Chapitre 11

Équations de droites et systèmes

***

I. Retour sur la colinéarité de vecteurs

Rappel : dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff xy' = x'y \iff xy' - x'y = 0$.

Définition.

On rappelle que le ***déterminant*** associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté det défini par :

$$\boxed{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}.$$

Conséquence. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

II. Équations cartésiennes de droites

1. Étude d'un exemple

Dans un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit :

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\iff 3\,(y-3) - (-5)\,(x+2) = 0 \\ &\iff 3y - 9 + 5x + 10 = 0 \\ &\iff 3y + 5x + 1 = 0 \\ &\iff 5x + 3y + 1 = 0 \end{aligned}$$

- L'équation $3y + 5x + 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).
- $3y + 5x + 1 = 0 \iff y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$ et l'équation $y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$ est l'équation réduite de la droite (AB).
- La droite (AB) est la courbe représentative d'une fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$.

2. Cas général

Théorème

Le plan est muni d'un repère.

1. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.
2. Un point appartient à la droite (d) si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée ***équation cartésienne*** de la droite (d).

Exercice 1.11.
Soit la droite (d) d'équation $5x + 2y - 12 = 0$. Les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Théorème

Le plan est muni d'un repère.
Toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ admet $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Exercice 2.11. Soit la droite (d) d'équation $x - 4y + 6 = 0$. Préciser les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (d).

Exercice 3.11. Soit la droite (d) d'équation $2x - 5y + 2 = 0$. Montrer que $P\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ appartient à (d), préciser les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite puis représenter graphiquement cette droite (d).

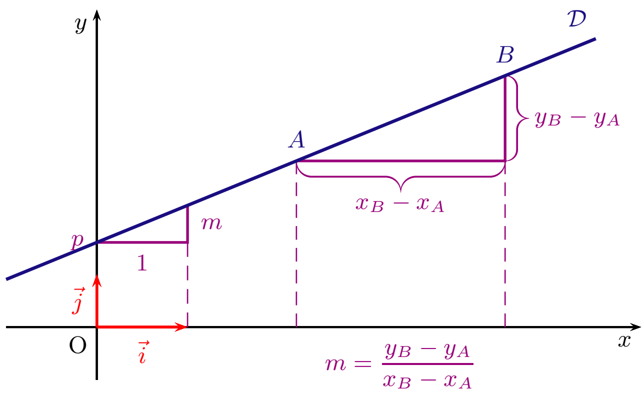
III. Équations réduites de droites

Propriété.

1. Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux réels.
2. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ avec k réel.

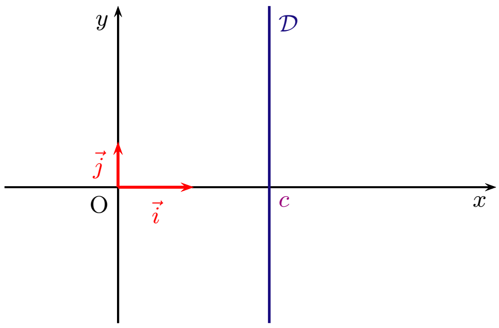
Illustrations.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = mx + p$:



   — Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$;
   — Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$;
   — Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = c$:



— La droite $\mathcal{D}$ n'a pas de coefficient directeur ;
— $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

IV. Droites parallèles, droites sécantes

Propriété.

Soit (d) et (d') d'équation respective $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. Alors (d) et (d') sont parallèles si et seulement si a et b sont proportionnels à a' et b' c'est-à-dire :

$$\boxed{ab'-a'b=0}.$$

Exercice 4.11. Soit la droite (d) d'équation $(d) : 2x-3y+7=0$ et $(d') : -4x+6y-2=0$.
Démontrer que (d) et (d') sont parallèles.

V. Système d'équations linéaires

Définition.

Un ***système linéaire*** de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y c'est trouver tous les couples $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifiant les deux équations.

Exemple. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-2y & = & -4 \\ 2x+6y & = & 1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y=-4 \\ 2x+6y=1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=-4 \\ 11x=-11 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow 3\times L_1+L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} 3x-2y=-4 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$