1

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $a = \mathrm{i} - (2 - 5\mathrm{i})$
2. $b = 3\left((1 + 2\mathrm{i}) - (4 + \mathrm{i})\right)$
3. $c = 2\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 2(1 - 2\mathrm{i})$
4. $d = \mathrm{i}^3 - 1$

2

Donner la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 définis dans la console python par les commandes suivantes :

- Pour z_1 :

```
z1=complex(2,3)
```

- Pour z_2 :

```
z2=complex(5,7)
```

- Pour z_3 :

```
z3=z1+z2
```

- Pour z_4 :

```
z4=z1*z2
```

3

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $a = 3 - (2 + 3\mathrm{i})(4 + \mathrm{i})$
2. $b = (2 + \mathrm{i})(3 - 5\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$
3. $c = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
4. $d = (5 - \mathrm{i})^3$

4

On considère deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

1. Démontrer que $\mathrm{Re}(z \times z') = aa' - bb'$.
2. Préciser $\mathrm{Im}(z \times z')$.

5

On considère la suite (u_n) à valeurs complexes définies par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (1 + \mathrm{i})u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. À quel type de suite correspond-elle ?
3. Donner son écriture explicite, c'est-à-dire son expression en fonction de n.
4. Calculer u_8.

6

Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on donne :

$$P(z) = z^2 - \mathrm{i}.$$

1. Exprimer la partie réelle de $P(z)$ en fonction de x et y.
2. Faire de même pour la partie imaginaire.
3. En déduire la forme algébrique de $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7

Simplifier la somme $\mathrm{i}^{2018} + \mathrm{i}^{2019} + \mathrm{i}^{2020} + \mathrm{i}^{2021}$.

8

Écrire le conjugué de chacun des complexes suivants :

1. $3 + 7\mathrm{i}$
2. $5 - 2\mathrm{i}$
3. $2\mathrm{i} - (4 + 5\mathrm{i})$
4. $(3 + 4\mathrm{i})(1 - 7\mathrm{i})$

9

Écrire le conjugué de chacun des nombres suivants :

1. $\dfrac{1}{3\mathrm{i}}$
2. $\dfrac{2 - 4\mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}$
3. $(4 + 5\mathrm{i})^2$
4. $\dfrac{(3 - 4\mathrm{i})(4 + \mathrm{i})}{2 + 3\mathrm{i}}$

10

Écrire le conjugué de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z^2 - \mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - 4$
2. $3\mathrm{i} + (2 + \mathrm{i})z$
3. $\dfrac{3z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$

11

On considère un polynôme $P(z)$ de degré 2 à coefficients réels.
Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

12

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $a = \dfrac{4 + \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$
2. $b = \dfrac{1}{2 - \mathrm{i}}$
3. $c = \dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i} - \sqrt{2}}$
4. $d = \dfrac{\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$

13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $7z - 1 = 7\mathrm{i}$
2. $5z + 5 = 2z + 3 + 2\mathrm{i}$
3. $(4 + z)(5 + 2z) = 4\mathrm{i} + 2z^2$

14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{i}z - 1 = 7\mathrm{i} + z$
2. $4\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$
3. $\dfrac{z}{\mathrm{i}+1} + 3 = \dfrac{z}{\mathrm{i}-1} - 3$

15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3 + \mathrm{i} = 2\overline{z} + 7 + 3\mathrm{i}$
2. $2z - 4 = 5\mathrm{i} + 4\overline{z}$
3. $z\overline{z} = z + 2$
4. $\overline{z} - 1 = z\overline{z} - \mathrm{i}$

16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\overline{z} = -1$.

17

Soit a et b deux réels non nuls en même temps. Démontrer que $Z = \dfrac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} + \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}$ est réel.

18

On considère le nombre complexe $z = a + 2\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que z^2 soit imaginaire pur.

19

Soit z un nombre complexe non nul.

1. Écrire le conjugué des nombres suivants en fonction de z et $\overline{z}$:
   - **a.** $Z_1 = z + \overline{z}$
   - **b.** $Z_2 = z^2 + \overline{z}^2$
   - **c.** $Z_3 = \dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}}$
   - **d.** $Z_4 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$
2. Déterminer si chacun des nombres précédents est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

20

Soit $Z = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ pour tout $z \neq \mathrm{i}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

21

Soit k un nombre réel et on pose :

$$z = k^2 + 2k - 1 - (k^2 - k - 2)\mathrm{i}.$$

1. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre réel.
2. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre imaginaire pur.
3. Existe-t-il une valeur ou plusieurs valeurs du réel k pour que z soit nul ?

22

À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $(1 + \mathrm{i})^3$
2. $(1 + 2\mathrm{i})^4$
3. $(2 - \mathrm{i})^4$

23

1. Dans la formule du binôme de Newton avec $(x+y)^{10}$, trouve-t-on un terme en x^2y^6 ? Si oui, préciser son coefficient.
2. Même question avec x^3y^7.

24

On considère la fonction Python suivante :

```python
def developpe(a,b):
        S=0
        L=[1,4,6,4,1]
        for k in range(5):
                S=S+L[k]*a**(4-k)*b**k
        return(S)
```

1.
   - **a.** Que représente les termes de la liste L ?
   - **b.** Déterminer l'expression de S en fonction de a et b.
   - **c.** Quelle valeur renvoie la fonction pour $a = 1$ et $b = \mathrm{i}$?
2. Louise a testé la fonction et a obtenu le résultat suivant :

```
> developpe(5,complex(0,3))
(-644+960j)
>
```

   Quelle égalité mathématique peut-elle en déduire ?

25

1. Développer $(1 + z)^n$ pour tout $(z\,;\,n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$.
2. En remplaçant z successivement par 1, -1, i, $-\mathrm{i}$, évaluer les quantités suivantes :
   - **a.** $S_1 = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots$
   - **b.** $S_2 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \cdots$
   - **c.** $S_3 = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$
   - **d.** $S_4 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$

26

1. Écrire une formule inspirée par le binôme de Newton pour $(a - b)^n$ en remarquant que $a - b = a + (-b)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
3. Quel est le coefficient du terme en a^3b^7 dans le développement de $(a - b)^{10}$?