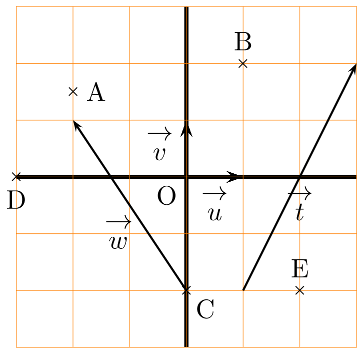
116

Lire graphiquement les affixes des points placés sur la figure ci-dessous ainsi que celles des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$:



117

Dans le plan complexe, on donne $A(-3+\mathrm{i})$ et $B(2-4\mathrm{i})$.
Déterminer l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$.

118

Dans le plan complexe, on donne les affixes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $z_{\vec{u}} = -2+\mathrm{i}$ et $z_{\vec{v}} = 3-5\mathrm{i}$.
Déterminer les affixes des vecteurs suivants :

1. $\vec{u} + \vec{v}$.
2. $\vec{u} - \vec{v}$.
3. $\dfrac{3}{5}\vec{u}$.
4. $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

119

Dans le plan complexe, on considère les points $A(-4+\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(3)$ et $D(-1-2\mathrm{i})$.

1. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

120

Dans le plan complexe, on considère les points $A(4-5\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(-1+4\mathrm{i})$ et $D(11-20\mathrm{i})$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

121

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1-3\mathrm{i})$, $B(2+4\mathrm{i})$ et $C(5+3\mathrm{i})$.

1. Calculer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer l'affixe du point K centre du parallélogramme $ABCD$.
3. Calculer l'affixe du point G symétrique du point K par rapport au point A.

122

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z) = 3$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z) = -2$.

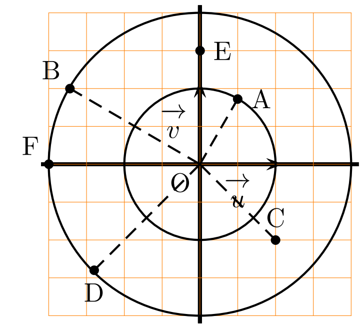
123

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1+\mathrm{i}$
2. $z_2 = -2+2\mathrm{i}$
3. $z_3 = 4+5\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2-\mathrm{i}$

124

Déterminer graphiquement les modules des nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F :



125

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (5+2\mathrm{i}) - 4(2+3\mathrm{i})$
2. $z_2 = \sqrt{3} - 4\mathrm{i}$
3. $z_3 = (1+2\mathrm{i}) \times 5(2-3\mathrm{i})$
4. $z_4 = -2(\sqrt{3}-\mathrm{i}) + 4(6-\mathrm{i})$

126

Dans le plan complexe, on considère les points $A(-5)$, $B(3-4\mathrm{i})$, $C(-4-3\mathrm{i})$ et $D(-4+3\mathrm{i})$.

1. Placer ces quatre points dans le plan complexe.
2. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

127

On rappelle que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1. Parmi les complexes suivants, déterminer ceux qui appartiennent à $\mathbb{U}$:

1. $z_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.
2. $z_2 = \dfrac{2\sqrt{6}+\mathrm{i}}{5}$.
3. $z_3 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

128

On donne les complexes suivants : $z_1 = 4\mathrm{i}$, $z_2 = -10$, $z_3 = 5-5\mathrm{i}$ et $z_4 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$. Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $a = z_1 z_2$.
2. $b = \dfrac{z_4}{z_1}$.
3. $c = z_3^2 \times z_2$.
4. $d = \dfrac{z_1^3}{z_2^2}$.

129

Dans le plan complexe, on donne $A(-2+2\mathrm{i})$, $B(-\mathrm{i})$, $C(5)$ et $D(3+3\mathrm{i})$.

1. Calculer les longueurs AB, BC, CD et DA.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
3. Démontrer ce résultat d'une autre manière.

130

Vrai ou faux, justifier :

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z+2| = |z| + 2$.
2. $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$.
3. $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$.

131

On se place dans le plan complexe muni d'un repère d'origine O.
Soit $\mathscr{C} = \{M(z)/|z| = 3\}$.
$M \in \mathscr{C} \iff OM = 3$. Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.
Reconnaître et représenter les ensembles suivants :

1. $\{M(z)/|z| = 0\}$.
2. $\{M(z)/|z-2| = 3\}$.
3. $\{M(z)/|z+4-\mathrm{i}| = 2\}$.

132

Dans le plan complexe, on donne $R(1-\mathrm{i})$, $S(6+3\mathrm{i})$, $T(10-2\mathrm{i})$ et $U(5-6\mathrm{i})$.

1. Conjecturer la nature du quadrilatère $RSTU$.
2. Valider ou invalider la conjecture émise à la question précédente.

133

On se place dans le plan complexe. Traduire en utilisant des modules les propositions suivantes :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. Le triangle DEF est isocèle en E.
3. Le triangle HGY est rectangle en Y.
4. Le point M appartient à la médiatrice du segment $[LK]$.
5. Le point C appartient au cercle de centre $A(1-\mathrm{i})$ et de rayon 7.

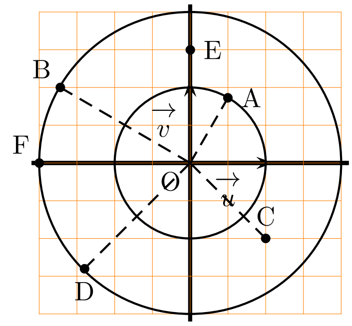
134

Dans le plan complexe, on donne $R(2-\mathrm{i})$, $S(6-\mathrm{i})$, et $T(4+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{i})$.

1. Démontrer que le triangle RST est équilatéral.
2. Calculer l'aire du triangle RST.

135

Déterminer graphiquement les arguments des nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F :



136

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$
2. $z_2 = -4$
3. $z_3 = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$
4. $z_4 = -2-2\mathrm{i}$

137

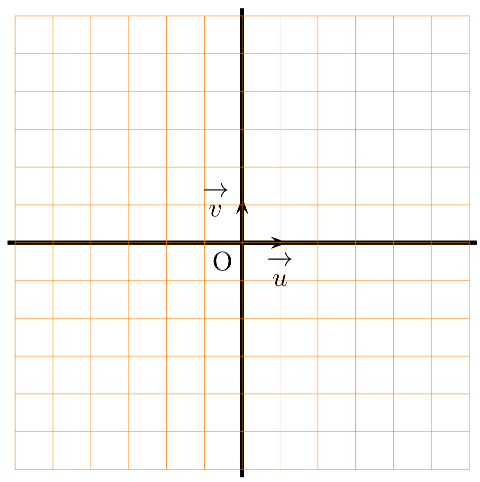
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{u}\,,\ \vec{v})$, on considère les points $A(-5+5\mathrm{i})$, $B(5+2\mathrm{i})$ et $C(2+5\mathrm{i})$.

1. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA})$
2. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{BC})$.

138

Dans chaque cas, placer ci-dessous les points A, B, C, D et E tels que :

1. $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = \dfrac{3\pi}{2}\ (2\pi)$.
2. $|z_B| = 3$ et $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$.
3. $|z_C| = 4$ et $\arg(z_C) = -\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.
4. $|z_D| = 5$ et $\arg(z_D) = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.
5. $|z_E| = 6$ et $\arg(z_E) = -\pi\ (2\pi)$.



139

Dans chaque cas, donner la forme algébrique du complexe z tel que :

1. $|z| = 3$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
2. $|z| = 5$ et $\arg(z) = \pi\ (2\pi)$.
3. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.
4. $|z| = 7$ et $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.
5. $|z| = 6$ et $\arg(z) = -\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

140

On considère les nombres complexes $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.

1. Calculer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. En déduire le module et un argument des complexes suivants :
   a. $a = \mathrm{i}z_1$
   b. $b = -4z_2$
   c. $c = \dfrac{z_1}{z_2}$
   d. $d = z_2^{2020}$

141

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$
2. $z_2 = (1-\mathrm{i})\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$
3. $z_3 = (1+\mathrm{i})^{48}$

142

Vrai ou faux, justifier.

1. Pour tout nombre complexe z, $\arg(z\overline{z}) = 0\ (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe non nul.
   Alors $\arg(z) = 0\ (2\pi) \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.
3. Soit z un nombre complexe non nul.
   Alors $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Rightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

143

Déterminer les entiers naturels n tels que $(1+\mathrm{i})^n$ soit :

1. un nombre réel ;
2. un imaginaire pur.

144

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -6\mathrm{i}$
2. $z_2 = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$
3. $z_3 = 5 - 5\mathrm{i}$
4. $z_4 = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

145

Les nombres suivants sont-ils écrits sous forme trigonométrique ? Si non, expliquer pourquoi. Si oui, placer les points images dans un repère orthonormé direct $(O\,;\ \overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{v}\,)$:

1. $z_1 = 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
2. $z_2 = -3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
3. $z_3 = 2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$
4. $z_4 = 5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

146

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leqslant r$.
   Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

147

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+\mathrm{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1 + \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier
   $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.