198

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

a. 117 **b.** 383 **c.** 143

199

1. Démontrer que tout nombre premier supérieur ou égal à 5 est de la forme $6k+1$ ou $6k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

200

Soit a un entier naturel.

1. Développer $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.
2. Le nombre a^4+a^2+1 peut-il être premier ?
3. Trouver une factorisation de 10 101.

201

p est un nombre premier au moins égal à 5.

1. Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2. Montrer que p^2+11 est divisible par 12.

202

1. Vérifier que 149 est un nombre premier.
2. Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers qui vérifient l'équation $x^2-y^2=149$.
3. Reprendre la question précédente avec l'équation $x^2-y^2=p$ où p est un nombre premier quelconque.

203

1. Démontrer « l'égalité de Sophie Germain » :
$$n^4+4m^4=(n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn).$$
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, n^4+4 est-il premier ?
3. Démontrer que $4^{545}+545^4$ n'est pas un nombre premier.
On pourra écrire $4^{545}=4\times\left(4^{136}\right)^4$.

204

Décomposer en produit de facteurs premiers :

1. 125
2. 1 080
3. 64×81
4. $12^5\times 14^3$

205

1. Décomposer en produit de facteurs premiers de 540 et 162.
2. En déduire la fraction irréductible de la fraction $\dfrac{540}{162}$.

206

1. Écrire le nombre 8 775 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer le plus petit nombre entier naturel k non nul tel que $8\,775k$ soit un carré parfait.
3. Même question avec un cube parfait.

207

1. Écrire le nombre 255 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer dans $\mathbb{N}$ les solutions de l'équation :
$$(n-1)(n+2)=255.$$
3. Même question avec l'équation $3n^2+6n-24=255$.

208

Un entier n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$.
Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1. Montrer que l'on a $\beta(\alpha-1)=4$.
2. En déduire les trois valeurs possibles pour n.

209

Montrer que pour tout entier naturel nn le nombre $n^{11}-n$ est divisible par 33.

210

Soit p un nombre premier différent de 3.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{n+p}-3^{n+1}$ est divisible par p.

211

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $n^{13}-n$ est pair.
2. Montrer que 13 et 7 divisent $n^{13}-n$.
3. En déduire que $n^{13}-n$ est divisible par 182.

212

1. Montrer que $\forall a\in\mathbb{Z},\ a^{31}-a$ est divisible par 62.
2. Montrer que $\forall a\in\mathbb{Z},\ \forall n\in\mathbb{N},\ a^{30+n}-a^n$ est divisible par 62.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0=1$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1}=10u_n+21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n=10^{n+1}-7$.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n\equiv 4-(-1)^n \pmod{11}$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6. **a.** Démontrer l'égalité : $10^{16}\equiv 1 \pmod{17}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

213

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit x un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. **a.** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
   En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   b. On suppose que a est un multiple de 7.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
   Décoder ce message.

214

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\ ;\ y)$ où x et y sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par : $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de l'équation (E).

   b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

1. Soient a et b deux entiers naturels.
   Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.
2. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.
3. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.
   Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.