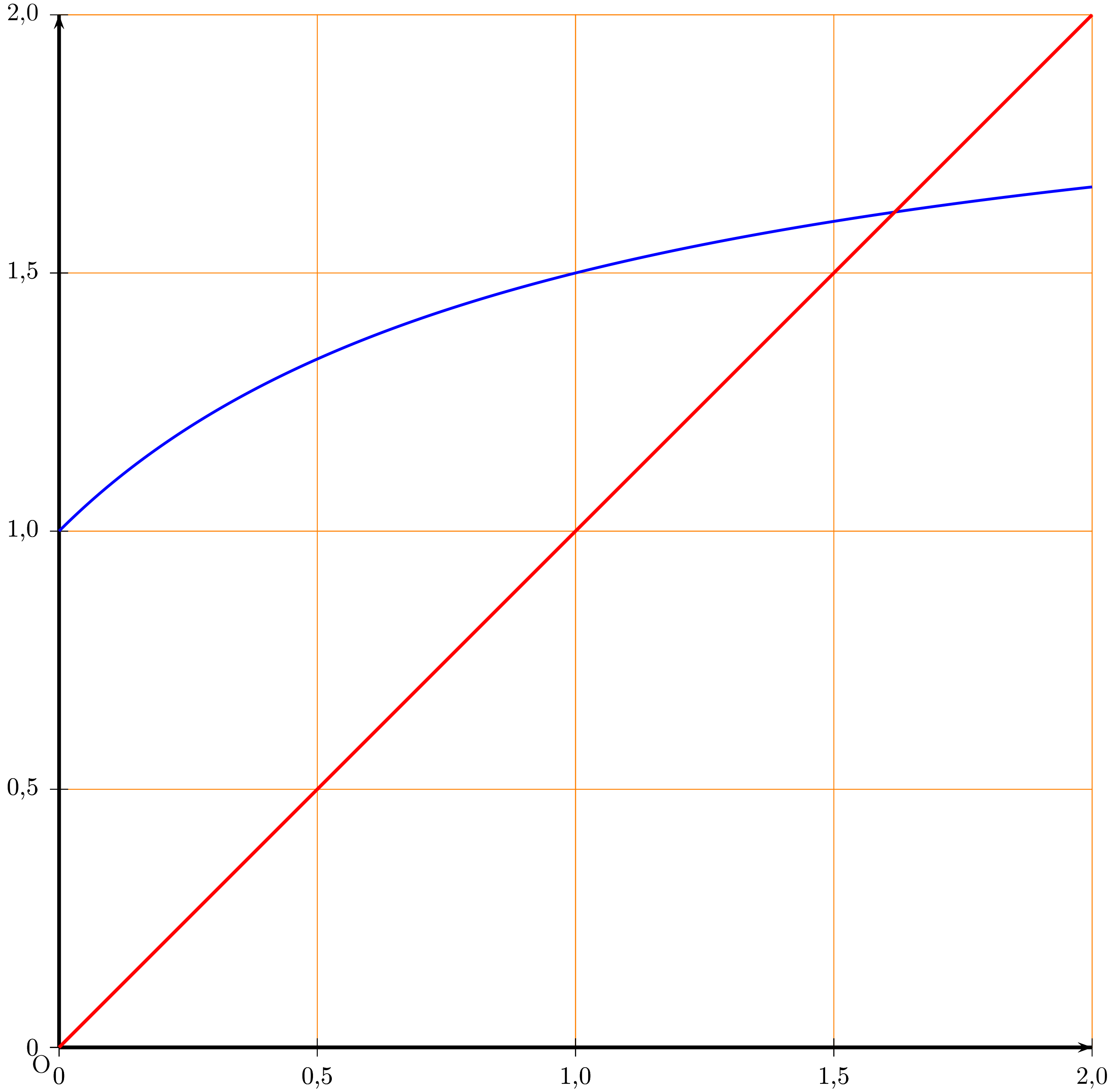
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   (b) En déduire que si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   Le graphique donné au verso de la feuille représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

   (a) Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   (b) À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?
   (c) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $$1 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2.$$
   (d) En déduire que la suite (v_n) converge. *On ne cherchera pas à trouver la limite de (v_n).*
   (e) On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   Démontrer que la suite (u_n) converge. *On ne cherchera pas à trouver la limite de (u_n).*

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$.
5. Justifier que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.
6. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
7. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
8. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha$. En déduire la valeur exacte de α.


2,0
1,5
1,0
0,5
0
O
0
0,5
1,0
1,5
2,0