Chapitre 9

Fonction logarithme

⋆⋆⋆

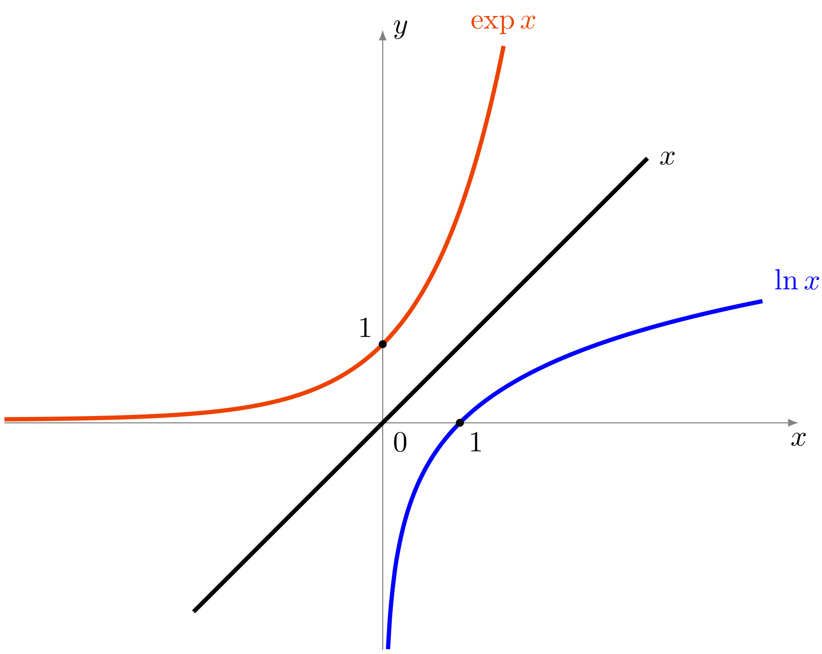
1. Fonction logarithme népérien

1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Définition 1.
La fonction ***exponentielle*** est .... et .... sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = a$.

Définition 2.
La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$ s'appelle .... que l'on note ln : cette fonction est définie sur $]0\,;+\infty[$ et c'est la ***fonction réciproque*** de la fonction exponentielle.

Propriété 1. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ***exponentielle*** et ***logarithme népérien*** sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 2.

- Pour tout $b > 0$ et pour tout réel a, $\mathrm{e}^a = b \iff$ ....
- $\ln(1) =$ ..... et $\ln(\mathrm{e}) =$ ......
- Pour tout réel $a > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} =$ ......
- Pour tout réel a, $\ln(\mathrm{e}^a) =$ ......

Mini-exercices.

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \ln(5x - 4)$
   (b) $g(x) = \ln(-x^2 - 5x + 6)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $\mathrm{e}^x = 4$
   (b) $\mathrm{e}^{-3x+7} = 2$
   (c) $\ln(x) = -2$
   (d) $\ln(-3x + 4) = -1$

1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété 3. — Relation fonctionnelle —

Pour tous x et y réels strictement positifs,

$$\boxed{\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).}$$

Démonstration.
Équivalences en passant par l'exponentielle ■

Propriétés 1. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$
- Pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\ln(\sqrt{x}) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$

Mini-exercices.

1. Démontrer que $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16)$.
2. Démontrer que $\ln(48) - 3\ln(2) = \ln(6)$.
3. Démontrer que $\ln(\sqrt{5} - 1) + \ln(\sqrt{5} + 1) = 2\ln(2)$.

2. Étude de la fonction ln

2.1 Dérivée et variations

Propriétés 2.

- La *fonction logarithme népérien* est *continue* et *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$
- Soit u une fonction *dérivable* sur un intervalle I telle que, pour tout x appartenant à I, $u(x) > 0$. La fonction $\ln \circ u \ : \ x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :
$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Démonstration.
À faire. ■

Exemple. Soit $f(x) = \ln(5x^2 + x + 3)$.

Propriété 4. La fonction ***logarithme népérien*** est **strictement croissante** sur $]0\,;\,+\infty[$.

Conséquences.

Propriétés 3. Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \iff \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff \ldots\ldots\ldots\ldots$

  En particulier, on a :
- $\ln(a) \leqslant 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\ln(a) \geqslant 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots$

Mini-exercices.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5x+4) \geqslant 9$.

2.2 Limites

Propriétés 4.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

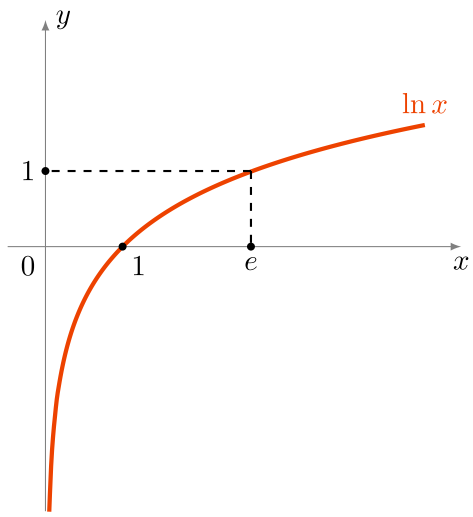
Démonstration.
À faire. ■

Conséquences.

Tableau de variation de la fonction ln :

x	0	$+\infty$
variations de ln	$-\infty$	$+\infty$

Courbe représentative de la fonction ln :



Propriétés 5.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = 0$.

  Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^n \ln(x) = 0$.

Mini-exercices.

1. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Calculer la limite de h en $+\infty$ et en 0.
2. Déterminer les limites en -1 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Propriété 5. La fonction ***logarithme népérien*** est ***concave*** sur $]0\,;\,+\infty[$: sa courbe représentative est donc toujours située en dessous de ses tangentes sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration.
À faire. ■