Chapitre 4

Dérivation locale

I. Taux de variation

Rappel de Seconde : soit A et B deux points d'un repère n'ayant pas la même abscisse. Le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné par la formule :

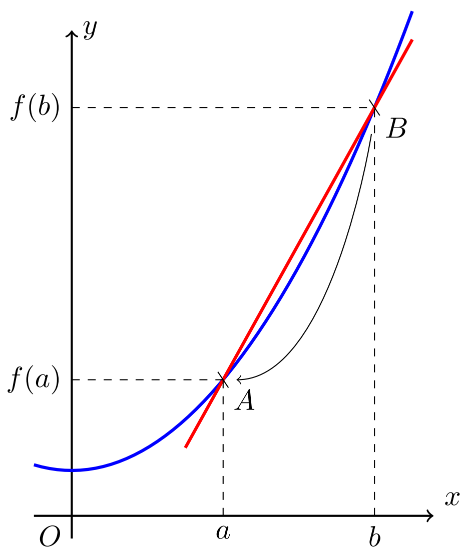
$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a et b deux nombres de I, $a \neq b$.
Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le quotient :

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}.$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite sécante à la courbe représentative de f passant par les points $A(a\,;\,f(a))$ et $B(b\,;\,f(b))$ appartenant à cette courbe soit la droite (AB).



Exercice 1.4. Calculer le taux de variation de la fonction carré entre -1 et 3.

Remarque. Dans d'autre disciplines, en Physique par exemple, si $y = f(x)$, on utilise la notation $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ pour désigner un taux de variation.

Propriété. Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Le taux de variation de f entre deux nombres distincts est ***constant*** et est égal à $\boldsymbol{m}$.

Exercice 2.4. Calculer le taux de variation de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ entre deux réels distincts a et b.

Propriété. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels distincts à I.

1. Si f est ***croissante*** sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est ***positif***.
2. Si f est ***décroissante*** sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est ***négatif***.

Les réciproques des propriétés suivantes sont fausses !

Exemple. la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ donc le taux de variation entre -4 et -2 est négatif.

Contre-exemple. On a $\dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{4 - 1}{3} = 1$: le taux de variation de f entre -1 et 2 est strictement positif, or la fonction carré n'est pas croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$...

II. Nombre dérivé d'une fonction en un point

1. Point de vue algébrique

Définition 2.

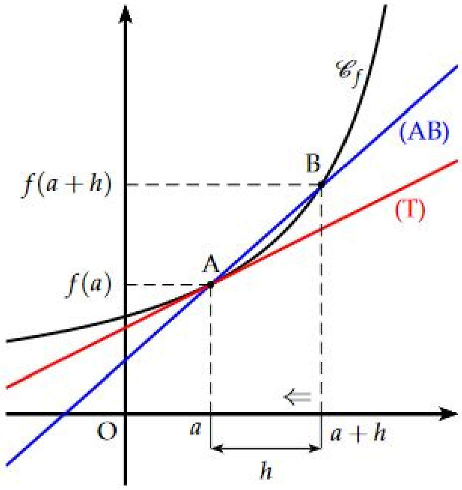
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I. Soit h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I.

On dit que f est ***dérivable*** en $\boldsymbol{a}$ lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un ***unique*** nombre réel lorsque h tend vers zéro et ce nombre limite est appelé ***nombre dérivé*** de f en a que l'on note $f'(a)$.

Une fonction peut ne pas être dérivable en un réel a. Nous le verrons en exercice.

2. Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartienne à I. Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a+h$.



Lorsque h tend vers 0, le point H se rapproche du point A et la sécante (AH) de coefficient directeur $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une position limite.

Propriété. ***Si*** f est ***dérivable*** en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ lorsque h tend vers 0. On admet alors que ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite qui correspond à la position limite de (AH).

Exercice 3.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$. Montrer que f est dérivable en 3 et donner la valeur de $f'(3)$.

Définition 3.

Soit f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a\,;\,f(a))$.
La ***tangente*** à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $\boldsymbol{f'(a)}$ passant par A.

Propriété. Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $(a\,;\,f(a))$.
La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A a pour équation réduite :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}\,.$$

Remarque. Localement, la courbe représentative de f au voisinage du point A est presque confondue avec sa tangente :

$$\boxed{f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)}\,.$$

Exercice 4.4. Soit la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 7$.
On admet que $f'(3) = 9$.

1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
2. Le point $S(10\,;\,80)$ appartient-il à cette droite ?