Exercice 1.

Partie A

1. (a) D'après le texte, $C = 4 \times 10^{-7}$ et $R = 2 \times 10^{6}$ donc $RC = 8 \times 10^{-1}$ et donc $\dfrac{1}{RC} = 1,25$.
Donc u est solution de l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
(b) Une équation différentielle de premier ordre du type $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-at}$ où k est un réel quelconque.
On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$ sont les fonctions u définies par $u(t) = k\mathrm{e}^{-1,25t}$, où k est un réel quelconque.
(c) $u(t) = k\mathrm{e}^{-1,25t}$ et $u(0) = 5,6$ donc $k\mathrm{e}^{0} = 5,6 \iff k = 5,6$.
Donc u est définie par $u(t) = 5,6\mathrm{e}^{-1,25t}$.
2. (a) $u(t) = 5,6\mathrm{e}^{-1,25t}$ donc $u'(t) = 5,6 \times (-1,25)\mathrm{e}^{-1,25t} = -7\mathrm{e}^{-1,25t} < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
La fonction u est donc strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
(b) Ce résultat était prévisible car la fonction u représente la tension aux bornes d'un condensateur et on sait que cette tension décroit avec le temps.

Partie B

1. (a) Si la tension perd 63 % de sa valeur, il en reste 37 % et $5,6 \times \dfrac{37}{100} = 2,02$.
Donc la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.
(b) On résout dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation : $5,6\mathrm{e}^{-1,25t} = 2,072$:
$5,6\mathrm{e}^{-1,25t} = 2,072 \iff \mathrm{e}^{-1,25t} = \dfrac{2,072}{5,6} \iff \mathrm{e}^{-1,25t} = 0,37 \iff -1,25t = \ln(0,37) \iff t = -\dfrac{\ln(0,37)}{1,25}$ donc $t \approx 0{,}795\ 4$
(c) Il faudra donc déclencher l'envoi d'une impulsion électrique environ toutes les $0,8$ secondes.
2. Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute.
On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 secondes.
On cherche combien d'impulsions seront émises en une minute donc en 60 secondes : $\dfrac{60}{0,8} = 75$. Envoyer une impulsion toutes les $0,8$ secondes entraîne 75 pulsations par minute, ce qui correspond au rythme d'un adulte en bonne santé.

Exercice 2. Partie I

1.
- La droite $\mathcal{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
On peut donc déduire que $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0$.
- La droite $\mathcal{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\dfrac{3-0}{0-3} = -1$.
On a donc $f'(1) = -1$.

2. La droite $\mathcal{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x + 3$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2 + \ln(x)}{x}$.

1. • $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{2 + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}\,(2 - \ln(\mathrm{e})) = \mathrm{e}\,(2 - 1) = \mathrm{e}$ donc $\mathrm{A} \in \mathcal{C}_f$.
   • $f(1) = \dfrac{2 + \ln(1)}{1} = 2$ donc $\mathrm{B} \in \mathcal{C}_f$.
   • La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0\ ;\ +\infty[$ cette équation.
   $f(x) = 0 \iff \dfrac{2 + \ln(x)}{x} = 0 \iff 2 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$
   Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-2}\ ;\ 0\right)$.
2. Calculs des limites.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2 + \ln(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2 + \ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

3. Pour $x \in]0\ ;\ \infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - 2 - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1 - \ln(x)}{x^2}$.
4. $f'(x)$ est du signe de $-1 - \ln(x)$; $-1 - \ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{-1}$
   On dresse le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	e	↘	0

5. On admet que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$.
   La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.
   Sur $]0\ ;\ +\infty$, $x^3 > 0$ donc
   $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff 1 + 2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$
   Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.