

Съвместни, маргинални и условни (дискретни) разпределения.

- Съвместно разпределение на X и Y :

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y), f_{XY}(x, y) \geq 0, \sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$$

- Маргинални разпределения на двумерно (X, Y) разпределение със съвместна плътност $f_{XY}(x, y)$:

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y), f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

- Независимост: ако $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ за всяко x и y .

- Математическо очакване: $E(H(X, Y)) = \sum_x \sum_y H(x, y)f_{XY}(x, y)$, ако съществува $\sum_x \sum_y |H(x, y)|f_{XY}(x, y)$.

- Ковариация: $Cov(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Ако X и Y са независими ковариацията им е 0, обратното НЕ Е вярно.

- Корелационен коефициент: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}}$

- Условна плътност: $f_{X|y}(x) = f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$

- Пример: При хвърляне на два зара: X - броят на шестиците, Y - броят на заровете с нечетен брой на точките.

ЗАДАЧИ:

1. В автомобилен завод се изпълняват от работи две задачи: заваряване на два шева и затягане на три болта. Нека с X означим броя на дефектните заварки, а с Y - броя дефектно затегнатите болтове на един автомобил. Съвместната дискретна плътност е определена в следната таблица:

x/y	0	1	2	3
0	0.840	0.030	0.020	0.010
1	0.060	0.010	0.008	0.002
2	0.010	0.005	0.004	0.001

Определете маргиналните разпределения. Независими ли са X и Y ? Намерете EX , EY , $E(X + Y)$, EXY , $Cov(X, Y)$, ρ_{XY} , $f_{X|y}$.

2. Съвместното дискретно разпределение на X и Y е следното:

x/y	0	100	200
100	0.2	0.1	0.2
250	0.05	0.15	0.30

Определете маргиналните разпределения. Независими ли са X и Y ? Намерете EX , EY , $E(X + Y)$, EXY , $Cov(X, Y)$, ρ_{XY} , $f_{Y|x}$.

ЗАДАЧА ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА: Определете съвместното и маргиналните разпределения на двете случайни величини X и Y , където X е броят шестици при хвърляне на два зара, а Y е броят на заровете с нечетен брой на точките. Независими ли са X и Y ? Намерете EX , EY , $E(X + Y)$, EXY , $Cov(X, Y)$, ρ_{XY} , $f_{Y|x}$.