

Fonctions trigonométriques

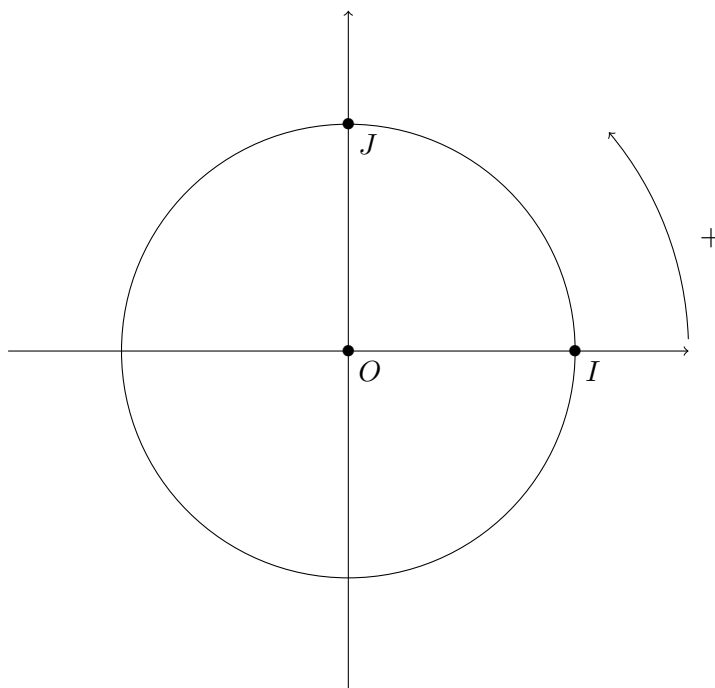
I. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

1. Cercle trigonométrique

Définition 1.

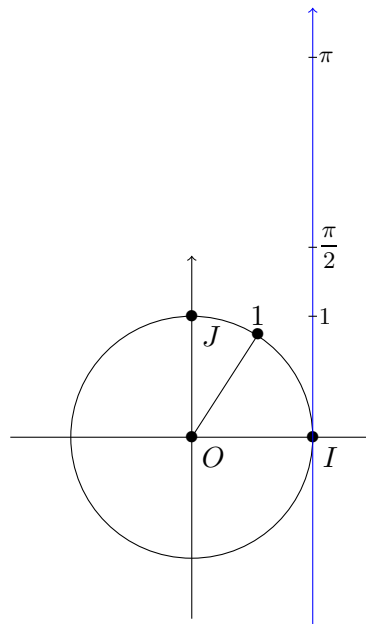
Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormal.

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1, muni d'un sens *direct* dit *trigonométrique* : le sens *inverse* des aiguilles d'une montre.



2. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

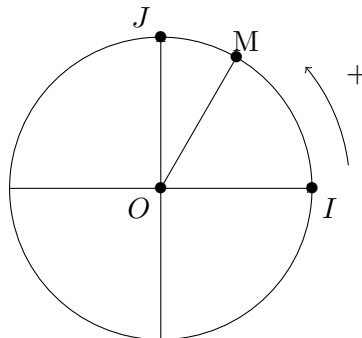
La droite d'équation $x = 1$, tangente au cercle trigonométrique en I représente la droite graduée des réels, I représentant le zéro de cette droite des réels. On enroule cette droite autour du cercle trigonométrique, le point I de la droite restant immobile. Chaque point du cercle est ainsi marqué, repéré par un nombre de la droite des réels. Et même de *plusieurs*, puisque la droite est infinie et qu'elle fait donc *plusieurs fois* le tour du cercle.



Plaçons sur le cercle les points correspondants à $\frac{\pi}{2}$, π , $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$.

3. Conversion radian degré

Propriété. Si M est un point du demi-cercle au dessus de l'axe des abscisses. Le réel x de la droite des réels de l'intervalle $[0; \pi]$ associé est une mesure en **radian** de l'angle \widehat{IOM} .



Exercice 1.6.

1. Convertir 36° en radian.
2. Convertir $\frac{4\pi}{5}$ radian en degrés.

II. Cosinus et sinus

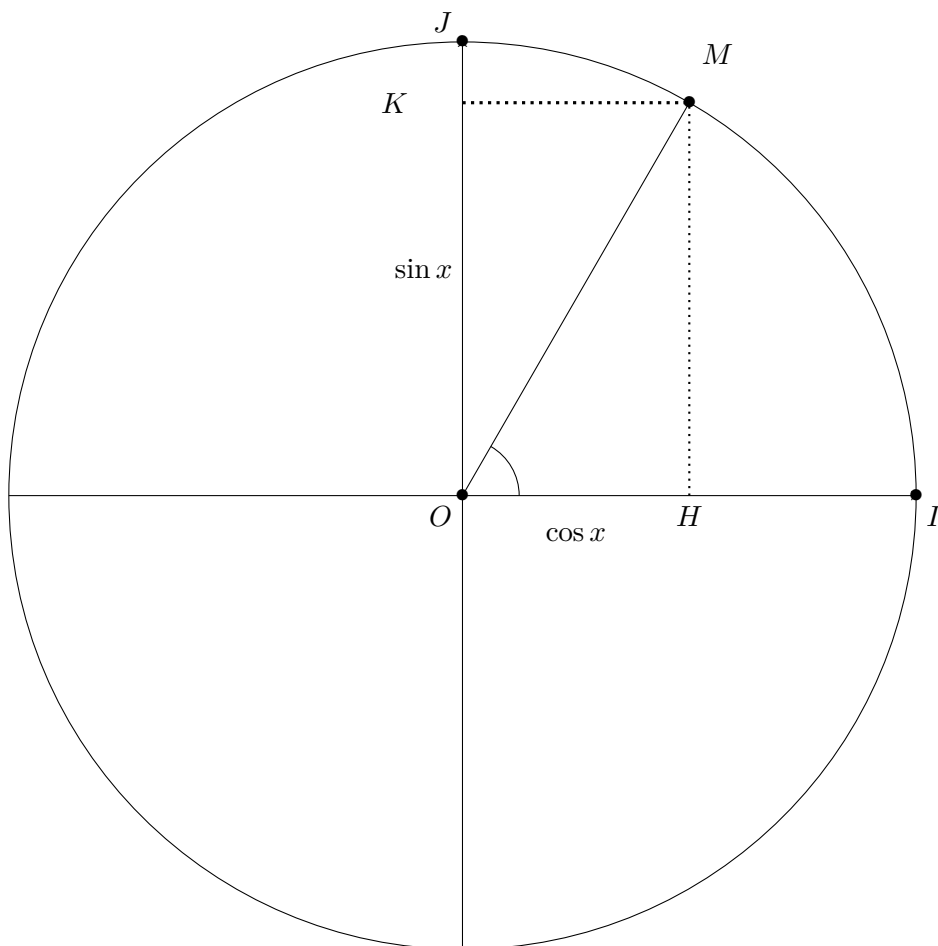
1. Définition

Définition 2.

Soit x un réel et M le point associé à x .

1. le **cosinus** de x est **l'abscisse** de M .
2. le **sinus** de x **l'ordonnée** de M .

$$\cos x = x_M \quad \text{et} \quad \sin x = y_M.$$



2. Propriétés fondamentales

Propriétés.

Pour tout nombre réel x :

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
2. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ que l'on peut écrire également $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Démonstration.

En effet l'abscisse de M est toujours comprise entre -1 et 1 ...

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ se montre avec la distance OM qui vaut 1 . Dans le triangle OHM rectangle en H , le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 OM^2 &= OH^2 + HM^2 \\
 &= (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 \\
 &= x_M^2 + y_M^2 \\
 &= (\cos x)^2 + (\sin x)^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

donc :

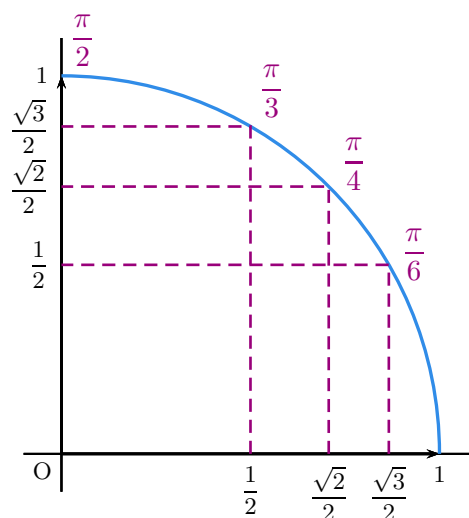
$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

■

3. Valeurs remarquables des cosinus et sinus

Propriété.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



III. Fonction cosinus et sinus

1. Périodicité

Définition 3.

Une fonction trigonométrique f définie sur \mathbb{R} est *périodique* de *période* T si et seulement si :

$$f(x + T) = f(x).$$


2. Périodicité de sin et cos

Propriété.

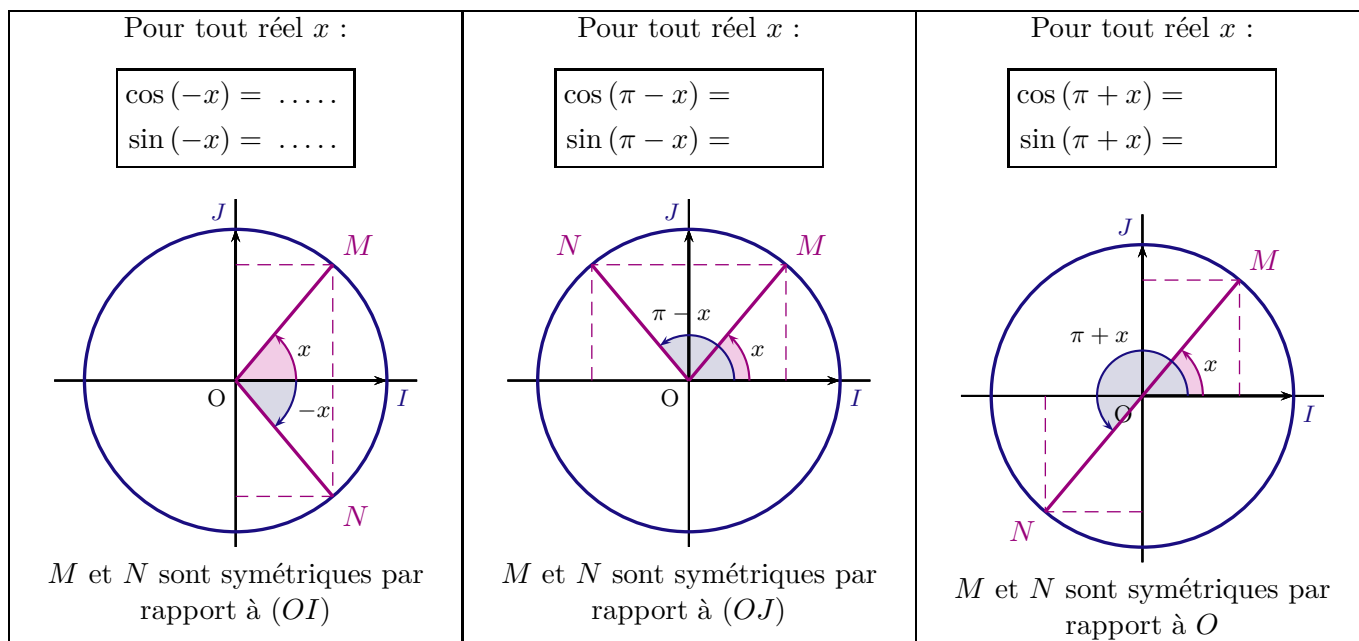
Pour tout réel x , les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $(x + 2\pi)$ sont confondus. Ainsi on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) =$$

On dit que les fonctions cos et sin sont *périodiques* de période 2π .

 **Exercice 2.6.** Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(\pi x)$ est périodique de période $T = 2$.

3. Angles associés



On dit que la fonction cos est _____ et la fonction sin est _____.

4. Variations et représentations graphiques

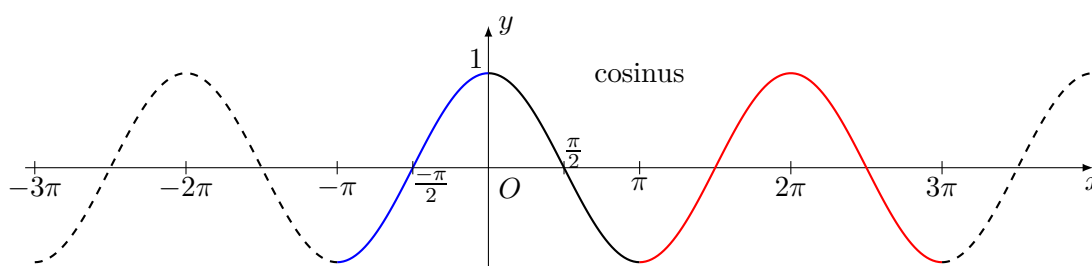
Grâce à la périodicité des fonctions cos et sin, et au fait que l'un est *paire* et l'autre *impaire*, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.

A. La fonction cosinus

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0; \pi]$:

x	0	π
signe de $\cos'(x)$	—	
Variations de cos	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> 1 → -1 </div>	

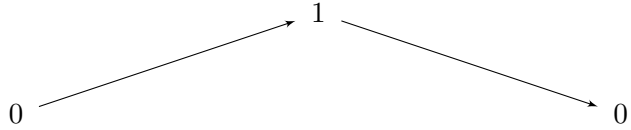
Ensuite, grâce à la parité de la fonction cosinus on peut compléter sur $[-\pi; 0]$ puis on reporte sur les autres intervalles grâce à la périodicité.

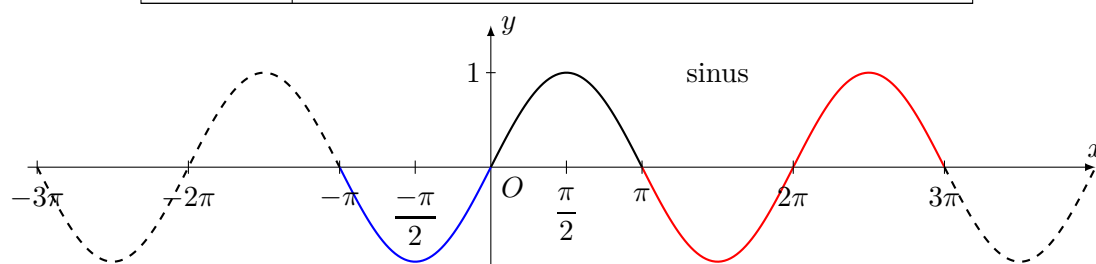


La partie noire pleine est la représentation sur $[0; \pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction paire donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi \vec{i}$).

B. La fonction sinus

De même, pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
signe de $\sin'(x)$	+	0	−
Variations de sin			



La partie noire pleine est la représentation sur $[0; \pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction impaire donc symétrie par rapport à l'origine) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi \vec{i}$).