CHAPITRE 2

Équations et inéquations

Plan du chapitre

1. Égalités et équations

1.1 Propriété des égalités

Propriété 1

Soit a, b et c trois réels et d un réel **non nul**.

- $a = b \iff a + c = b + c$.
- $a = b \iff a \times d = b \times d$.

Ce qui précède induit également :

- $a = b \iff a - c = b - c$.
- $a = b \iff \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{d}$.

Remarque. Le symbole mathématique $\iff$ signifie « équivaut à ». On peut aussi utiliser l'expression « si et seulement si ».

Exemples.

1. x et y sont deux nombres réels vérifiant l'égalité $2x + 3y = -7$.
   Exprimer y en fonction de x.
2. Le volume d'un cylindre de rayon r non nul et de hauteur h est donné par $\mathscr{V} = \pi r^2 h$.
   Exprimer h en fonction de V et r.

Propriété 2

Un produit de deux nombres réels est **nul** si et seulement si l'un au moins de ces deux nombres est nul.
Autrement dit :

$$\boxed{A \times B = 0 \iff A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0}.$$

1.2 Équations

Définitions 1

- Une ***équation d'inconnue*** x est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
- *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie.
- On notera l'ensemble des solutions sous la forme $S = \{\dots\}$ si une équation admet au moins une solution et $S = \varnothing$ si l'équation n'admet pas de solution.

Exemples. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-7x + 4 = 9$
2. $\frac{1}{3}x - 5 = 2$
3. $(-2x + 5)(7x + 11) = 0$.

1.3 Identités remarquables

Propriété 3

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Remarque. Les membres de gauche de ces égalités sont des produits et les membres de droite sont des sommes algébriques. On peut utiliser ces identités de la gauche vers la droite pour **développer** une expression et de la droite vers la gauche pour **factoriser** une expression.

Exemples.

1. Soit y un nombre réel. Développer l'expression $(4y - 3)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 9 = 0$.

2. Inégalités et inéquations

2.1 Propriété des inégalités

Propriété 4

Soit a, b et c trois réels et d un réel **non nul**.

- $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$
- $a < b \Longleftrightarrow a - c < b - c$

- Si $d > 0$: $a < b \Longleftrightarrow ad < bd$
- Si $d < 0$: $a < b \Longleftrightarrow ad > bd$

- Si $d > 0$: $a < b \Longleftrightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$
- Si $d < 0$: $a < b \Longleftrightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$

Remarque. On a les mêmes équivalences si les inégalité sont larges et non strictes (« $\leqslant$ » au lieu de « $<$ »).

Exemple. Soit x un réel tel que $x < -5$ et y un réel tel que $y < 7$. Que peut-on en déduire pour les expressions suivantes ?

1. $2x$
2. $-3y$
3. $x + y$

2.2 Encadrement d'un nombre réel et arrondis

Définition 2

Soit x un nombre réel et n un entier relatif. Il existe un unique nombre entier relatif a tel que :

$$\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}.$$

Cet encadrement est *l'encadrement décimal de* x à 10^{-n} près.

Exemple. Donner l'arrondi de 16 812 7 à 10^{-3} près.

2.3 Inéquations

Propriété 5

Les transformations suivantes permettent de passer d'une inéquation à une inéquation équivalente :

- Développer, factoriser, réduire certains termes.
- Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre.
- Multiplier ou diviser chaque membre de l'équation par un même nombre non nul, **à condition de changer le sens de l'inégalité si ce nombre est négatif**.

Exemples. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $3x + 2 > 7$
2. $\frac{1}{3}x - 5 = 2$
3. $-x + 9 \geqslant -2$
4. $-\frac{3x}{2} \leqslant 9$