59

On considère une fonction f définie sur $I =]1\,;+\infty[$. On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

2. On sait que f est strictement croissante sur $I =]1\,;+\infty[$. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

60

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-7	1	$+\infty$
Variation de f	4 ↘	-2 ↗	7 ↘	0

1. a. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

b. Interpréter graphiquement ces résultats.

c. Donner une allure possible de la courbe représentative de f.

61

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,4x$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -100$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 28 - x^3$

62

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 3$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 4x + 5$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x + 5$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 - \dfrac{5}{x}$

63

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 + 1$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

64

Démontrer les deux résultats ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 5x + 1 = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x + 6x^3 = +\infty$.

65

Justifier les deux résultats ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + 4)(5 - \mathrm{e}^x) = 20$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x + 4)\sqrt{x} = +\infty$.

66

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 3}$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 3$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c. Interpréter ce résultat.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + 3$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Interpréter ce résultat.

67

Soit la fonction f définie sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 3$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c. Interpréter ce résultat.

2. a. Étudier le signe de $x - 3$ sur $]3\,;+\infty[$.

b. En déduire la limite de f en 3.

c. Interpréter ce résultat.

68

Soit u et v deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 2$ et $\lim\limits_{X\to 2} v(X) = -\infty$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} v(u(x))$.

69

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

70

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$\frac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x^2+1}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+1}$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

71

1. Rappeler les résultats du cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

2. En déduire les limites :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x - 6$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} + 7$.

72

Déterminer les limites des fonctions suivantes après avoir factorisé numérateur et dénominateur :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x+9}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x}}{x^2+5}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2}$

73

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{x^2+4}{x-3}$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{x}{x^2-5x+6}$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{(x+2)\mathrm{e}^x}{x}$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{2x+2}{3-x}$

5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1-2\mathrm{e}^x)\left(1+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$

74

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (\mathrm{e}^x + 8x^2 + 6x)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $f_2(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x + 3}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{-x^2+6x+4}$ sur $I = \mathbb{R}$.

4. $f_4(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x + x^2)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$.

75

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$. On considère les droites d_1 et d_2 tangentes aux points A et B d'abscisse -1 et 1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
Ces tangentes d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

76

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote (d) parallèle à l'axe des abscisses.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (d).

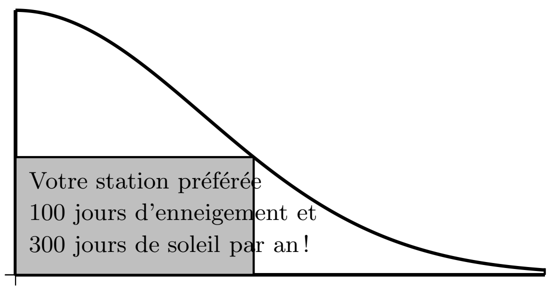
3. Calculer la dérivée de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

4. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

77

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.

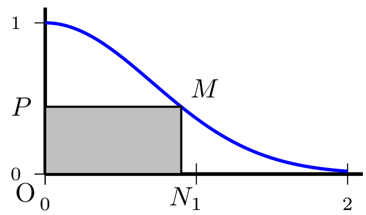
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Un panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $\left(x\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- N le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- P le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2]$, on a : $A(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathcal{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.

3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.