Непрекъснати разпределения.

- Плътност на непрекъсната случайна величина $f(x)$:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  - $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
- Функция на разпределение: $F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Очакване: $E(H(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$, ако $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(x)|f(x)dx < \infty$
- Трансформация на променливи: X е случайна величина с плътност $f_X(x)$, а $Y = g(X)$, където g е строго монотонна и диференцируема функция. Плътността на Y тогава е

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

- Непрекъснато равномерно разпределение: $U(a, b)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a},\ a < x < b;\quad E(e^{tX}) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)};\quad EX = \frac{a+b}{2};\quad VX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Експоненциално разпределение: $Exp(\lambda); \lambda = 1/\beta$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x, \lambda > 0;\quad E(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ \text{за } |t| < \lambda;\quad EX = 1/\lambda;\quad VX = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta},\ x, \beta > 0;\quad E(e^{tX}) = \frac{1}{1-\beta t},\ \text{за } |t| < 1/\beta;\quad EX = \beta;\quad VX = \beta^2;$$

- Нормално разпределение: $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};\quad E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}};\quad EX = \mu;\quad VX = \sigma^2$$

- χ^2-разпределение: χ^2_γ

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma/2)2^{\gamma/2}}x^{\gamma/2-1}e^{-x/2},\ x > 0, \gamma > 0;\quad E(e^{tX}) = (1-2t)^{-\gamma/2};$$

$$EX = \gamma;\quad VX = 2\gamma;\quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz;\ \alpha > 0$$

ЗАДАЧИ:

1. Докажете, че времето на чакане до първа поява на поасоново събитие е експоненциално разпределено. Какъв е параметърът на това разпределение?

2. Ако X е нормално разпределена със средно μ и дисперсия σ^2, докажете че:

$$P(-\sigma + \mu < X < \sigma + \mu) \approx 0.68$$

$$P(-2\sigma + \mu < X < 2\sigma + \mu) \approx 0.95$$

$$P(-3\sigma + \mu < X < 3\sigma + \mu) \approx 0.99$$

3. Намерете очакването на случайна величина със следната плътност: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

4. Атомна електроцентрала излъчва радиоактивни емисии средно два пъти на месец. Намерете вероятността да изминат поне 3 месеца преди първата такава емисия.

5. В Калифорния годишно се усещат около 500 земетресения. Такива с разрушителна сила обаче, има средно веднъж годишно. Каква е вероятността да изминат поне 3 месеца до първото такова земетресение? Ако не е имало такова земетресение в продължение на 4 месеца, каква е вероятността да няма такова още поне 3 месеца? *Отг.* $e^{-0.25} \approx 0.779$

6. Повечето галактики имат формата на плосък диск, като степента на плоскост е различна. В Млечния път газообразната маса е разположена близо до центъра на галактиката. Нека с X означим разстоянието от този център до дадено струпване на такава маса. То е нормално разпределено със средно 0 и стандартно отклонение 100 парсека. Направете графика на плътността на X, отбележете на графиката вероятността газообразната маса да е на разстояние до 200 парсека и намерете тази вероятност. Приблизително каква част от масата е на по-голямо разстояние от 250 парсека? За какво разстояние 20% от масата е поне толкова далече от центъра? Каква е п.ф.м. на X? *Отг.* $0.9544; 1.24\%; 128p; e^{5000t^2}$

7. Направен е следният експеримент, изследващ пространствената памет на животни: в кръг са поставени осем симетрични тунела и в края на всеки има храна. Гладното животно се поставя в центъра на кръга и се брои в колко от първите осем влизания в тунелите животното избира тунел, в който има все още храна. Проучването показва $\mu = 7.9$. Нормално ли е разпределението?

8. При определяне на разстояния по фотографски образ вероятността за непренебрежима грешка е 0.05. Направени са 150 независими такива измервания. Нека X е броят на грешките. За да намерим вероятността за поне една такава грешка, може ли да се използва апроксимация с нормално разпределение? ($p \leq 0.5, np > 5$ или $p > 0.5, n(1-p) > 5$) Каква е тази вероятност? Каква е приблизително вероятността за най-много три грешки? *Отг.* $0.9956; 0.0668$

9. Средният брой самолети, излитащи или кацащи на летище O'Hare, е един на всеки 40 секунди. Каква е приблизителната вероятност поне 75 (по-малко от 100) излитания и кацания да бъдат осъществени в рамките на един час? *Отг.* $0.9484; 0.8413$

10. Нека с C означим температурата в градуси по Целзий, на която ще бъде изложен даден компютър и нека тя е равномерно разпределена в интервала $(15, 21)$. Нека F е същата температура по Фаренхайт и $F = \frac{9}{5}C + 32$. Намерете плътността на F. *Отг.* $5/54, 59 < x < 69.8$

11. Нека Z е стандартно нормално разпределена случайна величина. Намерете плътността на $Y = 2Z^2 - 1$.