数

ルート

$\sqrt{a}$ は 2 乗して a になる数のうち正のものを表す(定義)

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

2 乗してa^2になる数は a と-a がある。$a < 0$のとき(a $= -2$)、2 乗して 4 になる正の数は$-a$(--2))とする必要があり、この操作を絶対値で表現している

絶対値

以下が成り立つ

$$|a| = n \Leftrightarrow a = n \vee a = -n$$
$$|a| < n \Leftrightarrow -n < a < n$$
$$|a| > n \Leftrightarrow a < -n \vee n < a$$

行列

線形変換の表現行列

線形変換 f がどのような変換かは行列で表現できる。
座標 $\binom{x}{y}$ の変換を考える。

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\} \\ &= f\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \\ &= fx\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + fy\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(\text{線形性}) \\ &= xf\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。
したがって、$f\binom{1}{0}$と$f\binom{0}{1}$が決まれば$f\binom{x}{y}$も決まる。
ここで

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

と仮定する。すると

$$
\begin{aligned}
f\binom{x}{y} &= xf\binom{1}{0} + yf\binom{0}{1} \\
&= x\binom{a}{c} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\
&= \binom{ax}{cx} + \begin{pmatrix} by \\ dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{x}{y}
\end{aligned}
$$

よって

$$
f\binom{1}{0} = \binom{a}{c}, f\binom{0}{1} = \binom{b}{d}
$$

の場合、線形変換fは行列を用いて以下のように表せる。

$$
f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{x}{y}
$$

回転行列

$f\binom{x}{y}$を座標$\binom{x}{y}$をθ回転させる変換とする。
このとき変換fを表現行列で表したい。
変換は$f\binom{1}{0}, f\binom{0}{1}$が決まれば、定まるのでそれぞれを回転させることを考える。
$\binom{1}{0}$をθ回転させると、定義より

$$
f\binom{1}{0} = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}
$$

$\binom{0}{1}$のθ回転は、$\binom{1}{0}$の$\theta + 90°$とみなせるので

$$
\begin{aligned}
f\binom{0}{1} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + 90°) \\ \sin(\theta + 90°) \end{pmatrix} \\
&= \binom{-\sin\theta}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

よって

$$
f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y}
$$

回転行列を利用した加法定理の証明
回転行列を用いて、加法定理が証明できる。
$(\alpha + \beta)$回転させる変換は、α回転させたのち、β回線させる変換と等しいと仮定する。
すると、このことは以下の式で表現できる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

等しい行列は各成分が等しいので

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$