**Exercice 1.**

1. Voici la matrice carrée d'ordre 3 voulue : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{i3} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1 + 0 + 0 = 1$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 5 + 3 + 0 + 6 = 14$.

   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_{i,5-i} = a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = 3 + 0 + 4 + 1 = 8$.

**Exercice 2.**

1. $-3I_2 + T = -3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $-3I_2 + T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = A$.

2. $T^2 = T \times T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a donc :

$$\begin{aligned} A^2 &= (-3I_2 + T)(-3I_2 + T) \\ &= 9I_2^2 - 3T - 3T + T^2 \\ &= 9I_2 - 6T + T^2 \\ &= 9I_2 - 6T \quad \text{car} \quad T^2 = 0_2 \end{aligned}$$

3. Soit $\mathscr{P}_n$ : « $A^n = (-3)^n I_2 + n(-3)^{n-1} T$ ».

   ***Initialisation :*** si $n = 1$ on a $A^1 = A$ et $(-3)^1 I_2 + 1 \times (-3)^0 T = -3I_2 + T$, or $-3I_2 + T = A$ d'après la question 1 donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

   ***Hérédité :*** supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel $k$ quelconque non nul,
   c'est-à-dire $A^k = (-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1} T$.
   Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $A^{k+1} = (-3)^{k+1} I_2 + (k+1)(-3)^k T$.
   On a :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A \\ &= [(-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1} T](-3I_2 + T) \\ &= (-3)^{k+1} I_2 + (-3)^k T + k(-3)^k T + k(-3)^{k-1} T^2 \\ &= (-3)^{k+1} I_2 + (-3)^k (1+k) T + 0_2 \quad \text{car} \quad T^2 = 0_2 \\ &= (-3)^{k+1} I_2 + (-3)^k (k+1) T \end{aligned}$$

   Ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   <u>**Conclusion**</u> **:** $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 1$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-3)^n I_2 + n(-3)^{n-1} T}.$$