Chapitre 9

Géométrie repérée

***

I. Vecteurs dans un repère

1. Différents repères

Définition.

Soient O un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de ce plan de directions différentes (........................), alors $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ est appelé _______________ du plan. O est appelé ______________________________ du repère et le couple $\left(I, \vec{j}\,\right)$ est appelé ______________________________ du repère.

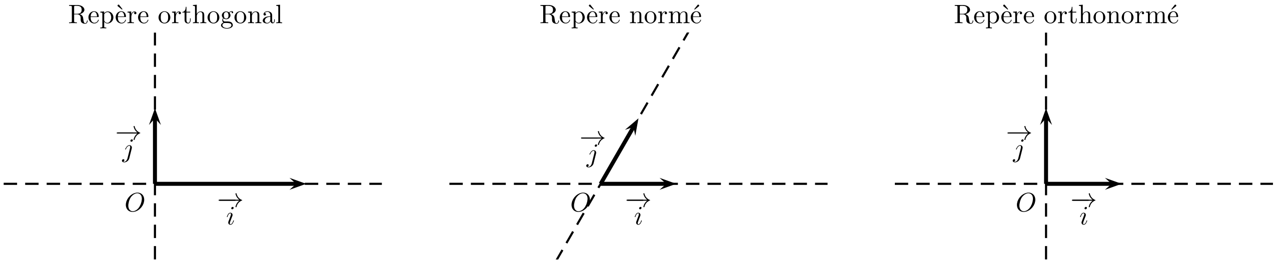
Définition.

Soit un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ du plan.

1. Si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont orthogonales, le repère est dit ______________________________
2. Si les normes de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit ______________________________
3. Si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit ____
4. Sinon, le repère est dit ______________________________

Exemples.

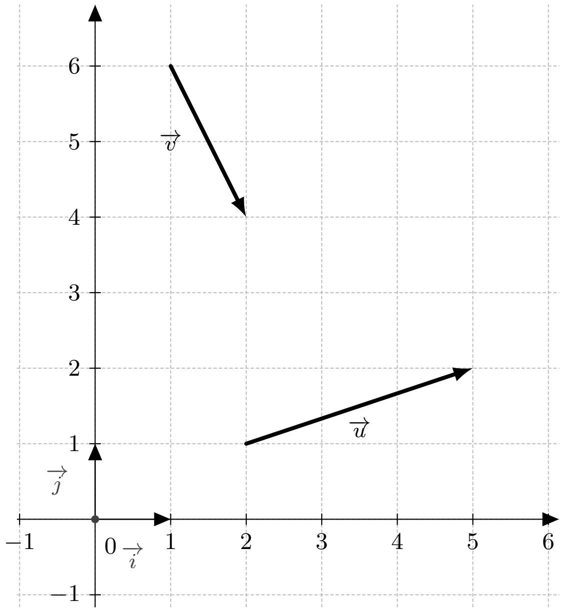
Repère orthogonal — Repère normé — Repère orthonormé



Définition.

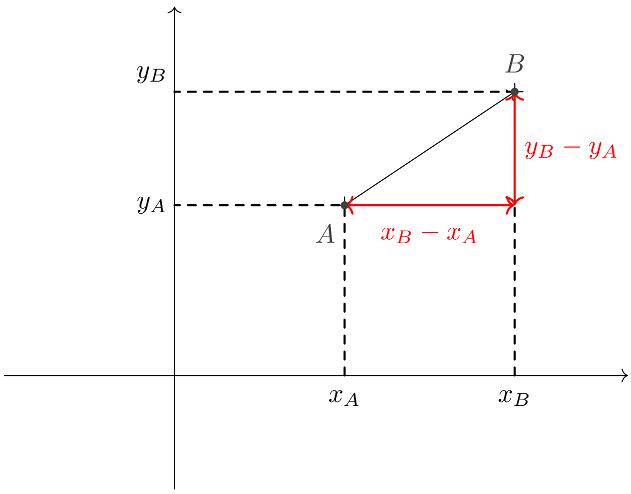
Dans ce repère, si un vecteur $\vec{u}$ est égal à $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ on dit que les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que l'on peut également noter $(x\,; y)$.

Exemple. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$:



Ici les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$, les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$.

2. Coordonnées d'un vecteur



Dans un repère les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ que l'on peut également noter $(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$.

3. Égalité de deux vecteurs

Propriété.

Dans un repère, on considère $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'}.$$

Exercice 1.9. Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère les points A(1 ; 2), B(5 ; 4), C(2 ; 1), D(−2 ; −1) et E(6 ; 2).

1. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point G pour que le quadrilatère CBEG est un parallélogramme.

4. Somme de vecteurs

Propriété.

Dans un repère, soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Dans ce repère, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Exercice 2.9. Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on donne $\overrightarrow{u}(1 ; 2)$ et $\overrightarrow{v}(-4 ; 7)$.
Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

5. Produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}(x ; y)$.
Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x + x ; y + y)$, soit $(2x ; 2y)$. On le note $2\overrightarrow{u}$.
De même Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x + x + x ; y + y + y)$, soit $(3x ; 3y)$. On le note $3\overrightarrow{u}$.
De manière générale, on pose la définition suivante :

Définition.

Dans un repère, soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans ce repère.

Exercice 3.9. Soit dans un repère $\overrightarrow{u}(2 ; 1)$.
Calculez les coordonnées des vecteurs $4\overrightarrow{u}$ et $-6\overrightarrow{u}$.

II. Vecteurs colinéaires

1. Définition

Définition.

Deux vecteurs ***non nuls*** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***colinéaires*** signifie qu'ils ont ***la même direction***. Il existe alors un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Définition.

On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle ***déterminant*** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, est le nombre défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' \text{ (différence des produits en croix)}}.$$

Propriété.

Dans un repère, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement les coordonnées de ces deux vecteurs sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si $xy' = x'y$ ou encore :

$$\boxed{\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0}.$$

Exercice 4.9. Soit dans un repère, $\vec{u}(1\,;\,\sqrt{2}+1)$ et $\vec{v}(\sqrt{2}-1\,;\,1)$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2. Applications de la colinéarité de vecteurs

Propriété.

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

1. Les droites (AB) et (CD) sont ***parallèles*** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ***colinéaires***.
2. Les points A, B et C sont ***alignés*** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ***colinéaires***.

Exercice 5.9. Soit M$(1\,;\,4)$, N$(3\,;\,3)$ et P$(7\,;\,1)$.
Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

III. Milieu et longueur d'un segment

1. Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème III..1

On se place dans un repère quelconque.
Soit A$(x_A\,;\,y_A)$ et B$(x_B\,;\,y_B)$ et I$(x_I\,;\,y_I)$ milieu de $[AB]$.

Alors :

$$\boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.}$$

2. Calculs de distances

Propriété.

Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre les points A(x_{A} ; y_{A}) et B(x_{B} ; y_{B}) est telle que :

$$\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exercice 6.9. On se place dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) et on donne les points A(-4 ; -1), B(4 ; -2), et C(-2 ; 2).

1. Calculez les distances AB, AC et BC.
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?