関数

2 次関数

2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表すことを考える。
$a > 0$の場合、$(x-p)^2$は必ず 0 以上なので、$(x-p)$が 0 の時、y は最小値、q となる。
$a < 0$の場合、$(x-p)$が 0 の時、y は最大値,q となる
$(x-p)$は$x = p$のとき 0 になるので、2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表せる時、その頂点は
(p, q)となる

平方完成
2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表現できると頂点の情報がえられる。
そこで、一般的な 2 次関数$y = ax^2 + bx + c$を上記の形に変換する方法を考える。これを平方完成という。

$$
\begin{aligned}
&y = ax^2 + bx + c \\
&y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&y = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

したがって、2 次関数$y = ax^2 + bx + c$の頂点は
$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$となる。
なお、3 次関数以上はどうするかというと、微分する。

解の公式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{(ただし}a\neq 0\text{)}$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0 \qquad \text{(a でくくる)}$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 \qquad \text{(a を分配)}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \text{(両辺の root をとる)}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \qquad \left(\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\sqrt{A^2}=|A| \text{ より}$$

$$\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\geq 0 \text{ のとき } \left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right|=x+\frac{b}{2a} \quad \text{(絶対値なので場合分けする)}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1}$$

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)<0$ のとき $\left|\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\right| = -\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ (絶対値が負の場合)

$$\begin{aligned}
-\left(x+\frac{b}{2a}\right) &= \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x+\frac{b}{2a} &= -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)
\end{aligned}$$

(1),(2)より $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$