Exercice 1.

Une urne contient n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

1. Il y a autant de tirages possibles que de combinaisons de 2 éléments pris parmi $n+5$ soit $\begin{pmatrix} n+5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{(n+5)(n+4)}{2}$.
2. On choisit deux boules jaunes parmi les 3 boules jaunes : il y a alors $displaystyle\binom{3}{2} = 3$ de tirages comportant deux boules jaunes.
3. Les deux boules sont tirées au hasard, on est ne situation d'équiprobabilité.
   On a donc $p_n = \dfrac{3}{\dfrac{(n+5)(n+4)}{2}} = \dfrac{6}{(n+5)(n+4)}$.
4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n+5 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+4 = +\infty$ donc par produit des limites :
   $$\lim_{n\to+\infty}(n+5)(n+4) = +\infty \text{ et ainsi } \lim_{n\to+\infty} p_n = 0.$$
   On en déduit que si on prend un nombre « illimité » de boules rouges, la probabilité de tirer deux boules jaunes sera nulle. Il sera donc impossible de tirer deux boules jaunes.

Exercice 2.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n^2 - 7v_n + 16$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & v_n^2 - 7v_n + 16 - v_n \\ & = & v_n^2 - 8v_n + 16 \\ & = & (v_n - 4)^2 \end{array}$$
   Un carré étant toujours positif dans $\mathbb{R}$ on a $(v_n-4)^2 \geqslant 0$ et donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ ce qui prouve que la suite (v_n) est croissante.
2. Si (v_n) converge alors sa limite ℓ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$. Or $v_{n+1} = v_n^2 - 7v_n + 16$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n^2 - 7v_n + 16$ soit $\ell = \ell^2 - 7\ell + 16$.
   Or $\ell = \ell^2 - 7\ell + 16 \iff \ell^2 - 8\ell + 16 = 0 \iff (\ell-4)^2 = 0 \iff \ell = 4$.
   Ainsi, si (v_n) converge alors sa limite est $\ell = 4$.
3. Supposons la suite (v_n) convergente. D'après la question précédente cela imposerait $\ell = 4$.
   On a démontré que la suite (v_n) était croissante. La suite (v_n) convergente si et seulement si elle est majorée. Or $v_0 = 5$ et (v_n) est croissante donc pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 5$: la suite (v_n) ne peut donc converger vers 4. La suite (v_n) n'est donc pas majorée.
4. La suite (v_n) est croissante et non majorée : elle diverge donc vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. f est dérivable sur $[0\,;\,2]$. $\forall x\in[0\,;\,2]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}>0 \end{aligned}$$

   On en déduit que f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.

2. On a $1\leqslant x\leqslant 2$ donc $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$ car f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.
   Or $f(1)=\dfrac{3}{2}$ et $f(2)=\dfrac{5}{3}$ donc $1\leqslant\dfrac{3}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{5}{3}\leqslant 2$.

3. (a) Facile.

   (b) La suite (u_n) semble être croissante et converger vers $1,6$ et la suite (v_n) semble être décroissante et converger vers $1,7$ également.

   (c) Soit P_n la proposition de récurrence : $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.
   Initialisation : si $n=0$ on a $u_0=2$ et $u_1=f(u_0)=f(2)=\dfrac{5}{3}$ ainsi $1\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 2$ et donc P_0 est vraie.
   Hérédité : soit $k\in\mathbb{N}$ et supposons P_k vraie, alors $1\leqslant u_{k+1}\leqslant u_k\leqslant 2$, donc :
   $f(1)\leqslant f(u_{k+1})\leqslant f(u_k)\leqslant f(2)$ car f est strictement croissante sur $[0\,;\,2]$.
   On a donc $1\leqslant\dfrac{5}{3}\leqslant u_{k+2}\leqslant u_{k+1}\leqslant\dfrac{5}{3}\leqslant 2$.
   Ainsi si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie
   La proposition est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence P_n est vraie quel que soit le naturel n.
   Ainsi pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 2$.

   (d)
   - On a $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
   - On a $1\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.
   - La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell\geqslant 1$.

   (e) Soit ℓ la limite de la suite (u_n). On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ et $u_{n+1}=f(u_n)$. On passe à la limite.
   On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)$ soit $\ell=f(\ell)$ c'est-à-dire : $\ell=\dfrac{2\ell+1}{\ell+1}$.

   (f) $\ell=\dfrac{2\ell+1}{\ell+1}\iff\ell(\ell+1)=2\ell+1\iff\ell^2-\ell-1=0$.
   On a un trinôme de degré 2 : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-4)=5>0$ donc le trinôme a deux racines réelles qui sont $\ell_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $\ell_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\geqslant 1$ donc la limite de la suite (u_n) est donc :

$$\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 4.

- $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}f(x)=-\infty$: on en déduit que la droite d'équation $x=5$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=6$ donc la droite d'équation $y=6$ est asymptote horizontale à à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.