

1 Nombres et intervalles

Plan du chapitre

1.	Ensemble de nombres	1
1. 1.	Ensemble des entiers naturels \mathbb{N}	1
1. 2.	Ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z}	1
1. 3.	Ensemble des nombres décimaux \mathbb{D}	2
1. 4.	Les nombres rationnels et leur ensemble \mathbb{Q}	2
1. 5.	L'ensemble des réels \mathbb{R}	2
1. 6.	Inclusions d'ensembles	3
2.	Intervalles de \mathbb{R}	3
2. 1.	Intervalle et inégalité associée	3
2. 2.	Intersection, réunion d'intervalles et inclusion	4
3.	Puissances	6
3. 1.	Définition d'une puissance	6
3. 2.	Calcul avec les puissances	6

1. Ensemble de nombres

1. 1. Ensemble des entiers naturels \mathbb{N}

Déf. 1

L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de **compter** une collection d'objets. On note \mathbb{N}^* ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels **non nuls**.

Exemples et contre-exemples.

1. 2. Ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z}

Déf. 2

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$. Il est composé des **nombres entiers naturels** et de

En particulier, l'ensemble \mathbb{N} est **contenu** (ou inclus) dans \mathbb{Z} , ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

Exemples et contre-exemples.

1. 3. Ensemble des nombres décimaux \mathbb{D}

Déf. 3

Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier par 1, 10, 100, 1 000 et plus généralement par 10^k où k est un entier naturel. Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre **fini** de chiffres après la virgule.

Exemples et contre-exemples.

1. 4. Les nombres rationnels et leur ensemble \mathbb{Q}

Définition 4

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers. On note :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarques.

- La fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseurs communs (autres que 1 ou -1).
- La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique (se répète) à partir d'un certain rang.
- La division par 0 est **impossible** : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a donc aucun sens.

Exemples et contre-exemples.

1. 5. L'ensemble des réels \mathbb{R}

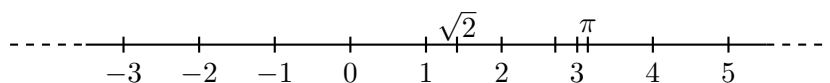
Déf. 5

Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels. Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Ainsi, l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des **nombres réels** noté \mathbb{R} .

Remarque.

Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé **abscisse** de ce point.

Illustration :



1. 6. Inclusions d'ensembles

On retiendra le résultat qui suit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Cela suggère donc qu'un entier naturel est un entier relatif qui est lui-même un nombre décimal qui est donc aussi un rationnel et finalement aussi un nombre réel. On peut donc retenir le schéma suivant :

2. Intervalles de \mathbb{R} .

2. 1. Intervalle et inégalité associée

❶ L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l'intervalle $[a ; b]$:



❷ L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est l'intervalle $[a ; b[$:



❸ L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a ; b[$:



❹ L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est l'intervalle $]a ; b]$:



❺ L'ensemble des réels x tels que $x \leq a$ est l'intervalle $] - \infty ; a]$:



⑥ L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est l'intervalle $] -\infty ; a[$:



⑦ L'ensemble des réels x tels que $x > a$ est l'intervalle $]a ; +\infty[$:



⑧ L'ensemble des réels x tels que $x \geq a$ est l'intervalle $[a ; +\infty[$:



2. 2. Intersection, réunion d'intervalles et inclusion

2. 2. a. Intersection

Définition 6

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle I **et** dans l'intervalle J sont dans **l'intersection** des intervalles I et J :

Si $x \in I$ et $x \in J$, alors $x \in I \cap J$ (\cap se lit **inter**)

Exemple. Soit $I = [2 ; 5]$ et $J = [4 ; 9]$. Déterminer $I \cap J$.

2. 2. b. Réunion

Définition 7

Les réels qui sont dans l'intervalle I **ou** dans l'intervalle J sont dans **la réunion** des intervalles I et J :

Si $x \in I$ ou $x \in J$, alors $x \in I \cup J$ (\cup se lit **union**)

Exemple. Soit $I = [2 ; 5]$ et $J = [4 ; 9]$. Déterminer $I \cup J$.

2. 2. c. Inclusion

Définition 8

Un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.

On note :

$$A \subset B$$

Exemple. tous les pays de la zone euro sont dans l'Union européenne. L'ensemble des pays de la zone euro est **inclus** dans l'ensemble des pays de l'Union européenne.

3. Puissances

3. 1. Définition d'une puissance

Définition 9

Soit n un entier naturel et a un nombre réel.

- Si $n > 0$: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.
- Pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.
- Par convention, pour $a \neq 0$, on pose $a^0 = 1$.

Exemples.

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
2. La décomposition en produit de facteurs premiers de 80 peut s'écrire $80 = 2^4 \times 5$.

3. 2. Calcul avec les puissances

Propriété

Si a et b sont des nombres réels non nuls ; m et n sont des entiers relatifs quelconques (positifs ou négatifs), alors :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples.

1. $(-3)^4 \times (-3)^6 = \dots\dots\dots$
2. $(5^4)^3 = \dots\dots\dots$
3. $10^3 \times 2^3 = \dots\dots\dots$
4. $\frac{2^7}{2^{-4}} = \dots\dots\dots$