

19

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq n$ .  
(b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4. Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - n + 1$ .  
(a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.  
(b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n + n - 1$ .
5. Soit  $p$  un entier naturel non nul.  
(a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$ ?  
On s'intéresse maintenant au plus petit entier  $n_0$ .  
(b) Justifier que  $n_0 \leq 3p$ .  
(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier  $n_0$  pour la valeur  $p = 3$ .  
(d) Proposer un programme écrit en Python qui, pour une valeur de  $p$  donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $u_n \geq 10^p$ .

20

On considère la suite  $(u_n)$  à valeurs réelles définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

### Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite  $(u_n)$  ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E-05
8	6	3,337 9E-06
9	7	4,172 3E-07
10	8	5,215 4E-08
11	9	6,519 3E-09
12	10	8,149 1E-10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$  ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite  $(u_n)$  ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite  $(u_n)$  ?
4. Écrire un algorithme calculant  $u_{30}$ .

### Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Justifier.

### Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $u_n < 10^{-18}$ .

Justifier l'existence d'un tel entier  $n_0$  et déterminer sa valeur.