Exercice 1.

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

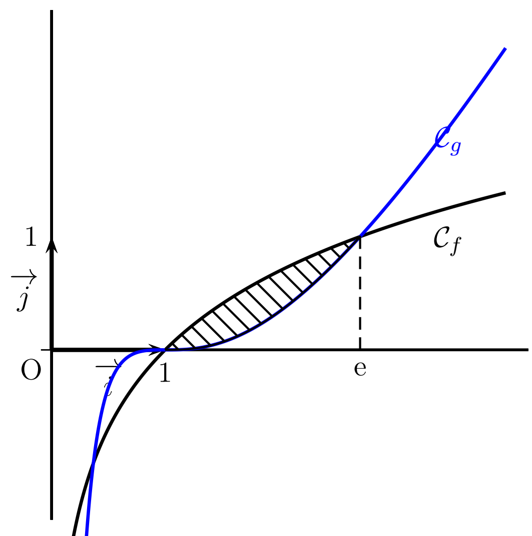
$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

.

3. Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

Exercice 2.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \cos(x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

1. Démontrer que 2π est une période de f et que f est paire.
2. Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
3. On admet que pour tout réel a on a $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
   (a) Calculer la fonction dérivée f' et démontrer que $f'(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$.
   (b) Déterminer avec soin le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
   (c) En déduire le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.