Chapitre 2

Conditionnement et indépendance

***

I. Activité préparatoire

1. Modélisation

Une entreprise dispose de deux ateliers, notés atelier 1 et atelier 2, dans lesquels est fabriqué un certain modèle de chaussure de sport.

- 60 % des paires de chaussures sont fabriquées par l'atelier 1 et le reste par l'atelier 2.
- 2 % des paires de chaussures fabriquées par l'atelier 1 sont défectueuses.
- 1 % des paires de chaussures fabriquées par l'atelier 2 sont défectueuses.

	Nombre de paires sans défaut	Nombre de paires défectueuses	Total
Atelier 1		120	
Atelier 2			
Total			10 000

On réalise l'***expérience aléatoire*** suivante : on prélève **au hasard** une paire de chaussures dans cette production.

Remarque. Une expérience est ***aléatoire*** lorsque son résultat (ou issue) ne peut être prévu et lorsque, renouvelée dans les mêmes conditions, elle ne donne pas le même résultat.

L'ensemble (ou ***univers***) des résultats (ou issues) possibles est notée Ω. Dans notre exemple, le nombre d'éléments de Ω, noté $\operatorname{card}(\Omega)$ est égal à 10 000.
On admettra que toutes les issues ont la même probabilité : c'est le modèle d'***équiprobabilité***.
Chaque issue a alors pour probabilité $\dfrac{1}{\operatorname{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{10\,000}$.

2. Calcul de probabilités

On considère les événements :

A : « La paire de chaussures est défectueuse » ;
B : « La paire de chaussures provient de l'atelier 1 » ;

1. Calculer la probabilité de l'événement A.

   ....

   ....

2. Calculer la probabilité de l'événement B.

   ....

   ....

3. Traduire par une phrase l'évènement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.

....

....

....

....

II. Calcul d'une probabilité conditionnelle

1. Retour sur l'exemple précédent

On reprend l'exemple précédent.

1. On extrait une paire de chaussures défectueuses. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier 1 ? On note $\mathbb{P}_A(B)$ cette probabilité.

....

....

2. Quel lien peut-on faire entre $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)$?

....

....

....

....

2. Cas général

Définition 1.

On appelle probabilité de B ***sachant*** A, noté $\mathbb{P}_A(B)$ le nombre :

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}}.$$

On en déduit une formule de calcul de la ***probabilité d'une intersection.*** **Propriété.**

Soit A et B deux évènements de Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A).$$

Cette écriture s'appelle la ***formule des probabilités composées.***

La propriété conditionnelle est une probabilité, en particulier elle en a les propriétés :

Propriété.

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)}.$$

Propriété.

Dans le cas où la loi est équirépartie, on peut utiliser la formule suivante :

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } B \cap A}{\text{nombre d'éléments de } A}}.$$

III. Conditionnement et arbre pondéré

1. Approche avec deux évènements

Propriété. Si A est un évènement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\end{aligned}$$

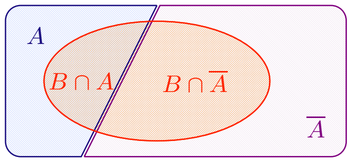
Démonstration.

$A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ d'où :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(A \cap B\right) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$



2. Généralisation

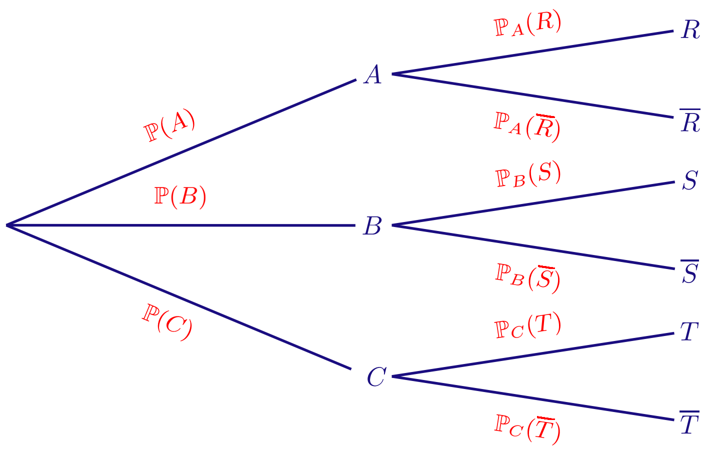
Propriété— Formule des probabilités totales —

On suppose que l'univers probabiliste Ω est la réunion des événements A_1, A_2, ..., A_n deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle.
Pour tout événement B on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

3. Représentation sous forme d'un arbre pondéré

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



1. ***La racine de l'arbre*** est l'univers Ω.
2. Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment ***une partition*** de l'évènement situé à ce nœud.
   Par exemple, $\{A, B, C\}$ est une ***partition*** de l'univers Ω et $\{S, \overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.
3. Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
   Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.
4. Le ***poids*** d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à ***son extrémité***.
   Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

Exercice 1.2. Représenter la situation suivante par un arbre de probabilités :

Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2016 a permis d'établir que :

- 30 % des personnes sont âgées de plus de 50 ans ;
- 22,3 % des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel ;
- 82,7 % des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

(Source : Insee, enquêtes Emploi.)

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2016 et on note :

- S l'évènement « la personne était âgée de plus de 50 ans » ;
- E l'évènement « la personne occupait un emploi à temps plein ».

Propriétés incontournables.

1. La ***somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud*** est égale à 1.
2. La probabilité ***d'un chemin*** est ***le produit des probabilités figurant sur ses branches.***
3. La probabilité ***d'un évènement*** est ***la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement***.

Exercice 2.2. Avec 84,5 millions d'arrivées de visiteurs internationaux en 2015, la France est le pays le plus visité au monde. Si on s'intéresse aux personnes résidentes à l'étranger qui sont en visite en France, on définit les notions suivantes :

- Les touristes sont les visiteurs non résidents passant au moins une nuit en France.
- Les excursionnistes sont les visiteurs non résidents qui ne passent pas de nuit en France.

Une enquête réalisée auprès des visiteurs résidents à l'étranger à leur sortie du territoire métropolitain a permis d'établir que :

- 79,2 % des visiteurs résident en Europe.
- Un tiers des visiteurs résidents européen sont touristes et les trois quarts des résidents non européens sont touristes.

On interroge au hasard un visiteur résident à l'étranger à sa sortie du territoire et on note :

- E l'évènement « le visiteur réside en Europe » ;
- T l'évènement « le visiteur est un touriste ».

Calculer la probabilité que le visiteur soit un touriste.

IV. Indépendance

Définition 2.

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
On dit que B est ***indépendant*** de A si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$, autrement dit si la réalisation ou non de l'événement A n'a aucune influence sur celle de B.
Dans ce cas, on a alors aussi $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, autrement dit A est indépendant de B aussi.

En échangeant les noms des événements, on remarque alors que c'est réciproque.

On dit alors simplement que les deux événements A et B sont indépendants si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vraie (ce qui implique que l'autre l'est aussi) :

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)}.$$

⚠ Ne pas confondre ***indépendants*** et ***incompatibles***.

Propriété.

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. A et B sont **indépendants si et seulement si** :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}.$$

Propriété.

Soit A et B deux événements indépendants. Il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B, pour les événements A et $\overline{B}$ et pour les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 3.2. On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons parmi lesquels 3 sont rouges (numérotés 1,2 et 3), 2 sont bleus (numérotés 1 et 2) et 1 vert numéroté 1.
On note :

- R l'évènement « le jeton est rouge » ;
- U l'évènement « le numéro est 1 » ;
- D l'évènement « le numéro est 2 ».

Les événements U et D sont-ils indépendants ? Et R et D ? Et R et $\overline{D}$.