1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 5$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = 2^n + 5$.

2

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q non nulle et (w_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme w_0.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 + nr$.

3

Soit la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \dfrac{3}{5}v_n + 2$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $v_n \leqslant 5$.

4

Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.
Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $w_n \geqslant n$.

5

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4$.

1. Calculer v_1.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Justifier que $u_1 = -1$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

7

1. Démontrer que les deux propositions « $10^n - 1$ est un multiple de 3 » et « $10^n + 1$ est un multiple de 9 sont héréditaires.
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

8

Démontrer que pour tout entier naturel n, $9^n - 1$ est divisible par 8.

9

Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

1. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   a. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
   b. En déduire que si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

10

Soit n un entier naturel non nul. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11

E et F désignent deux ensembles disjoints composés respectivement de 4 éléments et de 5 éléments.
Calculer le nombre d'éléments de :

1. $E \cup F$.
2. $E \times F$.
3. E^3.
4. F^2.

12

$E = \{0\,;1\}$.

1. La liste ordonnée $(1\,;0\,;1)$ est un k-uplet de E. Combien vaut k ?
2. Déterminer avec soin le nombre de 3-uplets (ou triplets) de E.

13

$E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$.

1. **a.** Lister les 2-uplets de E. Combien y en a-t-il ?
   b. Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat sans lister tous les couples de E ?
2. **a.** Lister tous les couples d'éléments distincts de E. Combien y en-a-t-il ?
   b. Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat ?

14 Python

On considère le programme écrit en langage Python où n et k sont deux entiers naturels non nuls.

```
def uplet(n,k):
        return(n**k)
```

1. Quel est le nombre retourné par uplet$(3,2)$?
2. Quel est le rôle de ce programme pour un ensemble à n éléments ?

15

Soit $E = \{e_1\,;\,e_2\,;\,e_3\,;\,e_4\,;\,e_5\,;\,e_6\}$.

1. Expliquer pourquoi le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est égal à $6 \times 5 \times 4$.
2. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?

16

Soit $E = \{0\,;\,1\,;\,2\}$.

1. Quelle valeur doit-on donner à k pour qu'une permutation soit un k-uplet d'éléments distincts de E ?
2. Lister toutes les permutations de E ? Combien y en-a-t-il ?
3. Quelle formule du cours permet d'obtenir le résultat précédent ?

17

Soit $E = \{p\,;\,q\,;\,r\,;\,s\}$.

1. Lister les combinaison de 3 éléments de E. Combien y en-a-t-il ?
2. Le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est $\binom{4}{3}$.
   Rappeler une formule permettant de calculer ce coefficient puis vérifier le résultat obtenu à la question précédente ?
3. **a.** Sans les listes, déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments de E.
   b. Vérifier le résultat de la question précédente en listant toutes les combinaisons de deux éléments de E.

18

Soit $E = \{e\,;\,f\,;\,g\,;\,h\}$.

1. Expliquer pourquoi $\{e\,;\,f\,;\,g\}$ n'est pas une permutation de E.
2. Expliquer pourquoi $\{e\,;\,f\,;\,e\}$ n'est pas une permutation de E.
3. Expliquer pour quoi le nombre de permutations de E est $4 \times 3 \times 2 \times 1$.
   Comment note-t-on ce nombre ?

19

Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,1\,;\,2\}$.

1. Combien y a-t-il de 5-uplets de E ?
2. Combien y a-t-il de 5-uplets de E commençant par la lettre b ?

20

Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?
2. Combien y a-t-il de codes PIN différents commençant par le chiffre 3 ?

21

1. Soit E un ensemble à 9 éléments.
   Combien y a-t-il de permutation de E ?
2. La première phase de la coupe du Monde de handball est organisée en poules de 6 équipes.
   a. Combien y a-t-il de classements possibles dans le groupe de la France ?
   b. Combien y a-t-il de classements possibles si la France termine première et l'Australie dernière ?

22

Le mot « THAMS » est un anagramme du mot MATHS. Combien existe t-il d'anagrammes du mot MATHS ? Reprendre cette question avec le mot ANANAS.

23 Python

On donne le programme Python incomplet. Le compléter afin qu'il puisse retourner le nombre $n!$:

```
def factorielle(n):
    P=1
    for i in range (1,...):
        P=.....
    return(......)
```

24

1. Calculer $\dfrac{5!}{3!2!}$.
2. Donner un coefficient binomial qui est égal à ce nombre.

25

1. Vérifier, par un calcul, que $\binom{7}{4} = 35$.
2. En déduire la valeur de $\binom{7}{3}$.

26

1. En 1^{re} générale, un élève doit choisir 3 spécialités parmi les douze proposées.
   Combien y a-t-il de triplettes possibles ?
2. En terminale, les élèves doivent garder deux des trois spécialités choisies en 1^{re}.
   Combien de possibilités s'offrent à Corentin qui arrive en Terminale pour choisir ses spécialités ?
3. Un parcours est constitué d'une triplette en 1^{re} et d'une doublette de ces spécialités conservées en Terminale.
   - **a.** Justifier qu'il y a 660 parcours différents.
   - **b.** Coline a choisi les Maths en 1^{re} et Terminale.
     Combien de parcours correspondent à ce choix ?

27

1. Marylène possède 5 jeans et 7 tee-shirts. Elle part en vacances et décide d'emmener 2 jeans et 3 tee-shirts.
   - **a.** Justifier que le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et tee-shirts est $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$.
   - **b.** Calculer ce nombre.
2. Son mari Xan possède quant à lui 10 jeans, 13 tee-shirts et 7 paires de chaussures. Il décide de partir avec 6 jeans, 10 tee-shirts et 4 paires de chaussures.
   Combien a-t-il de manières pour remplir sa valise ?

28

À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.
Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

29

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$
2. $\dfrac{n!}{n} - (n-1)!$
3. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
4. $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!}$

30

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

31

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

32

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1.
   - **a.** Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   - **b.** Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   - **c.** Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   - **d.** Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   - **a.** Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   - **b.** Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   - **c.** Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

33

Fred et Émile font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
3. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?
4. On veut que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
5. On ne veut pas que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?