Exercice 1.

1. $\boxed{z_1 + 2\overline{z_2} = 4 - 5\mathrm{i}}$. **2.** $\boxed{z_1 \times \overline{z_2} = 5 - 5\mathrm{i}}$. **3.** $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

Exercice 2.

1. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$. **2.** $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{2 - 2\mathrm{i}\}$. **3.** $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{3 - 3\mathrm{i}\,;\, \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 3.

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $Z = (x + \mathrm{i}y)^2 - 2(x - \mathrm{i}y) + 1$ donc $Z = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 - 2x + 2y\mathrm{i} + 1$ d'où :

$$Z = x^2 - 2x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

2. Z réel $\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1$.

3. Z soit imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff x^2 - 2x - y^2 + 1 = 0$.
On fixe, par exemple x : si $x = 0$ on a alors $y^2 = 1$ soit $y = 1$ ou $y = -1$ et donc une proposition possible est i et $-$i.

Exercice 4.

1. On reconnaît l'utilisation de la formule du binôme de Newton avec $n = 3$, $a = 1$ et $b = 2\mathrm{i}$.
On peut alors écrire : $(1 + 2\mathrm{i})^3 = -11 - 2\mathrm{i}$.

2. On a :

$$\begin{aligned}(1+2\mathrm{i})^3 &= 1 \times 1^0 \times (2\mathrm{i})^3 + 3 \times 1^1 \times (2\mathrm{i})^2 + 3 \times 1^2 \times (2\mathrm{i})^1 + 1 \times 1^3 \times (2\mathrm{i})^0 \\ &= -8\mathrm{i} - 12 + 6\mathrm{i} + 1 \\ &= -11 - 2\mathrm{i}\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. On a :

$$\begin{aligned}P(a + \mathrm{i}b) &= (a + \mathrm{i}b)^2 - 2a(a + \mathrm{i}b) + a^2 + b^2 \\ &= a^2 + 2ab\mathrm{i} - b^2 - 2a^2 - 2ab\mathrm{i} + a^2 + b^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

2. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}P(\overline{z}) &= (\overline{z})^2 - 2a\overline{z} + a^2 + b^2 \\ &= \overline{z^2} - \overline{2a}\,\overline{z} + \overline{a^2 + b^2} \quad \text{car} \quad \overline{2a} = 2a,\ \overline{a^2+b^2} = a^2 + b^2 \\ &= \overline{z^2 - 2az + a^2 + b^2} \\ &= \overline{P(z)}\end{aligned}$$

3. On a démontré que $z = a + \mathrm{i}b$ est une racine de P. On utilise la relation précédente avec $z = a + \mathrm{i}b$.
Il vient : $P(\overline{a + \mathrm{i}b}) = \overline{P(a + \mathrm{i}b)}$. Or $P(a + \mathrm{i}b) = 0$ d'après la question 1.
Ainsi $P(\overline{a + \mathrm{i}b}) = \overline{0} = 0$ ce qui démontre que $\overline{a + \mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b$ est une autre racine de P.