

# Dérivation globale

\*\*\*


## I. Fonctions dérivables sur un intervalle $I$

### 1. Fonction dérivée d'une fonction donnée

#### Définition 1.

On dit que  $f$  est **dérivable** sur un intervalle  $I$  si  $f$  est dérivable en **tout point**  $x_0$  de  $I$ . La fonction qui, à chaque réel  $x$  de  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$  de  $f$  en  $x$  est appelée **fonction dérivée de  $f$**  et se note  $f'$ .

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

 **Exercice 1.8.** Démontrons que la fonction  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  est dérivable en tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x_0) = 2ax_0 + b$ .

### 2. Dérivées de fonctions usuelles

**Théorème.** Tableau des dérivées à connaître par cœur.

Fonction $f$	$\mathcal{D}_f$	Fonction $f'$	$\mathcal{D}_{f'}$
$x \mapsto k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

**Remarque.** Toutes ces formules se démontrent à l'aide du taux d'accroissement vu au chapitre 4.

**Quid de la valeur absolue ?.**

La fonction *valeur absolue*  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$  est *dérivable* sur  $] -\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$  et :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration à faire. ■

**Exercice 2.8.**

1. Démontrer le résultat de la fonction carré.
2. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^5$ . Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .

**3. Dérivée d'une somme, d'un polynôme**

**Théorème.**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions définies et *dérivables* sur un même intervalle.

- La dérivée d'une *somme* de deux fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions :

$$(u + v)' = u' + v'$$

- La dérivée d'un *produit* d'une fonction par *un nombre*  $k$  est le produit par  $k$  de la dérivée de la fonction :

$$(k \times u)' = k \times u'$$



**Exercice 3.8.** Soit  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 5$ . Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .

**4. Dérivée d'un produit, d'un quotient****A. Dérivée d'un produit**

**Théorème.**

Soit deux fonctions  $u$  et  $v$  définies et *dérivables* sur le même intervalle.

La dérivée du *produit* de ces deux fonctions est :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$




**Exercice 4.8.** Soit  $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 4)$ . Calculer  $f'(x)$  en utilisant la formule précédente.

**B. Dérivée de l'inverse**

**Théorème.**

Soit une fonction  $v$  définie et *dérivable* sur un intervalle  $I$  telle que  $v$  *ne s'annule pas* sur cet intervalle  $I$ . La dérivée de l'*inverse* de  $v$  est :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$


 **Exercice 5.8.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{3x-3}$ . Calculez  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

### C. Dérivée d'un quotient

**Théorème.**

Soit deux fonctions  $u$  et  $v$  définies et *dérivables* sur le même intervalle où  $v$  ne s'annule pas sur cet intervalle. La dérivée du *quotient* de ces deux fonctions est :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$


 **Exercice 6.8.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$  par  $f(x) = \frac{2x+3}{4-x}$ . Calculez  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ .

### D. Dérivation et composition

**Théorème.**

Soit  $g$  une fonction *dérivable* sur un intervalle  $I$ . Pour tout réel  $x$  tel que  $mx+p$  appartient à  $I$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x) = g(mx+p)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout réel  $x$  de  $I$ ,

$$f'(x) = m \times g'(mx+p).$$

 **Exercice 7.8.** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (7x-4)^9$ .  
Calculer  $f'(x)$ .

## II. Sens de variation et dérivée

Le théorème suivant, permet de déterminer *les variations* d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée. Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $f'$  la dérivée de  $f$  sur  $I$ .

**Théorème admis.**

- Si  $f'$  est *nulle* sur  $I$ , alors  $f$  est *constante* sur  $I$ .
- Si  $f'$  est *strictement positive* sur  $I$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est *strictement croissante* sur  $I$ .
- Si  $f'$  est *strictement négative* sur  $I$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est *strictement décroissante* sur  $I$ .

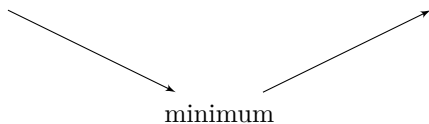
**Théorème admis.**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un réel appartenant à  $I$ .

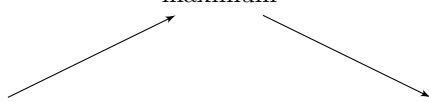
- Si  $f$  admet un *extremum local* en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .
- Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $x_0$  *en changeant de signe*, alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

Exemples :

1. *Cas d'un minimum* :

$x$	$a$	$x_0$	$b$
signe de $f'(x)$	$-$	$0$	$+$
Variation de $f$			

2. *Cas d'un maximum* :

$x$	$a$	$x_0$	$b$
signe de $f'(x)$	$+$	$0$	$-$
Variation de $f$			

Un classique corrigé.

Déterminer les variations de la fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par l'expression :  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$ .

**Étape 1 : Dériver la fonction** La fonction  $f$  est un polynôme, donc sa dérivée est :

$$f'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

**Étape 2 : Déterminer le signe de la dérivée** La dérivée  $f'$  est un trinôme du second degré, avec  $a = 3$ ,  $b = 8$  et  $c = -3$ . Son discriminant est  $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100$ .

Le discriminant est strictement positif, donc le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times 3} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Son tableau de signes est donc :

$x$	$-\infty$	$-3$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
Variation de $f$	<div><div><div></div><div>23</div><div></div></div><div><div></div><div><math>\frac{121}{27}</math></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>				

**Étape 3 : Dédire les variations de la fonction du signe de sa dérivée.** Fait à la fin du tableau précédent.