188

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x}\,dx$

2. $J = \displaystyle\int_0^2 (-4t^2+1)\,dt$

3. $K = \displaystyle\int_{-1}^1 (s+1)^2\,ds$

4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2y}\,dy$

189

Sans chercher à la calculer, donner le signe de chaque intégrale suivante :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^3}\,dx$

2. $J = \displaystyle\int_1^3 (\ln(t))^4\,dt$

3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$

4. $L = \displaystyle\int_1^4 (1-y)\sqrt{1+y}\,dy$

190

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

2. $J = \displaystyle\int_0^5 \frac{1}{u+2}\,du$

3. $K = \displaystyle\int_1^2 -\frac{2}{x^3}\,dx$

4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$

191

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^2 -2t^3+4t^2-5t\,dt$

2. $J = \displaystyle\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\,du$

3. $K = \displaystyle\int_1^2 6x(x^2+4)^3\,dx$

4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)\,dy$

192

On note I l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+4}{x+1}\,dx$.

1. Démontrer que pour tout réel x,

$$\frac{3x+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur exacte de I puis une valeur approchée au dixième.

3. À l'aide d'un raisonnement analogue, calculer :

$$J = \int_0^1 \frac{2x-5}{x+1}\,dx.$$

193

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 -3\mathrm{e}^{-3x}\,dx$

2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \pi\sin(\pi x)\,dx$

3. $K = \displaystyle\int_{-1}^1 15t^4(t^5+2)^3\,dt$

4. $L = \displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{(y+1)^2}\,dy$

194

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
Calculer en fonction de x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,dt$.

2. Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[1\,;+\infty[$,

$$2-t \leqslant \frac{1}{t}.$$

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1,

$$\ln(x) \geqslant -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

195

Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x^3-x^2+4}{x}\,dx$.

196

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1. Démontrer que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(2)$.

2. Soit $I_2 = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

a. Calculer $I_2 + I_1$.

b. En déduire la valeur de I_2.

197

On considère une fonction k définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
$\displaystyle\int_0^1 k(x)\,dx = \frac{1}{4}$ et $\displaystyle\int_0^2 k(x)\,dx = 4$.

Calculer $\displaystyle\int_1^2 k(x)\,dx$.

198

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-après :

x	-6		1		3		7
Variation de f	4	$\nearrow$	7	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

1. Donner le signe de $\displaystyle\int_{-6}^{1} f(t)\,dt$.
2. Donner le signe de $\displaystyle\int_{3}^{5} f(t)\,dt$.
3. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-6}^{1} f(t)\,dt$.
4. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{3}^{5} f(t)\,dt$.
5. Peut-on connaître le signe de $\displaystyle\int_{1}^{3} f(t)\,dt$? Justifier.

199

1. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\ln(1+x^2) \geqslant 0$.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par :
$$g(x) = \ln(1+x^2) - x^2.$$
b. En déduire le signe de g sur $[0\,;\,1]$.
3. Déterminer alors un encadrement de :
$$I = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$$

200

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto (x^2 + x\ln(x)$ est une primitive
de la fonction $g\ :\mapsto x+1+(2x+1)\ln(x)$ sur $[1\,;\,2]$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$.

201

En utilisant une intégration par parties, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} x\mathrm{e}^{x}\,dx$.
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,dx$.

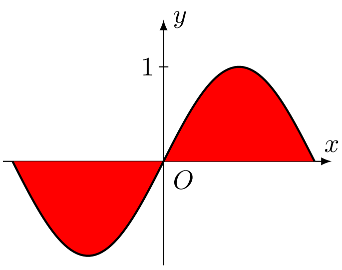
202

En utilisant une intégration par parties, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{-2x}\,dx$.
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx$.

203

On considère la surface colorée ci-dessous construite dans un repère orthonormé avec la courbe de la fonction f définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.



Calculer son aire en unité d'aire du repère.

204

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^{t}}\,dt$.

1. Calculer u_0.
2. Simplifier $u_1 + u_0$ puis en déduire u_1.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n ;
$$u_{n+1} + u_n = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{n}.$$
4. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}(\mathrm{e}^t - 1)}{1+\mathrm{e}^t}\,dt.$$
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

205

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite (I_n) définie par :
$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) est minorée par 0.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Qu'en déduire pour la suite (I_n) ?
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul,
$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$
4. En déduire la limite de la suite (I_n).

206

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par
$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :
$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a :
$$\sqrt{t+1} \leqslant t+1.$$
b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.
c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n.

En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?