Formulaire.

- $u'u^n \xhookrightarrow{primitive} \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
- $u'\mathrm{e}^u \xhookrightarrow{primitive} \mathrm{e}^u$
- $\dfrac{u'}{u} \xhookrightarrow{primitive} \ln(|u|)$
- $\dfrac{u'}{\sqrt{u}} \xhookrightarrow{primitive} 2\sqrt{u}$
- $u'\cos(u) \xhookrightarrow{primitive} \sin(u)$
- $u'\sin(u) \xhookrightarrow{primitive} -\cos(u)$

Exercice 1. **/4**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

1. $f_1(x) = 4x\cos(x^2)$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^3}$ sur $I = \mathbb{R}^+$.
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 2x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + x^2}}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 2. **/6**

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.

Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 20 °C.

Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 1 °C.

Premier modèle.

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.

Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.

Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle.

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 20] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) s'écrit également : $\theta' = a\theta - 20a$ puis déterminer alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 1 °C.

2. Montrer que pour t positif : $\theta(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$.
3. La température idéale de dégustation des macarons étant de 15 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 3. /10

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Calculer les limites de u en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction u sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution a sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer $u(1)$ puis déterminer le signe de u sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}.$$

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

Partie III : Étude de l'aire d'une surface entre deux courbes.

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2\ln(x) - 2$ et on note $\mathcal{C}'$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. Soit la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (a) Déterminer une primitive de la fonction h sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive de $f(x) - g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
   (c) Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat.

Bonus : en utilisant une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln(x)\,dx$.