Exercice 1

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n^2+5) \leqslant 1$ donc $4 \geqslant -4\sin(n^2+5) \geqslant -4$ puis $1 \leqslant u_n \leqslant 9$ ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée par 1 et 9.

Exercice 2.

1. La formule entrée en B3 est : « `=2*B2-A2+3` ».
2. $\mathscr{P}_n$: « $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ».
   Initialisation : vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie. $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire :
   $u_k = 3 \times 2^k + k - 2$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ c'est-à-dire : $u_{k+1} = 3 \times 2^{k+1} + k - 1$.
   On sait que $u_{k+1} = 2u_k - k + 3$ et par hypothèse de récurrence, on a $u_k = 3 \times 2^k + k - 2$, on en déduit alors que :
   $$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2(3 \times 2^k + k - 2) - k + 3 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + 2k - 4 - k + 3 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + k - 1 \end{aligned}$$
   On en déduit donc que $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

   <u>Conclusion</u> : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$ soit :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$$
3. Utilisons la calculatrice : on a $u_{18} = 786\,448$ et $u_{19} = 1\,572\,881$ donc la valeur $n = 19$ convient.

Exercice 3.

1. (a) f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et pour tout réel x on a $f'(x) = 2 - 2x$.
   $\forall x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) \geqslant 0$ ce qui prouve que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$. On peut dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,1]$:

x	0	1
signe de $f'(x)$	$+$	
variations de f	0 ↗	1

   (b) Le minimum de f sur $[0\,;\,1]$ est 0 atteint en $x = 0$ et le maximum de f sur $[0\,;\,1]$ est 1 atteint en $x = 1$. On en déduit donc que pour tout réel x on a :
   $$\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}$$
2. Prouvons ce résultat par récurrence.
   Soit $\mathscr{P}_n$: « $0 < u_n < 1$ »
   Initialisation *:* vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie. $u_0 \in]0\,;\,1[$ ainsi $0 < u_0 < 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : on suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire $0 < u_k < 1$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < 1$.
   Par hypothèse de récurrence $0 < u_k < 1$ donc $f(0) < f(u_k) < f(1)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, elle l'est donc également sur $]0\,;\,1[$.
   Or $f(0) = 0$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(1) = 1$ donc $0 < u_{k+1} < 1$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   <u>Conclusion</u> : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n soit :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & u_n(2-u_n) - u_n \\ & = & u_n(2 - u_n - 1) \\ & = & u_n(1-u_n) \end{array}$$

On a démontré précédemment que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$ ainsi $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$. Par produit, $u_n(1-u_n) > 0$ ce qui implique que $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & (n+1)u_{n+1} - 1 \\ & = & (n+1)\dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)} - 1 \\ & = & \dfrac{1}{2}(nu_n + 1) - 1 \\ & = & \dfrac{1}{2}(nu_n + 1 - 2) \\ & = & \dfrac{1}{2}(nu_n - 1) \\ & = & \dfrac{1}{2}v_n \end{array}$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\boxed{q = \dfrac{1}{2}}$ et de premier terme $v_1 = 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ donc $v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ soit $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0,5^n$.

$\forall n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \dfrac{v_n + 1}{n}$ donc :

$$\boxed{u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}}$$

3. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n + 1 = 1$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Par quotient des limites, il vient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$