

Съвместни, маргинални и условни (непрекъснати) разпределения.

- Съвместно разпределение на  $X$  и  $Y$ :

$$\int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dx dy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d), f_{XY}(x, y) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

- Маргинални разпределения на двумерно  $(X, Y)$  разпределение със съвместна плътност

$$f_{XY}(x, y): f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

- Независимост: ако  $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  за всяко  $x$  и  $y$ .

- Математическо очакване:  $E(H(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$ , ако съществува

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x, y)| f_{XY}(x, y) dx dy.$$

- Ковариация:  $Cov(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$ . Ако  $X$  и  $Y$  са независими ковариацията им е 0, обратното НЕ Е вярно.

- Корелационен коефициент:  $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var X} \sqrt{Var Y}}$

- Условна плътност:  $f_{X|Y}(x) = f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$

$$\text{условно математическо очакване: } E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x) dx$$

- Трансформация на променливи:  $(X, Y)$  са случайни величини със съвместна плътност  $f_{XY}(x, y)$ , а  $U = g_1(X, Y)$ ,  $V = g_2(X, Y)$ , където  $g_1, g_2$  дефинират взаимно еднозначна трансформация. Ако означим обратната трансформация с  $X = h_1(U, V)$ ,  $Y = h_2(U, V)$ , то плътността на  $(U, V)$  тогава е

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(h_1(u, v), h_2(u, v)) |J|,$$

където

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

е якобианът на обратната трансформация.

## ЗАДАЧИ:

1. У здравите индивиди на възраст между 20 и 29 години нивото на калций в кръвта  $X$  е между 8.5 и 10.5 мг/дл, а нивото на холестерол  $Y$  е между 120 и 240 мг/дл. Да предположим, че стойностите на  $(X, Y)$  са равномерно разпределени в този правоъгълник (т.е.  $f_{XY}(x, y) = c$ ). Намерете  $c$ . Намерете вероятността даден човек да има калций между 9 и 10 и холестерол между 125 и 140. Намерете маргиналните разпределения. Независими ли са? Намерете очакванията, ковариацията, корелационния коефициент. *Отг.* 1/240; 15/240; 1/2, 2/240; 9.5, 180, 1710, 0.
2. Нека  $X$  и  $Y$  са съответно вътрешното и външното барометрично налягане в даден експеримент и тяхната съвместна плътност е  $f_{XY}(x, y) = c/x$ ,  $27 \leq y \leq x \leq 33$ ,  $c = 1/(6 - 27 \ln 33/27) \approx 1.72$ . Намерете маргиналните разпределения, вероятността  $P(X \leq 30, Y \leq 28)$ , независими ли са, условните плътности,  $P(X > 32|y = 30)$ ,  $E(X|y = 30)$ ,  $E(X|y)$ . *Отг.*  $c(1 - 27/x)$ ,  $c(\ln 33 - \ln y)$ , 0.15,  $1/x(\ln 33 - \ln y)$ , 0, 32, 31.48,  $(33 - y)/(\ln 33 - \ln y)$ .
3. Нека  $X$  и  $Y$  имат съвместна плътност  $f_{XY}(x, y) = \frac{x^3 y^3}{16}$ ,  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ . Намерете маргиналните разпределения на  $X$  и  $Y$ . Независими ли са  $X$  и  $Y$ ? Намерете вероятността  $P(X \leq 1)$  и  $P(X \leq 1|Y = 1)$ . Намерете  $\rho_{XY}$ .