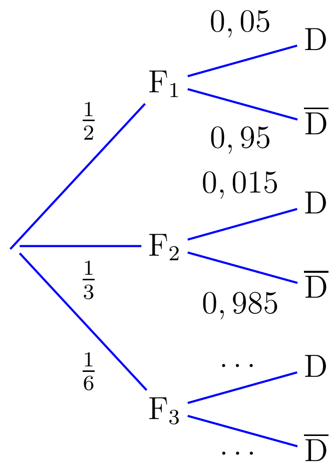
Exercice 1.

Partie A.

1. (a) On a : $\mathbb{P}\left(\mathrm{F}_1\right)=\dfrac{1}{2}$; $\mathbb{P}\left(\mathrm{F}_2\right)=\dfrac{1}{3}$. Puis :

$\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(D)=\dfrac{5}{100}=0,05$; $\mathbb{P}_{\mathrm{F}_2}(D)=\dfrac{1,5}{100}=0,015$; $\mathbb{P}(D)=\dfrac{3,5}{100}=0,035$.



(b) On cherche $\mathbb{P}\left(\mathrm{F}_1 \cap D\right)$.
Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathrm{F}_1 \cap D\right) &= \mathbb{P}\left(\mathrm{F}_1\right) \times \mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(D)\\
&= \frac{1}{2} \times 0,05\\
&= 0,025
\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut est égale à $0,025$.

(c) On cherche $\mathbb{P}\left(\mathrm{F}_2 \cap D\right)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathrm{F}_2 \cap D\right) &= \mathbb{P}\left(\mathrm{F}_2\right) \times \mathbb{P}_{\mathrm{F}_2}(D)\\
&= \frac{1}{3} \times 0,015\\
&= 0,005
\end{aligned}$$

(d) F_1, F_2 et F_3 forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(F_1 \cap D)+\mathbb{P}(F_2 \cap D)+\mathbb{P}(F_3 \cap D)\\
\mathbb{P}(F_3 \cap D) &= \mathbb{P}(D)-\mathbb{P}(F_1 \cap D)-\mathbb{P}(F_2 \cap D)\\
&= 0,035-0,025-0,005\\
&= 0,005
\end{aligned}$$

(e) On cherche $\mathbb{P}_{F_3}(D)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{F_3}(D) &= \frac{\mathbb{P}(F_3 \cap D)}{\mathbb{P}(F)_3} && (1)\\
&= \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}} && (2)\\
&= \frac{3}{100} && (3)\\
&= 0,03 && (4)
\end{aligned}$$

Conclusion : sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, la probabilité qu'elle présente un défaut est égale à $0,003$.

Partie B. Une variable aléatoire

(a) L'expérience est une répétition de 6 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
— Soit le lot est défectueux avec la probabilité $p = 0,035$.
— Soit il ne l'est pas avec la probabilité $q = 1 - p = 0,965$.
X désignant le nombre de lots défectueux parmi les 6, X désigne la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,035$.

(b) On veut $\mathbb{P}(X = 2)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \binom{6}{2} 0,035^2 (0,935)^4\\
&\simeq 0,016
\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité que deux paires de chaussettes d'un même lot présentent un défaut est égale à $0,016$ au millième près.

(c) On cherche $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$. Or $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2)$.
En utilisant la calculatrice, on trouve $0,001$ ce qui prouve que la probabilité d'avoir au moins trois paires de chaussettes d'un lot présentant un défaut est environ égale à $0,001$.

Exercice 2.

1. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions dérivables sur $[0\,;\,48]$ et définies par : $P(t) = C\mathrm{e}^{0,02t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
2. Dans une cuve, les chercheurs ont introduit 3 000 bactéries à l'instant $t = 0$ donc $P(0) = 3$.
Or $P(0) = 3 \iff C\mathrm{e}^{0,02\times 0} = 3 \iff C = 3$.

   Conclusion : $P(t) = 3\mathrm{e}^{0,02t}$ où $t \in [0\,;\,48]$.
3. (a) La fonction P est continue sur $[0\,;\,48]$ car dérivable sur cet intervalle. La fonction P est strictement croissante sur $[0\,;\,48]$. $6 \in [2\,;\,7,835]$ intervalle image de l'intervalle $[0\,;\,48]$ par la fonction P. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(t) = 6$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,48]$.

(b) Avec la méthode de balayage, on trouve $\alpha \simeq 34,658$. Ce temps est égal à 34 h et $0,658 \times 60 \approx 40$ (min).

(c) La population de bactéries aura doublé au bout de 34 h 40 min.

Exercice 3.

1. Résolvons l'équation différentielle $y' + 0,61y = 1,22$ où y est une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(t) = C\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
   $a = 0{,}61$ $b = 1{,}22$ par conséquent $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}61t} + \dfrac{1{,}22}{0{,}61} = C\mathrm{e}^{-0{,}61t} + 2$ où C est une constante quelconque.
2. Déterminons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $f(0) = 24$.
   $f(0) = C\mathrm{e}^{-0{,}61\times 0} + 2 = 24$ d'où $C = 24 - 2 = 22$.
   Il en résulte que pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0{,}61t}$.

1. Calculons la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} -0,61t = -\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}61t} = 0 \underset{\text{par produit et somme}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} 2{+}22\mathrm{e}^{-0{,}61t}{+}2 = 2$$

   La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
2. — On étudie les variation de f sur $[0\,;+\infty[$. f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel t positif, $f'(t) = 0 + 22 \times (-0{,}61\mathrm{e}^{-0{,}61t}) = -13{,}42\mathrm{e}^{-0{,}61t}$. Pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-0.61t} > 0$. Par conséquent $f'(t) < 0$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$. On en déduit que la fonction f décroît.
   — $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$. La fonction f, qui représente la température de la baguette (en °C) au bout du temps, a pour limite 25 en $+\infty$. Cela signifie donc bien que la température du fruit tend à se stabiliser à la température de 2 °C.
   — On en déduit que la fonction f modélise bien la situation avec ces conditions.
3. Déterminons graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :
   (a) la température d'un fruit au bout de 4 heures ; avec la précision permise par le graphique, nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 soit environ 3,9 °C.
   (b) au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale. Nous lisons l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 12, nous trouvons environ 1,3 soit presque une heure et dix-huit minutes.
4. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\dfrac{7}{8}$ en moins de 6 heures.
   La température du fruit devant baisser de $\dfrac{7}{8}$ en moins de 6 heures devrait donc être de 3°C $\left(24 - 24 \times \dfrac{7}{8} = 3\right)$.
   La température au terme des 6 heures est $f(6)$. $f(6) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0.61\times 6} \approx 2{,}57$.
   Nous pouvons considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante puisque la température est inférieure à 3°C avant les six heures ($2{,}57 < 3$).