$ ((-2)) とする必要があり、この操作を絶対値で表現している

絶対値

以下が成り立つ

$$\begin{aligned}|a| &= n \Leftrightarrow a = n \vee a = -n \\ |a| &< n \Leftrightarrow -n < a < n \\ |a| &> n \Leftrightarrow a < -n \vee n < a\end{aligned}$$

関数

2次関数

2次関数を $y = a(x - p)^2 + q$ で表すことを考える。

$a > 0$ の場合、 $(x - p)^2$ は必ず 0 以上なので、 $(x - p)$ が 0 の時、y は最小値、q となる。

$a < 0$ の場合、 $(x - p)$ が 0 の時、y は最大値、q となる

$(x - p)$ は $x = p$ のとき 0 になるので、2次関数を $y = a(x - p)^2 + q$ で表せる時、その頂点は (p, q) となる

平方完成

2次関数を $y = a(x - p)^2 + q$ で表現できることで頂点の情報をえられる。

そこで、一般的な 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を上記の形に変換する方法を考える。これを平方完成という。

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\ y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ y &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ y &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\end{aligned}$$

したがって、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点は

$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ となる。

なお、3次関数以上はどうするかというと、微分する。

解の公式

$$\begin{aligned}
 & ax^2 + bx + c = 0 && (\text{ただし } a \neq 0) \\
 & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0 && (a \text{ で } < < \text{る}) \\
 & a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0 \\
 & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 && (a \text{ を分配}) \\
 & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0 \\
 & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
 & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \\
 & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 & \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} && (\text{両辺の root をとる}) \\
 & \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} && \left(\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) \\
 & \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 & \sqrt{A^2} = |A| \text{ より} \\
 & \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 & \left(x + \frac{b}{2a}\right) \geq 0 \text{ のとき } \left|x + \frac{b}{2a}\right| = x + \frac{b}{2a} \text{ (絶対値なので場合分けする)} \\
 & x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 & x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 & x = \frac{-b + \sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} && (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x + \frac{b}{2a} \right) < 0 \text{ のとき } \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right| = -\left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (\text{絶対値が負の場合}) \\
& -\left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2} \\
(1),(2) \text{ より } & x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
& \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

行列

線形変換の表現行列

線形変換 f がどのような変換かは行列で表現できる。

座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の変換を考える。

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right\} \\
&= f\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= fx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + fy \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{線形性}) \\
&= xf \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yf \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表せる。

したがって、 $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が決まれば $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ も決まる。

ここで

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

と仮定する。すると

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) &= xf\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) + yf\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \\
&= x\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right) + y\left(\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right) \\
&= \left(\begin{matrix} ax \\ cx \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} by \\ dy \end{matrix}\right) \\
&= \left(\begin{matrix} ax + by \\ cx + dy \end{matrix}\right) \\
&= \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$f\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right), f\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right)$$

の場合、線形変換 f は行列を用いて以下のように表せる。

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$$

回転行列

$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ を座標 $\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ を θ 回転させる変換とする。

このとき変換 f を表現行列で表したい。

変換は $f\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right), f\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$ が決まれば、定まるのでそれを回転させることを考える。

$\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$ を θ 回転させると、定義より

$$f\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{matrix}\right)$$

$\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$ の θ 回転は、 $\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$ の $\theta + 90^\circ$ とみなせるので

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right) &= \left(\begin{matrix} \cos(\theta + 90^\circ) \\ \sin(\theta + 90^\circ) \end{matrix}\right) \\
&= \left(\begin{matrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{matrix}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$$

回転行列を利用した加法定理の証明

回転行列を用いて、加法定理が証明できる。

$(\alpha + \beta)$ 回転させる変換は、 α 回転させたのち、 β 回線させる変換と等しいと仮定する。すると、このことは以下の式で表現できる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

等しい行列は各成分が等しいので

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta
\end{aligned}$$