Exercice 1. /5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \mathrm{e}^{x-1}$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.
3. Démontrer que pour tout réel x : $2x - \mathrm{e}^{x-1} \leqslant x$.

Exercice 2. /6

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;\,2]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur $[-2\,;\,2]$ puis justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
2. Soit le programme écrit en Python suivant pour que l'appel alpha() renvoie deux bornes d'un encadrement d'amplitude de α :

```python
from math import e
def alpha() :
    a=1
    b=2
    while b-a>0.1:
        m=(b+a)/2
        if m*e**(m)<5 :
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

(a) Compléter le tableau ci-dessous donnant les différentes étapes :

	m	Condition $f(m) > 10$	a	b	Condition $b - a > 10^{-1}$
Initialisation			1	2	Vraie
Étape 1					
Étape 2					
Étape 3					
Étape 4					

(b) Interpréter les valeurs de a et b obtenues en fin d'étape 4.

Exercice 3. /9

Lorsque la pénicilline est injectée directement dans le sang, on considère que sa vitesse d'élimination est, à chaque instant, proportionnelle à la quantité de pénicilline présente dans le sang à cet instant.

Ainsi, la quantité de pénicilline $Q(t)$, exprimée en milligrammes, présente dans le sang à l'instant t ($t \geqslant 0$, exprimé en heures), est solution de l'équation différentielle :

$$Q'(t) = -aQ(t), \quad \text{où } a \text{ est un réel.}$$

À l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 5 mg de pénicilline.

1. Si Q est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = Q(t)\mathrm{e}^{at}$.
   (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   (b) Calculer $f(0)$.
   (c) En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis en déduire que pour tout réel t positif, $Q(t) = 5\mathrm{e}^{-at}$.
2. Dans toute cette question, on prend la valeur $a = 0,35$ d'où $Q(t) = 5\mathrm{e}^{-0,35t}$.
   (a) Calculer la limite de Q en $+\infty$.
   (b) Démontrer que la fonction Q est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $Q(t_0) = 2,5$ puis donner la valeur de t_0 arrondie à la minute.