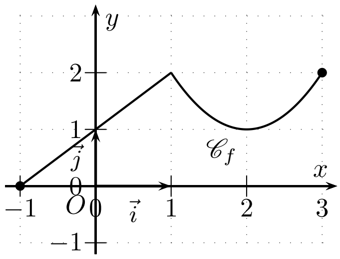
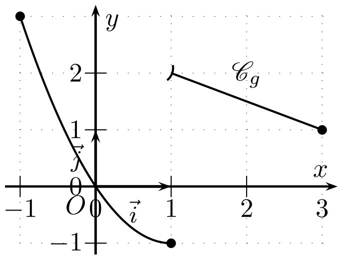
78

Les fonctions f et g sont représentées sur la figure ci-après :





1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1\,;\,3]$?
2. Préciser sur quel(s) intervalles(s) la fonction semble dérivable.

79

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

80

Une entreprise possède 4 cars de 50 places chacun et se propose d'assurer le transport des supporters d'une équipe de rugby.

1. Représenter graphiquement le nombre de cars en fonction du nombre de supporters.
2. Chaque car se loue 800 €. Représenter graphiquement le prix par supporter en fonction du nombre x de supporters, x variant de 10 à 200.

81

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 =$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $]-\infty\,;\,12]$ par $f(x) = \sqrt{12 - x}$. On admet que la suite (u_n) converge et que f est continue sur $]-\infty\,;\,12]$. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de ℓ.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Démontrer la conjecture en utilisant la continuité de f.

82

Reprendre les questions de l'exercice précédent avec (u_n), définie par $u_0 = -10$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

83

La fonction f admet pour tableau de variations :

x	-3	0	4
Variation de f	1 ↘	-1	↗ 0

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :
   - **a.** $f(x) = 0$
   - **b.** $f(x) = 3$
   - **c.** $f(x) = -\dfrac{1}{2}$
2. **a.** Donner l'allure d'une courbe pouvant représenter la fonction f.
   b. Discuter selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

84

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :
$$x^3 - 6x + 2 = 0.$$
2. Montrer que l'intervalle $[-1\,;\,2]$ contient une des solutions précédentes.

85

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que α appartient à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

86

Soit $f\ :\ [0\,;\,1] \to [0\,;\,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution sur $[0\,;\,1]$.

87

1. Démontrer que l'équation $x^2 e^x = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

2. On donne la fonction alpha ci-dessous écrite en Python :

```python
from math import e
def alpha(precision)
    a=0
    b=1
    while b-a>=precision:
        c=(b+a)/2
        f=c**2*e**c
        if f<=1:
            a=c
        else:
            b=c
    return a,b
```

a. Quelles seront les valeurs retournées par l'instruction alpha(0.1) ?

b. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

88

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent la même tangente au point d'abscisse 1 :

1. $f \;:\; x \;\to -x^2 + x + 3.$

2. $g \;:\; x \;\to \dfrac{1}{x} + 2.$

3. $h \;:\; x \;\to -5x + 8\sqrt{x}.$

89

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est concave sur $[-1\,;\,+\infty[$.

2. Tracer sur l'écran d'une calculatrice $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

3. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$,

$$\sqrt{1+x} \leqslant \frac{1}{2}x + 1.$$

90

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la convexité de f.

2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $[-2\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.

4. Retrouver le résultat précédent en résolvant algébriquement l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

91

Soit f une fonction convexe dérivable et définie sur un intervalle I.
Démontrer que, pour tous réels a et b de I, on a :

$$f(b) - f(a) \geqslant f'(a)(b-a).$$

92

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 21x^2 + 19.$$

93

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3.$$

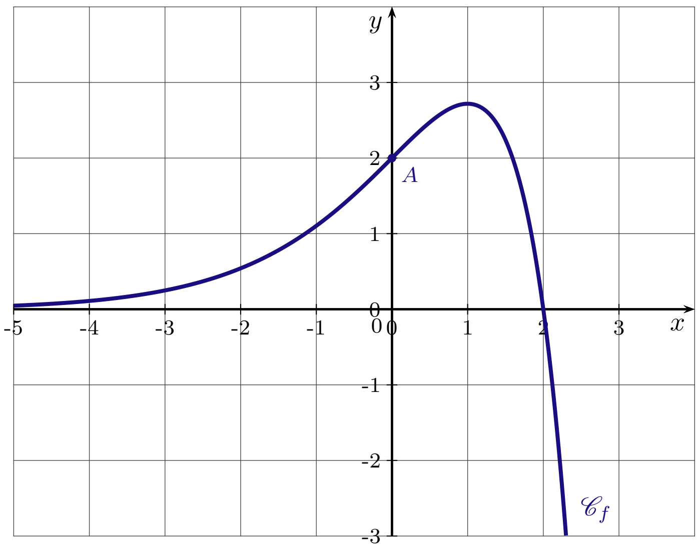
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Étudier la convexité de f et l'existence d'éventuels points d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

94

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2-x)e^x.$$

Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 puis tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.

2. Quelle conjecture peut-on émettre quant au point A pour $\mathscr{C}_f$?

3. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Calculer $f''(x)$.

4. Étudier la convexité de la fonction f.

5. Démontrer la conjecture de la question **2.**