Chapitre 2

Nombres complexes : partie algébrique

⋆⋆⋆

1. Ensemble des nombres complexes

1.1 Préambule

L'équation $x+5=2$ a ses coefficients dans $\mathbb{N}$ mais pourtant sa solution $x=$ ..... n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xhookrightarrow{x^2=\frac{1}{2}} \mathbb{R} \xhookrightarrow{x^2=-\sqrt{2}} \mathbb{C}$$

De même l'équation $2x=-3$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais sa solution $x=$ ..... est dans l'ensemble plus grand des rationnels $\mathbb{Q}$. Continuons ainsi, l'équation $x^2=\frac{1}{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a ses solutions $x_1=+1/\sqrt{2}$ et $x_2=-1/\sqrt{2}$ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Ensuite l'équation $x^2=-\sqrt{2}$ a ses coefficients dans $\mathbb{R}$ et ses solutions $x_1=+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}}$ et $x_2=-\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}}$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Ce processus est-il sans fin ? Non ! Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne...

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons cette année) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution (comme l'équation $x^2=-1$), on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

- contenant tous les ***nombres réels***,
- muni de ***deux opérations prolongeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs***,
- contenant un élément noté i tel que .... ,
- tout nombre z s'écrive de manière unique $z=x+\mathrm{i}y$ où a et b sont ***des réels***,
- le nombre 0 s'écrit ....

On admettra qu'un tel ensemble existe : il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition 1.
L'écriture $z=x+\mathrm{i}y$ unique est appelée ***forme algébrique*** du complexe z.

- Le ***nombre réel*** x est appelé ***partie ....*** de z et notée $Re(z)$.
- Le ***nombre réel*** y est appelé ***partie ....*** de z et notée $Im(z)$.

Mini-exercice. On donne $z = 5 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 6 - 7\mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme algébrique $z + z'$ et $z \times z'$.
2. En déduire $Re(z + z')$ et $Im(z \times z')$.

....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

1.3 La division dans $\mathbb{C}$

Propriété 1. Tout nombre complexe non nul z admet un ***unique inverse***, noté $\dfrac{1}{z}$.

Technique

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on ***multiplie*** le numérateur et le dénominateur du quotient par ***l'expression conjuguée*** du dénominateur.

Exemple. Déterminer l'inverse de $3 + 2\mathrm{i}$.

....
....
....
....
....
....

1.4 Conjugué

Définition 2.
On appelle ***conjugué*** du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\boxed{\overline{z} = x - \mathrm{i}y}.$$

Exemples. $\overline{3 - 2\mathrm{i}} =$ .... $\overline{5 + \mathrm{i}} =$ .... $\overline{3} =$ .... $\overline{\mathrm{i}} =$ ....

Propriétés.

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{\overline{z}} = z \quad (1)$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad (2)$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad (3)$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}} \quad (5)$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0 \quad (6)$

Démonstration de (2)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Mini-exercice. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$.
2. $z' = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Techniques opératoires

2.1 Nombres réels, nombres imaginaires purs

Définition 3.

- z ***réel*** $\Longleftrightarrow Im(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
- z ***imaginaire pur*** $\Longleftrightarrow Re(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$.

Mini-exercice. Démontrer sans calcul que le nombre complexe $z = \dfrac{2-7\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}} - \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

. . . .

. . . .

. . . .

2.2 Formule du binôme de Newton

Propriété. Soit a et b deux nombres complexes. On a alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}}.$$

Cette formule s'appelle ***binôme de Newton*** et elle est démontrée page 5.

Remarque. On peut calculer les coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

Mini-exercice. Calculer $(1+\mathrm{i})^5$ puis vérifier le résultat à la calculatrice.

. . . .

. . . .

. . . .

2.3 Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété. Deux nombres complexes sont ***égaux*** si et seulement si ils ont ***même partie réelle*** et ***même partie imaginaire***.

Méthode

La résolution d'équation du ***premier degré*** dans $\mathbb{C}$ repose sur la même pratique qu'avec les nombres réels : on cherche à isoler l'inconnue z.

Mini-exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $5z - 6\mathrm{i} = \mathrm{i}z + 9 + 2\mathrm{i}$.

....

....

....

....

Démonstration

On démontre cette égalité par récurrence. On pose $\mathscr{P}_n \ : \ (a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}$.

Initialisation : si $n = 0$, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part $\sum_{s=0}^{0} \binom{0}{s} a^s b^{0-s} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ce qui montre que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : soit k un entier naturel quelconque.

On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie c'est-à-dire $(a+b)^k = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^s b^{k-s}$.

Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie soit $(a+b)^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^s b^{k+1-s}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b){\color{red}(a+b)^k} && (2.1)\\
&= (a+b){\color{red}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^s b^{k-s}} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} && (2.2)\\
&= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{s+1}b^{k-s} + \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^s b^{k+1-s} && (2.3)\\
&= \sum_{s=0}^{k-1}\binom{k}{s}a^{s+1}b^{k-s} + \binom{k}{k}a^{k+1}b^0 + \binom{k}{0}a^0 b^{k+1-0} + \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}a^s b^{k+1-s} && (2.4)\\
&= \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p-1}a^p b^{k-p+1} + a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}a^s b^{k+1-s} && (2.5)\\
&= a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\left(\binom{k}{s-1} + \binom{k}{s}\right)a^s b^{k+1-s} && (2.6)\\
&= \binom{k+1}{k+1}a^{k+1}b^0 + \binom{k+1}{0}a^0 b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\binom{k+1}{s}a^s b^{k+1-s} && (2.7)\\
&= \binom{k+1}{0}a^0 b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\binom{k+1}{s}a^s b^{k+1-s} + \binom{k+1}{k+1}a^{k+1}b^0 && (2.8)\\
&= \sum_{s=0}^{k+1}\binom{k+1}{s}a^s b^{k+1-s} && (2.9)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie. Ainsi :

- $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.

On peut en conclure que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour **tout** entier naturel n.