Exercice 1. **/4**

Pour la réalisation d'un projet, une société doit effectuer successivement deux tâches A et B. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de la tâche A (en semaines) et Y la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de la tâche B (en semaines). On suppose que la durée de tâche A n'a pas d'influence sur la durée de la tâche B. L'espérance de X est 22 et son écart-type est 3. L'espérance de Y est 25 et son écart-type est 4.

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. Interpréter cette variable aléatoire Z dans le contexte de l'exercice.
2. Déterminer l'espérance de Z et la variance de Z en justifiant avec soin les réponses données.

Exercice 2. **/8**

Une entreprise du bâtiment a constaté qu'un certain nombre de mitigeurs thermostatiques, posés par elle, avait un mauvais fonctionnement, dû à une pièce cylindrique. L'entreprise pose 304 mitigeurs. Le pourcentage de pièces ayant un défaut est de 5%. On appelle X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $i-$ème mitigeur est défectueux et 0 sinon pour i compris entre 1 et 304.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X_i ? Justifier la réponse et préciser son espérance.
2. Soit X la variable aléatoire définie par : $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{304}$.
   (a) Démontrer que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
   (b) Calculer l'espérance de X.
3. (a) Déterminer avec la calculatrice un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %. *Vous arrondirez les bornes au millième.*
   (b) Sur les 304 pièces, on constate qu'il y a 18 défauts. Qu'en conclure ?

Exercice 3. **/7**

Dans le corps humain, la régulation du taux de glycémie est assurée grâce à un équilibre permanent entre différentes substances principalement hormonales.

Le tableau suivant présente trois états de la glycémie :

Hypoglycémie	À jeun : inférieur à 0,70 g/l
Glycémie normale	À jeun : entre 0,70 g/l et 1,10 g/l
Hyperglycémie	À jeun : supérieur à 1.10 g/l

On note N la variable aléatoire qui, à chaque dossier médical prélevé au hasard dans la population, associe le taux de glycémie à jeun en g/l de la personne.

On suppose que N suit une loi de probabilité (en fait cette loi se nomme la loi normale) de moyenne $\mu = 0,9$ et d'écart type $\sigma = 0,1$.

Dans le cadre de cet exercice, on considère qu'une personne souffre de diabète si cette personne ne présente pas une glycémie normale à jeun.

1. Préciser la variance de la variable aléatoire N.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une majoration de la probabilité $p(|N - 0,9| \geqslant 0,2)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une minoration de la probabilité que le dossier prélevé soit celui d'une personne ayant une glycémie normale.

Exercice 4. **/1**

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. Démontrer que pour tout réel $\lambda \geqslant 1$,

$$p(\mu - \lambda\sigma \leqslant X \leqslant \mu + \lambda\sigma) \geqslant \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}.$$