Exercice 1.

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,05$ et $E(X) = 80 \times 0,05 = 4$.
2. On veut $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$. Or $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \binom{80}{0} 0,05^0 \times (1 - 0,05)^{80} \simeq 0,983$.
3. À la calculatrice $a = 1$ et $b = 8$ donc $I = \left[\frac{1}{80}\,;\,\frac{8}{80}\right] = [0,0125\,;\,0,1]$.
4. $f = \frac{2}{80} = 0,025$ donc $f \in I$ donc il n'y a pas à dire au seuil de 95 % que le vendeur a menti.

Exercice 2.

1. On reconnaît une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes avec comme succès « tomber sur 1 ». X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4\,000$ et $p = \frac{1}{4}$.
   On en déduit que $E(X) = np = 4\,000 \times \frac{1}{4} = 1\,000$ et $V(X) = np(1-p) = 4\,000 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 750$.
   $\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[, p(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$ donc $p(|X - 1\,000| \geqslant \delta) \leqslant \frac{750}{\delta^2}$.
2. $p(920 < X < 1\,080) = p(|X - 1\,000| < 80) \geqslant 1 - \frac{750}{80^2}$ donc $p(|X - 1\,000| < 80) \geqslant \frac{113}{128}$.

Exercice 3.

1. $Z = X + Y$ désigne la somme des variables aléatoires X et Y soit la durée totale des tâches en semaines.
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ d'après la linéarité de l'espérance. Donc $E(Z) = 22 + 25 = 47$.
   On a $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{V(X) + V(Y}$ car les variables X et Y sont indépendantes.
   Or $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ donc $V(X) = \sigma(X)^2$ ainsi $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$ soit $\sigma(X+Y) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
   Attention : l'écart-type n'est pas linéaire !!!

Exercice 4.

1. (a) $Z = X + Y$ désigne la somme des variables aléatoires X et Y soit le nombre total de clients qui rentrent dans le magasin entre 18h et 19h.
   (b) $E(Z) = E(X+Y)$ donc $E(Z) = E(X) + E(Y)$ d'après la linéarité de l'espérance soit $E(Z) = 20 + 15 = 35$.
   $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ car X et Y sont supposées indépendantes.
   Ainsi $V(Z) = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 = 2^2 + 1^1 = 5$.
2. On veut que $p(30 < Z < 40)$. Or $p(30 < Z < 40) = p(|X - 35| < 5)$.
   Or $\mu = 35$ donc on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tvhébychev, il vient avec $\delta = 5$ et $V(Z) = 5$:

$$p(|Z - 35| < 5) \geqslant 1 - \frac{5}{5^2} \text{ soit } p(|Z - 35| < 5) \geqslant 0,8.$$