Continuité, convexité

⋆⋆⋆

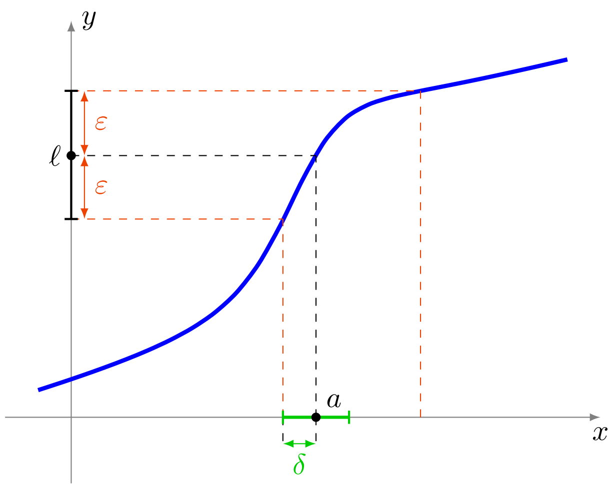
1. Continuité et applications

1.1 Continuité

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en a*** si :

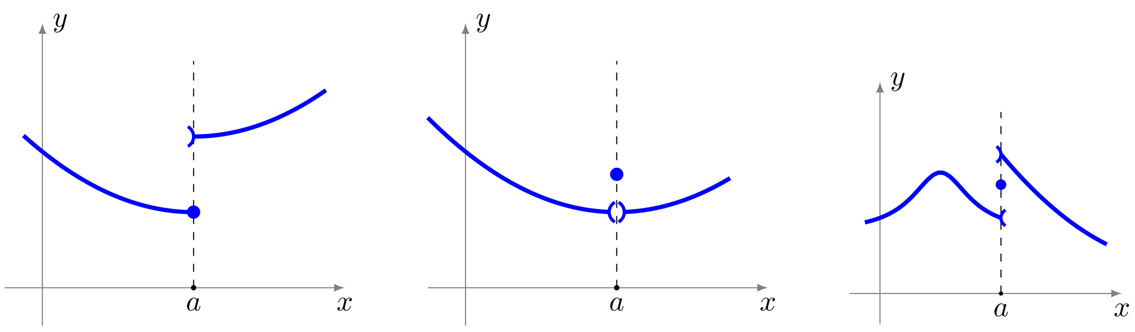
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon}.$$

On dit aussi que ***$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a***. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = \ell$.



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative **n'admet pas de saut**.

Voici l'exemple de deux fonctions qui ne sont pas continues en a :



Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est ***continue sur I*** si f est continue en tout réel de I.

Proposition 1. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit λ un réel.

- La ***somme*** $f+g$ est ***continue*** sur I.
- Le ***produit*** $\lambda \cdot f$, le ***produit*** $f \times g$ et f^n (où n est un entier naturel non nul) sont ***continues*** sur I.
- Si de plus g ne ***s'annule pas*** sur I alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont ***continues*** sur I.

Proposition 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $a \in I$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition 3. Si f est ***dérivable*** sur I alors f est ***continue*** sur I.

La réciproque est fausse. Fonction valeur absolue en 0.

1.2 Image d'une suite par une fonction continue

Proposition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que u_n appartient à I pour tout entier naturel n.

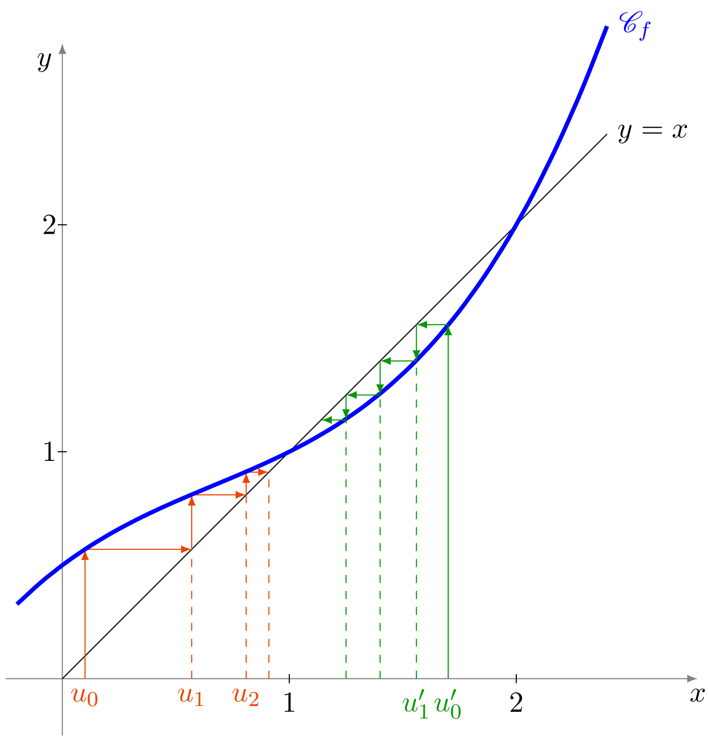
Si (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à I et ***si*** f est ***continue*** en ℓ alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

Proposition 5. Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Construction des premiers termes d'une suite récurrente.

Voici comment tracer la suite : on trace le graphe de f et la droite d'équation $y = x$. On part d'une valeur u_0 sur l'axe des abscisses, la valeur $u_1 = f(u_0)$ se lit sur l'axe des ordonnées, mais on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses par symétrie par rapport à la bissectrice. On recommence : $u_2 = f(u_1)$ se lit sur l'axe des ordonnées et on le reporte sur l'axe des abscisses, etc. On obtient ainsi une sorte d'escalier, et graphiquement on conjecture que la suite est croissante et tend vers 1. Si on part d'une autre valeur initiale u'_0 , c'est le même principe, mais cette fois on obtient un escalier qui descend :



Mini-exercice. On considère la suite (un) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$. On admet que la suite (u_n) converge et on note ℓ sa limite.

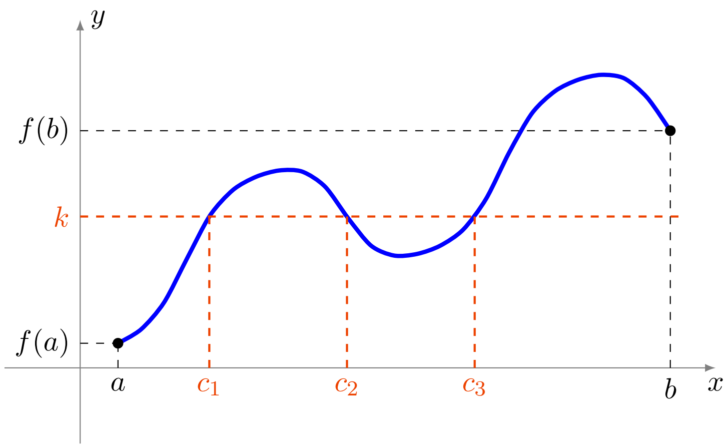
1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer la conjecture émise à la question 1.

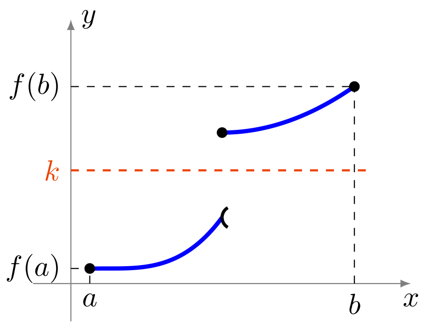
2. Équation $f(x) = k$

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème. Soit f une fonction définie et ***continue*** sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe ***au moins*** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas **nécessairement unique**. De plus si la fonction **n'est pas continue**, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





Corollaire. Soit f une fonction définie et ***continue*** et ***strictement monotone*** sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une ***solution unique*** dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Cas particulier. Dans le cas particulier $k = 0$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de ***signes contraires*** : si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une ***unique solution*** dans l'intervalle $]a\,;b[$.

Extension du théorème. On peut appliquer le corollaire du théorème dans le cas d'un intervalle du type $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$, a et b pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$. On remplace alors le calcul de $f(a)$, par exemple par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2.2 Méthodes d'encadrement

a. Méthode de balayage

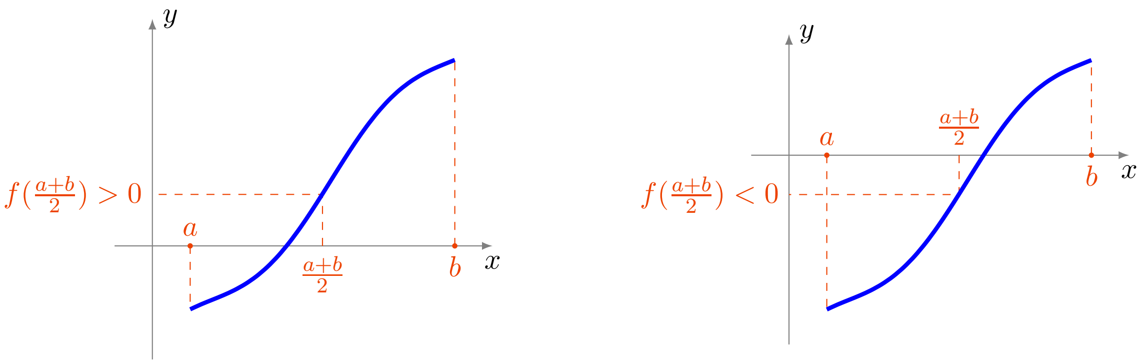
Mini-exercice. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Démontrer que f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer un encadrement de α à $0,01$ près par la méthode de « balayage » puis une valeur approchée de α à $0,01$ près.

b. Méthode de dichotomie

Voici la première étape de la construction : on regarde le signe de la valeur de la fonction f appliquée au point « milieu » $\frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$, alors il existe $c \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ tel que $f(c) = 0$.
- Si $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, cela implique que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) \leqslant 0$, et alors il existe $c \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ tel que $f(c) = 0$.



Nous avons obtenu un intervalle de longueur moitié dans lequel l'équation $f(x) = 0$ admet une solution. On itère alors le procédé pour diviser de nouveau l'intervalle en deux.

Voici le processus complet :

— **Au rang 0 :**
On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Il existe une solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.

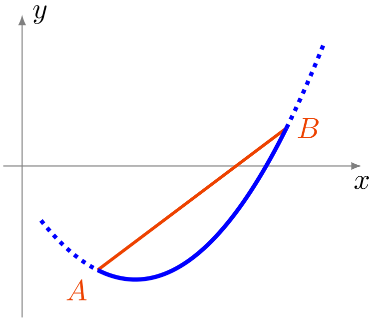
- **Au rang 1 :**
  — Si $f(a_0) \cdot f(\frac{a_0+b_0}{2}) \leq 0$, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
  — sinon on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_1 de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.
- ...
- **Au rang n :** supposons construit un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et contenant une solution x_n de l'équation $f(x) = 0$. Alors :
  — Si $f(a_n) \cdot f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
  — sinon on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_{n+1} de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

3. Convexité d'une fonction

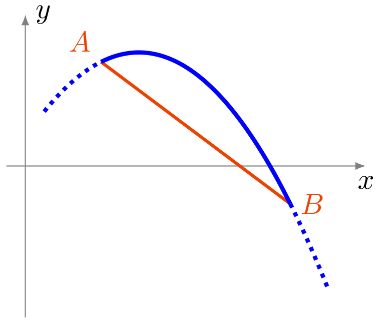
3.1 Fonction convexe, fonction concave

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située « en dessous » du segment $[AB]$ alors on dit que la fonction f est ***convexe*** sur I.



Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située « au dessus » du segment $[AB]$ alors on dit que la fonction f est ***concave*** sur I.



3.2 Convexité des fonctions deux fois dérivables

Propositions admises. Soit f une fonction définie, ***deux fois dérivable*** sur un même intervalle I. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est ***convexe*** sur I.
- f' est ***croissante*** sur I.
- f'' est ***positive*** sur I.
- $\mathscr{C}_f$ est située ***au-dessus*** de ses tangentes.

De la même façon, les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est ***concave*** sur I.
- f' est ***décroissante*** sur I.
- f'' est ***négative*** sur I.
- $\mathscr{C}_f$ est située ***en dessous*** de ses tangentes.

Démonstration. On démontre l'implication : « si f'' est positive sur I alors la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de ses tangentes ».

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et soit a un réel de I. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Soit g la fonction définie pour tout réel x de I par $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) + f(a)$. g est dérivable sur I et pour tout réel x on a $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. f'' étant positive sur I, f' est donc croissante sur I : ainsi si $x \geqslant a$ on a $f'(x) \geqslant f'(a)$ ce qui implique alors que $g'(x) \geqslant 0$. De même si $a \leqslant x$ alors $f'(a) \leqslant f'(x)$ ce qui induit que $g'(x) \geqslant 0$: g admet donc un minimum en a. Or $g(a) = 0$ donc on en déduit que pour tout réel x de I on a $g(x) \geqslant 0$ soit $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$ et par suite la courbe représentative de f est donc située au dessus de sa tangente en a, donc de toutes ses tangentes.

Définition 4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On dit qu'un point A de $\mathscr{C}_f$ est un ***point d'inflexion*** lorsque, en ce point la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente.

Propositions admises. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

(1) Le point $A(a\,;\,f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si la convexité de f change en a.
(2) Si de plus f est deux fois dérivable sur I, alors le point $A(a\,;\,f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Mini-exercice. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
2. Calculer la dérivée seconde de f.
3. En déduire la convexité de f.
4. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ dont on précisera les coordonnées.