

山本晴道

最終更新：2025年7月23日

## 18 単純・半単純代数

### §18 の設定

- $F$  : 体.
- $A$  :  $F$  代数.
- $V, W$  : (特に断りがなければ左)  $A$  加群.

有限次元ベクトル空間, すなわち体上の加群は

- 有限個の 1 次元ベクトル空間の直和で表される.

などのいい性質を多く持つ. 加群もこのような性質を持っていれば嬉しいが, もちろん一般には成り立たない. そこで加群がベクトル空間のような性質を持つという意味で体と類似している(係数)環のクラスとその性質を調べよう. それを定式化することができれば多少簡単に加群を扱うことができるだろう. まず係数環への適当な条件として, 以下に定める  $F$  代数であることを課す. これにより加群をベクトル空間とみなすことができ, 使える道具が増える. 簡単に言えば  $F$  代数とは  $\text{tai}F$  を含む環のことである.

### 定義 1. $F$ 代数

- (1)  $\mathbb{Z}$  加群  $(A, +)$  と演算  $\cdot$ , 写像  $\varphi : F \rightarrow \text{End } A$  の組であって以下の満たすものを  $F$  代数といふ.
  - (i)  $(A, +, \varphi)$  は  $F$  ベクトル空間.
  - (ii)  $(A, +, \cdot)$  は(単位的)環.
  - (iii)  $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x, y \in A, (\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy).$
- (2) 唯一の单射  $F \hookrightarrow A$  により  $F \subseteq A$  とみなす.
- (3)  $A$  の元が全て可逆であるとき,  $A$  を可除代数といふ.

以降  $F$  代数  $A$  について  $\dim_F A < \infty$  と仮定する.  $F$  代数  $A$  上の加群  $W$  の構造を調べていく. 道具として以下を用意する.

**定義 2. 自己準同型代数**

$W$  を右  $A$  加群とする.

- $\text{End}_A(W) := \{\varphi : W \rightarrow W \mid A \text{ 線型}\}.$
- $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x).$
- $(\varphi\psi)(x) := \psi(\varphi(x)).$
- $(\alpha\varphi)(x) := \alpha\varphi(x).$

これらにより  $\text{End}_A(W)$  は  $F$  代数であり,  $W$  に左から作用する.

$W$  が左  $A$  加群の場合,

$$(\varphi\psi)(x) := \psi(\varphi(x)), \quad (\alpha\varphi)(x) := \alpha\varphi(x)$$

と定め,  $W$  に右から作用する.

**注意 3.** (1)  $W$  の有限性は  $\text{End}_A(W)$  に遺伝する.

$$W \text{ が有限生成 } A \text{ 加群} \iff \dim_F W < \infty \iff \dim_F \text{End}_F(W) < \infty \implies \dim_F \text{End}_A(W) < \infty.$$

(2)  $A$  を右  $A$  加群とみなしたとき,  $\text{End}_A(A)$  は左スカラー倍全体であり,  $A$  と  $F$  同型である. 具体的には

$$\text{End}_A(A) \ni f \mapsto f(1) \in A, \quad \text{End}_A(A) \ni (x \mapsto ax) \longleftrightarrow a \in A$$

が  $F$  同型を与える.

(3)  $Y = \{x \in A \mid Vx = 0\}$  とおくと  $Y$  は  $A$  の両側イデアル.  $A/Y$  は作用が同じ元を同一視したもので,  $V \curvearrowright A/Y$  である.  $A/Y$  は  $C$  の部分代数であり,  $B = D$  である.

$V \curvearrowright A$	: $A$ の作用
$B = \text{End}_A(V) \curvearrowright V$	: $A$ と可換な自己準同型全て
$V \curvearrowright \text{End}_B(V) = C$	: $A$ と可換な自己準同型全て
$D = \text{End}_C(V) \curvearrowright V$	: $A$ と可換な自己準同型全て

まず 1 次元ベクトル空間の性質を一つ抽出する.

**定義 4. 既約加群**

$A$  加群  $V$  が以下を満たすとき既約であるという.

- $V \neq 0.$
- 非自明な部分加群を持たない.

**命題 5. 既約加群の性質**

既約な  $A$  加群  $V, W, W_i$  に対して以下が成り立つ.

- (1) (既約ならば有限次元)  $\dim_F V < \infty$ .
- (2) (Schur の補題)  $\forall \varphi \in \text{Hom}_A(V, W), \varphi = 0$  または同型.
- (3)  $\text{End}_A(V)$  は可除代数.

**証明.** (1)  $x \in V$  について  $xA \leq A$  ゆえ  $x \neq 0$  なら  $xA = V$ . よって  $V$  は有限生成ゆえ有限次元.

(2)  $\text{Ker } \varphi \leq V, \text{Im } \varphi \leq W$  である.  $\text{Ker } \varphi = 0$  かつ  $\text{Im } \varphi = W$ , または  $\text{Ker } \varphi = V$  かつ  $\text{Im } \varphi = 0$  であり, 前者なら  $\varphi$  は同型, 後者ならば  $\varphi = 0$ .

(3) (??) よりしたがう.

□

続いて 1 次元ベクトル空間を既約加群に抽象化したときに, 有限次元ベクトル空間に相当するものを定める.

**定義 6. 完全可約**

$A$  加群  $V$  が既約  $A$  加群の有限和になると完全可約であるという.

**注意 7.** 0 は 0 個の既約加群の和であるので完全可約である.

完全可約性は既約加群のみの有限和でかけるという意味で, 有限生成よりも強い有限性と言える.

**命題 8.**

- (1) 完全可約加群  $V$  は有限生成である.
- (2) 以下は同値である.
  - (i)  $V$  は完全可約である.
  - (ii)  $V$  では完全可約な補空間を取れる. つまり

$$\forall U \leq V, \exists W \leq V, W: \text{完全可約かつ } V = U \oplus W.$$

- (iii)  $V$  は直和で完全可約である. つまり

$$\exists W_1, \dots, W_m: \text{既約加群}, V = \bigoplus_{i=1}^m W_i.$$

- (3) 完全可約性は有限和, 部分, 商に遺伝する. つまり完全可約加群  $V, W$  と  $U \leq V$  について,  $V + W, U, V/U$  は完全可約.

**証明.** (1) 既約加群は有限次元ゆえ, その有限和である  $V$  も有限次元.

(2) (i)  $\implies$  (ii) 既約加群  $W_1, \dots, W_n$  を用いて  $V = \sum_{i=1}^n W_i$  と表せる.  $J = \{i \mid i = 1, \dots, n, W_i \cap U = 0\}$  とおく.  $U \cap \sum_{j \in J} W_j = 0$  である.  $X := U \oplus \sum_{j \in J} W_j$  とお

$\leftarrow$ .  $X \neq V$  と仮定すると,  $W_k \not\subseteq X$  なる  $k \notin J$  が存在する.  $0 \leq W_k \cap X < W_k$  ゆえ  $W_k \cap U \subseteq W_k \cap X = 0$  となるが  $k \notin J$  に矛盾. よって  $X = V$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $U = 0$  とすれば良い.

(i) かつ (ii)  $\Rightarrow$  (iii) (i) より既約加群  $W_1, \dots, W_n$  を用いて  $V = \sum_{i \in I_1} W_i$  ( $I_1 = \{1, \dots, n\}$ ) と表せる. (ii) より  $V = W_1 \oplus \sum_{i \in I_2} W_i$  なる  $I_2 \subsetneq I_1$  を取れる.  $\sum_{i \in I_2} W_i$  について同様に  $\sum_{i \in I_3} W_i = W_{k_2} \oplus \sum_{i \in I_3} W_i$  ( $k_2 = \min I_2$ ) なる  $I_3 \subsetneq I_2$  を取れる. これを繰り返すとある  $l < \infty$  で  $I_l = \{\}$  となる.  $k_i = \min I_i$  として  $V = \bigoplus_{i=1}^{l-1} W_{k_i}$  となる.

(3) 和については明らか. (1) より  $V = U \oplus U'$  なる完全可約部分群  $U'$  が存在する.  $V/U \cong U'$  ゆえ  $V/U$  は完全可約.  $U'$  の完全可約な補空間を  $U''$  とおくと,  $U \cong V/U' \cong U''$  より  $U$  は完全可約.

□

加群が完全可約になるという意味で体に類似している代数のクラスを定めよう.

#### 定義 9. 半単純代数

任意の右 (resp. 左)  $A$  加群が完全可約であるとき,  $F$  代数  $A$  を右 (resp. 左) 半単純であるといふ.

半単純代数の性質を見ていこう.

#### 命題 10.

(1)  $F$  代数  $A$  について

$$A \text{ が右半単純} \iff A \text{ が右 } A \text{ 加群として完全可約}$$

である.

(1)  $\Rightarrow$  定義よりしたがう.  $\Leftarrow$  後で書く

半単純代数のイデアルと既約加群には関係がある. それを見る前に言葉を一つ用意する.

#### 定義 11. 極小イデアル

$F$  代数  $A$  の右イデアルが右  $A$  加群として既約であるとき, 極小右イデアルといふ.

#### 命題 12. 半単純代数の既約加群と極小イデアル

$A$  が右半単純であるとする.  $A$  は完全可約ゆえ極小右イデアル  $W_1, \dots, W_n$  を用いて  $A = \bigoplus_{i=1}^n W_i$  と書ける. このとき  $A$  の既約右  $A$  加群は  $W_i$  のいずれかと同型である.

**証明.** 既約右  $A$  加群  $V$  を任意にとる.  $v \in V \setminus \{0\}$  をとる.  $VA = V$  ゆえ  $\varphi : A \ni x \mapsto vx \in V$  は全射準同型.  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  があり,  $A \cong \text{Ker } \varphi \oplus \bigoplus_{j \in J} W_j$  となる.  $\varphi$  の全射性より  $V \cong A / \text{Ker } \varphi \cong$

$\bigoplus_{j \in J} W_j$  だが、 $\#J \neq 1$  なら  $V$  が既約であることに矛盾する。よって  $J = \{j\}$  なる  $j$  について  $V \cong W_j$ .  $\square$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$