140

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par
$$u_n = n^2 + 3n.$$
Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est définie par :
$$\begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n - n^2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

141

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ dont on donne le terme général :

1. $u_n = -50\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$
2. $u_n = 3n^2 + 4n$
3. $u_n = \dfrac{n}{n+4}$

142

Pour les suites arithmétiques suivantes dont on donne le premier terme et la raison, déterminer le sens de variation :

1. $u_0 = -2$ et $r = 0,6$
2. $v_0 = 1$ et $r = \dfrac{2}{3}$
3. $w_0 = 5$ et $r = 1 - \sqrt{2}$
4. $t_0 = -10$ et $r = 10^{-2}$

143

Pour les suites géométriques suivantes dont on donne le premier terme et la raison, déterminer le sens de variation :

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$
2. $v_0 = -1$ et $r = \dfrac{4}{5}$
3. $w_0 = -\dfrac{2}{3}$ et $q = \dfrac{8}{3}$
4. $t_0 = 0,5$ et $q = 10^{-1}$

144

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :
$$u_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser son premier terme, sa raison et son sens de variation.
2. Soit (t_n) la suite définie par $w_n = u_n - v_n$. Montrer que la suite (t_n) est arithmétique. Préciser son premier terme, sa raison et son sens de variation.

145

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité :
$$u_{n+1} = 0,9u_n + 42.$$

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :
   $$u_n = -140 \times 0,9^n + 420.$$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.
   On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :
   ```
   N ← 0
   U ← 280
   Tant que .........
       N ← N + 1
       U ← .........
   Fin Tant que
   ```
   a. Compléter l'algorithme.
   b. Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   c. En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures.

146

Une équipe de chercheurs japonais a découvert une bactérie nommée *Ideonella Sakaiensis* capable, sous certaines conditions, de digérer le plastique. Ces biologistes étudient l'évolution de la population des bactéries lors d'une mise en culture.
Passés les deux premiers jours, le nombre de bactéries présentes dans la cuve est modélisé par la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 & = & 7\,800 \\ u_{n+1} & = & 0,95u_n + 1\,500, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$
où u_n correspond au nombre de bactéries présentes le n-jour après le deuxième jour de mise en culture.

1. Déterminer la valeur de u_1.
2. **a.** Compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre de jours à partir duquel la population de bactéries dépasse 20 000.

```
u ← 7 800
n ← 0
Tant que ...
    u ← ...
    n ← ...
Fin Tant que
```

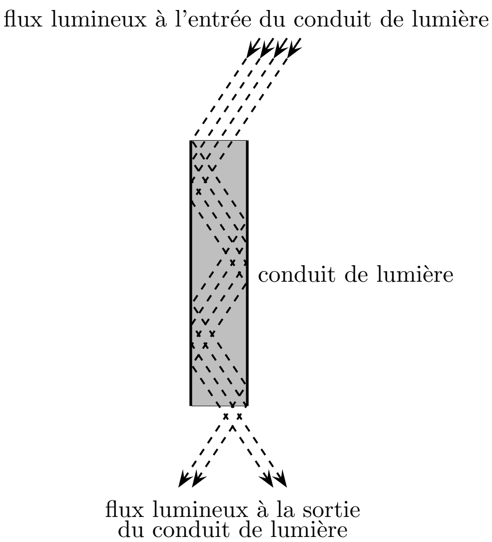
   b. Après exécution de l'algorithme on obtient $n = 16$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = u_n - 30\ 000$.
   On admet que cette suite est géométrique de raison $0,95$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 30\ 000 - 22\ 200 \times 0,95^n.$$
   d. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   e. Déterminer la limite de (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

147

Pour permettre un apport de lumière naturelle dans une habitation et réaliser des économies d'électricité, une solution réside dans l'installation d'un conduit de lumière au niveau de la toiture. Il s'agit d'un tube cylindrique en aluminium recouvert d'un film multicouche à base de polymère.

Dans ce conduit, le flux lumineux, exprimé en lumens (lm), diminue de $0,5\,\%$ tous les décimètres.

On rappelle qu'un décimètre vaut dix centimètres.



Dans cette partie, on suppose que le flux lumineux à l'entrée d'un tel conduit de lumière est de 4 000 lumens.

On pose $u_0 = 4\ 000$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note (u_n) le flux lumineux, en lumens, à la sortie d'un conduit de longueur n décimètres.

1. Justifier que $u_1 = 3\ 980$.
2. Calculer le flux lumineux, en lumens, à la sortie d'un conduit d'une longueur de 20 cm.
3. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
4. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
5. Un conduit de lumière de 2 mètres de long permettrait-il d'obtenir un flux lumineux d'au moins 3 600 lumens en sortie ?
6. On considère l'algorithme ci-dessous où n désigne un entier naturel et U un nombre réel.

```
n ← 0
U ← 4 000
Tant que U > 3 000
    n ← n + 1
    U ← U × 0,995
Fin Tant que
```

   a. Indiquer le contenu de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme.
   b. Interpréter la réponse obtenue à la question précédente dans le contexte du conduit de lumière.

148

Bob s'est fixé un objectif : participer à un marathon qui aura lieu très bientôt dans sa ville.

Pour cela, il désire programmer sa préparation au marathon de la manière suivante :

- lors du premier entraînement, il décide de courir 20 km ;
- il augmente ensuite, à chaque entraînement, la distance à courir de $5\,\%$.

On peut modéliser la distance parcourue lors de ses entraînements par une suite (d_n), où, pour tout entier naturel n non nul, le nombre d_n désigne la distance à courir en kilomètre, lors de son n-ième entraînement.

On a ainsi $d_1 = 20$.

1. Calculer d_2, puis vérifier que $d_3 = 22,05$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
   $$d_n = 20 \times 1,05^{n-1}.$$
4. Quelle distance, arrondie à 1 m près, va courir Bob lors de son 10e entraînement ?
5. La distance à courir lors d'un marathon est de $42,195$ km. Bob estime qu'il sera prêt pour la course, s'il parvient à courir au moins 43 km lors d'un de ses entraînements.
   Recopier et compléter le script suivant, écrit en langage Python, dont la valeur de n, après exécution de ce script, est le nombre minimal d'entraînements permettant à Bob d'être prêt pour le marathon.

```
n = 1
d = 20
while ......... :
  n = ......
  d = 1.05*d
```