関数

2 次関数

2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表すことを考える。
$a > 0$の場合、$(x-p)^2$は必ず 0 以上なので、$(x-p)$が 0 の時、y は最小値、q となる。
$a < 0$の場合、$(x-p)$が 0 の時、y は最大値,q となる
$(x-p)$は$x = p$のとき 0 になるので、2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表せる時、その頂点は(p, q)となる

平方完成
2 次関数を$y = a(x-p)^2 + q$で表現できると頂点の情報がえられる。
そこで、一般的な 2 次関数$y = ax^2 + bx + c$を上記の形に変換する方法を考える。これを平方完成という。

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
y &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
y &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

したがって、2 次関数$y = ax^2 + bx + c$の頂点は
$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$となる。
なお、3 次関数以上はどうするかというと、微分する。