Exercice 1.

1. $Z = X + Y$ désigne la somme des variables aléatoires X et Y soit la durée totale des tâches en semaines.
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ d'après la linéarité de l'espérance. Donc $E(Z) = 22 + 25 = 47$.
   On a $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{V(X)+V(Y)}$ car les variables X et Y sont indépendantes.
   Or $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ donc $V(X) = \sigma^2(X)$ ainsi $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$
   soit $\sigma(X+Y) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
   Attention : l'écart-type n'est pas linéaire !!!

Exercice 2.

1. X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $i-$ème mitigeur est défectueux et 0 sinon, X_i suit ainsi la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,05$.
2. (a) X est la somme de 304 variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,05$, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 304$ et $p = 0,05$.
   (b) $E(X) = np$ donc $E(X) = 304 \times 0,05 = 15,2$.
3. (a) Au seuil de 95%, on a $\alpha = 0,05$ donc à la calculatrice on trouve $a = 8$ et $b = 23$. L'intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % est donc $\left[\frac{8}{304}\,;\,\frac{23}{304}\right]$ soit $I \simeq [0,026\ \ 0,076]$.
   (b) Sur les 304 pièces, on constate qu'il y a 18 défauts, on a donc $f = \frac{18}{304} \simeq 0,059$ donc $f \in I$: au seuil de 95%, l'échantillon est représentatif de la réalité.

Exercice 3.

1. $V(N) = \sigma(N)^2 = 0,1^2 = 0,01$.
2. On a $p(|N-0,9| \geqslant 0,2) = p(|N-\mu| \geqslant 0,2)$.
   On applique donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\mu = 0,9$ et $\delta = 0,2$.
   On a donc $p(|N-0,9| \geqslant 0,2) \leqslant \frac{V(N)}{\delta^2}$ soit $p(|N-0,9| \geqslant 0,2) \leqslant \frac{0,01}{0,2^2}$.
   Ainsi $p(|N-0,9| \geqslant 0,2) \leqslant 0,25$ donc il y a au plus un quart des patients qui souffre de diabète.
3. On a directement $p(|N-0,9| \leqslant 0,2) \geqslant 1 - \frac{0,01}{0,2^2}$ soit $p(|N-0,9| \leqslant 0,2) \geqslant 0,75$: la probabilité que le dossier prélevé soit celui d'une personne ayant une glycémie normale est supérieure à $0,75$.

Exercice 4.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = \lambda\sigma > 0$, il vient : $p(|X-\mu| \leqslant \lambda\sigma) \geqslant 1 - \frac{V}{\delta^2}$ et $V = \sigma^2$.
On a alors : $p(|X-\mu| \leqslant \lambda\sigma) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}$ soit $p(|X-\mu| \leqslant \lambda\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\lambda^2}$ ou enfin $p(|X-\mu| \leqslant \lambda\sigma) \geqslant \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}$