Formulaire.

- $u'u^n \xhookrightarrow{primitive} \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
- $u'\mathrm{e}^u \xhookrightarrow{primitive} \mathrm{e}^u$
- $\dfrac{u'}{u} \xhookrightarrow{primitive} \ln(|u|)$
- $\dfrac{u'}{\sqrt{u}} \xhookrightarrow{primitive} 2\sqrt{u}$
- $u'\cos(u) \xhookrightarrow{primitive} \sin(u)$
- $u'\sin(u) \xhookrightarrow{primitive} -\cos(u)$

Exercice 1. **/4**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

1. $f_1(x) = 3x\cos(6x^2)$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^+$.
3. $f_3(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^3$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+x}}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 2. **/6**

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t, $v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit -elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-l}.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est -elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

Exercice 3. **/10**

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

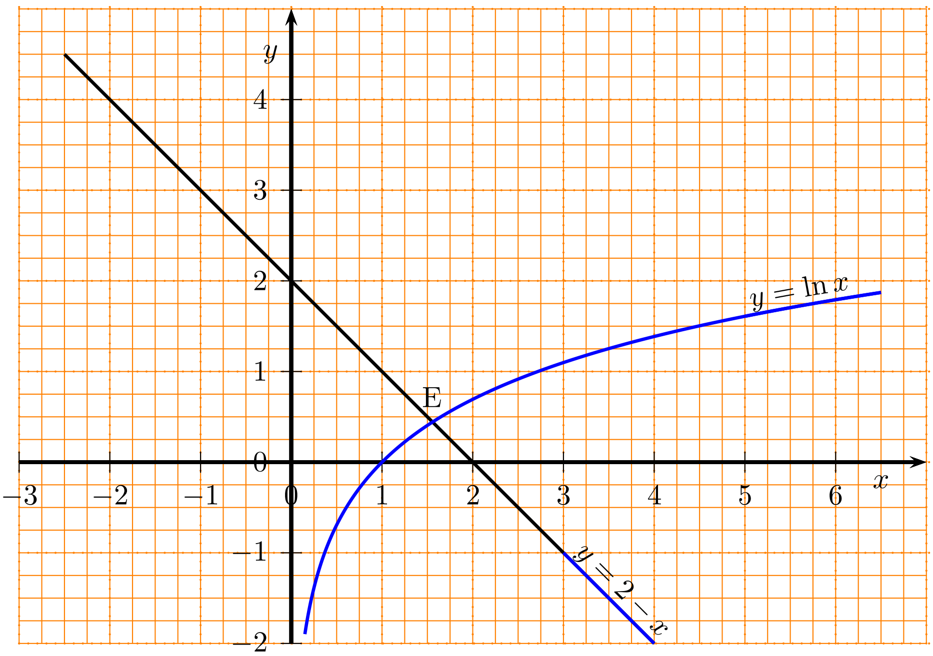
$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.



On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathcal{A}$, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E.
2. Soit $I = \displaystyle\int_1^{\alpha} \ln x \, \mathrm{d}x$.
   (a) Donner une interprétation géométrique de I.
   (b) Démontrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de ln sur $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire la valeur de I, en fonction de α.
   (c) Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de α.