Chapitre 8

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

***

Dans tout le chapitre, on considère dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

1. Représentations paramétriques de droites

Soit a, b et c trois réels **non nuls** simultanément.

1.1 Caractérisation des points appartenant à une droite

Définition 1. Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} =$ ....

Proposition.

Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

Le point Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \\ z & = & z_A + ct \end{array}\right.}$$

Preuve :

....

....

....

....

....

1.2 Représentation paramétrique d'une droite

Proposition. Soit α, β et γ trois réels.
L'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient le système d'équations paramétriques :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lll} x & = & \alpha + at \\ y & = & \beta + bt \\ z & = & \gamma + ct \end{array}\right.}$$

où t décrit l'ensemble des réels, est la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ et qui est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
Ce système est ***une représentation paramétrique*** de $\mathscr{D}$.

Mini-exercices.

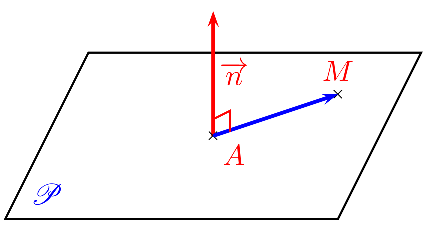
1. On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le point $B\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
   (b) Le point $C\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?
   (c) Déterminer les coordonnées du point G de la droite $\mathscr{D}$ qui a pour cote nulle.
2. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 + 3t \\ y & = & 8 - 2t \\ z & = & 6t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$
   (a) Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite.
   (b) La droite Δ est-elle parallèle à la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

2. Équations cartésiennes de plans

2.1 Vecteur normal

Proposition. Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On considère un point A de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0}.$$



Remarque : un plan peut être défini par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

2.2 Équation cartésienne d'un plan

On considère trois réels a, b et c non nuls simultanément.

Proposition et définition. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation :

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}\text{, où } d=-ax_A-by_A-cz_A.$$

Cette équation est une ***équation cartésienne*** du plan $\mathscr{P}$.

Remarque : un plan admet une infinité d'équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point de ce plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

Mini-exercice. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $C(3\,;\,-2\,;\,5)$ et dont le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

1. Déterminer une équation cartésienne de ce plan.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$, parallèle au $\mathscr{P}$ et qui passe par l'origine du repère.

Proposition. Soit d un réel. L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Mini-exercices.

1. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x-7y+5z+4=0$.
   Donner les coordonnées d'un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et d'un point de ce plan.
2. On considère les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes :

$$\mathscr{P}_1\ :\ -3x+2y+5z+1=0; \qquad \mathscr{P}_2\ :\ 2x+y+z=0; \qquad \mathscr{P}_3\ :\ y-z+5=0.$$

   (a) On considère le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -200 \\ 200 \end{pmatrix}$. À quel plan ce vecteur est-il normal ?

   (b) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont orthogonaux et déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.