

Variables Aléatoires

I. Variables aléatoires et loi de probabilité

1. Une situation comme exemple

On illustrera toute ce chapitre par la situation concrète donnée ci-dessous.

Lors d'une semaine promotionnelle, un cinéma propose l'attraction suivante :

chaque spectateur passe sous un portique électronique et :

- il s'éclaire en vert une fois sur dix, permettant au spectateur de bénéficier d'une entrée gratuite ;
- il s'éclaire en bleu une fois sur cinq, offrant au spectateur une entrée à demi-tarif ;
- il s'éclaire en rouge le reste du temps, le spectateur devant alors s'acquitter des 8 euros du billet plein tarif.

2. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

Définition 1.

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

1. On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans \mathbb{R} qui, à tout élément de Ω , fait correspondre un nombre réel k .
2. L'événement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X .
3. L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X et cet ensemble est noté $X(\Omega)$.

Dans notre exemple on a donc $X \in \{\text{_____}\}$

Remarques.

1. Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
2. Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
3. En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z .

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

1. Loi de probabilité

Définition 2.

Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur $X(\Omega)$, qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

On démontre facilement que $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Reprenons notre exemple introductif :

2. Espérance, variance, écart type

Définition 3.

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X , dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

$$1. E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n.$$

$$2. V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

$$3. \sigma(X) = \sqrt{V}.$$

Reprenons notre exemple :