Chapitre 4

Calcul matriciel

***

I. Notion de matrice et vocabulaire

1. Matrice

Définition.

Soit m et n deux entiers naturels **non nuls**.
On appelle ***matrice*** de ***dimension*** $m \times n$, ou d'ordre $m \times n$ voire de format $m \times n$, un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels.
On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ \sqrt{2} & 1 & \frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre ____________.

Le coefficient $a_{2,4}$, coefficient situé à la ________________________ de la ________________________, de la matrice A est :

$$\boxed{a_{2,4} = \_\_\_\_\_\_}.$$

2. Quelques cas particuliers

a. Matrice carrée

Définition.

Une matrice ayant le **même nombre** n de lignes et de colonnes est une matrice ***carrée*** d'ordre n.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée ________________________

b. Matrice ligne

Définition.

Une matrice formée ***d'une seule ligne*** et de n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) colonnes est ***une matrice ligne ou vecteur ligne.***

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ est une ***matrice ligne*** de dimension ____________

c. Matrice colonne

Définition.

Une matrice formée de m (avec $m \in \mathbb{N}^*$) ***lignes et d'une seule colonne*** est une ***matrice colonne ou vecteur colonne.***

Exemple. La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix}$ est une ***matrice colonne*** de dimension 3×1.

3. Égalité de deux matrices

Propriété.

Deux matrices A et B sont ***égales*** si, et seulement si, elles ont ***même dimension*** et que tous leurs éléments situés à la ***même place sont égaux***.

Exercice 1.4. On considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$
Déterminer les valeurs de a et b pour que les matrices A et B soient égales.

II. Opérations sur les matrices

1. Addition de matrices

Définition.

La ***somme*** de deux matrices A et B de ***même dimension*** est la matrice notée $A+B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors :

$$\boxed{A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}}$$

Exemple. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Propriété.

Si A, B et C sont des matrices de ***même dimension*** alors :

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

2. Multiplication par un réel

Définition.

Le ***produit*** d'une matrice A par un réel k est la matrice $k \times A$ obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k.
Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice d'ordre $m \times n$ alors pour tout réel k :

$$\boxed{kA = (ka_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}}.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1,8 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ alors : $10 \times A = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$.

3. Produit de matrices

a. Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition.

Soit n un entier naturel non nul, A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et B une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le ***produit*** $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_n \times b_n)}.$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b. Produit de deux matrices

⚠ Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}}.$$

Remarque. Il est *peut être* commode de disposer les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième...

Exercice 2.4. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Peut-on calculer le produit $A \times B$? Si oui, calculer ce produit.
2. Peut-on calculer le produit $B \times A$? Si oui, calculer ce produit.

4. Propriétés

Propriété.

Soient A, B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis.

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

En général $A \times B \neq B \times A$, on dit que la multiplication n'est pas ***commutative*** et il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

⚠ $A \times C = B \times C$ ne signifie pas que $A = B$. De même $A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

III. Matrices carrées

1. Matrice identité

a. Matrice diagonale

Définition.

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée ***matrice diagonale.***

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale mais en revanche, la matrice $B = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

b. Matrice identité

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée ***matrice identité*** d'ordre n, on la note I_n.

Exemples.

$I_2 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ $\qquad$ $I_3 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ $\qquad$ $I_4 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

Propriété.

Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Puissances d'une matrice carré

Définition.

Soit A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.
La ***puissance*** p-ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A.

$$\boxed{A^p = \underbrace{A \times A \times \cdot \times A}_{p \text{ fois}}}.$$

Par convention $A^0 = I_n$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Inverse d'une matrice carrée

Définition.

Une matrice ***carrée*** A d'ordre n est ***inversible***, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée :

$$\boxed{A^{-1}}.$$

Exercice 3.4. On donne les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

Propriété.

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
La matrice A est ***inversible*** si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Le réel $ad - bc$ est appelé ***déterminant*** de la matrice A et est noté Δ.

Si $ad - bc \neq 0$ alors,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}.$$

4. Application aux systèmes linéaires

Définition.

Un système linéaire à n équations et n inconnues : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si la matrice A est ***inversible***, alors le système admet une unique solution donnée par :

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

Exercice 4.4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

Exercice 5.4. Dans le plan muni d'un repère, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(2\,;\,3)$, $\overrightarrow{v}(-1\,;\,4)$ et $\overrightarrow{w}(a\,;\,b)$.
Déterminer en fonction de a et b les réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.