71

Quel est le format de chacune des matrices suivantes ?

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 7 & -4 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

72

On pose $A = (a_{ij})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Quelles valeurs peuvent prendre i et j ?

2. Préciser la valeur de a_{23}.

3. Écrire chacun des autres coefficients sous la forme a_{ij}.

73

La matrice $B = (b_{ij})$ est telle que $b_{ij} = i + 3j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$.

1. Quel est le format de cette matrice ?

2. Écrire la matrice B avec tous ses coefficients.

74

1. Calculer $A + B$ et $5A - 4B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Reprendre la question précédente avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 10 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

75

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les opérations suivantes, effectuer celles qu'il est possible d'effectuer :

$$A + B,\ 3D,\ A + 3D,\ B - 2C.$$

76

Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

77

Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

78

Trouver les coefficients manquants :

1. $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

79

Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 24 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

80

Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

81

Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

82

Trouver les coefficients manquants :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & b & c \end{pmatrix}$.

83

Effectuer, à la main, les multiplications suivantes puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

84

Effectuer les multiplications suivantes puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

85

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Déterminer, parmi les calculs suivants, ceux qu'il est possible d'effectuer et indiquer la taille de la matrice résultat :

1. $A \times B$, $A - C$, A^2, B^2 et C^2.
2. Effectuer alors les calculs jugés « possibles ».

86

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Commenter.

87

On considère la fonction Python ci-dessous :

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
def produit(x,y,z):
    A=array([[3,5,-1],[4,2,1],[-3,-1,7]])
    B=array([[x],[y],[z]])
    return dot(A,B)
```

1. Que renvoie cette fonction si on entre en arguments 1, -2 et 4 ?
2. Quel est le rôle de cette fonction ?
3. Modifier le programme de la fonction pour qu'elle renvoie le produit de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ par la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

88

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et
$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Montrer que A est l'inverse de B.

89

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice P telle que $M = P + I_3$.
2. Calculer P^2. En déduire M^2.

90

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = O$ où O désigne la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. En déduire, sans calculatrice, que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

91

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

92

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4 avec la calculatrice.
2. Émettre une conjecture sur A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. **a.** Montrer que $A = I_2 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. Calculer B^2. En déduire A^2 puis A^3 en fonction de I_2 et B.
4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = I_2 + nB$.
   b. Écrire A^n avec tous ses coefficients.

93

On considère les matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $P \times Q$.
2. En déduire que P est inversible et écrire son inverse.

94

Soit la matrice A définie par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^{-1}.

95

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 2A + I_2$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

96

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice N, carrée d'ordre 3, telle que $A = I + N$.
2. Montrer que $N^3 = 0$, en utilisant la calculatrice.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

97

Soit $(S) \quad : \quad \begin{cases} 3x + 4y & = & -6 \\ 2x + 5y & = & 10 \end{cases}$ le système d'inconnues réelles x et y et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. Écrire (S) sous forme matricielle $AX = B$ en précisant la matrice carrée A d'ordre 2.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. En déduire X puis la solution du système (S).
4. Vérifier le résultat obtenu à la calculatrice.

98

Résoudre les systèmes 3×3 suivants en les écrivant au préalable sous forme matricielle :

1. $\begin{cases} x + y - z & = & 2 \\ -x + y + z & = & 4 \\ 2x - y + z & = & -5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + 2y + 9z & = & 22 \\ 2x + 8y + 7z & = & 44 \\ 5x + 6y + 3z & = & 85 \end{cases}$

99

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points A$(5\,;\,2)$, B$(4\,;\,3)$ et C$(1\,;\,0)$.
On cherche une parabole $\mathscr{P} \;:\; y = ax^2 + bx + c$ passant par les points A, B et C.

1. Écrire sous forme matricielle un système vérifié par a, b et c puis répondre à la question posée.
2. Compléter les instructions ci-dessous écrites dans un éditeur Python pour qu'elles permettent de retrouver les valeurs de a, b et c :

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
A=array([[.....],[.....],[.....]])
B=array([.....,.....,.....])
X=.....
```

100

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme
   $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
   $$\begin{cases} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{cases}$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = r_nA + s_nI.$$
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.

101

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice identité d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle d'ordre 3 notée $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour tout réel x, on définit la matrice :

$$(*) \quad M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n pour tout entier naturel $n > 3$.
2. Soit x et y deux nombres réels.
   Montrer en utilisant $(*)$ que : $M(x)M(y) = M(x+y)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$(M(x))^n = M(nx).$$
4. Calculer $M(0)$ et $M(1)$.
5. Calculer $(M(1))^n$ pour tout entier naturel n.