Exercice 1 . **1.5 points**

Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 4\sin(n^2+5)$ est bornée.

Exercice 2. **4.5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
On a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B
1	rang n	terme u_n
2	0	1
3	1	5
4	2	10
5	3	25
6	4	50

1. Quelle formule a été entrée dans la cellule B3 pour obtenir par copie vers le bas les termes de la suite (u_n) ?
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
3. Déterminer, sans le justifier, le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Exercice 3. **8 points**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in]0\,;\,1[$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = u_n\left(2 - u_n\right).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x(2-x)$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 4. **6 points**

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.
On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 1.

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = -2u_n + 9$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n = (-2)^n + 3.$$

Exercice 2.

Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n > 2$.
3. La suite u est-elle monotone ?

Exercice 3.

Soit (q_n) la suite définie par $q_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $q_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Exercice 4.

Pour un entier naturel $k \geqslant 1$, on note $k!$ (ce qui se lit « factorielle k ») le produit des k premiers entiers naturels non nuls.
Ainsi $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times k$.

1. Calculer 1!, 2!, 3! et 4!.
2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times (k!)$ pour $n \geqslant 1$.
3. (a) Écrire S_1, S_2 et S_3 sans le symbole $\sum$ et les calculer.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = (n+1)! - 1$.