Chapitre 3

Équations polynômiales

***

1. Équations du second degré à coefficients réels

1.1 Équations du type $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$

Propriété.

Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c des réels. Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
À l'aide de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on distingue ***trois cas*** :

- Si $\Delta = 0$, il existe une ***unique*** solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, il existe ***deux solutions réelles*** $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, il existe ***deux solutions complexes conjuguées*** $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

....

....

....

....

....

1.2 Cas particulier : équations du type $z^2 = a$, $a \neq 0$

Propriété.

L'équation $z^2 = a$ admet ***toujours deux solutions*** dans $\mathbb{C}$:

- Si $a > 0$, le solutions sont les ***réels*** : $\pm\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, le solutions sont les ***imaginaires purs*** : $\pm\mathrm{i}\sqrt{a}$.

Démonstration

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 1 = 0$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

1.3 Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété.
Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $P(z) = az^2 + bz + c$.
On note z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$.
Alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Exemple. Factoriser dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^2 - 4z + 8$.

. . . .

. . . .

. . . .

2. Factorisation des polynômes

2.1 Fonction polynôme

Définitions.

- Soit n un entier naturel et $a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots a_n$ des réels (éventuellement complexes) avec $a_n \neq 0$.
  Une ***fonction polynôme*** ou ***polynôme*** P est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ pouvant s'écrire, pour tout complexe z, sous la forme :
  $$\boxed{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}.$$
- On appelle ***polynôme nul*** le polynôme P tel que pour tout complexe z,
  $$\boxed{P(z) = 0}.$$
- Si P n'est pas le polynôme nul, n est le ***degré*** de P.
- On appelle ***racine*** de P tout nombre complexe z_0 tel que :
  $$\boxed{P(z_0) = 0}.$$

Mini-exercice. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (1+\mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i}$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que i est racine de P.

....

....

....

Propriété admise.
Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si ***tous ses coefficients sont nuls***.

2.2 Factorisation par $z - z_0$

Définition.

On dit qu'un polynôme P est ***factorisable*** (ou divisible) par $z - z_0$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z :

$$\boxed{P(z) = (z - z_0)Q(z)}.$$

Mini-exercice. Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.

1. Montrer que 8 est une racine de P.
2. En déduire les réels a et b tels que $P(z) = (z-8)(z^2 + az + b)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété.
Soit a un nombre complexe.
Pour tout complexe z et tout entier naturel non nul, $z^n - a^n$ est ***factorisable*** par $z - a$ et :

$$\begin{aligned} z^n - a^n &= (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \\ &= (z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right). \end{aligned}$$

Propriété.
Le polynôme P est ***factorisable*** par $z - a$ si et seulement si a est une ***racine*** de P.

2.3 Polynôme et racines

Propriété.
Un polynôme non nul de degré n admet ***au plus*** n racines distinctes.