

# Conditionnement et indépendance

\*\*\*

## I. Activité préparatoire

### 1. Modélisation

Une entreprise dispose de deux ateliers, notés atelier 1 et atelier 2, dans lesquels est fabriqué un certain modèle de chaussure de sport.

- 60 % des paires de chaussures sont fabriquées par l'atelier 1 et le reste par l'atelier 2.
- 2 % des paires de chaussures fabriquées par l'atelier 1 sont défectueuses.
- 1 % des paires de chaussures fabriquées par l'atelier 2 sont défectueuses.

	Nombre de paires sans défaut	Nombre de paires défectueuses	Total
Atelier 1		120	
Atelier 2			
Total			10 000

On réalise l'*expérience aléatoire* suivante : on prélève **au hasard** une paire de chaussures dans cette production.

**Remarque.** Une expérience est *aléatoire* lorsque son résultat (ou issue) ne peut être prévu et lorsque, renouvelée dans les mêmes conditions, elle ne donne pas le même résultat.

L'ensemble (ou *univers*) des résultats (ou issues) possibles est notée  $\Omega$ . Dans notre exemple, le nombre d'éléments de  $\Omega$ , noté  $\text{card}(\Omega)$  est égal à 10 000.

On admettra que toutes les issues ont la même probabilité : c'est le modèle d'*équiprobabilité*.

Chaque issue a alors pour probabilité  $\frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{10\,000}$ .

### 2. Calcul de probabilités

On considère les événements :

A : « La paire de chaussures est défectueuse » ;

B : « La paire de chaussures provient de l'atelier 1 » ;

1. Calculer la probabilité de l'événement A.

.....  
.....

2. Calculer la probabilité de l'événement B.

.....  
.....

3. Traduire par une phrase l'évènement  $A \cap B$ , puis calculer sa probabilité.

.....

.....

.....

.....

## II. Calcul d'une probabilité conditionnelle

### 1. Retour sur l'exemple précédent

On reprend l'exemple précédent.

1. On extrait une paire de chaussures défectueuses. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier 1 ? On note  $\mathbb{P}_A(B)$  cette probabilité.

.....

.....

2. Quel lien peut-on faire entre  $\mathbb{P}_A(B)$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B)$  et  $\mathbb{P}(A)$  ?

.....

.....

.....

.....

### 2. Cas général

#### Définition 1.

On appelle probabilité de  $B$  *sachant*  $A$ , noté  $\mathbb{P}_A(B)$  le nombre :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit une formule de calcul de la *probabilité d'une intersection*. **Propriété.**

Soit  $A$  et  $B$  deux évènements de  $\Omega$  tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  et  $\mathbb{P}(B) \neq 0$  on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A).$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*.

La propriété conditionnelle est une probabilité, en particulier elle en a les propriétés :

#### Propriété.

Soit  $A$  et  $B$  deux évènements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . Alors :

$$0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$$

#### Propriété.

Dans le cas où la loi est équirépartie, on peut utiliser la formule suivante :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } B \cap A}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

### III. Conditionnement et arbre pondéré

#### 1. Approche avec deux événements

**Propriété.** Si  $A$  est un événement de  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  et  $\mathbb{P}(A) \neq 1$ , alors pour tout événement  $B$  de  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)\end{aligned}$$

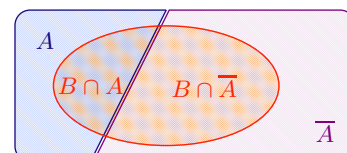
*Démonstration.*

$A \cap B$  et  $\bar{A} \cap B$  sont incompatibles et  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$  d'où :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$



#### 2. Généralisation

**Propriété — Formule des probabilités totales —**

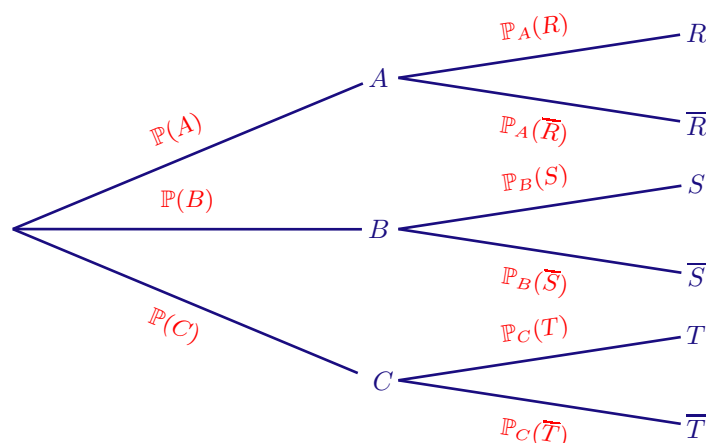
On suppose que l'univers probabiliste  $\Omega$  est la réunion des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle.

Pour tout événement  $B$  on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \dots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \dots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

#### 3. Représentation sous forme d'un arbre pondéré

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



1. *La racine de l'arbre* est l'univers  $\Omega$ .
2. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment *une partition* de l'événement situé à ce nœud.  
Par exemple,  $\{A, B, C\}$  est une *partition* de l'univers  $\Omega$  et  $\{S, \bar{S}\}$  est une partition de l'événement  $B$ .
3. Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des événements qui le composent.  
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est  $R$  représente l'événement  $A \cap R$ .
4. Le *poids* d'une branche primaire est la probabilité de l'événement qui se trouve à *son extrémité*.  
Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que l'événement qui se trouve à son origine est réalisé.



**Exercice 1.2.** Représenter la situation suivante par un arbre de probabilités :

Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2016 a permis d'établir que :

- 30 % des personnes sont âgées de plus de 50 ans ;
- 22,3 % des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel ;
- 82,7 % des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

(Source : Insee, enquêtes Emploi.)

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2016 et on note :

- $S$  l'évènement « la personne était âgée de plus de 50 ans » ;
- $E$  l'évènement « la personne occupait un emploi à temps plein ».

### Propriétés incontournables.

1. La *somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud* est égale à 1.
2. La probabilité *d'un chemin* est *le produit des probabilités figurant sur ses branches*.
3. La probabilité *d'un évènement* est *la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement*.



**Exercice 2.2.** Avec 84,5 millions d'arrivées de visiteurs internationaux en 2015, la France est le pays le plus visité au monde. Si on s'intéresse aux personnes résidentes à l'étranger qui sont en visite en France, on définit les notions suivantes :

- Les touristes sont les visiteurs non résidents passant au moins une nuit en France.
- Les excursionnistes sont les visiteurs non résidents qui ne passent pas de nuit en France.

Une enquête réalisée auprès des visiteurs résidents à l'étranger à leur sortie du territoire métropolitain a permis d'établir que :

- 79,2 % des visiteurs résident en Europe.
- Un tiers des visiteurs résidents européens sont touristes et les trois quarts des résidents non européens sont touristes.

On interroge au hasard un visiteur résident à l'étranger à sa sortie du territoire et on note :

- $E$  l'évènement « le visiteur réside en Europe » ;
- $T$  l'évènement « le visiteur est un touriste ».

Calculer la probabilité que le visiteur soit un touriste.

## IV. Indépendance

### Définition 2.

Soit  $A$  et  $B$  deux événements de probabilité non nulle.

On dit que  $B$  est *indépendant* de  $A$  si  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ , autrement dit si la réalisation ou non de l'évènement  $A$  n'a aucune influence sur celle de  $B$ .

Dans ce cas, on a alors aussi  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ , autrement dit  $A$  est indépendant de  $B$  aussi.

En échangeant les noms des événements, on remarque alors que c'est réciproque.

On dit alors simplement que les deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vraie (ce qui implique que l'autre l'est aussi) :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$



Ne pas confondre *indépendants* et *incompatibles*.

**Propriété.**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements de probabilité non nulle.  $A$  et  $B$  sont **indépendants si et seulement si** :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

**Propriété.**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements indépendants. Il en est de même pour les événements  $\overline{A}$  et  $B$ , pour les événements  $A$  et  $\overline{B}$  et pour les événements  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$ .



**Exercice 3.2.** On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons parmi lesquels 3 sont rouges (numérotés 1, 2 et 3), 2 sont bleus (numérotés 1 et 2) et 1 vert numéroté 1.

On note :

- $R$  l'évènement « le jeton est rouge » ;
- $U$  l'évènement « le numéro est 1 » ;
- $D$  l'évènement « le numéro est 2 ».

Les événements  $U$  et  $D$  sont-ils indépendants ? Et  $R$  et  $D$  ? Et  $R$  et  $\overline{D}$ .