171

1. Vérifier que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

172

1. Calculer $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

173

a désigne un réel. Simplifier l'expression suivantes :

$$A = \left(e^{ia} - e^{-ia}\right)^2 + \left(e^{ia} + e^{-ia}\right)^2.$$

174

1. Exprimer, pour tout réel a, le nombre $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

175

1. Exprimer, pour tout réel a, le nombre $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.
3. À l'aide de la question **1.**, déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

176

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $e^{-i\pi}$
2. $e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $e^{i\frac{3\pi}{4}}$

177

Démontrer que les nombres suivants peuvent s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$:

1. $a = i$
2. $b = -1$
3. $c = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}$

178

Soit x un réel.

1. Démontrer que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
2. **a.** En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2} = 0$.
   b. Démontrer que cette équation a exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
   c. À la calculatrice, trouver une valeur approchée à 10^{-3} près de $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$.

179

Soit x un nombre réel.

1. Écrire sous forme algébrique $z = e^{i\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$.
2. En écrivant $e^{i\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$ comme un produit d'exponentielles complexes, trouver une autre expression du nombre z.
3. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de :
   a. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.
   b. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

180

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = -\dfrac{2}{7}i$
2. $b = -10$
3. $c = 4i$
4. $d = 1 + i$

181

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = 1 + i\sqrt{3}$
2. $b = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5i}{2}$
3. $c = 2 - 2i$
4. $d = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

182

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $a = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$
2. $b = 5e^{-i\frac{\pi}{4}}$
3. $c = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$
4. $d = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$

183

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
2. $b = (e^{i\frac{\pi}{4}})^5$
3. $c = \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{5}}}$
4. $d = -e^{i\frac{\pi}{3}}$

184

Placer l'image des nombres complexes suivants dans le plan complexe muni d'un repère :

1. $a = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
2. $b = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
3. $c = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$
4. $d = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

185

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = \dfrac{8\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$
2. $b = -5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
3. $c = 2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}}$
4. $d = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2}$

186

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$
2. $b = \dfrac{2-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$
3. $c = \left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{18}$
4. $d = (1+\mathrm{i})^{13}$

187

Soit $z = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

   a. $4z$ **c.** $\overline{\mathrm{i}z}$
   b. $3\mathrm{i}z$ **d.** $-5z$

188

Soit α un nombre réel. Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

1. $\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$
2. $\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$
3. $-\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$
4. $-\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$

189

Soit le nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme algébrique de z^{10}.

190

On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. En déduire celles de :

   a. z_1z_2 **b.** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **c.** $\dfrac{z_1^3}{z_2^2}$

191

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

192

Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,,2\pi[$.

1. En factorisant par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$, déterminer le module et un argument de $a = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et de $b = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
2. Montrer que $\dfrac{a}{b}$ est un nombre imaginaire pur.

193

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $\cos\left(\dfrac{n\pi}{20}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{n\pi}{20}\right)$ est un imaginaire pur.

194

Soit x un nombre réel. On pose $z = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin(nx).$$

2. Trouver une expression analogue pour $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

195

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note A_n le point d'affixe $\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point qui a pour affixe le complexe $\left(\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})^n\right)^n$.

1. À l'aide de la forme exponentielle du nombre $\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$, placer les points M_2, M_3 et M_4.
2. Prouver que si $n-1$ est multiple de 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
3. Déterminer la limite de OM_n quand n tend vers $+\infty$.

196

Soit x un nombre réel. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$
2. $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$
3. $c = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}$
4. $d = \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}$

197

1. Développer $(a+b)^4$.
2. En utilisant une formule d'Euler, prouver que :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right).$$