

Devoir en temps libre n°2

Exercice 1. E est un ensemble à dix éléments : $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j\}$.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :

- (a) a et b ;
- (b) a mais pas b ;
- (c) b mais pas a ;
- (d) ni a ni b .

2. En déduire la relation : $\binom{10}{5} = \binom{8}{3} + 2\binom{8}{4} + \binom{8}{5}$.

3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

Exercice 2. Soit n et k deux entiers naturels tels que $n \geq k + 1$. Démontrer l'égalité suivante :

$$(n-k) \times \binom{n}{k} = (k+1) \times \binom{n}{k+1}.$$

Devoir en temps libre n°2

Exercice 1. E est un ensemble à dix éléments : $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j\}$.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :

- (a) a et b ;
- (b) a mais pas b ;
- (c) b mais pas a ;
- (d) ni a ni b .

2. En déduire la relation : $\binom{10}{5} = \binom{8}{3} + 2\binom{8}{4} + \binom{8}{5}$.

3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

Exercice 2. Soit n et k deux entiers naturels tels que $n \geq k + 1$. Démontrer l'égalité suivante :

$$(n-k) \times \binom{n}{k} = (k+1) \times \binom{n}{k+1}.$$