Chapitre 5

Primitives, équations différentielles

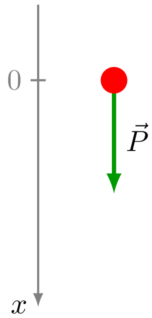
⋆⋆⋆

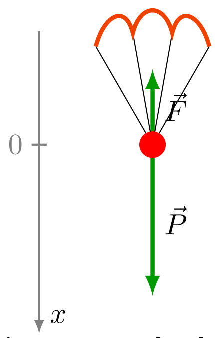
Préambule.

Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. Par le principe fondamental de la mécanique : $\vec{P} = m\vec{a}$. Tous les vecteurs sont verticaux donc $mg = ma$, où g est la constante de gravitation, a l'accélération verticale et m la masse. On obtient $a = g$. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g \tag{5.1}$$

Il est facile d'en déduire la vitesse par intégration : $v(t) = gt$ (en supposant que la vitesse initiale est nulle), c'est-à-dire que la vitesse augmente de façon linéaire au cours du temps. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$, donc par une nouvelle intégration on obtient $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (en supposant que la position initiale est nulle).





Le cas d'un parachutiste est plus compliqué. Le modèle précédent n'est pas applicable car il ne tient pas compte des frottements. Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -fmv$ (f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la mécanique devient $mg - fmv = ma$, ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g - fv(t) \tag{5.2}$$

C'est une relation entre la vitesse v et sa dérivée : il s'agit d'une ***équation différentielle***. Il n'est pas évident de trouver quelle est la fonction v qui convient. Le but de ce chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, ce qui nous permettra d'en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

1. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

1.1 Définition de l'équation différentielle $y' = f$

Définition 1.
Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'une fonction F est ***solution*** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.
- ***Résoudre*** sur I l'équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telle que $F' = f$.

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle $y' = x$. La fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une solution de (E), en effet pour tout réel x on a $F'(x) = x$.

1.2 Primitives d'une fonction

Définition 2.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle ***primitive*** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple. La fonction $F : x \to \mathrm{e}^x + 2x + 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \to \mathrm{e}^x + x^2 + x + 5$.

Mini-exercices.
1. Soit $(E) : y' = 3x^2 - 4x + 1$ et $f : x \to x^3 - 2x^2 + x - 5$. Vérifier que f est solution de (E).
2. Soit la fonction F définie sur $]0\,; +\infty[$ par $F(x) = x(\ln(x) - 1) + 2$. Vérifier que F est une primitive sur $]0\,; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$.

Propriété (admise). Toute fonction ***continue*** sur un intervalle I admet ***des*** primitives sur I.

Propriété. Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle I et G une ***primitive*** de f sur I.
Les primitives de f sur I, c'est-à-dire, les solutions de l'équation différentielle $y' = f$, sont les fonctions F définies sur I par $f(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

Propriété. Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle I. Pour tout réel $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il ***existe une unique*** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

2. Opérations sur les primitives

La méthode de recherche d'une intégrale vient la bonne connaissance des formules de dérivation, puisqu'il s'agit de faire l'opération contraire.
Les seuls cas « évidents » de formules sont les sommes et les produits par une constante, et par suite les fonctions polynomiales.

2.1 Primitives des fonctions de référence

Fonction $f\ :\ x \to \cdots$	Une primitive $F:\ x \to \cdots$	Intervalle I
a (constante)	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
Plus généralement : x^n où $n \in \mathbb{N}$	....	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	....	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
Plus généralement : $\dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$	....	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	....	$]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	....	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	....	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$	....	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ où $a \neq 0$	....	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	....	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	....	$\mathbb{R}$

2.2 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété. Soit f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf.

Mini-exercices. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

2.3 Primitives et composition

Fonction de la forme	Une primitive F :	Conditions d'existence
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$u' \times u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	

Mini-exercices. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f_1(x) = 2x(x^2+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x)\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $I = \mathbb{R}$.

3. Équations différentielles du premier ordre

3.1 Solution d'une équation différentielle

Définitions.

- Une ***équation différentielle du premier ordre*** est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée.
- Une ***solution d'une équation différentielle*** est une fonction qui vérifie cette égalité.

Exemple. On considère l'équation différentielle $y' = 3y$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$ est ***une*** solution de cette équation différentielle. En effet, $f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x)$.

3.2 Résolution d'équations différentielles

Propriété (équation différentielle $y' = ay$)

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \to Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

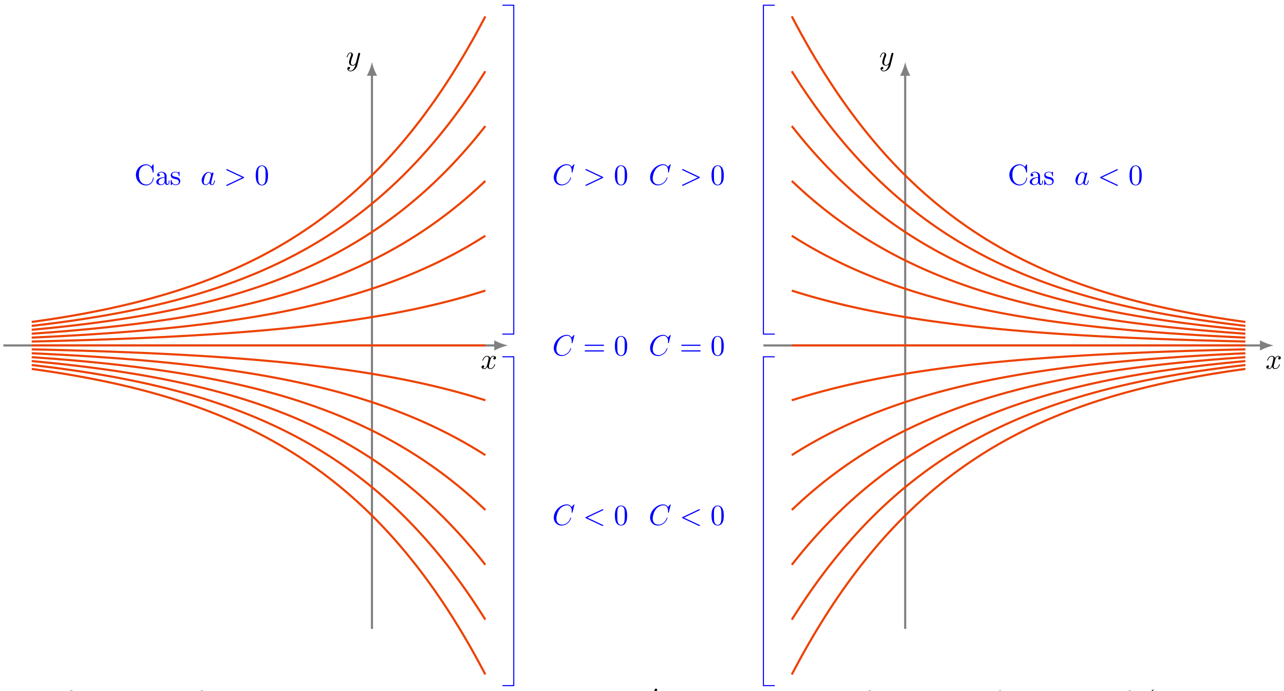
Démonstration.

- Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction f_C, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_C(x) = Ce^{ax}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f_C'(x) = Cae^{ax} = af_C(x)$ ce qui prouve que f_C est donc une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

- Prouvons l'unicité des fonctions f_C. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$. Or g est solution de (E) donc $g'(x) = ag(x)$ soit $g'(x) - ag(x) = 0$ ce qui induit que $h'(x) = 0$ et par suite que h est constante. Pour tout réel x on a donc $h(x) = C$ soit $g(x)e^{-ax} = C$ d'où $g(x) = Ce^{ax}$.

Remarques.

- Soit a un réel non nul fixé. Les courbes de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.

Propriétés (équation différentielle $y' = ay + b$)

Soit a et b deux réels non nuls. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + b$.

- (E) admet une unique solution ***particulière constante***, qui est la fonction $x \to -\dfrac{b}{a}$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \to C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle.
- Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

Démonstration.

- Montrer que les fonction $x \to C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).
- Réciproquement : soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.
  Vérifier que g est solution de (E). Justifier que la fonction $f - g$ est dérivable et que $f - g$ est solution de $(E)'\ :\ y' = ay$. En déduire une expression de $f - g$ puis de f.

Mini-exercices.

1. Vérifier que la fonction h définie par $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}$ est une solution particulière de l'équation $(E)\ :\ 3y' + 4y = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' = 6y + 1$ puis en déduire l'unique solution h de cette équation vérifiant $h(0) = 4$.

Propriété (équation différentielle $y' = ay + f$)

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \to C\mathrm{e}^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle.