Exercice 1. **2 points**

Écrire la matrice A carrée d'ordre 3 telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i}{j} & \text{si } i \geqslant j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. **9 points**

On définit les matrices A, B et M définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer, en détaillant les calculs, que : $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On admettra, pour la suite, qu'on a également : $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que $M = A + 0,5B$.
3. On **admet** dans la suite que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = A$ et $B^n = B$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = A + 0,5^n B$.
   On ne cherchera pas à expliciter M^n.

Exercice 3. **9 points**

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A. Matrice inversible

1. On admet que $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
   Calculer, en détaillant les calculs : $M^3 - M^2 - 8M$.
2. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.
   On ne cherchera pas à expliciter M^{-1}.

Partie B. Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A$(1\,;\,1)$, B$(-1\,;\,-1)$ et C$(2\,;\,5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois réels a, b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.