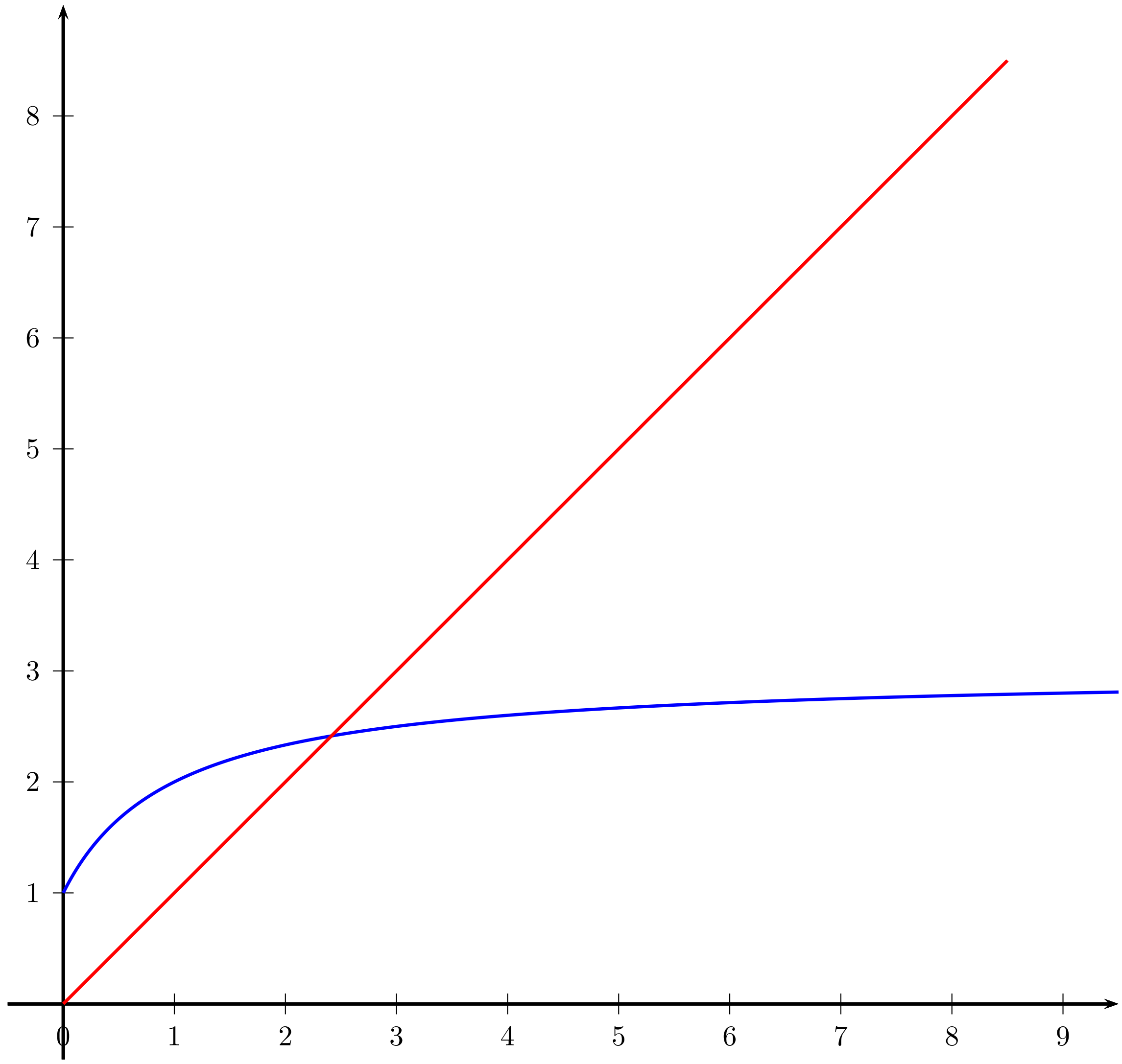
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   (a) Démontrer que la fonction f est strictement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$. *On note α la solution.*
   (c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,6]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,6]$.
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 6$.
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f\left(u_n\right) = 3 - \frac{2}{u_n + 1}.$$
   (a) Sur le graphique représenté en page 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   (b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (d) Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9