Chapitre 2

Nombres complexes : équations polynômiales

***

I. Équations du second degré à coefficients réels

1. Équations du type $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$

Propriété.

Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c des réels. Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
À l'aide de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on distingue *trois cas* :

1. Si $\Delta = 0$, il existe une *unique* solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, il existe *deux solutions réelles* $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, il existe *deux solutions complexes conjuguées* $z = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercice 1.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2. Cas particulier : équations du type $z^2 = a$, $a \neq 0$

Propriété.

L'équation $z^2 = a$ admet *toujours deux solutions* dans $\mathbb{C}$:

1. Si $a > 0$, les solutions sont les *réels* : $\pm\sqrt{a}$.
2. Si $a < 0$, les solutions sont les *imaginaires purs* : $\pm\mathrm{i}\sqrt{a}$.

Exercice 2.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 1 = 0$.

3. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété.

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $P(z) = az^2 + bz + c$.
On note z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$.
Alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Exercice 3.2. Factoriser dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^2 - 4z + 8$.

II. Factorisation des polynômes

1. Fonction polynôme

Définitions.

1. Soit n un entier naturel et $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots a_n$ des réels (éventuellement complexes) avec $a_n \neq 0$. Une ***fonction polynôme*** ou ***polynôme*** P est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ pouvant s'écrire, pour tout complexe z, sous la forme :
$$\boxed{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}.$$
2. On appelle ***polynôme nul*** le polynôme P tel que pour tout complexe x,
$$\boxed{P(z) = 0}.$$
3. Si P n'est pas le polynôme nul, n est le ***degré*** de P.
4. On appelle ***racine*** de P tout nombre complexe z_0 tel que :
$$\boxed{P(z_0) = 0}.$$

Exercice 4.2. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (1 + \mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i}$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que i est racine de P.

Propriété.

Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si ***tous ses coefficients sont nuls***.

2. Factorisation par $z - \alpha$

Définition.

On dit qu'un polynôme P est ***factorisable*** (ou divisible) par $z - \alpha$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z :

$$\boxed{P(z) = (z - \alpha)Q(z)}.$$

Exercice 5.2. Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.

1. Montrer que 8 est une racine de P.
2. En déduire les réels a et b tels que $P(z) = (z - 8)(z^2 + az + b)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.

Propriété.

Soit a un nombre complexe.
Pour tout complexe z et tout entier naturel non nul, $z^n - a^n$ est ***factorisable*** par $z - a$ et :

$$\boxed{z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1} = (z - a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)}.$$

Exercice 6.2. Soit $P(z) = z^3 - 27$.
Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

Propriété.

Le polynôme P est ***factorisable*** par $z - a$ si et seulement si a est une ***racine*** de P.

3. Polynôme et racines

Propriété.

Un polynôme non nul de degré n admet ***au plus*** n racines distinctes.