34

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

35

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 7.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

36

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = \frac{4n+1}{1-5n}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est minorée par $-\frac{5}{4}$.

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{4}{3} \text{ et } v_0 = 1.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 4$.

37

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 2 + \sin(n^2)$. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

38

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2n + 1.$$

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à la calculatrice.

2. On considère le programme Python :

```
def seuil():
    u=2;n=0
    while u..... :
        u=.........
        n=n+1
    return .....
```

Compléter la fonction Python ci-dessus pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 100.

39

Calculer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = n^2 + 6$

2. $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$

3. $u_n = 3n^2 + \frac{5}{n^3}$

40

Calculer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

2. $u_n = -n^3(3n^2 + 5)$

3. $u_n = \left(-7 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)(n+1)$

41

Déterminer la limite (si elle existe) de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $u_n = \frac{1}{n}\cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

42

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n}(n^2 + 10)$;

2. $u_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5}$;

3. $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5n + 4}$.

43

1. On considère une suite (u_n) qui vérifie $u_n \geqslant 2n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On considère une suite (v_n) qui vérifie $v_n \leqslant -5n$ pour tout entier naturel n.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie $-\frac{1}{n} + 1 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n} + 1$ pour tout entier naturel n non nul.
Calculer la limite de la suite (w_n).

44

En utilisant les théorèmes de comparaison des limites, calculer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = n - \sin n$

2. $v_n = -n^2 + \cos n$

3. $w_n = \frac{4n + (-1)^n}{2n + 3}$

4. $z_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 3}$

45

Soit q un réel et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$ pour tout entier naturel n non nul.
Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne un message indiquant si (u_n) est convergente ou divergente :

```
def conv(q):
    if -1<q<1 :
        return("... .....")
    else :
        return("... .....")
```

46

Déterminer la limite éventuelle des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ suivantes en utilisant la limite d'une suite géométrique :

1. $u_n = \dfrac{4}{7^n}$
2. $u_n = 4^n + 7^n$
3. $u_n = 9^n - 3^n$
4. $u_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

47

Déterminer la limite éventuelle des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{5^n + 4^n}$
2. $u_n = 3^n - \sin n$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\sin(2^n)$
4. $u_n = 0,5^n \cos(n!)$

48

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$$
2. Étudier la convergence de la suite (v_n).

49

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n,

$$v_n = u_n - 6.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Justifier que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

50

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
2. On considère alors la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}.$$
   - **a.** Démontrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.
   - **b.** Exprimer, pour tout entier naturel n, t_n en fonction de n.
   - **c.** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - **d.** Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

51

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{n}{2^n} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$
2. En déduire que la suite (u_n) est majorée.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2,
$$n + 2 \leqslant 2^n.$$
4. La suite (u_n) est-elle minorée ?

52

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,8 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3 - u_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2.$$
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que ℓ vérifie l'égalité $\ell = \dfrac{2}{3 - \ell}$ puis en déduire la valeur de ℓ.

53

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

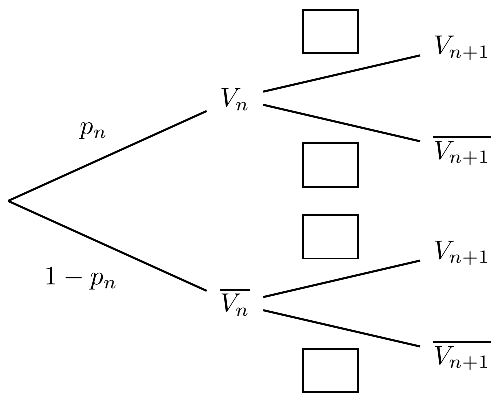
1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

a. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;

b. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

54

On définit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

1. a. Démontrer que pour entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_n = \frac{n}{2(n-1)}.$$

4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

55

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

56

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

a. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$,

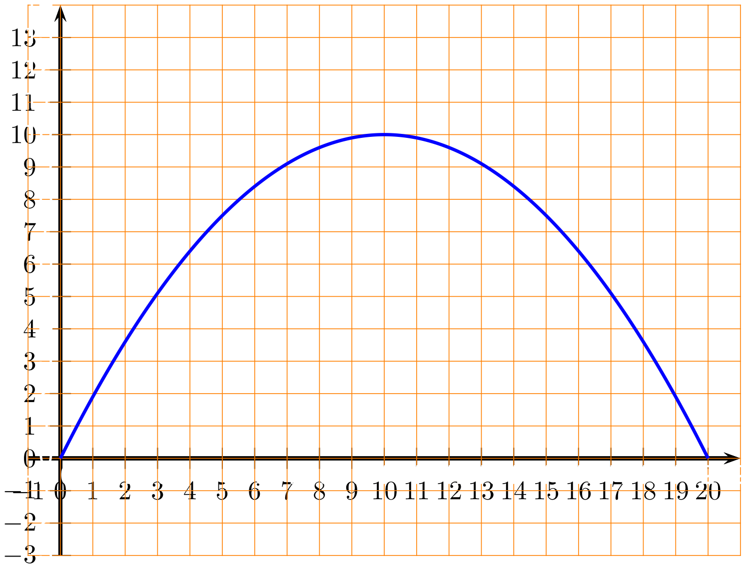
$$f(x) \in [0\ ;\ 10].$$

c. On donne ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ puis émettre une conjecture quant à son sens de variation et à sa convergence.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.



57

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n > 1$.

   c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b. On ne cherchera pas l'éventuelle limite de la suite (u_n) mais seulement son existence.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

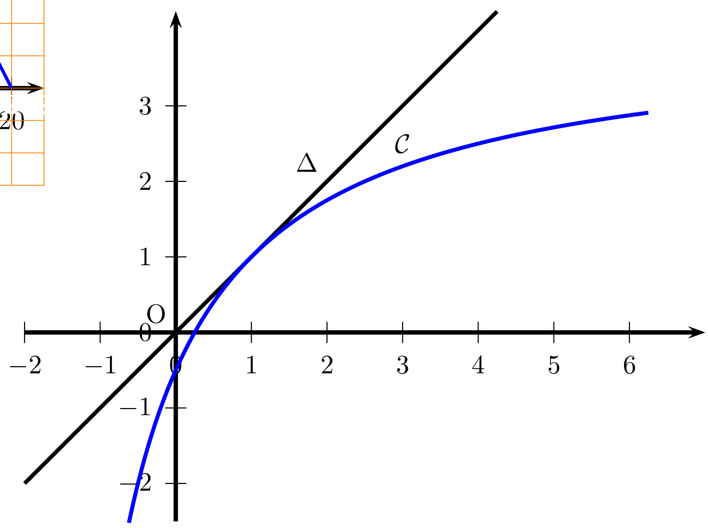
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).



58

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

On considère le programme

```
from math import sqrt
u=1
for i in range(1,n+1) :
    u=sqrt(2*u)
    print(u)
```

1. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$0 < u_n < u_{n+1} \leqslant 2.$$
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Démontrer que $\ell = \sqrt{2\ell}$ puis en déduire la valeur de ℓ.