Точкови и интервални оценки. Проверка на хипотези.

- Точкова оценка на θ: $\hat{\theta}$ - функция от данните/наблюденията (статистика). Добри свойства на $\hat{\theta}$: 1. неизместеност: $E(\hat{\theta}) = \theta$; 2. $\hat{\theta}$ да има малка дисперсия за големи извадки.
  Пример: да се докаже неизместеност на $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ и $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$; $Var\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$

- Метод на моментите за намиране на точкови оценки: $M_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^k}{n}$ е оценка на $E(X^k)$, т.е. съставят се толкова уравнения, колкото параметъра има за оценяване.
  Пример: Засадени са 5 реда по 20 дървета и на следващата година се преброяват оцелелите дръвчета във всеки ред (18, 17, 15, 19, 20). За оценката на вероятността за оцеляване на едно дръвче получаваме $\hat{p} = \bar{X}/20 = 17.8/20 = 0.89$.

- Метод на максималното правдоподобие: функция на правдоподобие $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$, $f(x)$ е плътността на X. $\hat{\theta}$ е стойността, която максимизира $L(\theta)$ (или $\ln L(\theta)$).
  Пример: Взети са n проби от водата на една река и са преброени коли бактериите във всяка от тях - поасоново разпределени с параметър k. Да се намери МПО на k.
  Пример: Да се намери МПО за μ и σ^2 на извадка от нормално разпределение.

- Ако $X_1, \ldots X_n$ е случайна извадка от $N(\mu, \sigma^2)$, то $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

- Интервална оценка: $[L_1, L_2]$, такъв, че $P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1-\alpha$ се нарича $100(1-\alpha)\%$-ен доверителен интервал за параметъра θ.

- Доверителен интервал за μ при известно σ^2: използваме, че $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Оттук $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ е $100(1-\alpha)\%$-ен доверителен интервал за параметъра μ (когато X е нормално разпределена или за голямо n от ЦГТ).
  Пример: При оценка на действието на даден медикамент за лечение на левкемия е измерено средно време на преживяемост на пациентите след поставяне на диагнозата 13 месеца и дисперсия 9. За 95%-ен доверителен интервал на средното време на преживяемост на пациентите вземали даденото лекарство получаваме $P(\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n}) = 0.95$. Ако за $n = 16$ пациента е измерено средно $\bar{x} = 13.88$, то получаваме следния доверителен интервал $[12.41, 15.35]$.

- Интервална оценка на дисперсията: Ако $X_1, \ldots X_n$ е случайна извадка от $N(\mu, \sigma^2)$, то $(n-1)S^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, откъдето $100(1-\alpha)\%$-ен доверителен интервал за параметъра σ^2 е $[(n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}, (n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}]$.
  Пример: Дефинирана е релативна мярка за натоварване на компютърна система (1 за дадена система), според която са направени измервания на кръгъл час на системата в голяма консултантска фирма и те са:

3.4	3.6	4.0	0.4	2.0
3.0	3.1	4.1	1.4	2.5
1.4	2.0	3.1	1.8	1.6
3.5	2.5	1.7	5.1	0.7
4.2	1.5	3.0	3.9	3.0

  За да построим 95%-ен доверителен интервал за дисперсията, ни е необходимо да знаем $s^2 = 1.4075$, $\chi^2_{0.025} = 39.4$, $\chi^2_{0.975} = 12.4$ $(n-1 = 24)$. Оттук $L_1 = 24(1.408)/39.4 = 0.858$, $L_2 = 24(1.408)/12.4 = 2.725$.

- t-разпределение (разпределение на Стюдънт) с n степени на свобода (t distribution, Student's distribution): $T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_n/n}}$,
  $f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$.

- Доверителен интервал за μ при неизвестно σ^2: използваме, че $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$. Оттук $\bar{X} \pm t_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$ е $100(1-\alpha)$%-ен доверителен интервал за параметъра μ.
Пример: Направени са следните измервания в мкг/к.м. на серен диоксид в дадена гора, поразена от киселинен дъжд:

52.7	43.9	41.7	71.5	47.6	55.1
62.2	56.5	33.4	61.8	54.3	50.0
45.3	63.4	53.9	65.5	66.6	70.0
52.4	38.6	46.1	44.4	60.7	56.4

Намираме $\bar{x} = 53.92$, $s = 10.07$, $s^2 = 101.480$. За $n-1 = 23$, $t_{0.025} = 2.069$ и доверителният интервал е $53.92 \pm 2.069(10.07)/\sqrt{24}$ или $[49.67, 58.17]$.

- Проверка на хипотези: H_0 - нулева хипотеза, H_a - множество от алтернативни хипотези, H_1 - конкретна алтернативна хипотеза. В зависимост от стойността на конкретната тест статистика отхвърляме или не H_0. Вероятността тест статистиката да попадне в т.нар. *критична област* (rejection region, областта, в която нулевата хипотеза се отхвърля), въпреки че е изпълнена H_0, се нарича *грешка от първи род/тип* или *ниво на съгласие* и се означава с α. Нивото на съгласие се избира предварително. Вероятността тест статистиката да не попадне в критичната област, въпреки че нулевата хипотеза не е вярна, а е вярна конкретна алтернативна хипотеза H_1, се нарича грешка от първи род и се означава с β.

	H_0 е вярна	H_1 е вярна
отхвърля се H_0	грешка от тип I (с вероятност α)	вярно решение
не се отхвърля H_0	вярно решение	грешка от тип II (с вероятност β)

Пример: В проучване на ефекта от светлоотразяващи табели по пътищата, се е стигнало до предположение, че фаровете на повече от половината от автомобилите не са настроени правилно. За проверка на това твърдение съставяме $H_1 : p > 0.5$, $H_0 : p \leq 0.5 (p = 0.5)$. Проверена е настройката на фаровете на 20 автомобила, като броя на тези с неправилна настойка е X. Нека $\alpha = 0.05$, тогава, ако е изпълнена нулевата хипотеза, X има биномно разпределение с $n = 20$, $p = 0.5$, $EX = np = 10$, т.е. ако е изпълнено, че стойността на X е в определена степен по-голяма от 10, ще отхвърлим нулевата хипотеза. Имаме, че $P(X \geq 14|p = 0.5) = 1 - P(X \leq 13|p = 0.5) = 1 - 0.9423 = 0.0577 \approx \alpha$, т.е. можем да отхвърлим H_0, ако стойността на X е в множеството $C = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ - критична област, и не можем да я отхвърлим, ако $X \in C' = \{0, 1, \ldots 13\}$. В този случай, ако истинската стойност на параметъра е $p = 0.7$, можем да намерим $\beta = P(X \leq 13|p = 0.7) = 0.3920$, т.е. нашия тест не прави добро разграничение между $p = 0.5$ и $p = 0.7$. За $p = 0.8$, $\beta = 0.0867$.

- *p-value*: може α да не бъде фиксирано предварително, а да се вземе решение в зависимост от вероятността да бъде наблюдавана стойност на тест статистиката поне колкото е стойността ѝ и стойности, които по-категорично подкрепят H_a, при условие, че е вярна нулевата хипотеза H_0. Тази вероятност се нарича p-value или наблюдавано ниво на значимост на теста. Отхвърляме нулевата хипотеза за малки стойности на p-value (p-value$< \alpha$).

- Тест за средното (t-тест): двустранен - $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_a : \mu \neq \mu_0$, едностранен - $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_a : \mu > (<) \mu_0$
Пример: Компютърна система се състои от 10 компютъра и един принтер, като средното време за стартиране на системата е 15 минути. Добавени са още 10 компютъра и един принтер и трябва да се провери дали средното време се е променило, т.е. $H_0 : \mu = 15$ срещу $H_a : \mu \neq 15$. Имаме $\bar{x} = 14.0$, $s = 3$, $n = 30$. $(\bar{x} - 15)/(s/\sqrt{30}) = -1.83$, $P(T_{29} \leq -1.699) = 0.05$, $P(T_{29} \leq -2.045) = 0.025$ и понеже наблюдаваната стойност на тест-статистиката е между тези две стойности, можем да заключим, че вероятността да се наблюдава стойност поне толкова голяма, колкото наблюдаваната (в положителен или отрицателен смисъл - двустранен тест) е между 0.05 и 0.1, което е достатъчно малко, за да можем да отхвърлим нулевата хипотеза.
90%-тен доверителен интервал за μ: $\bar{x} \pm t_{df=29,0.05} \frac{s}{\sqrt{n}} = 14 \pm 1.699 \frac{3}{\sqrt{30}} = (13.07, 14.93)$

- Непараметрични методи:
  - Тест на знаците: Нека $X_1, X_2, \ldots X_n \sim X$. Нека M е медианата и $H_0 : M = M_0$, $H_1 : M < M_0 (> M_0, \neq M_0)$. Разглеждаме $X_i - M_0$ и Q_+ е броя на положителните разлики. Ако е вярна H_0, то Q_+ е биномно разпределена с параметри $1/2$ и n и очакването и е $n/2$. Ако $P(Q_+ \leq Q_+^{obs} | n, p = 1/2)$ е твърде малка, отхвърляме H_0.

    Пример: Определен етап от производството на машинна част се изпълнява средно за 55 секунди. Пусната е нова технология, за която се твърди, че намалява това време. Измерени са следните времена за новата технология: 35, 65, 48, 40, 70, 50, 58, 36, 47, 41, 49, 39, 34, 33, 31. $P(Q_+ \leq 3 | n = 15, p = 1/2) = 0.0176$, следователно хипотезата за равенство се отхвърля и можем да твърдим, че $M < 55$.
  - Тест на Уилкоксън: Както при тест на знаците, но се взимат предвид големините на $|X_i - M_0|$ и им се дава ранг $R_1, \ldots, R_n$, като на най-малката разлика се дава най-малкия ранг - 1. След това на ранговете се поставя занк, съответстващ на знака на разликата. Тогава при изпълнена H_0, статистиките $W_+ = \sum\limits_{positive} R_i$ и $|W_-| = \sum\limits_{negative} |R_i|$ ще бъдат приблизително равни. За двустранен тест тест-статистиката е $W = min(W_+, W_-)$, за алтернативна хипотеза $<$ - W_+, за алтернативна хипотеза $>$ - W_-. Има таблици за разпределението на тест-статистиките и нулевата хипотеза се отхвърля, когато получената стойност на тест-статистиката е по-малка или равна на съответната критична стойност в таблицата.

    Пример: Тества се точката на топене на нов материал за интериор на автомобили, като се счита, че медианата на темперетарата на кипене е по-малка от $120^o C$. Получени са следните данни: 115.1, 117.8, 116.5, 121.0, 120.3, 119.0, 119.8, 118.5. Потвърждават ли те хипотезата? $W = 5.5$, от таблицата за $\alpha = 0.05, n = 8$, критичната точка е 6, а за $\alpha = 0.025, n = 8$, критичната точка е 4, т.е. можем да отхвърлим нулевата хипотеза и да приемем, че точката на топене е под 120.

ЗАДАЧИ:

1. Предполага се, че повечето от статистическите процедури, реализирани в даден софтуерен пакет се изпълняват за по-малко от 0.1 секунди. За проверка е направена случайна извадка от 20 такива програми. Съставете хипотеза за проверка на предположението. Нека X е броя на тези програми от избраните, които се изпълняват за по-малко от 0.1 секунди. Намерете критичната област за $\alpha = 0.025$. Когато е проведен експериментът, се оказва, че 14 от програмите се изпълняват за по-малко от 0.1 секунди. Трябва ли да се отхвърли нулевата хипотеза? Намерете β, ако $p = 0.7(0.8)$.

2. Нека X е случайната величина процесорно време необходимо за едно умножение и тя е нормално разпределена със средно μ и дисперсия 4 микросекунди. Имаме следните наблюдения:

42.65	45.15	39.32	44.44
41.63	41.54	41.59	45.68
46.50	41.35	44.37	40.27
43.87	43.79	43.28	40.70

   Какво е разпределението на $\bar{X}$? Направете МПО за μ. Неизместена ли е тя? Намерете 95%-ен доверителен интервал за μ. Изненадващо ло ще е ако бъде докладвано средно време за едно умножение 42.2 микросекунди за тази система?

3. Нека X е равномерно разпределена в интервала $(0, \theta)$. Направени са следните наблюдения над X: 1, 0.6, 1.2, 2, 0.25, 1.6. Намерете оценка на θ по метода на моментите. Неизместена ли е тя? Намерете оценка на θ по метода на максималното правдоподобие.

4. Противниците на строежа на дадена атомна електроцентрала твърдят, че множинството от живеещите в близост до мястото на строежа са против такъв проект. За проверка на това твърдение са избрани случайно 75 от тези жители и са попитани за мнението им. Нека с X означим броя на тези от тях, които са против. Ако вероятността случайно избран жител да е против е 0.5, каква е вероятността X да е под 20 или над 60? За кое X, вероятността отговорилите "против"да са поне толкова е 0.95?

5. От 20 случайно избрани автомобила в Студентски град X са със софийска регистрация. Предполага се, че 90% от автомобилите там са на посетители, неживеещи в студентски общежития. Съставете хипотеза за това твърдение и намерете съответната критична област за $\alpha = 0.05$.

6. Цифровите везни не винаги са точни и често имат нужда от допълнителни настройки преди употреба. Проверени са 10 везни и резултатът е следният:

по-тежко	*по-леко*	*по-тежко*	*по-тежко*	*по-тежко*
по-леко	*по-леко*	*по-леко*	*по-тежко*	*по-тежко*

Можем ли да отхвърлим H_0 : везните са точни (в средно), срещу H_1 : везните мерят по-тежко, при $\alpha = 0.05$?