Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$n \leqslant u_n \leqslant n + 3.$$
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(n + 3 - u_n\right).$$
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (T_n).