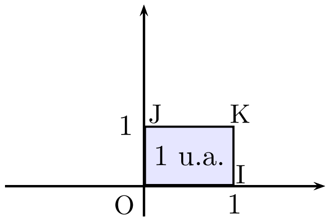
Intégration

***

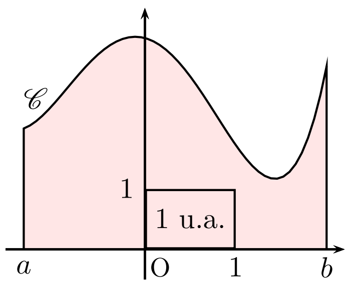
1. Intégrale d'une fonction positive

Définition 1. Soit P un plan muni d'un repère orthogonal . Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ) = 1$ u.a.



Exemple. Si $OI = 2$cm et $OJ = 5$cm alors 1u.a $= 2 \times 5 = 10$ cm^2.

Définition 2. Soit f une fonction ***continue et positive*** sur un intervalle $[a\,;\,b]$. L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Les nombres a et b sont les ***bornes*** de l'intégrale.



Remarques.

- Le symbole $\int$ représente une somme (il ressemble à un S), $f(x)d(x)$ représente l'aire d'un rectangle de largeur (très petite) dx et de hauteur $f(x)$.
- La variable x est muette, c'est à dire que l'on peut noter aussi :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots$$
autrement dit, le nombre ne dépend pas de x, mais uniquement de f, a et b.

Mini-exercice. Soit $f : x \mapsto x - 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$, autrement dit l'aire située entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

1.2 Théorème fondamental

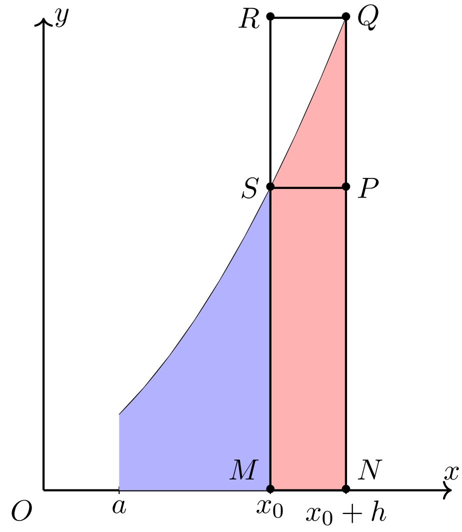
Théorème. Soit f une fonction ***continue*** et ***positive*** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On définit, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
La fonction F est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration.

On ne fait la démonstration que dans le cas où la fonction est ***strictement croissante***.
On a donc un cas similaire à celui représenté ci-contre.
Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a;b]$. On a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt \quad \text{et} \quad F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$

Puisque f est positive,
la différence $F(x_0+h) - F(x_0)$ est l'aire coloriée en rouge sur la figure.
Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle $MNPS$ qui vaut $h \times f(x)$ et celle de $MNQR$ qui vaut $h \times f(x+h)$.



Comme f est croissante, on a :

$$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$

Puis, comme $h > 0$,

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Par suite, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On peut tenir le même type de raisonnement avec $h < 0$.
Finalement, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$, cela quelque soit $x_0 \in [a\,;\,b]$.
Donc F est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $F' = f$ ■

Corollaire. Soit f une fonction ***continue et positive*** sur $[a\,;\,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Mini-exercice. Soit la fonction f définie sur $[-4\,;\,1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Démontrer que f est positive sur $[-4\,;\,1]$.
2. Calculer l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre -4 et 1 en unité d'aire puis en cm^2 si on se place dans un repère orthonormé d'unité $0,5$ cm.

2. Intégrale d'une fonction continue

2.1 Définition

Définition 3. Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle I et a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.
On définit l'***intégrale de f de a à b*** par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Remarque. Le réel $F(b) - F(a)$ ne ***dépend pas*** de la primitive choisie pour f. En effet, si G est une autre primitive de f alors $F = F + k$ avec k réel donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.

2.1 Propriétés des intégrales

Propriétés algébriques.

Soit f et g deux fonctions ***continues*** sur un intervalle I. On considère trois réels a, b et c appartenant à I et λ un réel.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- ***Relation de Chasles*** : $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- ***Linéarité de l'intégrale*** : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Mini-exercice. On souhaite calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}dx$.

1. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}dx$. Calculer J.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I.

Propriétés : intégrales et inégalités.

Soit deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et f et g deux fonctions ***continues*** sur $[a\,;\,b]$.

- ***Positivité*** : si f est ***positive*** sur $[a\,;\,b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
  Attention ; réciproque fausse !
- ***Ordre*** : si $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.

Propriétés : fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction ***continue*** un intervalle I centré en 0 et a un réel de I.

- ***Paire*** : si f est ***paire*** alors $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$.
- ***Impaire*** : si f est ***impaire*** alors $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$.

2.2 Intégration par parties

Propriété. Soit u et v deux fonctions ***dérivables*** sur un intervalle I à dérivées u' et v' ***continues*** sur I et a et b deux réels de I. On a :

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}.$$

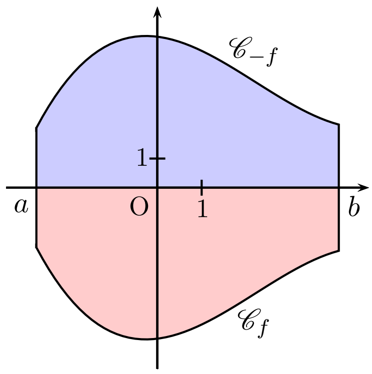
Mini-exercice. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)\mathrm{e}^x dx$.

3. Applications du calcul intégral

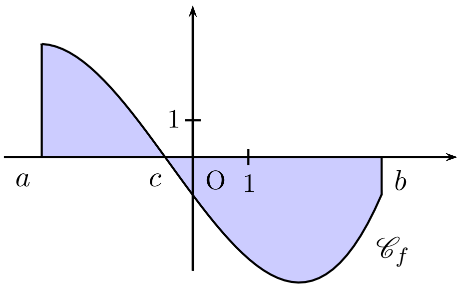
3.1 Calcul d'aire

Propriété. Soit f une fonction ***continue*** et ***négative*** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aire est égale à :

$$\boxed{-\int_a^b f(x)dx}.$$

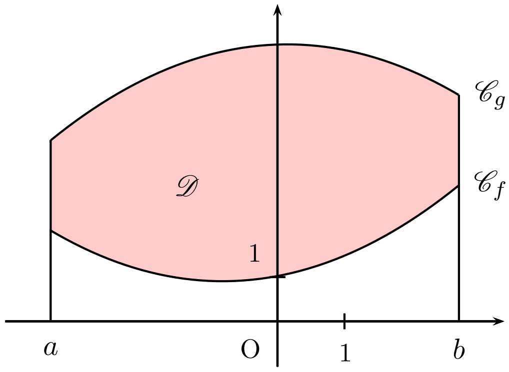


Remarque. dans le cas d'une fonction f continue et de ***signe quelconque*** sur $[a\,;\,b]$, l'aire de $\mathscr{D}_f$ est la ***somme des aires algébriques*** des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un ***signe constant***. Dans l'exemple ci-contre, exprimons l'aire du domaine colorée à l'aide d'intégrales :



Propriété admise. Soit f et g deux fonctions ***continues*** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx}.$$

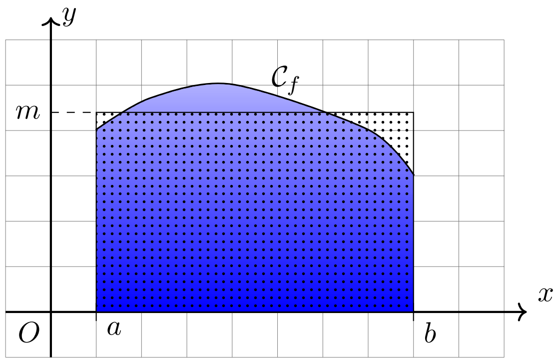


3.2 Valeur moyenne

Définition 4. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

L'interprétation graphique est la suivante :



La zone bleue et le rectangle ont la même aire. En effet, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = m \times (b-a)$.