Dérivation locale

I. Taux de variation

Rappel de Seconde : soit A et B deux points d'un repère n'ayant pas la même abscisse. Le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné par la formule :

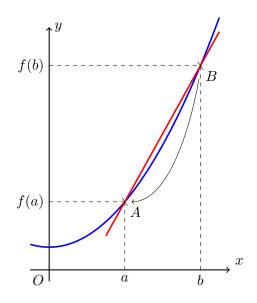
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a et b deux nombres de I, $a \neq b$. Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite sécante à la courbe représentative de f passant par les points A(a; f(a)) et B(b; f(b)) appartenant à cette courbe soit la droite (AB).



Remarque. Dans d'autre disciplines, en Physique par exemple, si y = f(x), on utilise la notation $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ pour désigner un taux de variation.

Propriété. Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par f(x) = mx + p. Le taux de variation de f entre deux nombres distincts est constant et est égal à m.

Exercice 2.4. Calculer le taux de variation de la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par f(x) = 3x - 1 entre deux

Propriété. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels distincts à I.

- 1. Si f est croissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est positif.
- 2. Si f est décroissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est négatif.



Les réciproques des propriétés suivantes sont fausses!

Exemple. la fonction carré est décroissante sur $]-\infty$; 0] donc le taux de variation entre -4 et -2 est négatif.

Contre-exemple. On a $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{3}=1$: le taux de variation de f entre -1 et 2 est strictement positif, or la fonction carré n'est pas croissante sur l'intervalle [-1; 2]...

II. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Point de vue algébrique

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I. Soit h un nombre réel non nul tel que a + h appartient à I.

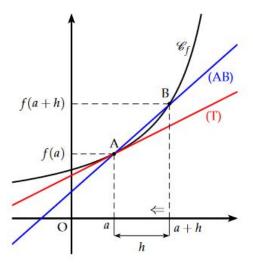
On dit que f est $d\acute{e}rivable$ en a lorsque le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers zéro et ce nombre limite est appelé nombre $d\acute{e}riv\acute{e}$ de f en a que l'on note f'(a).



 \triangle Une fonction peut ne pas être dérivable en un réel a. Nous le verrons en exercice.

2. Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que a+h appartienne à I. Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse a+h.



Lorsque h tend vers 0, le point H se rapproche du point A et la sécante (AH) de coefficient directeur $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une position limite.

Propriété. Si f est dérivable en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers f'(a) lorsque h tend vers 0. On admet alors que ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite qui correspond à la position limite de (AH).

Exercice 3.4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x + 1$. Montrer que f est dérivable en 3 et donner la valeur de f'(3).

Définition 3.

Soit f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées A(a; f(a)). La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur f'(a) passant par A.

Propriété. Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées (a; f(a)). La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A a pour équation réduite :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

 $\textbf{Remarque.} \ \ \text{Localement}, \text{la courbe représentative de } f \ \text{au voisinage du point } A \ \text{est presque confondue avec sa tangente}:$

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice 4.4. Soit la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x - 7$. On admet que f'(3) = 9.

- f 1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse f 3.
- **2.** Le point S(10; 80) appartient-il à cette droite?