**Exercice 1.**

1. $f$ est une fonction polynôme de degré 2, $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\,;\,1]$.
   $\forall x \in [0\,;\,1],\ f'(x) = -x+1$. Or $\forall x \in [0\,;\,1],\ f'(x) \geqslant 0$, on en déduit que $f$ est **strictement croissante** sur $[0\,;\,1]$.
2. Soit $\mathscr{P}$ : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ »
   ***Initialisation*** *:* si $n=0$ on a $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   ***Hérédité :*** supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel $k$ quelconque, c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

   ***Par hypothèse de récurrence***, $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$ car la fonction $f$ est **strictement croissante** sur $[0\,;\,1]$.
   Or $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(1) = 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   **Conclusion :** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1}.$$

**Exercice 2.** Soit $\mathscr{P}_n$ : « $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225 ».

***Initialisation*** *:* si $n=0$ on a $4^2 - 0 - 16 = 0 = 255 \times 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

***Hérédité :*** supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel $k$ quelconque, c'est-à-dire $4^{2k+2} - 15k - 16$ est divisible par 225. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $4^{2(k+1)+2} - 15(k+1) - 16$ soit $4^{2k+4} - 15k - 31$ est divisible par 225.

***Par hypothèse de récurrence***, $4^{2k+2} - 15k - 16$ est divisible par 225 donc il existe un entier $p$ tel que : $4^{2k+2} - 15k - 16 = 225p$ soit encore $4^{2k+2} = 225p + 15k + 16$.
Or,

$$\begin{array}{rcl}
4^{2k+4} - 15k - 31 & = & 4^2 \times 4^{2k+2} - 15k - 31 \\
& = & 16(225p + 15k + 16) - 15k - 31 \\
& = & 16 \times 225p + 240k + 256 - 15k - 31 \\
& = & 16 \times 225p + 225k + 225 \\
& = & 225(16p + k + 1) \quad \text{avec } 16p + k + 1 \text{ entier.}
\end{array}$$

Ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

**Conclusion :** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^{2n+2} - 15n - 16 \text{ est divisible par } 225}.$$