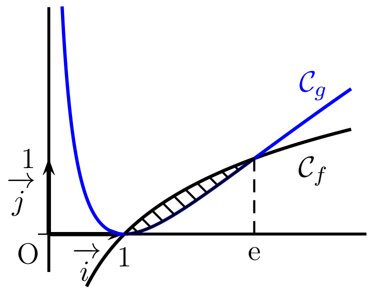
Exercice 1. **/10**

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
   On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.
   (c) En déduire J.
   (d) Donner la valeur de $\mathcal{A}$.
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 2. **/10**

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$.

1. (a) Démontrer que f est 2π – périodique.
   (b) Démontrer que f est paire.
   (c) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
2. (a) Calculer la fonction dérivée f' et démontrer que $f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - 1)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,\pi]$.
3. On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur $[0\,;\,\pi]$ ci-dessous. Compléter ce tracé pour avoir $\mathscr{C}$ sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$: