Exercice 1 — /3.5

On donne $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$.
Donner la forme algébrique de :

1. $z_1 + 2\overline{z_2}$ **2.** $z_1 \times \overline{z_2}$ **3.** $\dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 2. — /6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2(1 + z) - \mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})z$ **2.** $2z + \mathrm{i}\overline{z} = 2 - 2\mathrm{i}$. **3.** $(-\mathrm{i}z + 1 - 3\mathrm{i})(3\overline{z} - 4 + \mathrm{i}) = 0$

Exercice 3. — /5

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $Z = x^2 - 2x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit réel.

3. Proposer deux nombres complexes z non nuls tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 4. — /2.5

On considère la fonction Python suivante :

```python
def developpe(a,b):
        S=0
        L=[1,3,3,1]
        for k in range(4):
                S=S+L[k]*a**(3-k)*b**k
        return(S)
```

Léa a testé la fonction et a obtenu le résultat suivant :

```
> developpe(1,complex(0,2))
(-11-2j)
>
```

1. Quelle égalité mathématique peut-elle écrire ?

2. Démontrer cette égalité.

Exercice — /3

Soit P le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$ où a et b sont deux réels.

1. Démontrer que $P(a + \mathrm{i}b) = 0$.

2. Démontrer pour pour tout nombre complexe z on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

3. En déduire une autre racine de polynôme P. *Aucun calcul n'est attendu mais justifiez avec soin le raisonnement effectué.*

