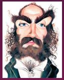
Beamer sur le raisonnement par récurrence

Classes de TMaths3/TMaths6

Yann Mobian

Lycée Maurice Ravel

29 août 2020



Au fil du temps

1858-1932

Giuseppe Peano (1858-1932), analyste et logicien italien, donna la formulation actuelle du raisonnement par récurrence lors de la construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{N}$. Ce raisonnement utilise son cinquième axiome, appelé aussi principe de récurrence : « si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$ ».

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?

Un exemple pour montrer l'objectif

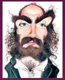
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?



Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?

Un exemple pour montrer l'objectif

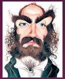
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?



Le principe

Le raisonnement par récurrence peut se comparer à la théorie des dominos : on considère une suite de dominos rangés de telle sorte que si un domino tombe alors le suivant tombera. Si on fait tomber le premier domino alors le second tombera, puis le troisième, ...etc.. Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont. Tout repose en fait sur le principe de propagation "si l'un tombe alors le suivant aussi"

Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Hérédité : et si la véracité de la proposition P_k avec $k \geq n_0$ implique que la proposition P_{k+1} soit vraie

alors **pour tout entier** naturel $n \geq n_0$ la proposition P_n est **vraie.**

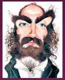
Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Hérédité : et si la véracité de la proposition P_k avec $k \geq n_0$ implique que la proposition P_{k+1} soit vraie

alors **pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$ la proposition P_n **est vraie.**



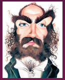
Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Hérédité : et si la véracité de la proposition P_k avec $k \geq n_0$ implique que la proposition P_{k+1} soit vraie

alors **pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$ la proposition P_n **est vraie.**



Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

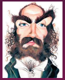
Hérédité : et si la véracité de la proposition P_k avec $k \geq n_0$ implique que la proposition P_{k+1} soit vraie

alors **pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$ la proposition P_n **est vraie.**

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

- *L'initialisation* et *l'hérédité* sont donc indispensables pour prouver une proposition pour TOUT $n \geqslant n_0$.



Remarques importantes

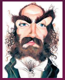
1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
4. *L'initialisation* et *l'hérédité* sont donc indispensables pour prouver une proposition pour TOUT $n \geqslant n_0$.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
4. *L'initialisation* et *l'hérédité* sont donc indispensables pour prouver une proposition pour TOUT $n \geqslant n_0$.

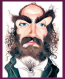
Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
4. *L'initialisation* et *l'hérédité* sont donc indispensables pour prouver une proposition pour TOUT $n \geqslant n_0$.



Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
4. *L'initialisation* et *l'hérédité* sont donc indispensables pour prouver une proposition pour TOUT $n \geqslant n_0$.



Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose $P_n \ : \ u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 **est vraie.**

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose $P_n \ : \ u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 **est vraie.**

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose $P_n \ : \ u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 est vraie.

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose $P_n \ : \ u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 **est vraie.**

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose $P_n \; : \; u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 **est vraie.**

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose $P_n \ : \ u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 **est vraie.**

Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable.} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

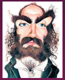
Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$



Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

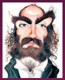
Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.}\\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$



Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.}\\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

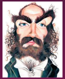
Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.}\\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$



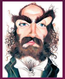
Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.}\\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$



Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.}\\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

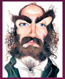
Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$



Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.} \\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$

Hérédité : on suppose P_k vraie pour un entier naturel k quelconque c'est-à-dire : $\quad u_k = (k+1)^2$.
Montrons que P_{k+1} est vraie soit $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= k^2 + 4k + 4 \quad \text{en développant.}\\
&= (k+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$