Chapitre 5

Les suites : première partie

***

I. Généralités

Intuitivement, une suite de nombres réels est ***une liste ordonnée*** de nombres réels, finie ou infinie. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrons noter u_1, un deuxième u_2, un troisième u_3 et, de manière générale, un n^{e} u_n.

1. Définition et notations

Définition 1.

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés. À un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

Exemples.

- Soit la suite (u_n) : 1, 4, 7, 10, ... :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	4	7	10	13	16

- Soit la suite (v_n) : 3, 6, 12, 24, 48, 96 ... :

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
3	6	12	24	48	96

- Soit la suite (w_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	1	2	3	5	8

2. Définir une suite

A. Sous forme explicite

Définition 2.

Une suite (u_n) est définie de ***façon explicite*** si le terme général u_n s'exprime en fonction de n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)}.$$

Exemples.

- Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 5$. On a $u_{10} =$.
- Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$. On a $v_3 =$.

 Licence Creative Commons

B Sous forme récurrente

Définition 3.

Lorsque le terme général un dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une ***relation de récurrence*** et par un ou plusieurs premier(s) terme(s). La suite est dite ***récurrente*** à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent.

$$\boxed{u_0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)}.$$

La suite est dite ***récurrente d'ordre 2*** si un dépend des deux termes qui le précèdent.

$$\boxed{u_0,\ u_1 \text{ et } u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})}.$$

Exemples.

- Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

  $u_1 = 3u_0 - 2$ donc $u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4$.
  $u_2 = 3u_1 - 2$ donc $u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10$.
  $u_3 = 3u_2 - 2$ donc $u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28$.
  $u_4 = 3u_3 - 2$ donc $u_4 = 3 \times 28 - 2 = 82$.

Remarque. Ce programme calcule les termes de la suite de façon itérative, c'est à dire qu'il part du premier terme et calcule les suivants jusqu'au terme voulu. Une autre façon de programmer en python est de créer une fonction faisant appel à elle-même à l'ordre inférieur, c'est à dire qu'elle part du terme à déterminer puis descend la récurrence en direction du terme initial.

```python
def u(n):
    u=2
    for i in range(1,n+1):
        u=3*u-2
    return u
```

Programme itératif

```python
def u(n):
    if n==0:
        return 2
    return 3*u(n-1)-2
```

Programme récursif

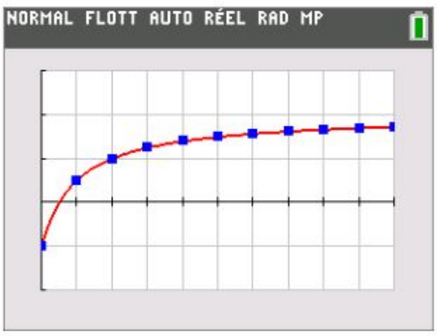
- On donne la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

  $v_2 = v_1 + v_0 = 2 + 1$ donc $v_2 = 3$.
  $v_3 = v_2 + v_1 = 3 + 1$ donc $v_3 = 4$.
  $v_4 = v_3 + v_2 = 4 + 3$ donc $v_4 = 7$.
  $v_5 = v_4 + v_3 = 7 + 4$ donc $v_5 = 11$.

3. Visualisation d'une suite

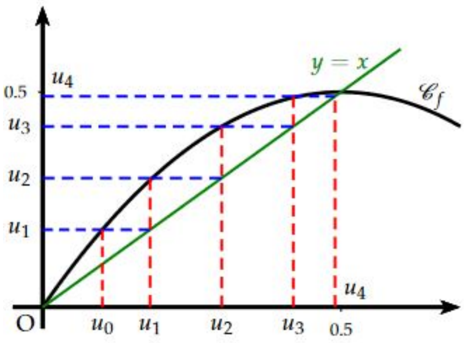
A. Cas d'une suite explicite

Une suite explicite est définie par $u_n = f(n)$, il suffit de connaître la représentation de la fonction f pour représenter la suite. Sur la calculatrice, représentons les termes de u_0 à u_{10} de la suite : $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. Ces termes grâce au nuage de points associé à la courbe représentative de la fonction f.



B. Cas d'une suite récurrente d'ordre 1

Une suite définie par récurrence d'ordre 1 est définie par un premier terme (souvent u_0) et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. En plus de la représentation de la fonction f, il faut tracer la droite d'équation $y = x$ afin de reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses. Prenons l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$. On obtient alors le graphe suivant, après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie par : $f(x) = 2x(1-x)$.



II. Suites arithmétiques

1. Définition

Définition 4.

Une suite (u_n) est dite ***arithmétique*** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}.$$

Le réel r est appelé ***la raison*** de la suite arithmétique.

La ***raison d'une suite arithmétique*** est un réel **indépendant** de n.

Illustration :

2. Comment reconnaître une suite arithmétique ?

Propriété. Une suite est ***arithmétique*** lorsque la différence entre deux termes consécutifs est ***constante***.
On doit donc avoir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r}.$$

Exercice 1.5. Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4n + 1$ est arithmétique.

3. Expression du terme général en fonction de n

- la suite (u_n) commence à u_0 :

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & u_0 + r \\ u_2 & = & \\ & = & u_0 + 2r \\ u_3 & = & u_2 + r \\ & = & u_0 + 3r \\ \dots & = & \dots \\ u_n & = & u_0 + nr \end{array}$$

- La suite commence à u_p : on écrit les relations de u_{p+1} à u_n. Par somme télescopique de $n-p$ termes :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}.$$

Exercice 2.5. En utilisant la propriété précédente, démontrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4n+9$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

Exercice 3.5. Soit la suite (u_n) arithmétique telle que $u_5 = 7$ et $u_{13} = 63$.

1. Calculer la raison de cette suite (u_n).
2. Calculer u_0 puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété. Soit (u_n) une suite ***arithmétique*** de premier terme u_0,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\boxed{S = \text{nombre de termes} \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)}.$$

Exercice 4.5. Soit la suite (u_n) arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $u_n = 4n+5$.
Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$.

III. Suites géométriques

1. Définition

Définition 5.

Dire qu'une suite (u_n) est ***géométrique*** signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}.$$

Le réel q est appelé ***la raison*** de la suite géométrique.

Comme pour les suites arithmétiques, la raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n.

Illustration :

Exemple classique. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.
On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1,01 \times C_n$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1,01$.

2. Comment reconnaît-on une suite géométrique ?

Propriété. Une suite de termes ***non nuls*** est géométrique lorsque le ***rapport*** entre deux termes consécutifs est constant, autrement dit :

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}.$$

Exercice 5.5. Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5^{2n+2}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

3. Expression du terme général

- La suite commence à u_0.

  Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par qq. Pour obtenir un on a multiplié n fois par q à partir de u_0. On a donc : $u_n = q^n u_0$.

- La suite commence à u_p.

  De u_p à u_n , on a multiplié $n - p$ fois par q, donc : $u_n = q^{n-p} u_p$.

Propriété. Le terme général u_n d'une ***suite géométrique*** s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0 alors : $u_n = u_0 q^n$.
- Si le premier terme est u_p alors : $u_n = u_p q^{n-p}$ et en particulier $u_n = u_1 q^{n-1}$.

Exercice 6.5. Soit une suite (u_n) géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4374$ et $u_5 = 486$.
Trouver la raison q, le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

4. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

A. Somme des puissances successives

Propriété. Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier naturel.

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

Démonstration. Posons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ puis calculons $S - qS$.

■

B. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété admise. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$