130

On considère les droites d_1, d_2 et d_3 dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous. Pour chacune de ces droites, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur :

1. $d_1 : \begin{cases} x = 4-t \\ y = 22-t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 22t \end{cases}$

2. $d_2 : \begin{cases} x = 3+5t \\ y = -11-t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

3. $d_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 7t+6 \end{cases}$

131

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, donnés ci-dessous. Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$:

1. $A(-2\,;4\,;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A(5\,;0\,;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $A(16\,;40\,;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

132

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 5-t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}$$

Les points suivants appartiennent-ils à la droite $\mathscr{D}$? Justifier.

1. $C(0\,;-1\,;4)$

2. $D(7\,;4\,;3)$

3. $E(-5\,;8\,;-1)$

4. $F\left(\dfrac{11}{2}\,;\dfrac{9}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right)$

133

On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 7-t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -11-t \end{cases}$$

1. Justifier que les points $A(-5\,;11\,;-7)$ et $B(9\,;-3\,;-21)$ appartiennent à Δ.

2. Les points A et B sont-ils alignés avec le point $C(-4\,;4\,;6)$?

134

On considère les droites d_1 et d_2, dont on donne une représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 7-t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -11-t \end{cases} \text{ et } d_2 : \begin{cases} x = 3t'+1 \\ y = 4t', \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = -3t'+3 \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.

2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles :

a. parallèles ?

b. Coplanaires ?

c. Confondues ?

135

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont on donne une représentation paramétrique est donnée ci-dessous :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-2 \end{cases}$$

Soit $A(-2\,;2\,;6)$ et $B(-3\,;0\,;4)$ deux points de l'espace.

1. Les droites $\mathscr{D}$ sont-elles parallèles ?

2. Les droites $\mathscr{D}$ sont-elles orthogonales ?

136

On considère les droites Δ_1 et Δ_2, dont on donne une représentation paramétrique :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3t-6 \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases} \text{ et } \Delta_2 : \begin{cases} x = -3t'+3 \\ y = 2t-3', \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = t'+2 \end{cases}$$

1. Justifier que le point $A(-3\,;1\,;4)$ appartient à chacune de ces deux droites.

2. Que peut-on en déduire sur la position relative des droites Δ_1 et Δ_2 ?

3. Ces deux droites sont-elles perpendiculaires ? Confondues ?

137

Soit Δ la droite définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 7-4t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 10-2t \end{cases}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d parallèle à Δ qui passe par le point $A(-4\,;2\,;0)$.

2. a. Déterminer les coordonnées du point C de Δ de cote nulle.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite δ perpendiculaire à Δ qui passe par le point C.

138

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x &= 4-3t \\ y &= -1+2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= 3=2t \end{cases}$$

Le point $B(4\,;\,-1\,;\,3)$ est-il le projeté orthogonal du point $A(-1\,;\,0\,;\,1)$ sur la droite $\mathscr{D}$?

139

Dans les cas suivants, préciser les coordonnées d'un vecteur normal à chacun de ces plans dont on donne une équation cartésienne :

1. $\mathscr{P}_1 \;:\; 2x-5y+z-4=0$.
2. $\mathscr{P}_2 \;:\; 8x-y+5=0$.
3. $\mathscr{P}_3 \;:\; x+3y-z+12=0$.
4. $\mathscr{P}_4 \;:\; x=z$.

140

1. Parmi les plans suivants, lesquelles sont des équations de plans ?
   - **a.** $-3x-2y+7z=0$.
   - **b.** $x^2+y^2+z^2=0$
   - **c.** $y=2x-3$
   - **d.** $x^2-2y+3z^2+1=0$
   - **e.** $(x-1)^2-x^2+3y+z=0$
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun des plans trouvés.

141

Soit $\mathscr{P}$ le plan dont une équation cartésienne est $6x+3y+z-12=0$.

1. Le point $A(5\,;\,-1\,;\,-7)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
2. Soit c un réel. Pour quelle(s) valeur(s) de c le point $C(c\,;\,c\,;\,c)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$?

142

Soit a un réel et on considère le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $-8x+5y-3z-1=0$.
Pour quelle(s) valeur(s) du réel a le point $A(1\,;\,a\,;\,a^2)$ appartient-il au plan $\mathscr{R}$?

143

Soit $\mathscr{P}$ le plan de l'espace dont une équation cartésienne est :

$$-2x+3y+5z-1=0.$$

Les vecteurs suivants sont-ils des vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$?

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$.
3. $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
4. $\vec{s}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$.

144

On considère le plan $\mathscr{R}$ qui passe par le point A et dont le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{R}$ dans chacun des cas suivants :

1. $A(-2\,;\,4\,;\,1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$.
2. $A(5\,;\,3\,;\,-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$.
3. $A(-1\,;\,2\,;\,-3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$.

145

On considère les points $A(1\,;\,-1\,;\,4)$, $B(2\,;\,-3\,;\,0)$ et $C(2\,;\,-1\,;\,5)$.

1. Justifier que ces trois points définissent un plan.
2. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

146

On considère un plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $5x-3y+2z=0$ ainsi que les points $A(1\,;\,1\,;\,-1)$, $B\left(0\,;\,3\,;\,\frac{9}{2}\right)$ et $C(4\,;\,0\,;\,-10)$.
Justifier que le plan $\mathscr{R}$ est le plan (ABC).

147

On considère les plans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ dont on donne des équation cartésiennes : $\mathscr{R} \;:\; -3x+2y-z+7=0$ et $\mathscr{S} \;:\; x+y+3=0$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun de deux plans.
2. Le point $E(0\,;\,-3\,;\,1)$ appartient-il à ces deux plans ?
3. Ces deux plans sont-ils parallèles ? Sécants ? Perpendiculaires ? Justifier.

148

Soit les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives $2x+y-3z=0$ et $\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{9}{4}z-3=0$.
Ces plans sont-ils parallèles ? Perpendiculaires ? Justifier.

149

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ qui passe par le point $D(-1\,;\,3\,,;\,8)$ et qui est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-6y+3z-1=0$.

150

Dans chaque cas, déterminer si le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires :

1. $\mathscr{P}$: $2x+y+z-1=0$; $\mathscr{D}$ passe par $A(1\,;\,-1\,;\,2)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\\-4\end{pmatrix}$.
2. $\mathscr{P}$: $x+z-10=0$; $\mathscr{D}$ est la droite (BC) avec $B(-3\,;\,0\,;\,7)$ et $C(5\,;\,-4\,;\,-1)$.

151

On considère le plan $\mathscr{P}$: $x-3y+2z-2=0$ et le point $A(0\,;\,-1\,;\,1)$.
Le point $B\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$ est-il le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$? Justifier.

152

On considère les points $A(2\,;\,1\,;\,1)$, $B(3\,;\,-1\,;\,2)$ et $C(14\,;\,-8\,;\,10)$.

1. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que :
$$a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}.$$
2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$?
3. Que peut-on en déduire pour les points O, A, B et C ?

153

On considère les points $A(0\,;\,-2\,;\,1)$, $B(1\,;\,-3\,;\,2)$ et $C(-2\,;\,1\,;\,4)$.
Déterminer les coordonnées d'un point D tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit une base de l'espace.

154

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-5y+2z+1=0$ et la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 5-3t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

1. Justifier que la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles.
2. Justifier qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à l'intersection de Δ et $\mathscr{P}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :
$$3(2-2t)-5(5-3t)+2(2t)+1=0.$$
3. En déduire l'intersection entre le plan $\mathscr{P}$ et la droite Δ.

155

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ qui passe par le point $E(-3\,;\,1\,;\,-5)$ et qui est parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $-2x+7z-1=0$.

156

On considère les droites $\mathscr{D}$ et Δ de représentations paramétriques respectives :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ et } \quad \Delta : \begin{cases} x = 3+3u \\ y = 5+2u, \quad u\in\mathbb{R} \\ z = 2u \end{cases}$$

1. Justifier qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ si et seulement s'il existe un réel t et un réel u tels que :
$$\begin{cases} 2+t = 3+3u \\ 1-t = 5+2u, \quad u\in\mathbb{R} \\ t = 2u \end{cases}$$
2. En déduire les valeurs des réels t et u.
3. Conclure sur l'intersection des droites $\mathscr{D}$ et Δ.

157

On considère les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques respectives :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -t+3, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 5t+2 \end{cases} \text{ et } \quad d_2 : \begin{cases} x = -t'+1 \\ y = 3t', \quad t'\in\mathbb{R} \\ z = 2t'-4 \end{cases}$$

1. d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Orthogonales ?
2. d_1 et d_2 admettent-elles un point commun ?
3. En déduire la position relative de d_1 et d_2.

158

On considère les droites d et d' de représentations paramétriques respectives :

$$d : \begin{cases} x = -t \\ y = 2t+9, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = -t+8 \end{cases} \text{ et } \quad d' : \begin{cases} x = -t'+1 \\ y = 3t', \quad t'\in\mathbb{R} \\ z = 7t'-4 \end{cases}$$

d et d' sont-elles perpendiculaires ?

159

On note Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -3+t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 1-t \end{cases}$$

On note d la droite de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$$

Existe-t-il une droite orthogonale à la droite d et sécante avec la droite Δ ? Si oui, en donner une représentation paramétrique.