Chapitre 12

Compléments sur les probabilités

***

1. Somme de deux variables aléatoires

1.1 1re définition

Définition 1.

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à une même expérience d'univers fini Ω et a un réel.
$X+Y$ et aX sont deux variables aléatoires définies sur Ω qui prennent comme valeur pour un événement donné respectivement : la .... des valeurs de X et Y et le .... de a par X.

★★ Exemple.

On lance deux dés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6. On appelle X et Y les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

- $X+Y$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs de ....
- $2X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs de ....

★ Remarque : on peut généraliser la somme de variable aléatoires à n variables.

★★ Exemple. On lance 3 dés cubiques de couleurs différentes et on note X, Y et Z les résultats des dés de chaque couleur. On peut considérer la variable $X+Y+Z$ qui prend les valeurs de ....

1.2 Linéarité de l'espérance et additivité de la variance

Théorème 1.

Soit X et Y deux variables aléatoires d'un univers Ω et a un réel.

- **Linéarité de l'espérance :** $\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$ et $\boxed{E(aX)=aE(X)}$

  Si les variables X et Y sont **indépendantes** :

- **Additivité de la variance :** $\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$ et $\boxed{V(aX)=a^2V(X)}$.

★ Remarque : on considérera l'indépendance des variables au sens intuitif du terme c'est à dire que le résultat de X n'influe pas sur le résultat de Y comme dans le lancement de deux dés.

★★ **Exemple.** Prendre l'exemple initial en calculant $E(X+Y)$, $E(2X)$, $V(X+Y)$ et $V(2X)$.

★ **Remarque :** on peut **généraliser** ces résultats à la somme de n variables.

2. Somme de variables identiques et indépendantes

2.1 Décomposition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

> **Théorème 2.**
>
> Soit n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant la même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
> La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

★★ **Exemple.** Soit X_i suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,13)$ pour $i \in [\![1\,;\,10]\!]$, alors $S_{10} = X_1+X_2+\ldots+X_{10}$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,13)$.

> **Théorème 3.**
>
> Toute variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ peut se décomposer en **une somme** de n **variables indépendantes** S_n.
> $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ où X_i avec $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ suit une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

★ **Remarque :** ce théorème permet de démontrer l'expression de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. En effet si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, on peut décomposer X en somme de n variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ d'espérance p et de variance $p(1-p)$.

2.2 Échantillon d'une variable aléatoire

Définition 2.

Soit une variable X suivant une loi de probabilité.
Une liste de variables indépendantes $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suivant cette même loi est appelée **échantillon** de taille n associé à X
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$, on a alors :

$$\boxed{E(S_n) = nE(X), \quad E(M_n) = E(X) \text{ et } V(S_n) = nV(X), \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}}.$$

★ **Remarque :** plus la taille n de l'échantillon est **grand** plus la **variance** de M_n est **petite** donc plus la valeur de M_n se **rapproche** de l'espérance de X.

★★ **Exemple.** Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi suivie par X et la variable aléatoire moyenne M_n :

x_i	-10	5	20
$p(X = x_i)$	$0,25$	$0,55$	$0,2$

Déterminons la taille de l'échantillon n à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

3. Concentration et loi des grands nombres

3.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

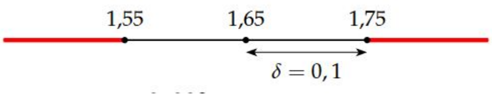
Théorème 4.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

$$\boxed{\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[, p(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}.$$

★ **Remarque :** la probabilité que X se trouve en dehors de l'intervalle $[\mu-\delta\,;\,\mu+\delta]$ est inférieur à $\dfrac{V}{\delta^2}$. Cette inégalité conduit à la loi des grands nombres.

★★ **Exemple.** La taille moyenne d'une femme française est de $1,65$ m et la variance est évaluée à $0,0025$. Majorons la proportion des femmes françaises dont la taille est inférieure ou égale à $1,55$ ou supérieure ou égale à $1,75$.
Soit T_F la variable aléatoire associée à la taille d'une femme française. On a donc $\mu = 1,65$ et $V = 0,002\,5$.



3.2 Application à un intervalle de rayon de k fois l'écart-type

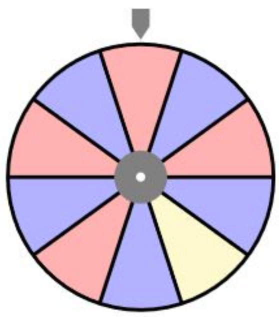
Théorème 5.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, p(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}}.$$

★★ **Exemple.**

Sur une roue de loterie il y a 4 secteurs rouges sur 10.
On fait tourner 20 fois la roue en notant par X le nombre de fois où la roue tombe sur un secteur rouge.
La variable aléatoire X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,4)$.
Majorons la probabilité que X soit en dehors de l'intervalle centrée en μ et de rayon 2σ.



3.3 Inégalité de concentration

Théorème 6.

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance V et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$$\boxed{\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[,\ p(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}}.$$

★★ **Exemple.** On prend un dé tétraédrique bien équilibré dont on a déterminé l'espérance $\mu = 2,5$ et la variance $V = 1,25$.
Combien de lancers du dé tétraédrique doit-on faire pour s'assurer au seuil de 95 % que la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle $]2,45\,;\,2,55[$?

3.4 Loi des grands nombres

Théorème 7.

Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$$\boxed{\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[,\ \lim_{n \to +\infty} p(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0}.$$

★ **Remarque :** pour un δ donné aussi petit soit-il, la limite de la probabilité que M_n soit en dehors de l'intervalle $[\mu - \delta\,;\,\mu + \delta]$ est nulle.
Ce théorème montre de façon rigoureuse, que lorsqu'on lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie bien équilibrée, on a une chance sur deux en moyenne que la pièce tombe sur « pile » ou sur « face ».