Chapitre 11

Matrices : applications

***

I. Suites de matrices

1. Suite de matrices colonnes

Définition.

Soit n un entier naturel.
On appelle ***suite de matrices colonnes***, notée (U_n) des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.

Exemple. La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 2n+1 \\ 3^n \end{pmatrix}$ est une suite de matrice dont les coefficients sont les suites numériques (a_n), (b_n) et (c_n) définies pour tout entier naturel n par $a_n = n^2$, $b_n = 2+1$ et $c_n = 3^n$.

Remarque. On peut définir de la même manière les suites de matrices lignes.

Définition.

Une suite (U_n) de matrices ***converge*** si et seulement si toutes les suites formant les coefficients de cette matrice convergent. La limite de la suite (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme (U_n).

Exemple. Soit la suite de matrice (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par, $U_n = \begin{pmatrix} 2+0,7^n \\ 1-\dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Cette suite de matrices converge vers la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Suites de matrices définies par des relations de récurrence

Propriété.

Soit A une matrice ***carrée*** d'ordre p avec p entier naturel supérieur ou égal à 2 et (U_n) une suite de matrices ***colonnes*** à p lignes telles que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n$.
Alors pour tout entier naturel n,

$$\boxed{U_n = A^n U_0}.$$

Exemple. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par les relations de récurrence : $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + b_n$ et telles que $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

Calculer a_4 et b_4.

Propriété.

Soit A une matrice ***carrée*** d'ordre p avec p entier naturel supérieur ou égal à 2, B est une matrice ***colonne*** à p lignes et (U_n) une suite de matrices ***colonnes*** à p lignes telles que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n + B$.
Si la suite (U_n) ***converge*** alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant : $U = AU + B$.
La matrice U est appelée ***état stable*** de la suite (U_n).

Exercice 1.11. Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définies pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice colonne u telle que $U = AU + B$.
2. On pose $V_n = U_n - U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$; en déduire l'expression de V_n en fonction de n.
3. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ -n0,5^n & 0,5^n \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} n0,5^n = 0.$$
Déduire ce qui précède l'expression de U_n en fonction de n et étudier sa limite.

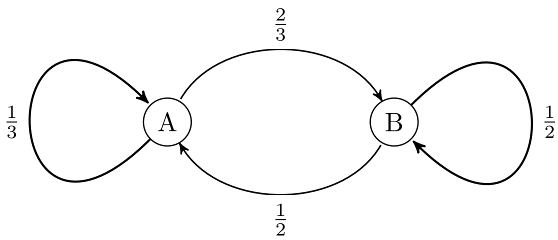
II. Chaînes de Markov

1. Graphe orienté pondéré

Définitions.

- Un graphe orienté est ***pondéré*** lorsque chaque arête est affectée d'un nombre réel positif, appelé pois de cette arête.
- Un graphe ***probabiliste*** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1 te tel que la ***somme des poids*** des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.
- Les sommets d'un graphe probabiliste sont appelés des ***états***.

Exemple. Voici un graphe probabiliste à deux états :

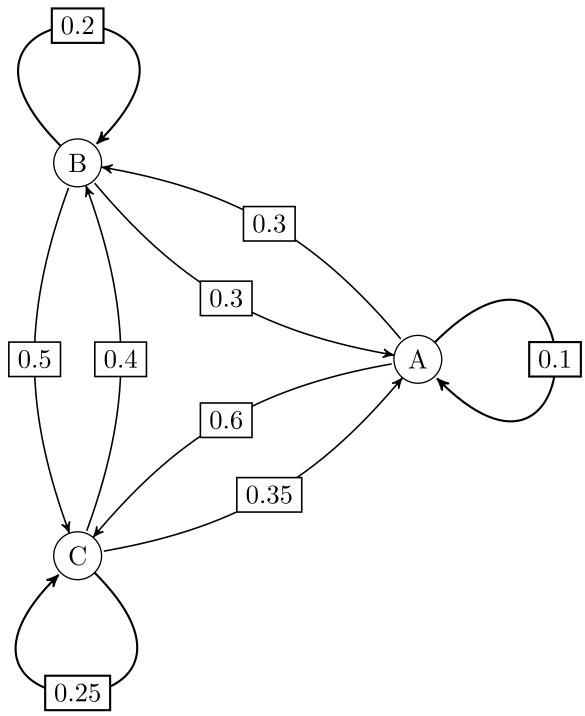


2. Matrice de transition

Définition.

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle ***matrice de transition***. C'est une matrice carrée d'ordre p où le terme de la i-ème ligne et la j-ième colonne est égale au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe, 0 sinon.

Exercice 2.11.
1. Donner la matrice de transition associée au graphe donné ci-dessous, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.
2. Quelle remarque peut-on faire sur la somme des termes appartenant à une même ligne ?



3. Chaîne de Markov associée à deux ou trois états

Définition.

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

- À l'étape $n = 0$, la loi de probabilité de X_0 s'appelle la ***distribution initiale*** du système.
- À l'étape n, la loi de probabilité de X_n s'appelle la ***distribution après n transitions***.

Lorsque, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ***ne dépend pas de n***, on dit que la suite (X_n) est une ***chaîne de Markov***.

Remarques. On peut associer à une chaîne de Markov :

- un graphe probabiliste où les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.
- La matrice de transition de ce graphe probabiliste.

Exercice 3.11. Un robot se déplace sur un triangle ABC. À chaque étape :

- s'il est en A, il choisit de façon aléatoire soit de rester en A, soit de se déplacer vers B ou C ;
- s'il est en B, il se déplace aléatoirement vers A ou c ;
- s'il est en c, il se déplace vers A.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position du robot à l'étape n. Au début de l'expérience, pour $n = 0$, on place le robot en A.
1. Donner la distribution initiale du système, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_0 = A)$, $\mathbb{P}(X_0 = B)$ et $\mathbb{P}(X_0 = C)$.
2. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la distribution du système après deux étapes.
3. Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov et donner le graphe probabiliste et la matrice associée.

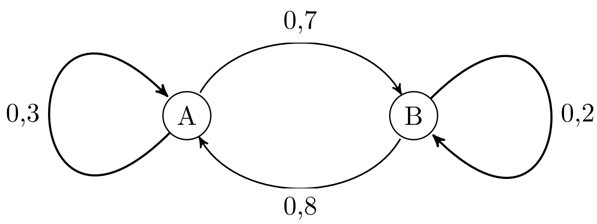
III. Représentation d'une chaîne de Markov à l'aide d'une suite de matrices

1. Modélisation à l'aide d'une suite de matrice

Propriété.

On considère une chaîne de Markov à 2 (respectivement à 3) états et P la matrice de transition associée.
Soit n, i et j trois entiers naturels tels que $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ (respectivement $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$).
La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice P^n.

Exercice 4.11. On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste suivant :



1. Déterminer la matrice de transition associée à cette marche aléatoire.
2. Calculer M^3. En déduire la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en trois étapes.

2. Étude asymptotique

Définition.

On considère une chaîne de Markov à 2 (respectivement à 3) états et P la matrice de transition associée.
On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement à 3) colonnes dont le terme de la j-ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égale à j. Autrement dit :

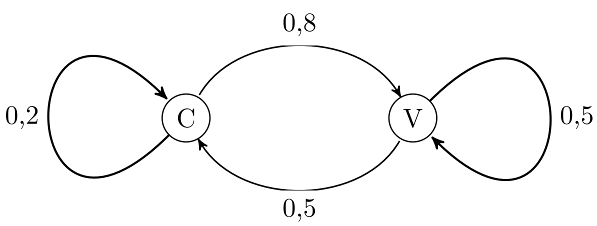
$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix} \quad \text{(respectivement} \quad \pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}\text{)}.$$

Remarques. La matrice π_0 représente la distribution initiale et la matrice π_n la distribution après n transitions.

Définition.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.
S'il existe un entier n tel que la matrice P^n ***ne contient pas de 0*** alors la suite (π_n) ***converge*** vers la matrice π vérifiant $\pi = \pi P$ et cette limite de ***dépend pas*** de π_0.
On dit que la matrice π représente ***la distribution invariante*** du système.

Exercice 5.11. On a programmé un ordinateur pour qu'il affiche successivement des lettres qui sont soit des consonnes C, soit des voyelles V selon le graphe probabiliste suivant :



1. On suppose que la première lettre est une consonne. Calculer la probabilité que la cinquième lettre soit une consonne.
2. Déterminer la distribution invariante de ce système. Interpréter le résultat.