Exercice 1.

❶ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-3x+1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-3x+1=+\infty.$$

❷ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+\dfrac{1}{x}=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty.$$

❸ Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{1-2x}{4-x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} 1-2x=-7\\ \lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} 4-x=0\quad\text{avec}\quad 4-x<0\end{array}\right\}\overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{1-2x}{4-x}=+\infty.$$

❹ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2}{1+9x^2}$

On a une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ donc on change d'écriture.
Pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}\frac{5x^2}{1+9x^2}&=\frac{x^2\times5}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+9\right)}\\&=\frac{5}{\dfrac{1}{x^2}+9}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 5=5\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}+9=9\end{array}\right\}\overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\dfrac{1}{x^2}+9}=\dfrac{5}{9}.\ \text{Donc}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2}{1+9x^2}=\dfrac{5}{9}.$$

❺ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1-\sin(x)$

cos n'ayant pas de limite à l'infini, on encadre.
$\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant\sin(x)\leqslant1$ donc $-1\leqslant-\sin(x)\leqslant1$ puis $\cancel{3x}\leqslant3x+1-\sin(x)\leqslant3x+2$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty}3x+2=-\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{x\to-\infty}3x+1-\sin(x)=-\infty$$

❻ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}\overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}=0.$$

❼ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

❽ Calculons $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2-8x}{x-2}$. On a une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$ donc on change d'écriture.
Pour tout réel $x \neq 5$, $\dfrac{4x^2-8x}{x-2} = \dfrac{4x(x-2)}{x-2}$ donc $\dfrac{4x^2-8x}{x-2} = 4x$.
$\lim\limits_{x \to 2} 4x = 8$ donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2-8x}{x-2} = 8$.

Exercice 2.

1. $f_1(x) = (2x^3+5x^2+2x+1)^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f_1'(x) = 4(6x^2+10x+2)(2x^3+5x^2+2x+1)^3$.
2. $f_2(x) = \sqrt{3x^2+\mathrm{e}^x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f_2'(x) = \dfrac{6x+\mathrm{e}^x}{2\sqrt{3x^2+\mathrm{e}^x}}$.
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2+x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f_3'(x) = (3x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^3+x^2+x+1}$.

Exercice 3.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$ donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 4.

1. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ donc d'après le théorème d'encadrement des limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. f est dérivable sur $[0\,;\,2]$. $\forall x \in [0\,;\,2]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

   On en déduit que f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.

2. On a $1 \leqslant x \leqslant 2$ donc $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$ car f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.
   Or $f(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$ donc $1 \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{3} \leqslant 2$.

3. (a) Facile.

   (b) La suite (u_n) semble être décroissante et converger vers $1,6$ et la suite (v_n) semble être croissante et converger vers $1,6$ également.

   (c) Soit P_n la proposition de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant un + 1 \leqslant 2$.

   Initialisation : si $n = 0$ on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(u_0) = f(2) = \dfrac{5}{3}$ ainsi $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$ et donc P_0 est vraie.

   Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons P_k vraie, alors $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 2$, donc :
   $f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(2)$ car f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.
   On a donc $1 \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{5}{3} \leqslant 2$.
   Ainsi si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie

   La proposition est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence P_n est vraie quel que soit le naturel n.

   Ainsi pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.

   (d)
   - On a $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
   - On a $1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.
   - La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 1$.

   (e) Soit ℓ la limite de la suite (u_n). On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On passe à la limite.

   On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$ soit $\ell = f(\ell)$ c'est-à-dire : $\ell = \dfrac{2\ell + 1}{\ell + 1}$.

   (f) $\ell = \dfrac{2\ell + 1}{\ell + 1} \iff \ell(\ell + 1) = 2\ell + 1 \iff \ell^2 - \ell - 1 = 0$.

   On a un trinôme de degré 2 : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 5 > 0$ donc le trinôme a deux racines réelles qui sont $\ell_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $\ell_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \geqslant 1$ donc la limite de la suite (u_n) est donc :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$