Chapitre 7

Compléments sur les suites

***

I. Sens de variation d'une suite

1. Définition et méthode

Définition 1.

Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.

1. Dire que la suite (u_n) est ***décroissante*** signifie que pour tout entier naturel n, u_{n+1} .
2. Dire que la suite (u_n) est ***croissante*** signifie que pour tout entier naturel n, u_{n+1} .
3. La suite (u_n) est ***constante*** (ou *stationnaire*) signifie que pour tout entier naturel n, u_{n+1} .

Remarque. Si (u_n) est croissante ou décroissante, la suite (u_n) est dite ______________________.

Méthode.

Pour déterminer la variation d'une suite, on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est ______________________.
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est ______________________.
3. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut aussi calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:
   (a) Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est ______________________.
   (b) Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est ____________________________.

Exercice 1.7.

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 9 \times 5^n - 1$ est croissante.
2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ est décroissante.

2. Cas des suites arithmétiques

Propriété.

Soit (u_n) une suite ***arithmétique*** de raison r.

1. La suite (u_n) est ***décroissante*** si et seulement si ___________.
2. La suite (u_n) est ***décroissante*** si et seulement si ___________.
3. La suite (u_n) est ***constante*** (ou *stationnaire*) si et seulement si ___________.

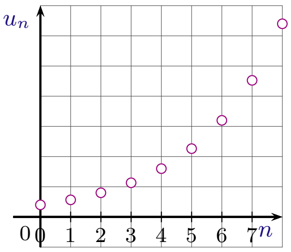
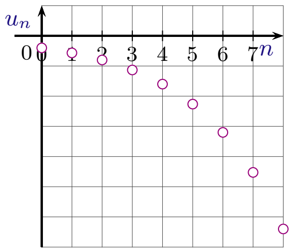
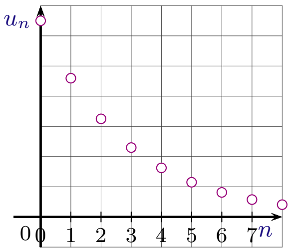
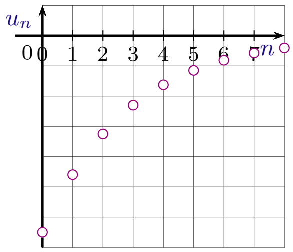
3. Cas des suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La ***monotonie*** de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$.

1. Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite ***n'est pas monotone***.
2. Si $q > 0$ alors la suite est ***monotone***, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

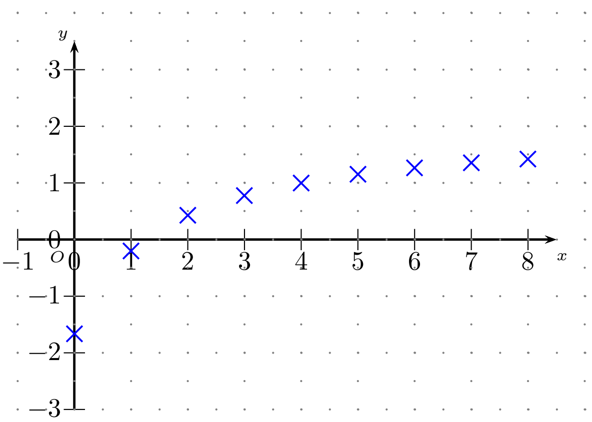
Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est ***croissante*** 	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est ***décroissante*** 	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est ***décroissante*** 	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est ***croissante*** 

II. Notion de limite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs entières aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ». Différents outils (calculatrice, tableur, Python...) fournissent une représentation graphique ou un tableau de valeurs de la suite qui permettent d'émettre différentes conjectures.

1. Limite finie

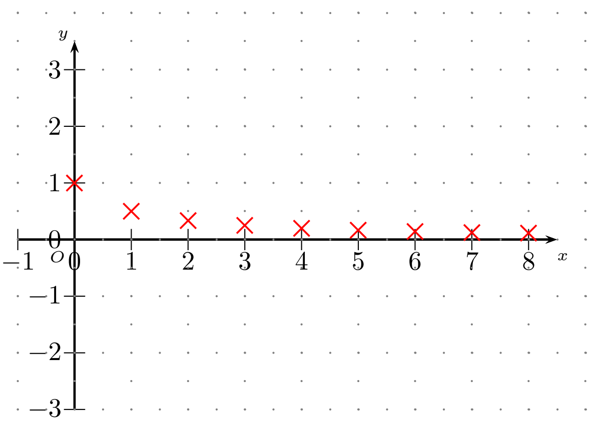
Exemple 1. (u_n) est définie par $u_n = \dfrac{4n-5}{2n+3}$ pour tout entier naturel n.



n	100	1000	100000
v_n	$1,945\,8$	$1,994\,5$	$1,999\,9$

Les termes u_n semblent ***se rapprocher*** autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 2.
On dit que la suite (u_n) tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exemple 2. (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n.

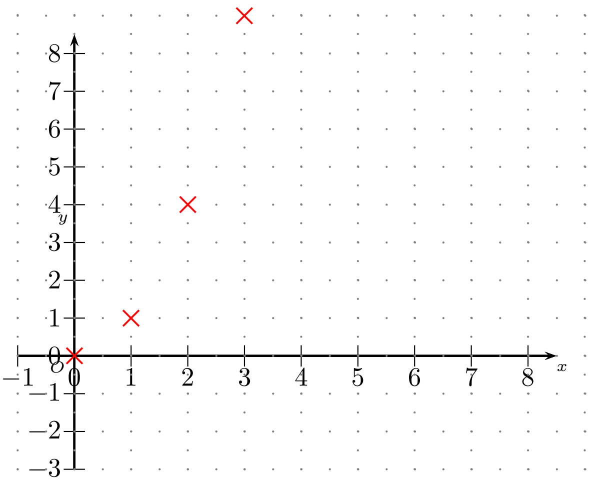


n	100	$1\,000$	$100\,000$
v_n	$0,01$	$0,001$	$0,000\,01$

Les termes v_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 0
On dit que la suite (v_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. Limite infinie

Exemple 3. (w_n) est définie par $w_n = n^2$ pour tout entier naturel n.



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.

On note : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty}$.

Exemple 4. (t_n) est la suite arithmétique de premier terme 16 et de raison -2.

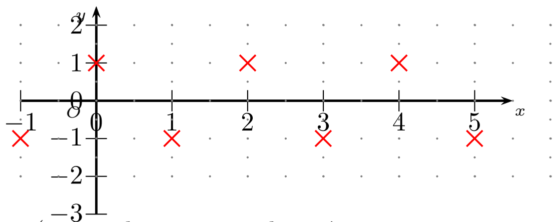
	A	B
1	n	t_n
2	0	16
3	10	-4
4	100	-184
5	1 000	$-19\,984$

Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue.

On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -\infty}$.

3. Pas de limite

Exemple 5. (z_n) est définie par $z_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n.



La suite (z_n) a des termes alternées entre -1 et 1 donc la suite (z_n) n'a pas de limite.

Exemple 6. La suite (a_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = -1$ et $a_{n+1} = (a_n)^2 - 1$:

	A	B
1	n	a_n
2	0	-1
3	1	0
4	2	-1
5	3	0
6	4	-1
7	5	0

La suite (a_n) semble ne prendre que les valeurs 0 et -1 de façon ***alternée*** : elle semble ne pas admettre de limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.7. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = -3(0,69)^n$.
   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son sens de variation.

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 5\left(\dfrac{1}{7}\right)^n + 50$.
   Conjecturer avec la calculatrice, la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.