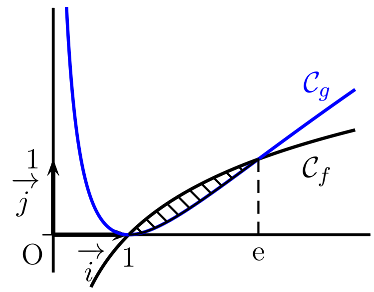
Exercice 1. /10

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. Pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, M est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathcal{C}'$ de même abscisse.
   (a) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.
   (b) En déduire que, sur $]0\,;\,1[\ \cup\ ]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.
   (b) Vérifier que la fonction G définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

Exercice 2. /10

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \sin^2(x)$.

1. (a) Démontrer que f est 2π – périodique.
   (b) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
2. (a) Calculer la fonction dérivée f' et démontrer que $f'(x) = \cos(x)(1 + 2\sin(x))$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,2\pi]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,2\pi]$.
3. On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur $[0\,;\,2\pi]$ ci-dessous. Compléter ce tracé pour avoir $\mathscr{C}$ sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$: