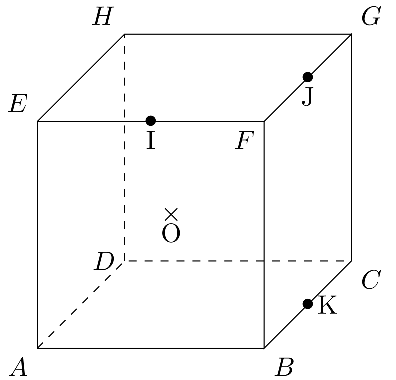
115

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AF]$, $[FG]$ et $[BC]$. On nomme O le centre de ce cube.



1. Citer, sans justifier, deux vecteurs égaux à :

   a. $\overrightarrow{DC}$ **c.** $\overrightarrow{JK}$
   b. $\overrightarrow{GJ}$ **d.** $\overrightarrow{OB}$

2. Compléter avec un point de la figure :
   a. $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\cdots J} = \overrightarrow{HJ}$
   b. $\overrightarrow{H\cdots} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB}$
   c. $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{\cdots J} = \overrightarrow{AK}$

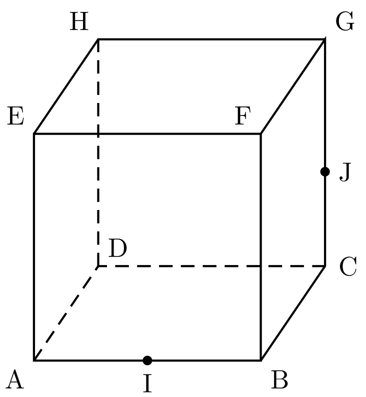
116

On reprend la figure de l'exercice précédent. Les triplets de vecteurs suivants sont-ils des triplets de vecteurs coplanaires ?

1. $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB}$.
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{IJ}$.
3. $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EH}$.
4. $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OG}$.

117

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [AB] et J celui de [CG] :



1. Quelle est la position relative des droites :

   a. (AD) et (FG) ? **c.** (EC) et (BH) ?
   b. (AD) et (BG) ? **d.** (EJ) et (AC) ?

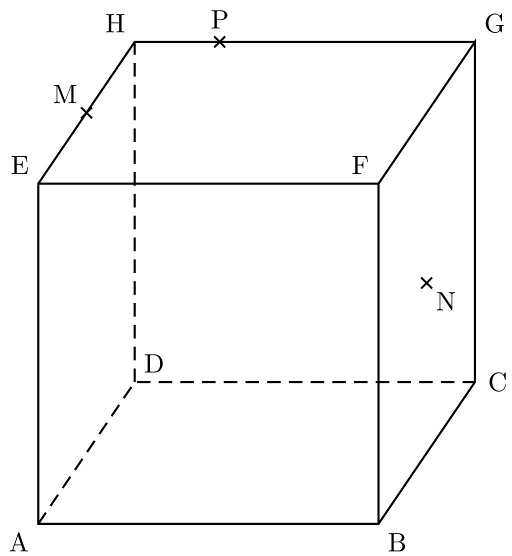
2. Quelle est l'intersection des plans :

   a. (DBF) et (AEB) ? **c.** (ABJ) et (CDH) ?
   b. (ABG) et (CDH) ? **d.** (DFB) et (EAD) ?

118

On considère un cube ABCDEFGH donné ci-dessous. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que
$\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).



119

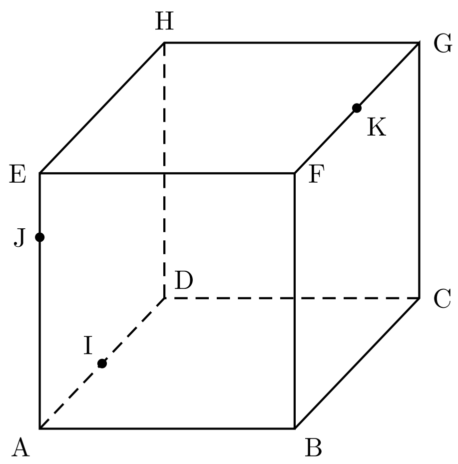
La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;
- K est le milieu du segment [FG].

1. Sur la figure donnée ci-après, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).



120

Tracer un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ et placer les points suivants :
$A(2\,;1\,;0)$, $B(0\,;2\,;10)$, $C(1\,;1\,;-3)$ et $D(-1\,;2\,;3)$.

121

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2\,;1\,;-3)$ et $B(0\,;2\,;4)$.

1. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AB]$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Soit le point $C(1\,;-2\,;-1)$. Calculer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

122

Tracer un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ et placer les points suivants :
$A(2\,;1\,;0)$, $B(0\,;2\,;10)$, $C(1\,;1\,;-3)$ et $D(-1\,;2\,;3)$.

123

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1\,;0,5\,;2)$, $B(0\,;2\,;0,5)$, $C(3\,;2,5\,;7)$ et $D(3\,;-2,5\,;1)$.

1. **a.** Les points A, B et C sont-ils alignés ?
   b. Le point A appartient-il à la droite (BD) ?
2. On considère les points $E(1\,;0,5\,;4)$ et $F(-3\,;-2\,;1)$.
   a. Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?
   b. Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

124

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

125

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que le vecteur $\vec{w}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{v}-\vec{u}$.
2. Donner un vecteur colinéaire au vecteur $\vec{w}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur $3\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}$.
4. Que peut-on en déduire pour les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

5. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{t}$ non colinéaire à $\vec{v}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
6. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{h}$ de cote nulle et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
7. Justifier que les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires.

126

Soit A, B et C trois points de l'espace non alignés. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une conjecture. Quelle conjecture peut-on émettre pour les points M, N et C.
2. Démontrer cette conjecture.

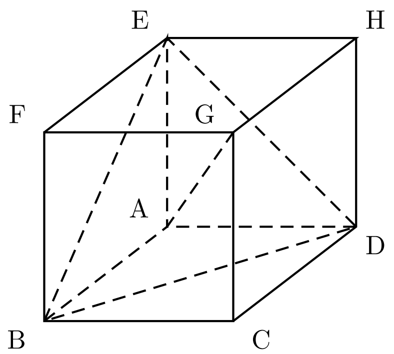
127

$ABCDEFGH$ est un cuve. Soit U et V les points tels que $\overrightarrow{UF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{BV} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont coplanaires.

128

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre. Pour tout nombre réel m, on définit le point G_m tel que :

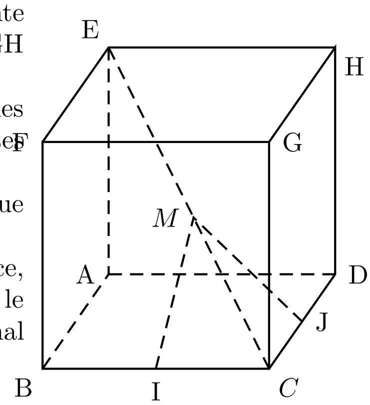
$$\overrightarrow{G_mE} + (1-m)\,\overrightarrow{G_mB} + (2m-1)\,\overrightarrow{G_mG} + (1-m)\,\overrightarrow{G_mD} = \vec{0}.$$



1. Préciser la position du point G_1.
2. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
3. Démontrer que pour tout réel m, $\overrightarrow{AG_m} = m\,\overrightarrow{AG_1}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
4. On note I le centre du carré $ABCD$. Montrer que les points A, G_m, E et I sont coplanaires.

129

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. **a.** Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\ ;\ 1-t\ ;\ t)$.
2. **a.** Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].
   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   c. Exprimer $\mathrm{I}M^2$ en fonction de t.
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ est maximale.
   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$.
   a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
   b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur $\mathrm{I}M$ est minimale.
   c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :
   $$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$
   d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ soit maximale.