Exercice 1. /4

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-3x+1$

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$

❸ $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} \dfrac{1-2x}{4-x}$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2}{1+9x^2}$

❺ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1-\sin(x)$

❻ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$

❾ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

❿ $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{4x^2-8x}{x-2}$

Exercice 2. /3

Calculer la dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=(2x^3+5x^2+2x+1)^4$ sur $I=\mathbb{R}$.
2. $f_2(x)=\sqrt{3x^2+\mathrm{e}^x}$ sur sur $I=\mathbb{R}$.
3. $f_3(x)=\mathrm{e}^{x^3+x^2+x+1}$ sur sur $I=\mathbb{R}$.

Exercice 3. /3

Soit une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-après :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	↗	6

Déterminer, en justifiant, si la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes. Si oui, préciser leurs équations.

Exercice 4. /2

Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que pour tout réel $x>0$,

$$1-\frac{1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant 1+\frac{1}{x^2}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 5. **/8**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
2. En déduire que si $x \in [1\,;\,2]$ alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.
3. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   Le graphique donné ci-dessous représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   (a) Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   (b) À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   Dans la suite de l'exercice, on se consacre à l'étude de la suite (u_n).

   (c) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2.$$
   (d) En déduire que la suite (u_n) converge.
   (e) Soit ℓ la limite de la suite (v_n). Démontrer l'égalité : $\ell = \dfrac{2\ell+1}{\ell+1}$.
   (f) En déduire la valeur de ℓ.