Дискретни разпределения:

- Равномерно (дискретно) разпределение

$$P(X=x)=\frac{1}{n},\ G_X(e^t)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}e^{tx_k}}{n},\ EX=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n},\ VX=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}{n}-\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}\right)^2$$

- Бернулиево разпределение: $Be(p)$

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},\ G_X(e^t)=q+pe^t,\ EX=p,\ VX=p(1-p)$$

- Геометрично разпределение: $Ge(p)$

$$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p,\ G_X(e^t)=\frac{pe^t}{1-qe^t},\ EX=\frac{1}{p},\ VX=\frac{q}{p^2}$$

- Биномно разпределение: $Bi(n,p)$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ G_X(e^t)=(q+pe^t)^n,\ EX=np,\ VX=npq$$

- Отрицателно биномно разпределение: $NegBi(r,p)$

$$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r},\ G_X(e^t)=\frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r},\ EX=\frac{r}{p},\ VX=\frac{rq}{p^2}$$

- Хипергеометрично разпределение: $HG(N,n,r)$

$$P(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ G_X(e^t)=,\ EX=n\frac{r}{N},\ VX=n\frac{r}{N}\frac{N-r}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

- Поасоново разпределение: $Po(k)$

$$P(X=x)=\frac{e^{-k}k^x}{x!},\ G_X(e^t)=e^{k(e^t-1)},\ EX=k,\ VX=k$$

Пораждаща функция на моментите: $G_{M,X}(t)=Ee^{tX}=G_X(e^t), EX^n=\frac{d^nG_{M,X}(t)}{dt^n}|_{t=0}$

ЗАДАЧИ:

1. Вероятността да се установи успешно връзка със сървър в определен момент е $p=0.7$. Нека с X означим броя на опитите, необходими за установяване на връзка. Намерете EX. *Отг.* $1/p=10/7$

2. За оценка на поведението на различни алгоритми за сортиране, ефективността им се сравнява като се оцени средния брой стъпки (размени), необходими за да се сортира случайно избран масив. Тази оценки се сравняват с "идеалното" средно, т.е. мат. очакване на минималния брой стъпки - X_n. Тогава $X_n=X_{n-1}+I_n$, където $I_n=0$, ако последният елемент е на правилната позиция и $I_n=1$ в противен случай. Покажете, че $P(I_n=1)=1-(1/n)$. Покажете, че $EI_n=1-1/n$ и $EX_{n-i}=EX_{n-i-1}+1-\frac{1}{n-i}$, $EX_1=0$ и тогава $EX_n=(n-1)-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$. Намерете EX_5. Използвайте апроксимацията $\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}=\int\limits_{1.5}^{n+0.5}\frac{1}{t}dt$ за да намерите EX_5 и сравнете резултата. Генератор на случайни числа е използван за генериране на 100 различни тризначни числа между 0 и 1. Какво е очакването на броя стъпки за сортиране на тези числа? *Отг.* 163/60=2.7167, 2.7007, 94.7953

3. Нека X е геометрично разпределена случайна величина с параметър p. Покажете, че вероятността X да е нечетно е $p/(1-q^2)$. Може ли тази вероятност да бъде $1/2$? *Отг.* не, винаги е $> 1/2$

4. 80% от принтерите за домашна употреба работят добре при инсталирането им, а останалите имат нужда от допълнителни настройки. Фирма продава 10 принтера за една седмица. Намерете вероятността поне 9 от тях да работят без нужда от допълнителни настройки. Каква е съответната вероятност това да се случи за пет поредни месеца? *Отг.* $0.3758, 0.3758^{20}$

5. От 20 процесора на склад 3 имат дефект, който не се забелязва с просто око. Избрани са 5 чипа и са инсталирани в многопроцесорна система. Нека X е броят на избраните дефектни процесори. Намерете разпределението на X, EX и VX. Намерете вероятността да няма избрани дефектни чипове. *Отг.* 0.75, 0.5033; 0.3991

6. В Калифорния годишно се усещат около 500 земетресения. Такива с разрушителна сила обаче има средно веднъж годишно. Каква е вероятността да има такова земетресение в рамките на 6 месеца? Неочаквано ли е да има 3 или повече такива земетресения за 6 месеца? *Отг.* 0.393, 0.014

7. Когато дадена програма се изпълнява в режим на времеделене, вероятността тя да започне да се изпълнява в рамките на 1 минута е 0.25. За един ден са подадени 5 такива програми (с достатъчно време между тях, за да се считат за независими). Нека X е броят програми, чието изпълнение е започнало за 1 минута. Намерете EX и VX. Намерете вероятността нито една от тези програми да не бъде стартирана в рамките на 1 минута. *Отг.* $5/4, 15/16; (3/4)^5$

8. Правят се изпитания на нов материал за обшивка на спирачки. Предполага се, че обшивката ще издържи поне 70 000 километра на 90% от колите, в които се използва. В лабораторни условия се симулира износването на материала върху 100 коли. С X означаваме броя на колите, при които обшивката трябва да се смени преди 70 000 км. Какво е разпределението на X, EX, VX? Как можем да апроксимираме X? Приемаме, че предположението за 90% не е вярно, ако поне 17 от тестваните коли не издържат теста. Каква е вероятността да отхвърлим това предположение случайно, а то всъщност да е вярно? *Отг.* $10, 0.027$

9. В компютърна игра играчът трябва да открие съкровище, което се намира с равна вероятност зад една от пет затворени врати. Ако играчът познае вратата, съкровището е негово и играта завършва. Ако не познае, се връща в началото на лабиринта, който води до петте врати и започва играта отначало. Нека X е броят опити, необходими, за да се познае вярната врата. Какъв е средният брой опити за намиране на съкровището? Колко е $P(X > 3)$? *Отг.* $5, 64/125$

10. В автомобилен сервиз има 10 трансмисии, от които 3 имат дефект, който ще се прояви до 1000 км. Четири трансмисии са монтирани на атомобили на клиенти. Каква е вероятността нито една дефектна трансмисия да не е монтирана? А точно една? *Отг.* $1/6, 1/2$

11. Смята се, че една от 10 коли има дефект в скоростомера, който води до отчитане на по-ниска скорост поне с 5 км/ч. За един ден 15 водача са спрени и глобени за превишаване на скоростта с поне 5 км/ч. Очаквано ли е поне 5 от тях да имат повреден скоростомер? *Отг.* 0.0127