215

Dans chaque cas, déterminer la forme algébrique du quotient, puis en calculer le module et un argument :

1. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ **2.** $\dfrac{3+3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}$

216

Dans chacun des cas suivants, calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ avec A et B deux points du plan complexe.

1. $A(4+\sqrt{2}\mathrm{i})$ et $B(-1+2\mathrm{i}\sqrt{2})$

2. $A(\sqrt{3}-\mathrm{i})$ et $B(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})$

217

Dans chacun des cas suivants, calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ avec A, B et C trois points du plan complexe.

1. $A(3+2\mathrm{i})$, $B(6+4\mathrm{i})$ et $C(1+5\mathrm{i})$.

2. $A(3+2\mathrm{i})$, $B(3+\sqrt{3}+3\mathrm{i})$ et $C\left(4+(2-\sqrt{3})\mathrm{i}\right)$.

218

Dans le plan complexe, on donne les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A=-4$, $z_B=2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C=2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. Placer les points A, B et C.

3. Écrire le quotient $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

4. En déduire la nature du triangle ABC.

219

Dans le plan complexe, on donne les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A=-4+2\mathrm{i}$, $z_B=-\mathrm{i}$, $z_C=3+3\mathrm{i}$ et $z_D=-1+6\mathrm{i}$.

1. Placer ces quatre points. Quelle conjecture peut-on émettre sur le quadrilatère $ABCD$?

2. Écrire le quotient $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

3. Démontrer la conjecture émise à la question **1.**

220

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée et construire cet ensemble de points :

1. $|z-\mathrm{i}|=2$

2. $|z+2|=3$

3. $|z-2+4\mathrm{i}|=4$

221

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée et construire cet ensemble de points :

1. $|z-3|=|z-4\mathrm{i}|$

2. $|z-3-\mathrm{i}|=|z|$

3. $\left|\dfrac{z-1}{z+5\mathrm{i}}\right|=1$

222

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée et construire cet ensemble de points :

1. $\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2. $\arg(z-1+\mathrm{i})=\pi\ [2\pi]$

3. $\arg(z-3-2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

223

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée et construire cet ensemble de points :

1. $\arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-3}\right)=0\ [2\pi]$

2. $\arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-3}\right)=\pi\ [2\pi]$

224

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne $A(-2)$, $B(\mathrm{i})$, $M(z)$ avec $z\neq\mathrm{i}$ et $M'(z')$ où $z'=\dfrac{z+2}{z-\mathrm{i}}$.
Déterminer les ensembles de points suivants :

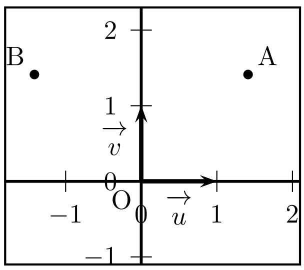
1. l'ensemble E des points M tels que $OM'=1$;

2. l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des réels.

3. l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des imaginaires purs.

225

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\mathrm{B}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2. On considère l'équation

$$(E)\ :\ z^2-\sqrt{6}\,z+2=0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

226

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+\mathrm{i})^4=1$ **2.** $z^4=81$

227

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z-8)^5=1$ **2.** $z^5=4\sqrt{2}$

228

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5=32\mathrm{i}$ **2.** $z^4=-9\mathrm{i}$

229

1. Calculer $(1+\mathrm{i})^3$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=-2(1-\mathrm{i})$.

3. Donner le module et un argument de chaque solution.

230

1. Vérifier que le complexe $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ est une racine quatrième du complexe $-8(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=-8(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

3. Donner le module et un argument de chaque solution.

231

1. a. Calculer le module et u argument du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$.

b. Soit $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Exprimer le module et un argument de z^3.
En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$.

2. En utilisant les racines cubiques de 1, écrire les solutions de l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$ sous forme algébrique.

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

232

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On pose $z_0=8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. a. Vérifier que :

$$\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n.
On a ainsi : $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

233

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 &= 100 \\ z_{n+1} &= \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM\leqslant r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.