Exercice 1.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier naturel n on a : $-1 \leqslant \cos(n!) \leqslant 1$ donc en multipliant par $-4 < 0$ il vient $4 \geqslant -4\cos(n!) \geqslant -4$ et en additionnant 5 on obtient : $1 \leqslant u_n \leqslant 9$ ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 5 - 4\cos(n!)$ est bornée.
2. Démontrons que pour tout entier naturel n on a $v_n \geqslant 3$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} 3 - v_n &= 3 - \frac{3n^2}{n^2+1} \\ &= \frac{3(n^2+1) - 3n^2}{n^2+1} \\ &= \frac{3}{n^2+1} \end{aligned}$$
   Pour tout entier naturel n on a $3 > 0$ et $n^2 + 1 > 0$ donc par quotient $\dfrac{3}{n^2+1} > 0$ et par suite $3 - v_n \geqslant 0$ ce qui montre que $v_n \leqslant 3$ et donc que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + n - 3).$$

1. À la calculatrice, il semble que la limite de la suite (u_n) soit $+\infty$
2. Voici le programme Python complété :

```python
def seuil():
    u=5;n=0
    while u<=1000:
        u=(1/2)*(u+n-3)
        n=n+1
    return u
```

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n - 5$.
   Soit
   $\mathscr{P}_n$: « $u_n = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n - 5$ ».
   Initialisation : si $n = 0$ on a d'après l'énoncé $u_0 = 5$ et $10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 0 - 5 = 10 - 5 = 5$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : on suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire :
   $u_k = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^k + k - 5$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} + k - 4$.
   On a : $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}(u_k + k - 3)$ et par hypothèse de récurrence, on a $u_k = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^k + k - 5$, on en déduit alors que :
   $$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2}\left(10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + k - 5 + k - 3\right) \\ &= 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + k - 4 \end{aligned}$$

$\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n - 5.$$

Exercice 3.

La cantine scolaire d'un fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts.

1. - Pour le choix de l'entrée : l'élève en choisit une parmi les 4 proposées : il a donc $\binom{4}{1}$ choix possibles pour l'entrée.
   - Pour le choix du plat : l'élève en choisit un parmi les 3 proposés : il a donc $\binom{3}{1}$ choix possibles pour son plat.
   - Pour le dessert : l'élève en choisit un parmi les 5 proposés : il a donc $\binom{5}{1}$ choix possibles pour son dessert.

   D'après le principe multiplicatif, l'élève peut constituer $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, soit $4 \times 3 \times 5 = 60$ menus différents.
2. Dans ce cas, l'élève choisit deux entrées parmi les quatre : il a donc $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 6$ choix pour ces entrées. Pour son plat, il a toujours $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3$ choix possibles.

   D'après le principe multiplicatif, l'élève peut ainsi constituer $6 \times 3 = 18$ menus différents.
3. Ces deux élèves vont donc choisir deux entrées parmi les 4 proposées puis deux plats parmi les 3 proposés et enfin deux desserts parmi les 5 proposés.

   D'après le principe multiplicatif, ces deux élèves auront $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = 180$ menus possibles.

Exercice 4.

On rappelle la formule du binôme de Newton : a et b sont deux réels et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} a^k b^{n-k}.$$

1. On a :

$$\begin{array}{rcl}
(1+2x)^4 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \begin{pmatrix}4\\k\end{pmatrix} 1^k (2x)^{4-k} \\
 & = & \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} 1^0 (2x)^4 + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} 1^1 (2x)^3 + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} 1^2 (2x)^2 + \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} 1^3 (2x)^1 + \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} 1^4 (2x)^0 \\
 & = & 1(2x)^4 + 4(2x)^3 + 6(2x)^2 + 4(2x) + 1 \times 1^4 \\
 & = & 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1
\end{array}$$

2. On utilise la formule du binôme de Newton : on prend $a = -1$ et $b = 1$, on a donc :

   $(-1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} (-1)^k 1^{n-k}$ soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} (-1)^k = 0$.

Exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) $u_1 = \dfrac{3 \times u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3 \times \frac{1}{2}}{1+2 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

   (b) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $0 < u_n$ ».

   Initialisation : si $n = 0$ on a $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   - *Hérédité* : on suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour entier naturel k quelconque, c'est-à-dire, $0 < u_k$. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $0 < u_{k+1}$.

     Par hypothèse de récurrence $0 < u_k$ donc $0 < 3u_k$ et $0 < 1 + 2u_k$. Ainsi, u_{k+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{k+1}$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
   - $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$: on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire,

     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

   (c) On *admet* que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   i. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\ &= \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} \\ &= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} \end{aligned}$$

   ii. On sait que pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$ et il est admis que $u_n < 1$ on en déduit donc que : $2u_n > 0$, $1 - u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ et par quotient $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{3u_n}{1-u_n} \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

v_{n+1} s'écrit sous la forme $q \times v_n$ avec $q = 3$: la suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = 1$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 3^n$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n}{1 - u_n} & \Leftrightarrow (1 - u_n)v_n = u_n \\
& \Leftrightarrow v_n - u_n v_n = u_n \\
& \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \\
& \Leftrightarrow v_n = u_n(1 + v_n) \\
& \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1 + v_n} \quad \text{avec} \quad v_n \neq -1 \\
& \Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{1 + 3^n} \quad \text{car} \quad v_n = 3^n
\end{aligned}$$