181

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3\mathrm{e}^x + 5x + 4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = (x+5)\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = (2x^2 + 5x + 3)\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.

182

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{-2x+6}$ sur $I = \mathbb{R}$.

183

Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants où x désigne un nombre réel.

1. $A = \mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-4x}$.
2. $B = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$.
3. $C = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6}$.
4. $D = \dfrac{\mathrm{e}^{3-2x} \times (\mathrm{e}^x)^5}{\mathrm{e}^{x-2}}$

184

Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants où x désigne un nombre réel.

1. $A = (\mathrm{e}^x)^5 \times \mathrm{e}^{-x}$.
2. $B = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-5}}{\mathrm{e}^{2x-7}}$.
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^x)^6 \times \mathrm{e}}$.
4. $D = \dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2x-1}}{2\mathrm{e}^{-x-2}}$

185

Démontrer que pour tout réel x :

1. $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
2. $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$.

186

Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

1. $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
2. $v_n = \mathrm{e}^{-n+2} \times \mathrm{e}^{3n-2}$.
3. $w_n = \dfrac{\mathrm{e}^{n+5}}{\mathrm{e}^{3n+4}}$.

187

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4\mathrm{e}^{-2x}$.
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x+1)\mathrm{e}^x$.

188

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x} = 1$.
2. $\mathrm{e}^{3x-1} = 1$.
3. $\mathrm{e}^{x-1} - 1 = 0$.

189

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^{3x+2}$.
2. $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{2x+4}$.
3. $\mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}^{3x+5} = 0$.

190

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x \geqslant 1$.
2. $\mathrm{e}^{2x+1} \geqslant 0$.
3. $\mathrm{e}^{x-2} < 1$.

191

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{2x+1}$.
2. $\mathrm{e}^{-2x-3} < \mathrm{e}^{2x+6}$.
3. $\mathrm{e}^{-3x-1} - \mathrm{e}^{x+5} \leqslant 0$.

192

Pour chacune des fonctions, calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = (-3x-1)\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = x\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.

193

Pour chacune des fonctions, calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (x-7)\mathrm{e}^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \left(-3x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \left(-\dfrac{5}{2}x + 4\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

194

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 6\,\mathrm{e}^{x} - 8x - 4.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f ;
- $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2\,(\mathrm{e}^{x} - 1)\,(\mathrm{e}^{x} + 4).$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

195

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).

Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7 h 30 à 20 h, dans une pièce de volume 900 000 dm^3.

À 20 h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de 0,6 %.

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de 5 400 dm^3 .

2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20 h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle $[0\,;\,690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20 h et 7 h 30.

On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,690]$ vérifie la relation :

$$(E) : V'(t) + 0,01V(t) = 4,5.$$

a. Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,690]$, $V(t) = 4\ 950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$
et $V(0) = 5\ 400$.

3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21 h ?

4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7 h 30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à 0,06 %.

Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3.

196

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron.

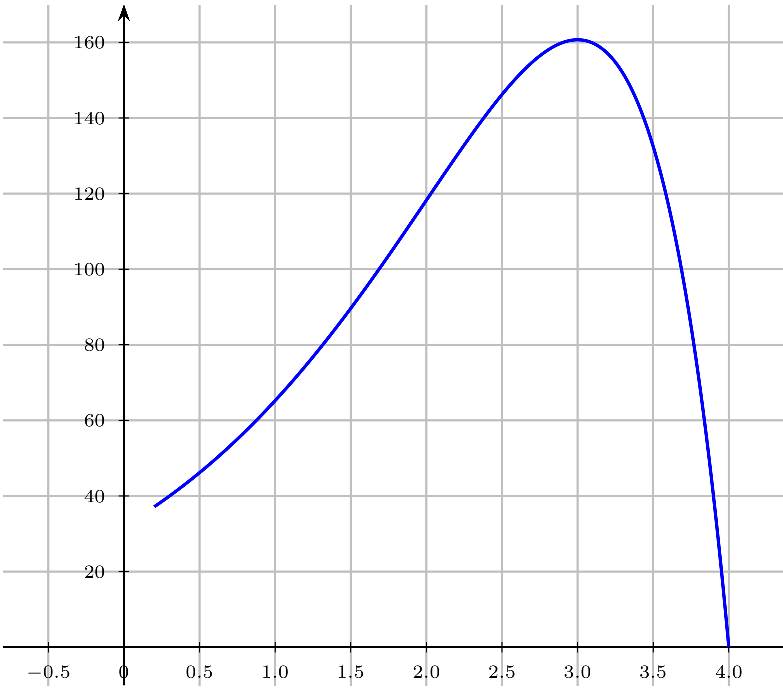
Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique.

La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

Partie A : Répondre par lecture graphique aux deux questions suivantes

1. Quelle est la puissance maximale atteinte par ce rameur ?

2. Pendant combien de temps la puissance développée reste-t-elle au-dessus de 100 Watts ?



Partie B : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = (-8x + 32)\mathrm{e}^{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$,

$$f'(x) = (-8x + 24)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0,2\ ;\ 4]$.

2. Déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction f.

On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. Combien de mois d'entrainement seront-ils nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W ?