Chapitre 10

Fonction exponentielle

***

I. Fonction exponentielle

Propriété. Résultat préliminaire.

Si, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors f ***ne s'annule pas*** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) \\ &= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) \\ &= \end{aligned}$$

La fonction g est ________________ sur $\mathbb{R}$, or $g(0) = f(0) \times f(0) = 1$, donc pour tout réel x, $g(x) = g(0) = 1$.
On en déduit que pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.
Supposons qu'il existe un réel c tel que $f(c) = 0$ on aurait alors $f(c) \times f(-c) = 0$ ce qui est contradiction avec le fait que $f(x) \times f(-x) = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \neq 0$ ce qui prouve donc que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. ■

Remarque. Pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Théorème.

Il existe une ***unique*** fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée ***fonction exponentielle*** et est notée **exp**.

Démonstration.

1. L'existence de la fonction exponentielle est ***admise***.
2. Démontrons son ***unicité***.

   Supposons l'existence d'une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. La fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est définie (car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété 1) et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On a $h' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ or $f' = f$ et $g' = g$, d'où $h' = 0$ et donc h est constante.

   Pour tout réel x, $h(x) = h(0)$, or $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ (vu que $f(0) = g(0) = 1$).

   On a donc pour tout réel x, $h(x) = 1$ soit $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ ou encore que $g(x) = f(x)$ et par suite $f = g$ donc f est ***unique***. ■

II. Relation fonctionnelle

Propriété — Relation fonctionnelle.—

Pour tous réels x et y,

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}.$$

De cette propriété, on en déduit les propriétés corollaires suivantes :

Propriétés.

1. Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}.$$

2. Pour tous réels x et y on a :

$$\boxed{\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}}.$$

III. Lien avec les suites géométriques

Propriété.

Soit a un réel et (u_n) la suite de terme général $u_n = \exp(na)$ où n est un entier naturel.

- La suite (u_n) est la ***suite géométrique*** de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\exp(a)$.
- Pour tout entier naturel n et tout réel a,

$$\boxed{\exp(na) = (\exp(a))^n}.$$

IV. Une nouvelle notation : e^x

Définition.

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle. Ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$.

À la calculatrice, on trouve $\mathrm{e} \simeq 2,72$.
Par la propriété précédente, pour tout entier relatif p, $\exp(p) = \exp(p \times 1)$ donc $\exp(p) = (\exp(1))^p$ soit donc $\exp(p) = \mathrm{e}^p$. On décide de prolonger cette notation d'écriture à tout réel x :

$$\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}.$$

Avec cette nouvelle notation, on peut écrire les nouvelles égalités suivantes :

Propriétés. Pour tous réels x, y et tout entier naturel n :

1. $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$
2. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$
3. $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}$
4. $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{n} = \mathrm{e}^{nx}$

Exercice 1.10. Simplifier les écritures suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x+5} \times \mathrm{e}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{-4x+5}}{(\mathrm{e}^{-4})^{3}}$

V. Étude de la fonction exponentielle

1. Sens de variation de la fonction exponentielle

Propriété. La fonction exponentielle exp est :

1. ***dérivable*** sur $\mathbb{R}$.
2. est ***strictement positive*** sur $\mathbb{R}$,
3. est ***strictement croissante*** sur $\mathbb{R}$.

2. Équations et inéquations avec exponentielle

Propriété. Pour tous réels x et y,

1. $\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{y} \iff x < y$.
2. $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} \iff x = y$.

Démonstration.

Découle du fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 2.10. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

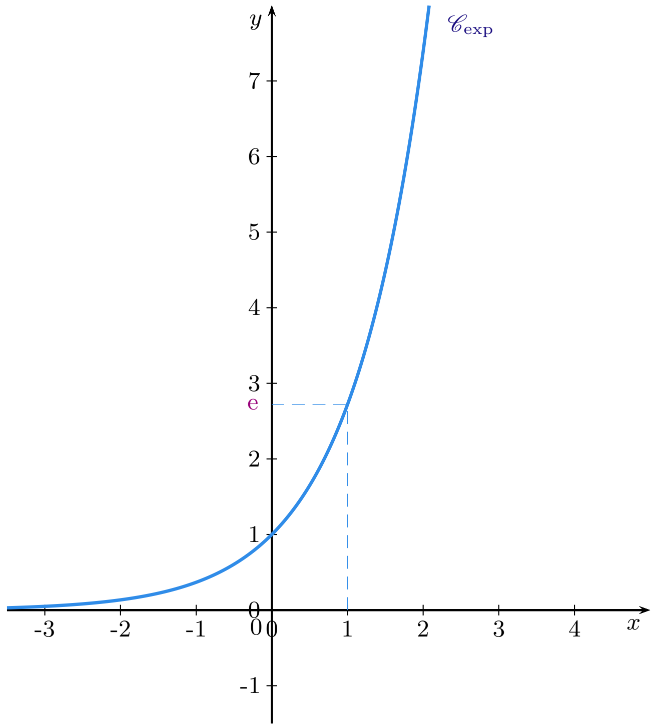
1. $\mathrm{e}^{3x+4} = 1$
2. $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+2}$
3. $\mathrm{e}^{2x+1} \geqslant 0$
4. $\mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{2x}$

3. Synthèse et courbe représentative

A. Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $(\exp)'(x)$			$+$		
Variations de exp		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

B. Courbe représentative



VI. Deux cas particuliers

De façon générale, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$ ou $g(t) = \mathrm{e}^{-kt}$, où k est un réel strictement positif, sont appelées **fonctions exponentielles.**

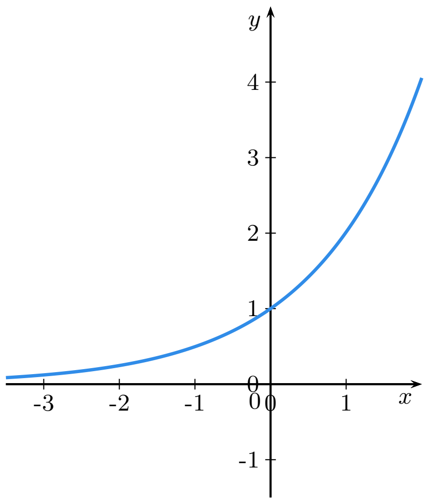
Propriété — admise. —

Soient k un réel, et f et g deux fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-kt}$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{f'(t) = k \times f(t) = k\mathrm{e}^{kt} \qquad \text{et} \qquad g'(t) = -k \times g(t) = -k\mathrm{e}^{-kt}}.$$

Propriété.

Soit k un réel strictement positif.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$ est ***strictement croissante*** sur $\mathbb{R}$.



Soit k un réel strictement positif.
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-kt}$ est ***strictement décroissante*** sur $\mathbb{R}$.