Chapitre 11

Produit scalaire

***

I. Définitions et propriétés

Définition 1.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right).}$$

Exercice 1.11. $ABCD$ est un parallélogramme.
Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2-AD^2\right)$.

Conséquence de la définition :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).}$$

Démonstration.

Utiliser la définition avec $\vec{u}$ et $-\vec{v}$. ■

Propriété.

1. Si un des deux vecteurs est nul, alors le produit scalaire est ***nul*** : $\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{u}=0$.
2. Le produit scalaire est ***symétrique***, c'est à dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
3. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même, c'est à dire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ appelé ***carré scalaire***, est noté $\vec{u}^2$ et vaut :

$$\boxed{\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2}.$$

Propriété. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux***.

Démonstration.

Compte tenu de la définition du produit scalaire et de sa vision géométrique, cette propriété provient du théorème de Pythagore. ■

II. Différentes méthodes de calcul

1. Expression analytique

On considère le plan muni d'un repère orthonormé.

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'}.$$

⚠ Formule à ne pas confondre avec la colinéarité des vecteurs !

Démonstration. On a $\|\overrightarrow{u}\|^2=x^2+y^2$, $\|\overrightarrow{v}\|^2=x'^2+y'^2$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.
Donc $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left[(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right]=\ldots=xx'+yy'$$

■

Exercice 2.11. Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

À l'aide de l'expression analytique du produit scalaire, on peut démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un réel. On a alors :

1. $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=k(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
3. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$ (1re identité remarquable).
4. $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$ (2e identité remarquable).
5. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$ (3e identité remarquable).

Théorème — dit de la médiane —

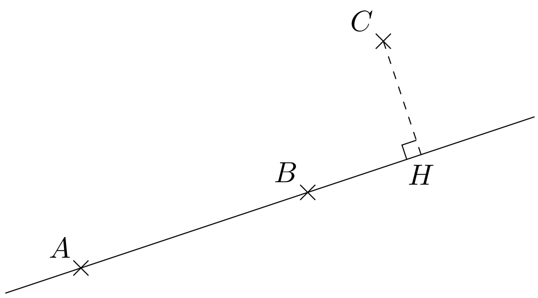
Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$. Alors quelque soit le point M,

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}}.$$

2. Utilisation du projeté orthogonal

Définition 2.

Le ***projeté orthogonal*** d'un point C sur une droite (AB) est le point H, intersection de (AB) et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.



Propriété. Soient A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :

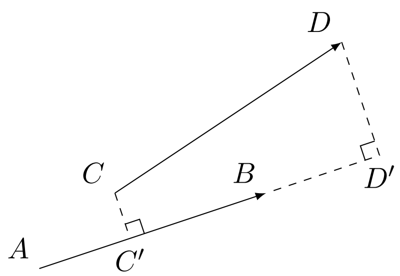
$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}.$$

Exercice 3.11. Soit ABC est un triangle équilatéral de côté a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Cette propriété se généralise de la manière suivante :

Propriété. Soient A, B, C et D quatre points. On appelle C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB). Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}}.$$



Démonstration. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$, puis par propriétés du produit scalaire ∎

En conséquence, il est possible de se ramener au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

Propriété. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs ***colinéaires*** et non nuls. Alors :

1. S'ils sont de ***même sens***, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$.
2. S'ils sont de ***sens contraire***, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$.

⚠ Cette formule est totalement fausse si les vecteurs ne sont pas colinéaires !

3. Expression avec les angles

Propriété. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$.

III. Applications du produit scalaire

1. Rappels sur les équations de droites et vecteur normal

Propriété. Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors une équation de (d) s'écrit :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

.

Réciproquement, si a et b ne sont pas nuls tous les deux, l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

2. Équations de cercles

Propriété. Un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient au cercle de centre $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de rayon R si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation :

$$\boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2}.$$

Propriété. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration. Utiliser le théorème de la médiane ■

3. Angles et longueurs

La définition de produit scalaire que nous avons donnée et la définition avec les angles mises en commun donnent la forme l'Al-Kashi qui généralise la formule de Pythagore aux triangles quelconques :

Propriété. Pour tout triangle ABC tel que $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$,

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}.$$

(Penser au théorème de Pythagore, avec a « hypoténuse » et $\widehat{A}$ « angle droit »).
et de même, par rotation des lettres :

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}.$$

Propriété. Pour tout triangle ABC avec les mêmes notations que précédemment,

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}}.$$