Nombres complexes : la fin

***

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère *orthonormé direct* $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v})$.

I. Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-d}$

1. Module de $\dfrac{c-a}{b-d}$

Propriétés.

Soit trois points *distincts* A, B et C et D d'affixes respectives a, b, c et d. On a :

- $|c-a| = |a-c| = AC$.
- $\left|\dfrac{c-a}{d-b}\right| = \dfrac{AC}{BD}$.

2. Argument de $\dfrac{c-a}{b-d}$

Propriété.

Soit trois points *distincts* A, B et C et D d'affixes respectives a, b, c et d. On a :

$$\boxed{\arg\left(\frac{c-a}{d-b}\right) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi]}.$$

Exercice 1.10.

1. Soit A, B et C d'affixes respectives $a = 1+2\mathrm{i}$, $b = 2$ et $c = -1+\mathrm{i}$.

(a) Calculer AB et AC.

(b) Calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(c) En déduire la nature du triangle ABC.

2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition :

(a) $\left|\dfrac{z+4+\mathrm{i}}{z+5}\right| = 1$.

(b) $\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-4}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

(c) $\arg\left(\dfrac{z+3}{z-3+5\mathrm{i}}\right) = \pi\ [2\pi]$.

II. Racines n-ièmes de l'unité

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle ***racine n-ième*** de l'unité, tout nombre complexe z tel que :

$$\boxed{z^n = 1}.$$

Propriété.

Pour tout entier naturel n non nul, l'équation $z^n = 1$ admet ***exactement*** n racines distinctes : ce sont les nombres complexes de la forme $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.

Remarques.

- Pour tout entier naturel n non nul, 1 est solution de $z^n = 1$.
- Les racines n-ièmes de l'unité sont les ***racines*** du polynôme $z^n - 1$.

Exercice 2.10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $(z+3)^5 = 1$.
2. $z^3 = -64$.

Définition.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\}}.$$

Exemple. Préciser les racines 2-ièmes de l'unité.

Propriété.

- Les points images de $\mathbb{U}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent au ***cercle trigonométrique***.
- Les points images de $\mathbb{U}_n$, pour $n \geqslant 3$, sont les sommets d'un ***polygone régulier*** à n sommets.

Exemple. $n = 3$: les racines 3-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.