1 Généralité sur les suites

80

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - 1$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_{10}.
2. Déterminer, en fonction de n, les termes u_{n+1} et u_{2n}.

81

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n+2}{n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_7.
2. Exprimer en fonction de n, u_{n+1} et u_{3n}.

82

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Calculer v_1, v_2 et v_3.

83

Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n(1 - w_n) + 2$. Calculer w_2.

84

Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0 = 1$ et les autres termes sont obtenus en ajoutant 1 au double du carré du terme précédent.

1. Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Donner la relation entre w_{n+1} et w_n.

85

ALGO

Les deux algorithmes ci-dessous permettent de calculer le terme de rang n de deux suites :

```
u ← −4
Pour k variant de 1 à n
   u ← u + 5
Fin Pour
```

```
v ← 300
Pour k variant de 1 à n
   v ← k + 3v
Fin Pour
```

Indiquer le premier terme et la relation de récurrence définissant chacune de ces suites.

86

ALGO

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1. Cette suite est-elle définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence ?
2. Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le terme de rang n de la suite (u_n) :

```
u ← ...
Pour k variant de ... à ...
   u ← ...
Fin Pour
```

87

CALCULATRICE

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \dfrac{10a_n}{a_n + 3} \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de a_5 à 10^{-3} près.

88

TABLEUR

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 3 - 7n \text{ et } \begin{cases} v_0 & = 6 \\ v_{n+1} & = -2v_n + 3 \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	3	6
3	1		

Indiquer les formules à saisir dans les cellules B3 et C3 afin de compléter les colonnes B et C par recopie vers le bas.

89

PYTHON

On considère les trois fonctions informatiques suivantes programmées en langage Python :

```python
def terme_u(n):
    u=1/3
    for k in range(n):
        u=1/u-1
    return u
```

```python
def terme_v(n):
    return n**2-2*n+1/n
```

```python
def terme_w(n):
    w=5
    for k in range(1,n+1):
        w=w+3*(k-1)
    return w
```

1. Qu'obtient-on lorsqu'on appelle terme_$u(3)$, terme_$v(5)$ et terme_$w(4)$ dans la console ?
2. Préciser les modes de génération des suites associées à chacune de ces trois fonctions.

2 Suites arithmétiques

90

Pour les suites arithmétiques suivantes dont on donne un terme et la raison, exprimer le terme général u_n en fonction de n puis calculer u_5 :

1. $u_0 = 5$ et $r = 2$
2. $u_1 = 4$ et $r = \dfrac{1}{2}$
3. $u_5 = 6$ et $r = -3$

91

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r puis u_{2021}.
2. $u_0 = 5$ et $u_{100} =?45$. Calculer r puis u_{20}.
3. $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculer r puis u_0.

92

Reconnaître parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous celles qui sont arithmétiques et préciser alors leur premier terme et leur raison :

1. $u_n = -2 + 3n$
2. $\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 1,5 + u_n \end{cases}$
3. $u_n = n\sqrt{2}$
4. $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$

93

Reconnaître parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous celles qui sont arithmétiques et préciser alors leur premier terme, leur raison et leur formule explicite :

1. $\begin{cases} u_0 & = & -1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 1,5 + u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_1 & = & -6 \\ u_{n+1} & = & u_n - 2 \end{cases}$

94

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,365$.

1. Déterminer la relation de récurrence puis la formule explicite de u_n.
2. Utiliser la calculatrice pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que u_n est négatif.

95

PYTHON

On considère la suite arithmétique (u_n) dont chaque terme s'obtient grâce au programme suivant :

```python
def suite(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u+4
    return u
```

1. Préciser le premier terme u_0 et la raison r de la suite (u_n).
2. En déduire l'expression explicite de u_n.
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$.
4. Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle réponde) la question **3.a**.

96

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

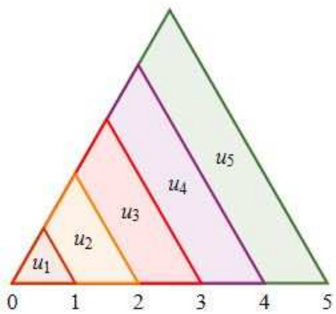
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
   b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n.

97

La figure ci-dessous, indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les tri- angles de la figure sont équilatéraux. On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut : $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

1. Prouver que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?
2. La suite (v_n) des périmètres est-elle arithmétique ?



98

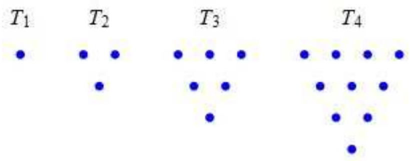
1. Démontrer que la somme $1+3+5+\ldots+99$ est le carré d'un entier naturel.
2. Exprimer, en fonction de n, la somme des n premiers naturels impairs $S = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$.

99

1. Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.
2. Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 5 inférieurs à 9 999.
3. Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels inférieurs à 2 154 ayant 3 comme chiffre des unités.

100

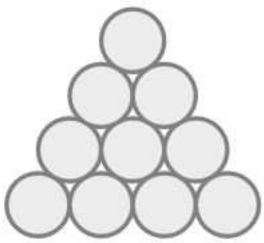
Voici les quatre premiers nombres triangulaires :



1. Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.
2. Écrire une fonction, notée triangle, en Python, en mode itératif et en mode récursif, permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque T_n. Donner les valeurs de T_{12} et T_{60}.
3. Retrouver ces résultats par le calcul.
4. Écrire un algorithme sur la calculatrice permettant de trouver les valeurs de n telles que $T_n > 100$ puis $T_n > 1\,000$.
5. Retrouver ces résultats par le calcul.

101

Des tuyaux sont rangés comme indiqué ci-dessous : :



1. Quel est le nombre total de tuyaux dans un empilage de 5 couches ? 12 couches ?
2. On a stocké 153 tuyaux, combien y a-t-il de couches ?
3. Pour ranger 200 tuyaux, combien faut- il de couches ? Combien reste t-il de tuyaux ?

102

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- le premier mètre coûte 1 000 euros ;
- Le second mètre coûte 1 050 euros et chaque mètre supplémentaire coûte 50 euros de plus que le précédent.
- On dispose d'un crédit de 519 750 euros.

On appelle (u_n) la suite telle que $u_1 = 1000$ et u_n représente le coût du n^{e} mètre.

1. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer alors (u_n) en fonction de n.
3. Montrer que le nombre de mètres n que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie :
$$n^2 + 39n - 20790 = 0.$$
4. En déduire la profondeur du forage avec un tel crédit.

3 Suites géométriques

103

Pour les suites géométriques suivantes dont on donne le premier terme et la raison, exprimer le terme général u_n en fonction de n puis calculer u_4 :

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$
2. $u_1 = 2$ et $q = 5$
3. $u_0 = 10$ et $q = \dfrac{1}{2}$
4. $u_1 = 2$ et $q = 3$

104

Reconnaître parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous celles qui sont géométriques et préciser alors leur premier terme et leur raison :

1. $u_n = 4 + 4n$
2. $u_n = 5^{2n+4}$
3. $u_n = 2n^3$
4. $u_n = \dfrac{2^n}{3}$

105

Démontrer que les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous sont géométriques et préciser alors leur premier terme, leur raison et leur formule explicite :

1. $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 2u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 &= -2 \\ u_{n+1} &= -u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 &= 100 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{5} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ 5u_{n+1} - 4u_n &= 0 \end{cases}$

106

Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$. Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25% chaque seconde. Soit C_n le nombre de bactéries au bout de n secondes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n on a :
$$C_{n+1} = 1,25C_n.$$
2. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer C_n en fonction de n et déterminer au bout de combien de temps la population de bactéries aura dépassé les 10 000.

107

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout naturel n, on pose $v_n = u_n + 5$.
   a. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   c. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

108

1. Calculer $S_1 = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^7$.
2. Calculer $S_2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots + \dfrac{1}{1\,048\,576}$.
3. Calculer $S_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} - \ldots - \dfrac{1}{6\,561}$.

109

(u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $u_{10} = 25$ et $u_{13} = 200$.

1. Déterminer la valeur de la raison q puis calculer u_0.
2. En déduire la somme $S = u_{10} + u_{12} + u_{14} + \ldots + u_{20}$.

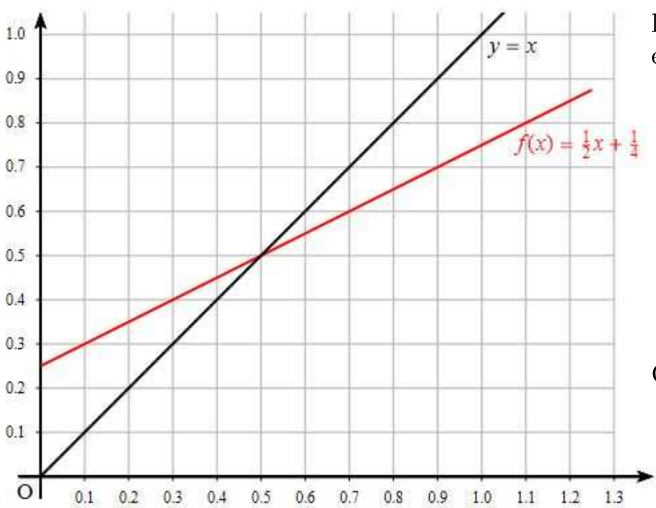
110

Une maison est louée depuis exactement 10 ans. La première année, le loyer mensuel s'élevait à 900 €. Puis, chaque année suivante, ce montant a augmenté de 1 %.
Calculer la somme totale (au centime d'euro près) représentant l'ensemble des loyers au cours de ces 10 ans.

111

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$.

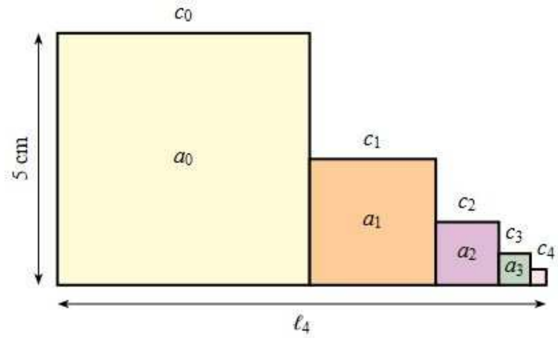
1. Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-dessous.



2. On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.
   a. Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

112

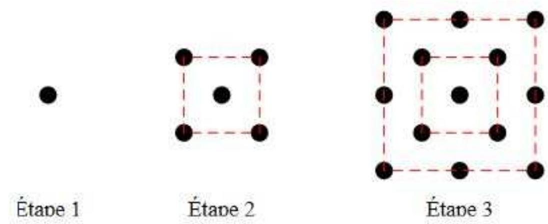
n carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous (réalisé avec 5 carrés). Le côté d'un carré vaut la moitié du précédent. Le premier carré a pour côté $c_0 = 5$ cm et pour aire a_0.
On pose $l_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n$ et $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.



1. Calculer les cinq premiers termes des suites (l_n) et (s_n).
2. Exprimer l_n et s_n en fonction de n.
3. Existe-t-il un entier p tel que $l_p \geqslant 10$?

113

Une disposition en quinconce (du latin quincunx, par 5) est un arrangement de cinq unités, comme celui que l'on voit sur un dé : quatre arrangés en carré, un au centre. Par reproduction du motif, une disposition en quinconce est une disposition répétitive d'éléments, ligne à ligne, où une ligne sur deux est en décalage de la moitié d'un élément par rapport à la ligne qui la précède ou qui la suit. On donne la construction des points en quinconce à l'intérieur de carrés :



On appelle p_n le nombre de points à l'étape n.

1. **a.** Représenter la structure à l'étape 4.
   Donner les valeurs de p_1, p_2, p_3 et p_4.
   b. Établir une relation de récurrence entre les termes p_{n+1} et p_n.
2. **a.** En remarquant que $p_n = 1 + 1 \times 4 + \ldots + (n-1) \times 4$, montrer que $p_n = 2n^2 - 2n + 1$.
   b. Déterminer le plus grand nombre p_n que l'on peut construire avec 2 000 points.