(по *Конкретна математика*, Р. Греъм, Д. Кнут, О. Паташник)

Правилни зарове: $P_0 : P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$, $P_{00} = ?$

Неправилни зарове: $P_1 : P(1) = P(6) = 1/4, P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/8$, $P_{11} = ?$

Случайни величини: $S_1(\omega)$ - "брой точки на първия зар", $S_2(\omega)$ - "брой точки на втория зар", $S(\omega)$ - "сума от точките на двата зара", $Pr(\omega)$ - "произведение от точките на двата зара". Намерете разпределението на тези случайни величини за правилни и неправилни зарове.

- Независимост: $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Независими ли са $S_1$ и $S_2$? А $S_1$ и $S$? $S$ и $Pr$?

- Средна стойност:

  - за редици: средно аритметично, медиана (разделя стойностите по равно - колкото по-големи, толкова и по-малки от нея), мода (най-често срещана стойност);
  - за случайни величини, съответно: $\sum\limits_{x \in X(\omega)} xP(X = x)$; $P(X \leq x) \geq 1/2, P(X \geq x) \geq 1/2$; $P(X = x) \geq P(X = x_1)$.

- Математическо очакване: $EX = \mu = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$

  - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
  - $E(aX) = aE(X)$
  - за *независими* случайни величини $E(XY) = E(X)E(Y)$

  Какво е очакването на $S_1$, $S_2$, $S$, $Pr$, $SPr$?

- Дисперсия: $Var(X) = V(X) = D(X) = \sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X - \mu)^2 = EX^2 - (EX)^2$

  - за *независими* сл. величини $V(X + Y) = VX + VY$
  - $\sqrt{VX} = \sigma$ се нарича *стандартно отклонение*

  Имате талон за два билета в следната лотария: всяка седмица се продават 100 билета, от които се тегли един, който печели 100 милиона. С този талон можете да купите билети от един или от два различни тиража. Коя стратегия бихте избрали? (Пресметнете разпределенията, очакването и дисперсията (стандартното отклонение) на печалбата в двата случая и направете анализ.)

- Неравенство на Чебишов: $P((X - EX)^2 \geq a) \leq \frac{VX}{a}, a > 0$

  Ако заместим $a = c^2VX$, получаваме $P(|X - \mu| \geq c\sigma) \leq 1/c^2$, което означава, че поне 75% е вероятността една случайна величина да се намира в интервала $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ и поне 99% е вероятността да се намира в интервала $(\mu - 10\sigma, \mu + 10\sigma)$, съответно за $c = 2$ и $c = 10$.

  Ако хвърляме двойка зарове $n$ пъти (при големи $n$) общата сума от точките ще е приблизително $7n$. По-точно от неравенството на Чебишов имаме, че за 99% от хвърлянията тази сума е в интервала $(7n - 10\sqrt{\frac{35}{6}n}, 7n + 10\sqrt{\frac{35}{6}n})$, което за 1 000 000 хвърляния е $(6976000, 7024000)$.

- Емпирично средно и дисперсия: $\hat{E}X = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$,
  $\hat{V}X = \frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n-1} - \frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)^2}{n(n-1)}$ $(E(\hat{V}X) = VX)$

  Оценка на $X$: $\hat{\mu} \pm \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

  При хвърляне на два зара е получена следната последователност:

  $(4, 3), (5, 3), (3, 1), (6, 4), (2, 6), (5, 6), (4, 1), (5, 1), (2, 6), (4, 3)$.

  Оценката за $S$ е $\hat{\mu} = 7,4$, $\hat{\sigma} \approx 2,1$, $S : 7,4 \pm 0,7$.

- Средно и дисперсия на броя неподвижни точки на пермутация: нека означим с $F_n(\pi)$ броя неподвижни точки в пермутацията $\pi$. Тогава $F_n(\pi) = F_{n,1}(\pi) + F_{n,2}(\pi) + \ldots + F_{n,n}(\pi)$, където $F_{n,k}(\pi) = 1$, ако $k$ е неподвижна точка за $\pi$ и 0 в противен случай. За очакването получаваме

$$EF_n = EF_{n,1} + \ldots + EF_{n,n} = nP(F_{n,k} = 1) = n\frac{(n-1)!}{n!} = n/n = 1$$

За дисперсията ($F_{n,k}$ не са независими!) имаме

$$E(F_n^2) = E(\sum_{k=1}^{n} F_{n,k})^2 = E(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{n,j}F_{n,k}) =$$

$$\sum_j \sum_k E(F_{n,j}F_{n,k}) = \sum_{1\le k\le n} E(F_{n,k}^2) + 2\sum_{1\le j<k\le n} E(F_{n,j}F_{n,k}),$$

$F_{n,k}^2 = F_{n,k}$, следователно $E(F_{n,k}^2) = E(F_{n,k}) = 1/n$; за $j < k$ имаме $E(F_{n,j}F_{n,k}) =$ $P(j \text{ и } k \text{ са неподвижни точки}) = \frac{(n-2)!}{n!} = 1/[n(n-1)]$. Тогава $E(F_n^2) = \frac{n}{n} + \binom{n}{2}\frac{2}{n(n-1)} = 2$, $n \ge 2$. Следователно $V(F_n) = 2 - 1^2 = 1$ и $\sigma = 1$.

- Пораждащи функции: $G_X(z) = \sum\limits_{k\ge 0} P(X = k)z^k = \sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega)z^{X(\omega)} = E(z^X)$

  Свойства:

  - $G_X(1) = 1$
  - $G'_X(1) = EX$
  - $G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = VX$

    Пример: (дискретно) равномерно разпределение от ред $n$: случайната величина приема стойности $0, 1, 2, \ldots n-1$ с равна вероятност $1/n$. Тогава п.ф. е

$$U_n(z) = \frac{1}{n}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = \frac{1}{n}\frac{1-z^n}{1-z}, n \ge 1$$

    Можем да определим моментите, ако използваме развитието в ред на Тейлър около 1-та:

$$G(1+t) = G(1) + \frac{G'(1)}{1!}t + \frac{G''(1)}{2!}t^2 + \frac{G'''(1)}{3!}t^3 + \ldots$$

    Използвайки това, разлагаме $U_n$ по степените на $t$ и получаваме $U_n(t+1) = \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}t + \frac{1}{n}\binom{n}{3}t^2 + \ldots + \frac{1}{n}\binom{n}{n}t^{n-1}$, откъдето $U_n(1) = 1$, $U'_n(1) = \frac{n-1}{2} = EX$, $U''_n(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$ и $VX = \frac{n^2-1}{12}$
    Друг начин да намерим $U_n(t+1) = \frac{1}{n}[1 + (1+t) + (1+t)^2 + \ldots + (1+t)^{n-1}] =$
    $\frac{1}{n}[t^0(1 + \binom{1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{0}) + t(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n-1}{1}) + \ldots + t^{n-1}\binom{n-1}{n-1}]$
  - ако $X$ и $Y$ са независими $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$. Оттук лесно следват равенствата за средно и дисперсия на сума от (независими) случайни величини.

  Пораждащи функции за зарове: $G_1(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) = zU_6(z)$ и $G_2(z) = \frac{1}{36}(z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 5z^6 + 6z^7 + 5z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12}) = z^2(U_6(z))^2$. Намерете директно моментите, използвайки полученото за $U_n$.

- "Хвърляне на монети". Разглеждаме процеси с два възможни изхода с вероятности съответно $p$ ("успех") и $q$ ("неуспех"), като $p + q = 1$. Тогава пораждащата функция на сл. в. "успех" е $H(z) = q + pz$ (разпределение на Бернули). П. ф. на "брой успехи от $n$ повторения" е $H(z)^n = (q+pz)^n = \sum\limits_{k\ge 0}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} z^k$ (биномно разпределение) ($EX = np, VX = nqp$). Разпределението на "брой опити до първия успех" (геометрично) има п. ф. $pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \ldots = \frac{pz}{1-qz}$ ($EX = 1/p, VX = q/p^2$). (Отрицателно биномно) разпределение на "брой неуспехи до $n$ успеха" - $\left(\frac{p}{1-qz}\right)^n = \sum\limits_k \binom{n+k-1}{k}p^n q^k z^k = \sum\limits_k \binom{-n}{k}p^n(-q)^k z^k$ ($EX = nq/p, VX = nq/p^2$).