Chapitre 7

Loi binomiale

***

1. Succession d'épreuves indépendantes

1.1 Univers d'une succession d'épreuves

Définition 1.

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose de .... de n épreuves .... E_1, E_2, E_3,$\cdots$,E_n ***l'univers des issues possibles*** est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \cdots \times \Omega_n$, où Ω_i, où Ω_i désigne l'univers de l'épreuve E_i pour allant de i à n.

Remarque. On représente cette situation par .... dans lequel un chemin correspond à une issue.

1.2 Calcul de probabilités

Propriété admise. Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1\,;\,i_2\,;\,i_3\,;\,\cdots\,;\,i_n)$ est égale .... des probabilités des issues du $n-$uplet.

Mini-exercice. On considère une expérience qui consiste à tirer une pièce équilibrée à Pile (P) ou face (F), puis à choisir un jeton dans une urne contenant un jeton carré (C) et trois jetons ronds (R).

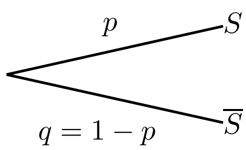
1. Calculer la probabilité de l'issue $(F\,;\,C)$.
2. Calculer la probabilité de l'issue C.

2. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

2.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 2.

Soit p un nombre réel appartenant à $[0\,;\,1]$.
On appelle ***épreuve de Bernoulli*** toute expérience aléatoire n'admettant .... issues, appelées généralement ***succès*** S et .... $\overline{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1-p$.



Exemples.

- Lancer une pièce de monnaie équilibrée et savoir si pile est obtenu est une épreuve de Bernoulli se succès S « pile a été obtenu » dont la probabilité est $p = 0,5$. L'échec $\overline{S}$ est « Face a été obtenu ».
- Interroger une personne dans la rue en France et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « La personne est gauchère » dont la probabilité est environ égale à $0,13$.

2.2 Loi de Bernoulli

Définition 3.

On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p. Une variable aléatoire X est ***une variable aléatoire de Bernoulli*** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0\,;\,1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X suit la ***loi de Bernoulli*** de paramètre p.
Autrement dit, on a $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X=x_i)$	p	$1-p$

Propriété. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
L'***espérance*** mathématique de X est $E(X)=p$ et la ***variance*** est $V(X)=p(1-p)$.

Démonstration.

$E(X)=\mathbb{P}(X=1)\times 1+\mathbb{P}(X=0)\times 0=p$.
$V(X)=\mathbb{P}(X=1)\times 1^2+\mathbb{P}(X=0)\times 0^2-E(X)^2=p(1-p)$.

2.3 Schéma de Bernoulli

Définition 4.

Soit n un entier naturel non nul. Un ***schéma de Bernoulli*** est la répétition de n épreuves de Bernoulli ***identiques*** et ***indépendantes***.

2.4 Loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Définition 5.

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et X la variable aléatoire comptant le nombre de succès contenus dans ce schéma.
On dit alors que X suit la ***loi binomiale de paramètres n et p***, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Proposition. La loi de la variable aléatoire X qui suit la ***loi binomiale*** de paramètres n et p est donnée pour tout entier k comrpis entre 0 et n, par :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}}.$$

Propositions. Si X suit la ***loi binomiale*** de paramètres n et p alors :
- $E(X)=np$.
- $V(X)=np(1-p)$.
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p}$.

Démonstration.
On a $E(X)=E(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+\cdots+E(X_n)=np$.
$V(X)=V(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+\cdots+V(X_n)=np(1-p)$.