Exercice 1. **/8**

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.

Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

Partie A. Calcul de probabilités

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

1. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
4. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
5. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

Partie B. Une variable aléatoire

L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires. On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le lot présentant un défaut parmi les six.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
2. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.
3. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins trois paires de chaussettes d'un lot présente un défaut.

Exercice 2. **/5**

Une équipe de chercheurs japonais a découvert une bactérie nommée *Ideonella Sakaiensis* capable, sous certaines conditions, de digérer le plastique. Ces biologistes étudient l'évolution de la population des bactéries lors d'une mise en culture.

Dans une cuve, les chercheurs ont introduit 3 000 bactéries à l'instant $t = 0$.

On modélise par $P(t)$ le nombre de bactéries (exprimé en milliers) présentes dans la cuve à l'instant t (exprimé en heures).

Pendant les 48 premières heures, la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre de bactéries. On admet donc que P est solution, sur $[0\,;\,48]$, de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' = 0,02y \text{ où } y \text{ désigne une fonction de la variable } t.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Que vaut $P(0)$? En déduire que pour tout réel de t de l'intervalle $[0\,;\,48]$, $P(t) = 3\mathrm{e}^{0,02t}$.
3. On admet le tableau de variation de P sur $[0\,;\,48]$:

t	0	48
Variation de P	3 ↗	7.835

   (a) Démontrer que l'équation $P(t) = 6$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,48]$.

   (b) Déterminer la valeur approchée de α au millième par excès puis donner la réponse en heures et minutes.

   (c) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3. **/7**

La conservation d'une variété de fruits nécessite de les placer, après la récolte et avant le stockage, dans un tunnel refroidissant à air pulsé.

On s'intéresse à l'évolution de la température du fruit en fonction du temps.

À l'instant $t = 0$, les fruits, dont la température est de 24 °C, sont placés dans le tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ qui à tout instant t, exprimé en heures, associe la température d'un fruit, exprimée en °C.

On admet que f est la solution de l'équation différentielle : $y' + 0,61y = 1,22$ vérifiant $f(0) = 24$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,61y = 1,22$ où y est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.
   La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$, est donnée en page 3.
3. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe représentative de f.
4. Par expérience, on observe que la température d'un fruit :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température du tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.
   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

5. Déterminer graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :
   (a) la température d'un fruit au bout de 4 heures ;
   (b) au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale.
6. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\frac{7}{8}$ en moins de 6 heures. Peut-on considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante ?