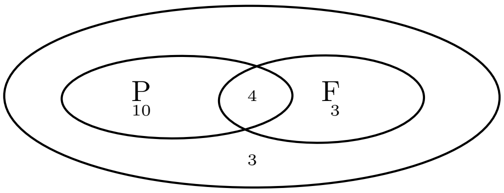
Exercice 1.

1. On modélise la situation à l'aide d'un diagramme de Venn en notant P pour le ski de piste et F pour le ski de fond :



   Sur les 20 touristes, 17 pratiquent au moins un des deux sports donc 3 touristes $(20-17)$ ne pratiquent ni le ski de piste ni le ski de fond.

2. On modélise la situation à l'aide d'un arbre : les branches primaires formées des chiffres 0 ou 1, les branches secondaires formées des lettres a, b ou c.
   Ainsi : $C \times L = \{(0\,;\,a),\ (0\,;\,b),\ (0\,;\,c),\ (1\,;\,a),\ (1\,;\,b),\ (1\,;\,c)$.
   D'après le principe multiplicatif $\text{card}(C \times L) = 2 \times 3 = 6$.

3. Soit n un entier naturel non nul.
   $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1) \times (n+2)}{n!}$ d'où $\dfrac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

4. Il y a 5 choix pour placer le premier élève, puis 4 choix pour le second, 3 choix pour le troisième, 2 choix pour le quatrième et donc 1 choix pour le dernier élève. D'après le principe multiplicatif, il y a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 (= 5! = 120)$ manières pour placer les cinq élèves les uns derrière les autres.

5. Il y a 5 chiffres pairs. Pour chacun des 5 chiffres formant le nombre entier il y a 5 possibilités. D'après le principe multiplicatif, il y a donc 5^5 nombres entiers de cinq chiffres ne comportant que des chiffres pairs.

Exercice 2.

1. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[1\,;\,+\infty[$.
   $\forall x \in [1\,;\,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1(x+1)-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$ on a $1 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$: la fonction f est donc **strictement croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. $u_1 = f(u_0)$ donc $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$.

3. Soit $\mathscr{P}_n$: « $0 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 1$ »
   Initialisation : si $n = 0$ on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{1}{3}$. Ainsi $0 \leqslant u_1 < u_0 \leqslant 1$ et donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 1$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant 1$.

   Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 1$ donc $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) < f(u_k) \leqslant f(1)$ car la fonction f est **strictement croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Or $f(0) = 1$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 1}.$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante : l'affirmation de l'élève est donc fausse. Le fait que la fonction f soit strictement croissante n'implique que la suite (u_n) soit elle-même strictement croissante.

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n - n + 3.$$

Ilun a calculé les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B
1	rang n	terme u_n
2	0	1
3	1	5
4	2	19
5	3	77
6	4	307

1. Dans la cellule B3 on écrit : = `2*B2-A2+3`.
2. $\mathscr{P}_n$: « $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ».
   Initialisation : si $n = 0$ on a d'après l'énoncé $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire :
   $u_k = 3 \times 2^k + k - 2$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ c'est-à-dire $u_{k+1} = 3 \times 2^{k+1} + k - 1$.
   D'après l'énoncé, on a : $u_{k+1} = 2u_k - k + 3$ et par hypothèse de récurrence, on a $u_k = 3 \times 2^k + k - 2$, on en déduit alors que :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2(3 \times 2^k + k - 2) - k + 3 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + 2k - 4 - k + 3 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + k - 1 \end{aligned}$$

   $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

   Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 2 - (3 \times 2^n + n - 2) \\ &= 3 \times 2^{n+1} + n - 1 - 3 \times 2^n - n + 2 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n + 1 \\ &= 3 \times 2^n(2 - 1) + 1 \\ &= 3 \times 2^n + 1 \end{aligned}$$

   Pour tout entier naturel n, $3 \times 2^n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui démontre que la suite (u_n) est (strictement) croissante.

4. (a) Voici le programme en Python complet :

```python
u=1
n=0
while u<=10**6:
        n=n+1
        u=2*u-n+3
print(n)
```

   (b) Utilisons la calculatrice : on a $u_{18} = 786\,448$ et $u_{19} = 1\,572\,881$ donc la valeur $n = 19$ est celle qui convient.