

Compléments sur Les suites

I. Sens de variation d'une suite

1. Définition et méthode

Définition 1.

Soit (u_n) une suite réelle définie sur \mathbb{N} .

1. Dire que la suite (u_n) est **décroissante** signifie que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.
2. Dire que la suite (u_n) est **croissante** signifie que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
3. La suite (u_n) est **constante** (ou *stationnaire*) signifie que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n$.

Remarque. Si (u_n) est croissante ou décroissante, la suite (u_n) est dite monotone.

Méthode.

Pour déterminer la variation d'une suite, on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante.
3. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut aussi calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:
 - (a) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est croissante.
 - (b) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est décroissante.



Exercice 1.7.

1. Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 9 \times 5^n - 1$ est croissante.
2. Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ est décroissante.

2. Cas des suites arithmétiques

Propriété.

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r .

1. La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si $r < 0$.
2. La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si $r > 0$.
3. La suite (u_n) est **constante** (ou *stationnaire*) si et seulement si $r = 0$.

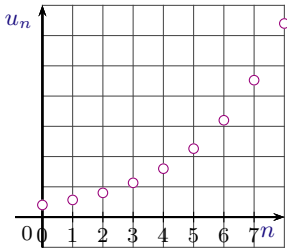
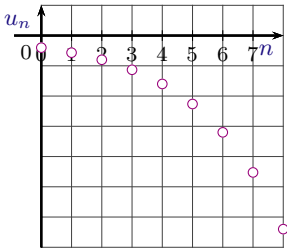
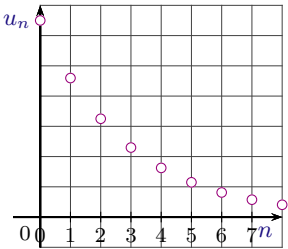
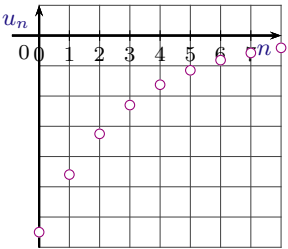
3. Cas des suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q - 1) \end{aligned}$$

La **monotonie** de la suite dépend du signe de u_0 , q^n et $(q - 1)$.

1. Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite **n'est pas monotone**.
2. Si $q > 0$ alors la suite est **monotone**, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q - 1)$.

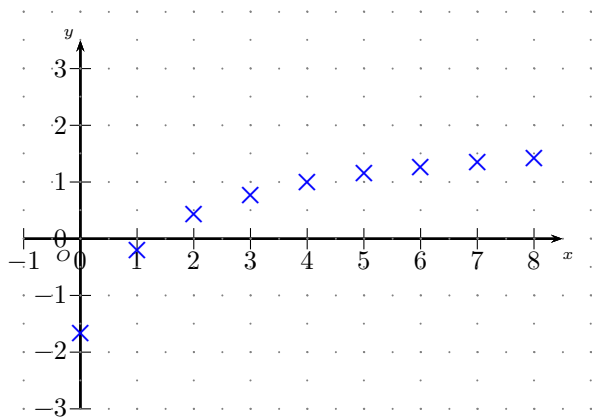
Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

II. Notion de limite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n) , c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs entières aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ». Différents outils (calculatrice, tableur, Python...) fournissent une représentation graphique ou un tableau de valeurs de la suite qui permettent d'émettre différentes conjectures.

1. Limite finie

Exemple 1. (u_n) est définie par $u_n = \frac{4n-5}{2n+3}$ pour tout entier naturel n .

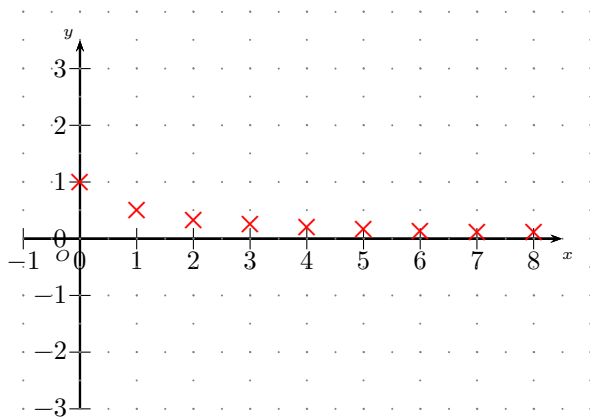


n	100	1000	100000
v_n	1,9458	1,9945	1,9999

Les termes u_n semblent **se rapprocher** autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 2.

On dit que la suite (u_n) tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Exemple 2. (v_n) est définie par $v_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n .



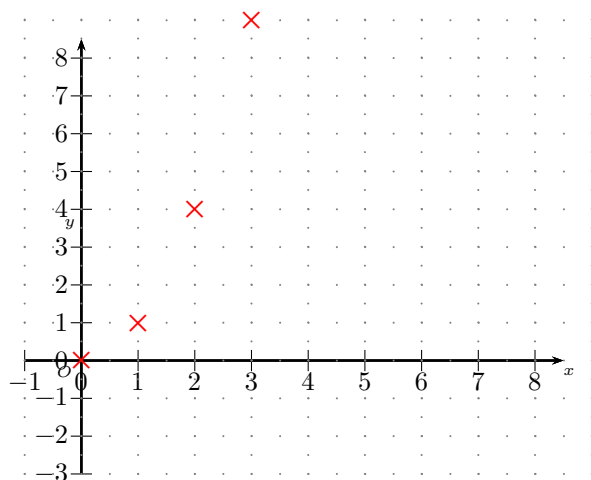
n	100	1000	100 000
v_n	0,01	0,001	0,000 01

Les termes v_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 0

On dit que la suite (v_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2. Limite infinie

Exemple 3. (w_n) est définie par $w_n = n^2$ pour tout entier naturel n .



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$$

Exemple 4. (t_n) est la suite arithmétique de premier terme 16 et de raison -2 .

	A	B
1	n	t_n
2	0	16
3	10	-4
4	100	-184
5	1 000	-19 984

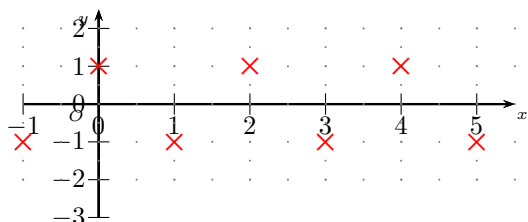
Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue.

On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

3. Pas de limite

Exemple 5. (z_n) est définie par $z_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n .



La suite (z_n) a des termes alternées entre -1 et 1 donc la suite (z_n) n'a pas de limite.

Exemple 6. La suite (a_n) est définie sur \mathbb{N} par : $a_0 = -1$ et $a_{n+1} = (a_n)^2 - 1$:

	A	B
1	n	a_n
2	0	-1
3	1	0
4	2	-1
5	3	0
6	4	-1
7	5	0

La suite (a_n) semble ne prendre que les valeurs 0 et -1 de façon *alternée* : elle semble ne pas admettre de limite quand n tend vers $+\infty$.



Exercice 2.7. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = -3(0,69)^n$.
Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son sens de variation.
2. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = 5 \left(\frac{1}{7}\right)^n + 50$.
Conjecturer avec la calculatrice, la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.