Exercice 1. /4

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^2 - 4x + 1$

❷ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$

❸ $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} \dfrac{1 - 2x}{5 - x}$

❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2}{1 + 2x^2}$

❺ $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x + 1 - \cos(x)$

❻ $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$

❾ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

❿ $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 15x}{x - 5}$

Exercice 2. /3

Calculer la dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (x^3 - 4x^2 + 2x + 1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \sqrt{x^2 + \mathrm{e}^x}$ sur sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{2x^3 - 9x^2 + 5x + 4}$ sur sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3. /3

Soit une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-après :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	-5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	6

Déterminer, en justifiant, si la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes. Si oui, préciser leurs équations.

Exercice 4. /2

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,; 0[$ telle que pour tout réel $x < 0$,

$$3 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 3 + \frac{1}{x}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 5. **/8**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   (a) Démontrer que la fonction f est strictement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$. *On note α la solution.*
   (c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,6]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,6]$.
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 6$.
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f\left(u_n\right) = 3 - \frac{2}{u_n + 1}.$$
   (a) Sur le graphique représenté ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   (b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (d) Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.