

Nombres complexes : partie géométrique

I. Image d'un nombre complexe et affixe

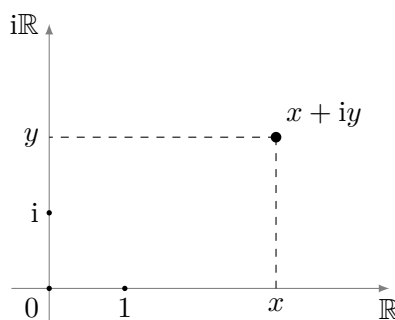
1. Affixe d'un point

Définition.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$:

- à tout complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le point $M(x; y)$.
- Réciproquement à tout point $M(x; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.
- On dit que le point M est le **point image** du nombre complexe z et que z est **l'affixe** du point M .
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Plan complexe.



Exercice 1.6.

1. Soit D d'affixe $-2 + 6i$. Donner les coordonnées du point D .
2. Soit $E(3; -4)$. Donner l'affixe du point E .

Remarque. L'axe des abscisses est appelé **axe des réels** et l'axe des ordonnées, **axe des imaginaires purs**.

Propriétés.

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B .

- Les points A et B sont confondus **si et seulement si** $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.



Exercice 2.6. Dans le plan complexe, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -3 + i$, $z_B = 5 - 3i$, $z_C = 1 + i$ et $z_D = -7 + 5i$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

2. Affixe d'un vecteur

Définition.

À tout complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan complexe.

On dit que le vecteur \vec{w} est le **vecteur image** du nombre complexe z et que z est **l'affixe** du vecteur \vec{w} .

Propriétés.

Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs \vec{w} et \vec{w}' d'affixes respectives z et z' et k un réel.

- Les vecteurs \vec{w} et \vec{w}' sont égaux **si et seulement si** $z = z'$.
- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz .

3. Lien entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Propriétés.

- Soit M un point du plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et z un nombre complexe. Le point M a pour **affixe** z si et seulement si le vecteur \vec{OM} a pour affixe z .
- Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B . Le vecteur \vec{AB} a pour affixe $z_B - z_A$.



Exercice 3.6. On donne $A(-4 - 2i)$, $B(3 - i)$ et $C(-1)$. Déterminer l'affixe du point D telle que le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme.

II. Module d'un nombre complexe

1. Définition

Définition.

Soit le nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ et M l'image de z dans le plan complexe. Le module de z , noté $|z|$, est le réel positif noté $|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarque. Si z est **réel**, $|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{z^2} = |z|$ donc le module de z est bien la valeur absolue de z et la notation utilisée pour le module est cohérente.

La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .

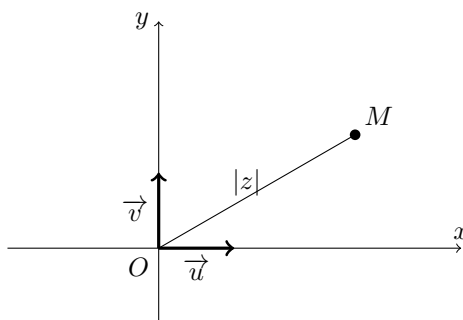


Exercice 4.6. Calculer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = 5 + i$.
2. $z_2 = -3 + 2i$.
3. $z_3 = -6$.
4. $z_4 = 9i$.

Propriétés.

- Soit z un nombre complexe et M le point image associé dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui n'est autre que la norme du vecteur \overrightarrow{OM} c'est-à-dire la distance OM , ainsi $|z| = OM$.



- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .
On a alors :

$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|.$$



Exercice 5.6. Soit $A(1 + 2i)$, $B(2)$ et $C(-1 + i)$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC .
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

2. Propriétés du module

Propriétés.

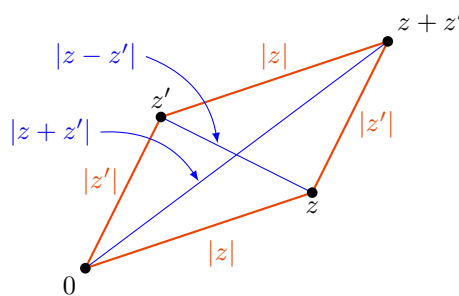
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $z = 0 \iff |z| = 0$.
2. $|z|^2 = z \times \bar{z} = x^2 + y^2$.
3. $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$.

Propriétés.

On considère z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z||z'|$.
2. Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
3. Si $z \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z^n| = |z|^n$.
5. Si $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$.
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$: inégalité triangulaire.
7. $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists k \in \mathbb{R}^+ / z' = kz \text{ ou } z = kz' \text{ (cas d'égalité)}.$



Exercice 6.6. Déterminer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = (1 + i)(2 - 4i)$
2. $z_2 = (1 + i)^{15}$
3. $z_3 = \frac{3 - i}{2 + 5i}$
4. $z_4 = \frac{(-3 + 4i)^5}{(5 - 4i)^4}$

3. Nombres complexes de module 1

Définition.

Soit z un nombre complexe. z est de module 1 si et seulement si $|z| = 1$. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté \mathbb{U} .

Ainsi $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Remarque. Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de \mathbb{U} est *le cercle trigonométrique*.

Propriétés.

1. Si $(z; z') \in \mathbb{U}^2$ **alors** $zz' \in \mathbb{U}$.
2. Si $z \in \mathbb{U}$ **alors** $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.
3. Si $(z; z') \in \mathbb{U}^2$ **alors** $\frac{z'}{z} \in \mathbb{U}$.

III. Arguments d'un nombre complexe

1. Notion d'arguments

Définition.

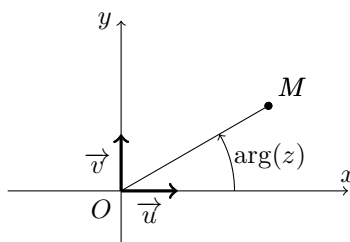
Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M .

On appelle **argument** de z **toute mesure en radian** de l'angle orienté :

$$\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$$

Si θ est un argument de z , $\theta + 2k\pi$ en est également un pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\theta = \arg(z) [2\pi]$ et on lit « θ égal à \arg de z modulo 2π ».



Remarques.

- 0 **n'a pas d'argument**.
- Tout nombre **réel positif** a un argument égal à 0.
- Tout nombre **réel négatif** a un argument égal à π .
- Tout nombre **imaginaire pur** iy avec $y > 0$ a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$.
- Tout nombre **imaginaire pur** iy avec $y < 0$ a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Propriétés.

- Soit z un nombre complexe non nul et \vec{w} le vecteur image associé.
On a alors $(\vec{u}; \vec{w}) = \arg(z) [2\pi]$.
- Soit A et B deux points **distincts** d'affixes respectives z_A et z_B .
On a alors $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) (2\pi)$.

2. Propriétés sur les arguments

Propriétés.

Soit z un nombre complexe **non nul**.

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$.
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$.
- $\arg(-\bar{z}) = -\arg(z) + \pi [2\pi]$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 [\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

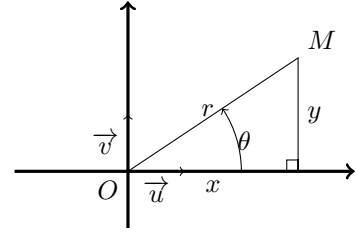
Soit z un nombre complexe non nul. Son module $|z| = r$ et un argument θ permettent de caractériser son image M sur le plan, au même titre que les coordonnées $(x; y)$.

Le couple $[r; \theta]$ forme alors ce que l'on appelle les **coordonnées polaires** du point M . On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

En effet, d'après la figure ci-contre,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$



Définition.

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$ un nombre complexe de module r et d'argument θ . D'après la remarque précédente, on a :

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Cette dernière expression est appelée **forme trigonométrique** de z .



Exercice 7.6.

- Calculer un argument des nombres complexes suivants :
 - $z_1 = 4i$
 - $z_2 = -2$
 - $z_3 = -2 + 2i$
 - $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$
- Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :
 - z_1 tel que $|z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.
 - z_2 tel que $|z_2| = 5$ et $\arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} (2\pi)$.
- Déterminer une forme trigonométrique des complexes suivants :
 - $z_3 = 4 + 4\sqrt{3}i$.
 - $z_4 = 2\sqrt{3} - 2i$.

Propriété.

Soit z et z' deux nombres complexes **non nuls**.

$$z = z' \iff |z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z') [2\pi]$$

Propriétés.

Soit z et z' deux nombres complexes **non nuls**.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) [2\pi]$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi]$.