Chapitre 11

Fonctions trigonométriques

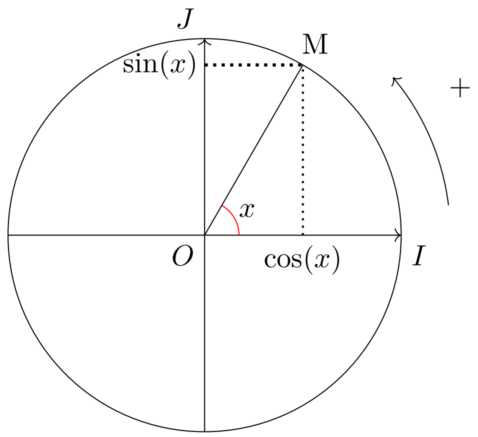
***

1. Fonction cosinus et sinus

1.1 Définitions

Définitions. Soit M le point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O, I, J). On a ainsi $M(\cos(x)\,;\,\sin(x))$.

- La fonction ***cosinus***, notée cos est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\cos\ :\ x \to \cos(x)$.
- La fonction ***sinus***, notée sin est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\sin\ :\ x \to \sin(x)$.



Remarques.

- Pour tout réel x, ... $\leqslant \cos(x) \leqslant$ ..... et ..... $\leqslant \sin(x) \leqslant$ ......
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) =$ ......

1.2 Dérivabilité

Propriétés admises.

- La fonction cos est ***dérivable*** sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction ..... : $x \mapsto$ ......
- La fonction sin est ***dérivable*** sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction ..... : $x \mapsto$ ......

Mini-exercice. Calculer la fonction dérivée des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_1(x) = 5\cos(x) - 4\sin(x)$.
2. $f_2(x) = \cos(x)\sin(x)$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + 2}$

Propriétés. Soit a et b deux réels.

- La fonction $x \mapsto \cos(ax + b)$ est ***dérivable*** sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto$ ....
- La fonction $x \mapsto \sin(ax + b)$ est ***dérivable*** sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto$ ....

Propriétés. Soit u une fonction ***dérivable*** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction $\cos(u)$ est ***dérivable*** sur I et a pour dérivée la fonction ....
- La fonction $\sin(u)$ est ***dérivable*** sur I et a pour dérivée la fonction ....

Mini-exercice. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_4(x) = 3\cos\left(2x - \dfrac{2\pi}{5}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_5(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.
3. $f_6(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $I = \mathbb{R}^*$.

1.3 Limites

Propriétés.

- Les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

Mini-exercice. Soit la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. Calculer la limite de f en 0.

2. Variations des fonctions trigonométriques

2.1 Périodicité et parité

Propriétés.

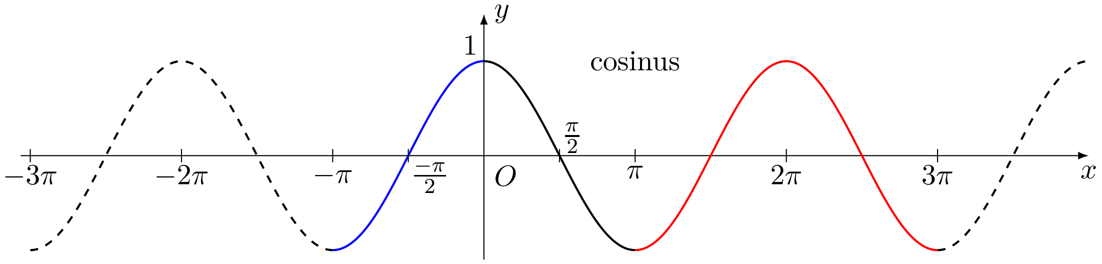
- Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $(x + 2\pi)$ sont confondus. Ainsi on a $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. Les fonction cos et sin sont ***périodiques*** de période 2π. Leur courbe représentative se répète sur des intervalles de longueur 2π.
- Pour tout réel x on a $\cos(-x) = \cos(x)$: la fonction cos est ***paire*** : sa courbe représentative admet ***l'axe des ordonnées*** comme ***axe de symétrie***.
- Pour tout réel x on a $\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sin est ***impaire*** : sa courbe représentative admet ***l'origine du repère O*** comme ***centre de symétrie***.

2.2 La fonction cos

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0;\pi]$:

x	0		π
signe de $\cos'(x)$		$-$	
Variations de cos	1	$\searrow$	-1

Ensuite, grâce à la parité de la fonction cosinus on peut compléter sur $[-\pi\,;\,0]$ puis on reporte sur les autres intervalles grâce à la périodicité.

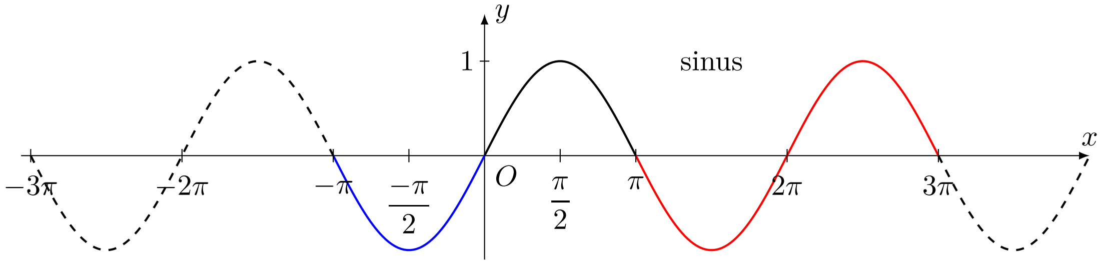


La partie noire pleine est la représentation sur $[0\,;\,\pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction paire donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$).

2.3 La fonction sin

De même, pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $\sin'(x)$		$+$	$-$		
Variations de sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



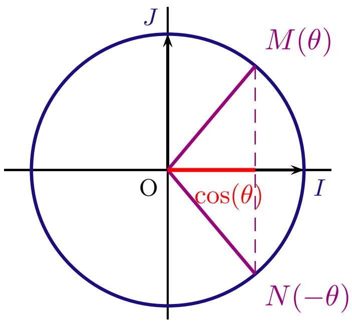
La partie noire pleine est la représentation sur $[0;\pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction impaire donc symétrie par rapport à l'origine) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$).

3. Équations avec le cosinus, le sinus

3.1 Avec le cosinus

Propriété. Soit a un nombre réel. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $\mathscr{S} = \varnothing$.
- Si $a = 1$ alors $\mathscr{S} = \{0\}$.
- Si $a = -1$ alors $\mathscr{S} = \{-\pi\,;\,\pi\}$.
- Si $-1 < a < 1$ alors $\mathscr{S} = \{-\theta\,;\,\theta\}$ avec $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$.



3.2 Avec le sinus

Propriété. Soit a un nombre réel. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = a$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $\mathscr{S} = \varnothing$.
- Si $a = -1$ alors $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{2}\}$.
- Si $a = 0$ alors $\mathscr{S} = \{-\pi\,;\,0\}$.
- Si $a = 1$ alors $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{2}\}$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\mathscr{S} = \{\pi - \theta\,;\,\theta\}$ avec $\theta \in]0\,;\,\pi[$ tel que $\sin(\theta) = a$.
- Si $-1 < a < 0$ alors $\mathscr{S} = \{-\pi - \theta\,;\,\theta\}$ avec $\theta \in]-\pi\,;\,0[$ tel que $\sin(\theta) = a$.