Retour sur les équations différentielles.

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B : applications

1. Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
   On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :
   $$10v'(t) + v(t) = 30.$$
   Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.
   Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. Dans cette question, on étudie une épidémie dans une population. Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
   Pour t appartenant à $[0\,;\,30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
   On a donc $y(0) = 0,01$.
   On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;\,30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :
   $$y' = 0,05y(10 - y).$$
   (a) On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.
   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions
   $$\begin{cases} y(0) &= 0,01 \\ y' &= 0,05y(10 - y) \end{cases}$$
   si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions
   $$\begin{cases} z(0) &= 100 \\ z' &= -0,5z + 0,05 \end{cases}$$
   (b) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
   (c) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.