

27

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $(z - i)(2z - 6) = 0$ .
- $(iz + 1)(3z + i) = 0$ .
- $(z + 2i)(2 + 3i - 2iz) = 0$ .

28

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $-z^2 + 2z - 3 = 0$ .
- $z^2 + 4 = 0$ .
- $4z^2 - 12z + 9 = 0$ .
- $-3z^2 + 3z - 1 = 0$ .
- $2z^2 + 2z + 5 = 0$ .

29

- Démontrer que  $-2 - i$  est solution de l'équation  $z^2 + 4z + 5 = 0$ .
- En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

30

Résoudre dans  $\mathbb{C}^*$  l'équation  $z + \frac{1}{z} = 1$ .

31

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $z^2 + 2iz = 0$ .
- $(-2z + 1)(z - 1) = 1$ .
- $i\sqrt{3}z^2 - 6z = 0$ .
- $(\bar{z} - 3i - 5)(iz - 3) = 0$ .

32

Dans le plan complexe, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = z^2 - z + 5$ .

- Si le point  $M'$  a pour affixe 4, quelle est l'affixe du point  $M$  ?
- Démontrer qu'il existe des points  $M$  tels que le point  $M'$  associé à  $M$  soit  $M$  lui-même.

33

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $\frac{1}{z} + 2z = 0$ .
- $\frac{z}{3} = \frac{-5}{1+z}$ .
- $\frac{z+1}{z-2} = i$ .
- $\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z}$ .

34

- On considère l'équation

$$(E) : z^2 - 6z + c = 0$$

où  $c$  est un réel strictement supérieur à 9.

- Justifier que  $(E)$  admet deux solutions complexes non réelles.

- Justifier que les solutions de  $(E)$  sont :  $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$  et  $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$ .

- On note  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .  
Justifier que le triangle  $OAB$  est isocèle en  $O$ .
- Démontrer qu'il existe une valeur du réel  $c$  pour laquelle le triangle  $OAB$  est rectangle et déterminer cette valeur.

35

Soit le polynôme  $P$  défini par  $P(z) = z^3 + z^2 + 4$ .

- Démontrer que  $-2$  est racine de  $P$ .
- Déterminer les trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c).$$

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

36

- Déterminer un entier naturel  $n$  solution de l'équation  $(E)$  :

$$z^3 + z^2 - 2 = 0$$

- Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$z^3 + z^2 - 2 = (z - n)(az^2 + bz + c).$$

- En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .

37

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe  $z$ .

- Donner une solution entière de  $(E)$ .
- Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1).$$

- Résoudre l'équation  $(E)$  dans l'ensemble des nombres complexes.
- Les solutions de l'équation  $(E)$  sont les affixes de quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  du plan complexe tels que  $ABCD$  est un quadrilatère non croisé.  
Le quadrilatère  $ABCD$  est-il un losange ? Justifier.

38

Soit  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$  avec  $z \in \mathbb{C}$ .

- Montrer que pour tout complexe  $z$ ,

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z}).$$

- Vérifier que  $-2i$  est une racine de  $P$ .
- En déduire sans aucun calcul que  $2i$  est aussi solution de cette équation.
- Déduire des questions précédentes une factorisation de  $P$ .