Chapitre 1

Nombres et intervalles

***

I. Ensembles de nombres

1. Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Définition.

L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;4\,;\ldots\}$.
C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de ***compter*** une collection d'objets. On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels ***non nuls.***

Exemples et contre-exemples.

2. Ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Définition.

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}$.

Il est composé des ***nombres entiers naturels*** et de ....

En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est **contenu** (ou inclus) dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

Exemples et contre-exemples.

3. Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition.

Les ***nombres décimaux*** sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier par 1, 10, 100, 1 000 et plus généralement par 10^k où k est un entier naturel.
Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre **fini** de chiffres après la virgule.

Exemples et contre-exemples.

4. Les nombres rationnels et leur ensemble $\mathbb{Q}$

Définition.

Les ***nombres rationnels*** sont les nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers.
On note :

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}}.$$

Remarques :

1. La fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseurs communs (autres que 1 ou -1).
2. La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique (se répète) à partir d'un certain rang.
3. La division par 0 est **impossible** : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a donc aucun sens.

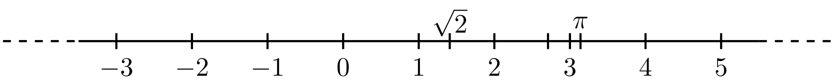
Exemples et contre-exemples.

5. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Définition.

Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels. Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Ainsi, l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$.

Remarque : chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé **abscisse** de ce point.



6. Inclusions d'ensembles

On retiendra le résultat qui suit :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Cela suggère donc qu'un entier naturel est un entier relatif qui est lui-même un nombre décimal qui est donc aussi un rationnel et finalement aussi un nombre réel.

II. Intervalles de $\mathbb{R}$.

1. Intervalle et inégalité associée

❶ L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a\,;\,b]$:

❷ L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a\,;\,b[$:

❸ L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a\,;\,b[$:

❹ L'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a\,;\,b]$:

❺ L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,a]$:

❻ L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$:

❼ L'ensemble des réels x tels que $x > a$ est l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$:

❽ L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$ est l'intervalle $[a\,;\,+\infty[$:

2. Intersection, réunion d'intervalles et inclusion

a. Intersection

Définition.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle I ***et*** dans l'intervalle J sont dans ***l'intersection*** des intervalles I et J :

Si $x \in I$ et $x \in J$, alors $x \in I \cap J$ ($\cap$ se lit **inter**)

Exercice 1.1. Soit $I = [2\,;\,5]$ et $J = [4\,;\,9]$. Déterminer $I \cap J$.

b. Réunion

Définition.

Les réels qui sont dans l'intervalle I ***ou*** dans l'intervalle J sont dans ***la réunion*** des intervalles I et J :

Si $x \in I$ ou $x \in J$, alors $x \in I \cup J$ ($\cup$ se lit **union**)

Exercice 2.1. Soit $I = [2\,;\,5]$ et $J = [4\,;\,9]$. Déterminer $I \cup J$.

c. Inclusion

Définition.

Un ensemble A est ***inclus*** dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.
On note :

A$\subset$B

Exemple. Tous les pays de la zone euro sont dans l'Union européenne. L'ensemble des pays de la zone euro est **inclus** dans l'ensemble des pays de l'Union européenne.

III. Puissances

1. Définition d'une puissance

Définition.

Soit n un entier naturel et a un nombre réel.

- Si $n > 0$: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n facteurs}$.
- Pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n facteurs}}$.
- Par convention, pour $a \neq 0$, on pose $a^0 = 1$.

Exemples.

1. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
2. La décomposition en produit de facteurs premiers de 80 peut s'écrire $80 = 2^4 \times 5$.

2. Calcul avec les puissances

Propriété.

Si a et b sont des nombres réels non nuls ; m et n sont des entiers relatifs quelconques (positifs ou négatifs), alors :

1. $a^m \times a^n =$ ....
2. $\dfrac{a^m}{a^n} - n =$ ....
3. $(a^m)^n =$ ....
4. $(a \times b)^n =$ ....
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n =$ ....

Exercice 3.1.

1. $(-3)^4 \times (-3)^6 =$ ....
2. $(5^4)^3 =$ ....
3. $10^3 \times 2^3 =$ ....
4. $\dfrac{2^7}{2^{-4}} =$ ....

