★☆☆☆☆ **Exercice 1.** **/2**

Calculer $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{2t-1}{t-3}\,\mathrm{d}t$.

★★☆☆☆ **Exercice 2.** **/8**

Partie A

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = [\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

2. (a) En posant $u(t) = (1-t)^{n+1}$ $\quad v'(t) = \mathrm{e}^t$
$u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ $\quad v(t) = \mathrm{e}^t$ par exemple

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \Big[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= -1 + (n+1)u_n \end{aligned}$$

(b) $u_1 = u_0 - 1$ donc $u_1 = \mathrm{e} - 1 - 1 = \mathrm{e} - 2$.
$u_2 = 2u_1 - 1$ donc $u_2 = 2(\mathrm{e}-2) - 1 = 2\mathrm{e} - 5$.

3. (a) Pour tout entier naturel n et pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ on a $(1-t)^n \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^t > 0$ donc par produit $(1-t)^n\mathrm{e}^t \geqslant 0$. L'intégrale conservant l'ordre dans $\mathbb{R}$ on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ ce qui montre que la suite (u_n) est minorée par 0.

(b) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t(1-t-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -t(1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n et pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a $-t \leqslant 0$, $(1-t)^n\mathrm{e}^t \geqslant 0$ donc par produit $-t(1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant$ et comme l'intégrale conserve l'ordre dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 -t(1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ ce qui montre que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente et converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$.

4. (a) $0 \leqslant t \leqslant 1 \longleftrightarrow \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \longleftrightarrow (1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n$.

(b) En « intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e} \times (1-t)^n \iff u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}[-(1-t)]_0^1$ et finalement :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

(c) On a donc démontré que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

Par application du théorème d'encadrement des limites la limite de u_n au voisinage de plus l'infini est égale à zéro.