148

1. Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de 143.
2. En déduire le pgcd de 143 avec les nombres suivants :
   - **a.** 0.
   - **b.** 1 034.
   - **c.** -10^5.

149

On considère la fonction Python suivante dont les arguments a et b sont des entiers naturels :

```
def mystere(a,b):
        n=1
        while n<=a and n<=b:
                if a%n==0 and b%n==0:
                    p=n
                    n=n+1
        return p
```

1. Que renvoie l'instruction mystere$(25, 35)$?
2. Quel est le rôle de cette fonction ?

150

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 322 et 1 078
2. 1 024 et 652
3. 544 et 268.

151

1. Calculer le pgcd de 10 010 et de 2 772.
2. En déduire tous les diviseurs communs de 10 010 et de 2 772.

152

Soit n un entier naturel. Lorsqu'on divise 825 par n, il reste 6 et lorsqu'on divise 711 par n, il reste 18.
Déterminer toutes les valeurs possibles pour n.

153

On note d un diviseur des entiers naturels a et b non nuls.

1. Démontrer que d divise $4a + 3b$ et $5a + 4b$.
2. Réciproquement, démontrer que tout diviseur de $4a + 3b$ et $5a + 4b$ divise a et b.
3. En déduire que $(a\,;\,b)$ et $(4a + 3b\,;\,5a + 4b)$ ont même PGCD.

154

Soit Soit n un entier naturel tel que $\text{pgcd}(n\,;\,18) = 3$ et $\text{pgcd}(n\,;\,175) = 5$.

1. Quel est le pgcd de n et 42 ? De n et 30 ?
2. Héloïse affirme : « Si n est inférieur à 100, le problème n'a qu'une seule solution. » A-t-elle raison ? Justifier.

155

Soit n un entier naturel tel que $n > 3$ et on pose $a = 3n + 11$ et $b = n + 2$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, conjecturer le pgcd de a et b.
2.
   - **a.** Écrire la division euclidienne de a par b.
   - **b.** En déduire que $\text{pgcd}(a, b)$ divise 5.
3. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = 5 \iff n \equiv\ 3\ [5]$.

156

Soit n un entier relatif.

1. Démontrer que les nombres $a = 2n + 1$ et $b = 3n + 2$ sont premiers entre eux.
2. Même question avec les nombres $a = 7n + 4$ et $b = 7n + 3$.

157

Soit n un entier relatif.
Démontrer que la fraction $\dfrac{(n + 2)^2}{(n + 3)(n + 1)}$ est irréductible.

158

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière pour chacune des équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$:

1. $11x + 19y = 1$.
2. $28x - 33y = 1$.
3. $23x + 32y = 1$.
4. $1274x - 275y = 1$.

159

1. Quels sont les diviseurs de 2^{10} ? De 3^{10} ?
2. Justifier qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $2^{10}u + 3^{10}v = 1$.
3. Déterminer un couple d'entiers $(u\,;\,v)$ tel que $2^{10}u + 3^{10}v = 1$.

160

Résoudre les équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. $47x = 28y$.
2. $5(x - 1) = 2(y + 3)$.

161

n est un entier naturel compris entre 20 et 800. De plus, la division euclidienne de n par 60 donne pour reste 15 et la division euclidienne de n par 156 donne aussi pour reste 15. Déterminer n.

162

On considère l'équation $7x + 17y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier que cette équation admet au moins une solution.
2. Déterminer une solution particulière.
3. Résoudre l'équation en utilisant le lemme de Gauss.

163

Parmi les équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$, quelles sont celles qui admettent des solutions ? Justifier.

1. $32x + 28y = 8$.
2. $46x + 51y = 1$.

3. $222x - 72y = 8$.
4. $7x - 32y = -5$.

164

Déterminer une solution particulière pour chacune des équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$:

1. $15x + 10y = 5$.
2. $29x + 5y = 1$.
3. $14x - 9y = 30$.

165

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $17x + 3y = 72$.

166

Résoudre les équations suivantes où x et y sont des entiers relatifs.

1. $24x + 17y = 1$.
2. $11x - 3y = 1$.
3. $5x + 13y = 3$.

167

1. On considère l'équation (E) : $16x + 21y = 797$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.
   a. Déterminer une solution particulière de l'équation $16x + 21y = 1$.
   b. En déduire une solution particulière de (E).
   c. Résoudre l'équation (E).
2. Un restaurateur propose deux menus : le premier « plat-dessert » à 16 euros et le second « entrée-plat-dessert » à 21 euros. Sa recette s'élève à 797 euros. Peut-on déterminer le nombre de repas de chaque sorte qu'il a servi ?

168

1. On considère l'équation (E) : $23x - 17y = 6$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.
   a. Vérifier que le couple $(1\,;\,1)$ est une solution particulière de (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer tous les entiers naturels N inférieurs à 1 000 tels que dans la division euclidienne de N par 23 le reste soit 2, et dans celle de N par 17 le reste soit 8.

169

Partie A

On considère l'équation

$$\text{(E)} : \qquad 11x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

— on calcule $11x + 8$

— on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or
$129 \equiv 25$ (0 modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a : $11x \equiv j \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 19j \pmod{26}$.
   b. En déduire un procédé de décodage.
   c. Décoder la lettre W.

170

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

   Soit u la suite numérique définie par :
   $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4 de la suite u.
3. a. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_n$ est un entier naturel.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.
4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.
   a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.