Chapitre 1

Combinatoire et dénombrement

⋆⋆⋆

1. Raisonnement par récurrence

Peano
1858/1932

Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

- ***Initialisation :*** ***si*** la proposition P_{n_0} est vraie,
- ***Hérédité :*** et ***si*** la véracité de la proposition P_k avec $k \geqslant n_0$ implique que la propriété P_{k+1} soit vraie alors **pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$ la proposition P_n **est vraie.**

Remarques.

- La proposition P_n peut se traduire par une égalité, une inégalité, une affirmation ...
- Les conditions d'initialisation et d'hérédité sont **indispensables** (voir contre-exemples en exercices).
- La condition d'hérédité est une **implication**, on ***suppose*** que P_k est ***vraie*** PUIS on montre que P_{k+1} l'est également.

Mini-exercices.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Démontrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2 \times 3^n + 1.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

. . . .

. . . .

3. Soit a un réel strictement positif.
   Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$ *(Inégalité de Bernoulli).*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque. Cette inégalité nous sera très utile dans le prochain chapitre.

2. Principe additif, multiplicatif

Soit m et n deux entiers naturels. E et F ont respectivement n et m éléments.
Soit k un entier naturel.

2.1 Principe additif et multiplicatif

Propriété 1. — Principe additif —

Si E et F sont ***disjoints*** alors le nombre d'éléments de $E \cup F$ est . . . .

Exemple : soit $E = \{a\,;\,b\}$ et $F = \{1\,;\,2\,;\,3\}$.
E et F sont disjoints, $n =$ ..... et $m =$ ..... donc $E \cup F$ est composée de .... éléments.
On a $E \cup F = \{\ldots\,;\,\ldots\,;\,\ldots\,;\,\ldots\,;\,\ldots\}$.

Définition 1. Un couple de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\,b)$. De la même façon, un triplet de trois éléments de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\,b\,;\,c)$.

Définition 2. Le **produit cartésien** de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(e\,;\,f)$ tels que $e \in E$ et $f \in F$.

Propriété 2. Principe multiplicatif : $E \times F$ est composé de ... éléments.

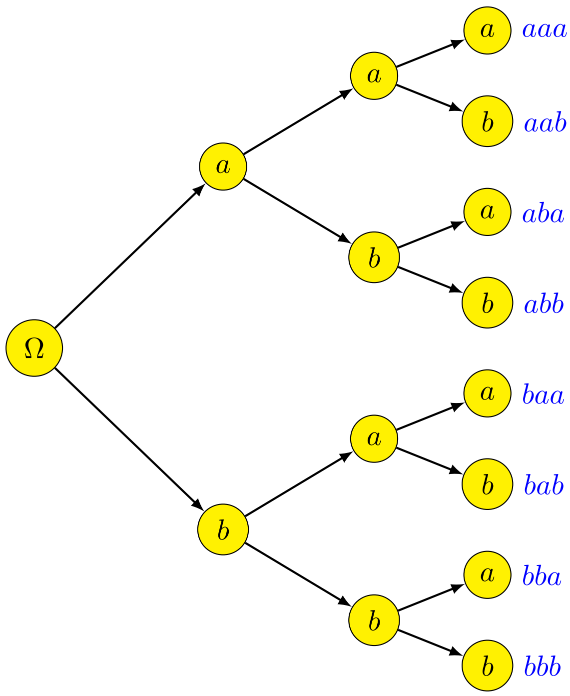
2.2 Dénombrement des k-uplets

Définition 3. Un ***k-uplet*** de E est une liste ordonnée $(e_1\,;\,e_2\,;\,\ldots\,;\,e_k)$ de k éléments de E.
On note E^k l'ensemble des k-uplets de E.

Exemple : un code de carte bancaire est un .... de $E = \{\ldots\,;\,\ldots\,;\,\ldots\ldots\,;\,\ldots\}$.

Propriété 3. Soit E un ensemble de n éléments. Le nombre de k-uplets de E est ....

Exemple : soit $E = \{a\,;\,b\}$. Puisque $n = 2$, le nombre de 3-uplets est .... :



2.3 Nombre de parties d'un ensemble

Définition 4. Une partie de E est un ensemble d'éléments de E.

Exemple : soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$.

Les parties de E sont ...., ..., ..., ..., ..., ..., ... et ....
E comporte donc ..... éléments.

Propriété 4. Le nombre de parties de E est 2^n.

Démonstration

Soit $E = (e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n)$. On associe à chaque partie P de E un unique n-uplet de l'ensemble $[0 ; 1]$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n, on note 1 si e_i est dans P et 0, sinon, et réciproquement (code binaire). Par exemple, on associe à $\{e_1 , e_3\}$ le n-uplet $\{1 , 0 , 1 , 0 , \dots , 0\}$: $\{e_1 , e_3\} \mapsto \{1 , 0 , 1 , 0 , \dots , 0\}$. Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$, c'est-à-dire 2^n.

3. Dénombrement des k-uplets d'éléments distincts

Soit k et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

3.1 Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Définition 5. On appelle ***k-uplet d'éléments distincts*** de E un k-uplet de E pour lequel tous ses éléments sont ***distincts***.

Exemple : soit $E = \{a ; b ; c ; d\}$.
$(a ; b ; c)$ est un 3-uplet d'éléments distincts de E.
En revanche .... n'en est pas un car l'élément b est répété.

Propriété 5. Le nombre de k-uplets d'éléments ***distincts*** de E est égal à :

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}.$$

Démonstration

....

....

....

....

Exemple : lors d'une course de 100 m disputée par 9 athlètes, il y a .... podiums possibles.

3.2 Factorielle d'une entier naturel

Définition 6. Soit n un entier naturel non nul. On appelle ***factorielle*** n, noté $n!$, le produit de tous les entiers naturels entre 1 et n. Ainsi :

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}.$$

Exemples : $5! =$ .... et $(n+1)! =$ ....

Propriété 6. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est égal à $\boxed{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$.

Démonstration

....

....

....

....

3.3 Nombre de permutations

Définition 7. Une ***permutation*** d'un ensemble E a n éléments est un n-uplet d'éléments ***distincts*** de E.

Propriété 7. Le ***nombre de permutations*** de E est .... soit ....

Exemple : le classement des 20 équipes du championnat de football de ligue 1 est une permutation de l'ensemble des 20 équipes.

4. Combinaisons

Soit k et n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

4.1 Nombre de combinaisons

Définition 8. Une ***combinaison*** de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments de E.

Exemples. Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\}$ on a donc $n =$ ......

- Les combinaisons formées d'un élément de E sont $\{\ldots\}$, $\{\ldots\}$, $\{\ldots\}$ et $\{\ldots\}$: il y en a ... donc $\binom{\ldots}{\ldots} = 4$.
- Les combinaisons formées de deux éléments de E sont $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$ et $\{\ldots\,;\,\ldots\}$: il y en a ... donc $\binom{\ldots}{\ldots} = \ldots$.

Propriété 8. Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Démonstration

$\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n de E.

Il y a $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ $k-$uplets d'éléments distincts deux à deux distincts de E. Pour obtenir un $k-$uplet d'éléments deux à deux distincts de E, il suffit d'abord de choisir une combinaison de k éléments de E puis de les ordonner.

Ainsi $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \binom{n}{k} \times k!$ d'où le résultat.

En particulier :

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = 1}.$$

Exemple. Soit $\binom{5}{3} = \dfrac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = 10.$

Propriété 9. Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration

Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $n-k$ éléments qui en sont les complémentaires.

Exemple. Soit $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.

Mini-exercice. Une urne contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

   ....

   ....

   ....

2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de la même couleur ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Combien y a-t-il de tirages au moins une boule noire ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?

   ....

   ....

....

....

....

Propriété 10. Soit n un entier naturel alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration

Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de E. Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composée de k éléments. Ainsi d'après le principe additif, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E (les parties de 0 à n éléments). Or il y a 2^n parties de E. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

5. Triangle de Pascal

5.1 Relation de Pascal

Propriété 11. — Formule de Pascal — Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

Démonstration

Soit E un ensemble à n éléments et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de E. Soit a un élément de E.

- Soit a un élément de E. Parmi toutes les partie à k éléments de E, il y en a de deux sortes :
  - celles qui contiennent l'élément a. Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de $k-1$ éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Leur nombre est $\binom{n-1}{k-1}$.
  - celles qui ne contiennent pas l'élément a. Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Leur nombre est $\binom{n-1}{k}$.
- D'après le principe additif on a donc :

5.2 Le triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer de façon algorithmique les coefficients $\binom{n}{k}$.

Néanmoins, on peut aussi calculer les $\binom{n}{k}$ à l'aide du tableau ci-dessous appelé ***triangle de Pascal*** :

k							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				n			

Exemple. Compléter la ligne du tableau pour $n = 7$.

Remarque. Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}.$$

La formule ainsi obtenue est appelée ***formule du binôme de Newton*** et les $\binom{n}{k}$ sont appelés ***coefficients binomiaux***.

Mini-exercice.
Démontrer, à l'aide de la formule précédente, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n \in \mathbb{N}.$$