数

ルート

$\sqrt{a}$ は 2 乗して a になる数のうち正のものを表す(定義)

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

2 乗してa^2になる数は a と-a がある。$a < 0$のとき(a $= -2$)、2 乗して 4 になる正の数は$-a$(-(-2))とする必要があり、この操作を絶対値で表現している

絶対値

以下が成り立つ

$$\begin{aligned} |a| = n &\Leftrightarrow a = n \vee a = -n \\ |a| < n &\Leftrightarrow -n < a < n \\ |a| > n &\Leftrightarrow a < -n \vee n < a \end{aligned}$$

関数

2 次関数

2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表すことを考える。
$a > 0$の場合、$(x-p)^2$は必ず 0 以上なので、$(x-p)$が 0 の時、y は最小値、q となる。
$a < 0$の場合、$(x-p)$が 0 の時、y は最大値,q となる
$(x-p)$は$x = p$のとき 0 になるので、2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表せる時、その頂点は(p, q)となる

平方完成

2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表現できると頂点の情報がえられる。
そこで、一般的な 2 次関数$y = ax^2 + bx + c$を上記の形に変換する方法を考える。これを平方完成という。

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ y &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ y &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

したがって、2 次関数$y = ax^2 + bx + c$の頂点は
$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$となる。
なお、3 次関数以上はどうするかというと、微分する。

解の公式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\text{ただし}a\neq 0)$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0 \qquad (\text{a でくくる})$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 \qquad (\text{a を分配})$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad (\text{両辺の root をとる})$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \qquad \left(\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\sqrt{A^2}=|A|\ \text{より}$$

$$\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\geq 0\ \text{のとき}\ \left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right|=x+\frac{b}{2a}\ (\text{絶対値なので場合分けする})$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)<0 \text{ のとき } \left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right| = -\left(x+\frac{b}{2a}\right) \quad \text{(絶対値が負の場合)}$$

$$-\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2}$$

$$(1),(2)\text{より } x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

行列

線形変換の表現行列

線形変換 f がどのような変換かは行列で表現できる。
座標 $\binom{x}{y}$ の変換を考える。

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\} \\ &= f\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \\ &= fx\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + fy\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{(線形性)} \\ &= xf\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。
したがって、$f\binom{1}{0}$と$f\binom{0}{1}$が決まれば$f\binom{x}{y}$も決まる。
ここで

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

と仮定する。すると

$$
\begin{aligned}
f\binom{x}{y} &= xf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + yf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}ax\\cx\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}by\\dy\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\binom{x}{y}
\end{aligned}
$$

よって

$$
f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}
$$

の場合、線形変換fは行列を用いて以下のように表せる。

$$
f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\binom{x}{y}
$$

回転行列

$f\binom{x}{y}$を座標$\binom{x}{y}$をθ回転させる変換とする。
このとき変換fを表現行列で表したい。
変換は$f\binom{1}{0}, f\binom{0}{1}$が決まれば、定まるのでそれぞれを回転させることを考える。

$\binom{1}{0}$をθ回転させると、定義より

$$
f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}
$$

$\binom{0}{1}$のθ回転は、$\binom{1}{0}$の$\theta + 90°$とみなせるので

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos(\theta+90°)\\\sin(\theta+90°)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって

$$
f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\binom{x}{y}
$$

回転行列を利用した加法定理の証明
回転行列を用いて、加法定理が証明できる。
$(\alpha+\beta)$回転させる変換は、α回転させたのち、β回線させる変換と等しいと仮定する。
すると、このことは以下の式で表現できる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

等しい行列は各成分が等しいので

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$