行列

線形変換の表現行列

線形変換 f がどのような変換かは行列で表現できる。
座標 $\binom{x}{y}$ の変換を考える。

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= f\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\} \\
&= f\{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\} \\
&= fx\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+fy\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(\text{線形性}) \\
&= xf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+yf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表せる。
したがって、$f\binom{1}{0}$と$f\binom{0}{1}$が決まれば$f\binom{x}{y}$も決まる。
ここで

$$
f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}
$$

と仮定する。すると

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= xf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+yf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}ax\\cx\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}by\\dy\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって

$$
f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}
$$

の場合、線形変換fは行列を用いて以下のように表せる。

$$
f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}
$$

回転行列

$f\binom{x}{y}$を座標$\binom{x}{y}$をθ回転させる変換とする。
このとき変換fを表現行列で表したい。
変換は$f\binom{1}{0}, f\binom{0}{1}$が決まれば、定まるのでそれぞれを回転させることを考える。

$\binom{1}{0}$をθ回転させると、定義より

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$\binom{0}{1}$のθ回転は、$\binom{1}{0}$の$\theta + 90°$とみなせるので

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos(\theta + 90°)\\ \sin(\theta + 90°)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

回転行列を利用した加法定理の証明

回転行列を用いて、加法定理が証明できる。
$(\alpha + \beta)$回転させる変換は、α回転させたのち、β回線させる変換と等しいと仮定する。
すると、このことは以下の式で表現できる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

等しい行列は各成分が等しいので

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$