Chapitre 6

Droites et plans de l'espace

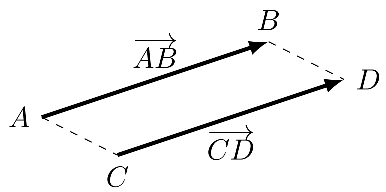
***

1. Vecteurs de l'espace

1.1 Définition d'un vecteur de l'espace

Proposition et définition.

Soit A et B deux points de l'espace. On associe le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si .... est un parallélogramme (éventuellement aplati). On peut alors noter $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des .... du vecteur $\overrightarrow{u}$.



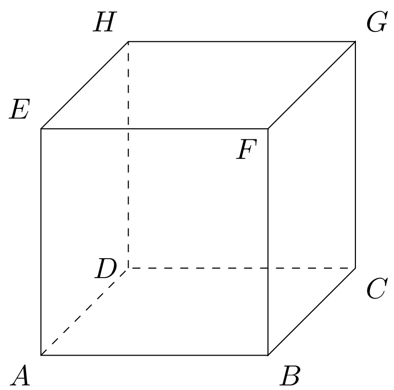
Remarques.

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même ....
- Lorsque A et B sont ***confondus***, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ..... et on le note $\overrightarrow{0}$.

Théorème admis. Soit $\overrightarrow{u}$ et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

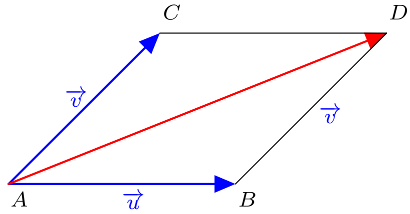
Mini-exercice. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Construire les points M et N tels que :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$.



1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
La ***somme*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Proposition (Relation de Chasles).

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Définition.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
  — la ***même direction*** que le vecteur $\vec{u}$;
  — le ***même sens*** que $\vec{u}$ si $k > 0$, le ***sens contraire*** de $\vec{u}$ si $k < 0$;
  — pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$.

Propriétés. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0}$.
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Définition. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques.

- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si et seulement ....
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Mini-exercice.

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-dessous.

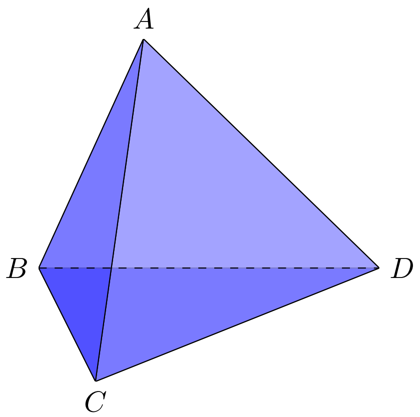
1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

....

....

....

....



2. Droites et plans de l'espace

2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition.
Soit A et B deux points ***distincts*** de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont .... : on a donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur .... de la droite (AB).

2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définitions.
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont ***pas colinéaires***.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}}.$$

On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définitions.

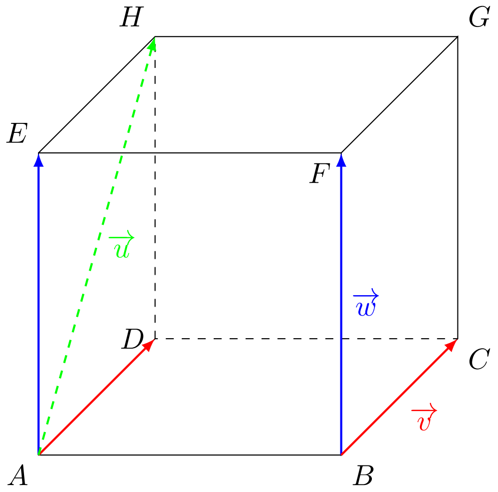
- On dit que des points sont ***coplanaires*** s'il existe un plan qui contient ces plans.

  Soit A, B et C trois points ***non alignés*** de l'espace.
- Le ***plan*** (ABC) est l'ensemble des points M tels que :
$$\boxed{\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}}.$$
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des ***vecteurs directeurs*** du plan (ABC), $(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC})$ est une ***base*** de ce plan et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un ***repère*** de ce plan.

Remarque : trois points sont ***toujours*** coplanaires.

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si les points A, B, C et D sont ***coplanaires***.

Exemple. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BF}$. On a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AE}$. Or A, D, H et E sont quatre points coplanaires donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.



3. Positions relatives de droites et de plans

3.1 Positions relatives de deux droites

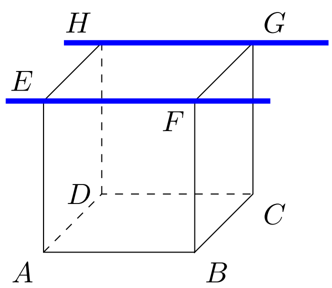
Définitions. Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

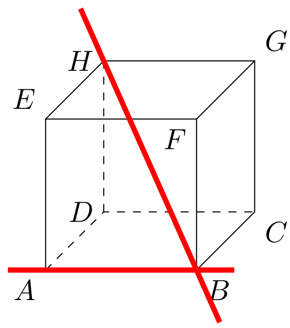
- d et d' sont ***parallèles*** lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont ....
- d et d' sont ***coplanaires*** lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

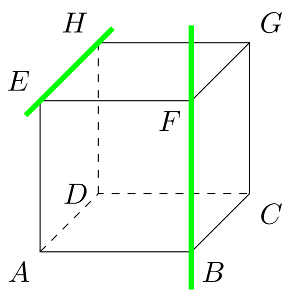
Propriétés. Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

- Les droites (AB) et (CD) sont ***coplanaires*** si les points A, B, C et D sont ***coplanaires***, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A, B, C et D.
- Deux droites sont ***coplanaires*** si et seulement si elles sont ***sécantes*** ou ***parallèles***.
- Si deux droites sont ***non coplanaires***, alors leur intersection est ***vide***.

Exemples.







....

....

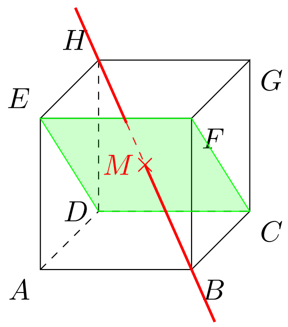
....

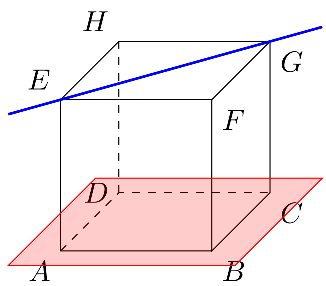
3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définitions et propriétés.

- Une droite est ***parallèle à un plan*** lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite **n'est pas parallèle à un plan**, alors elle a un ....

Exemples.





....

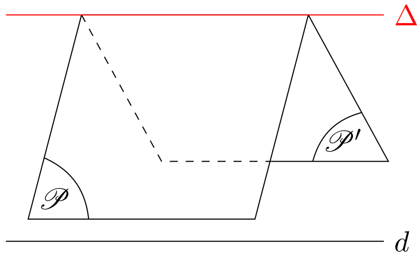
....

....

3.3 Positions relatives de deux plans

Définition et propriétés.

- Deux plans sont ***parallèles*** lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.
- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
- **Théorème du toit.** Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants en une droite Δ. Alors d est parallèle à Δ.



4. Repères de l'espace

4.1 Base de l'espace

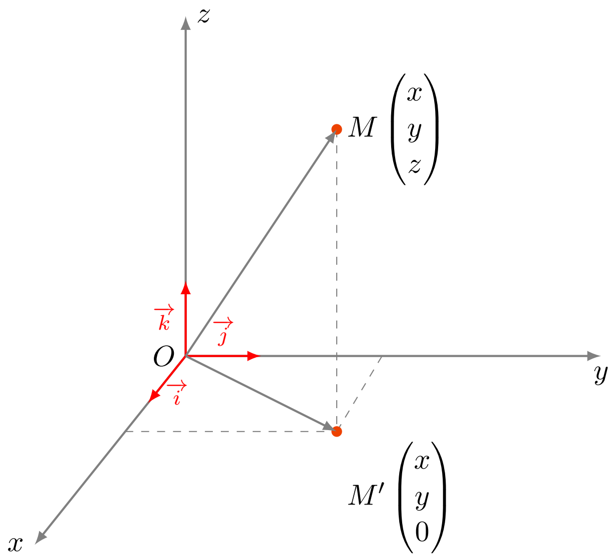
Définition. Une ***base de l'espace*** est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires.

Propriété et définition. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les ***coordonnées*** de $\vec{u}$ dans cette base et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.2 Repère de l'espace

Définition. Un ***repère de l'espace*** est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère et O est l'***origine*** du repère.



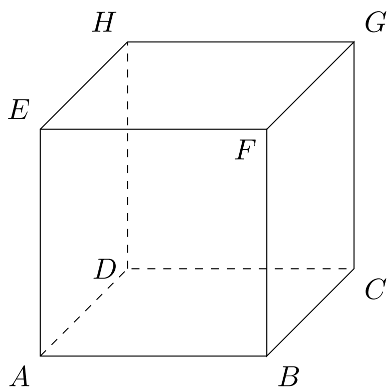
Proposition et définition.
Soit $(O\,;\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$, ce triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le triplet **de coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$ et z est appelée la cote de M.

Propriétés.

On se place dans un repère $(O\,;\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$ de l'espace.

1. Pour deux points A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
2. Coordonnées de K milieu de [AB] : $\begin{pmatrix} \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} \\ \\ \dfrac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$
3. Si $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a $\lambda\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Exercice. On considère le cube $ABCDEFGH$ donné ci-contre :



1. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AE}$.
   Justifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace.

   ....

2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. En déduire leurs coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
   (a) $\overrightarrow{AH}$

   ....

   ....

   (b) $\overrightarrow{BH}$

   ....

   ....