Chapitre 8

Dérivation globale

I. Fonctions dérivables sur un intervalle I

1. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Définition 1.

On dit que f est ***dérivable*** sur un intervalle I si f est dérivable en ***tout point*** x_0 de I. La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée ***fonction dérivée de*** f et se note f'.

$$\boxed{f' \ : \ x \longmapsto f'(x)}.$$

Exercice 1.8. Démontrons que la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout x_0 de $\mathbb{R}$ et que $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

2. Dérivées de fonctions usuelles

Théorème. Tableau des dérivées à connaître par cœur.

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'}$
$x \mapsto k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Remarque. Toutes ces formules se démontrent à l'aide du taux d'accroissement vu au chapitre 4.

Quid de la valeur absolue ?.

La fonction ***valeur absolue*** f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est ***dérivable*** sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Démonstration à faire. ■

Exercice 2.8.

1. Démontrer le résultat de la fonction carré.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

3. Dérivée d'une somme, d'un polynôme

Théorème.

Soit u et v deux fonctions définies et ***dérivables*** sur un même intervalle.

- La dérivée d'une ***somme*** de deux fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions :

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'}.$$

- La dérivée d'un ***produit*** d'une fonction par ***un nombre k*** est le produit par k de la dérivée de la fonction :

$$\boxed{(k \times u)' = k \times u'}.$$

Exercice 3.8. Soit $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 5$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

4. Dérivée d'un produit, d'un quotient

A. Dérivée d'un produit

Théorème.

Soit deux fonctions u et v définies et ***dérivables*** sur le même intervalle.
La dérivée du ***produit*** de ces deux fonctions est :

$$\boxed{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}.$$

Exercice 4.8. Soit $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 4)$. Calculer $f'(x)$ en utilisant la formule précédente.

B. Dérivée de l'inverse

Théorème.

Soit une fonction v définie et ***dérivable*** sur un intervalle I telle que v ***ne s'annule pas*** par sur cet intervalle I. La dérivée de **l'inverse** de v est :

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}.$$

Exercice 5.8. Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3x-3}$. Calculez $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

C. Dérivée d'un quotient

Théorème.

Soit deux fonctions u et v définies et ***dérivables*** sur le même intervalle où v ne s'annule par sur cet intervalle. La dérivée du ***quotient*** de ces deux fonctions est :

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}}.$$

Exercice 6.8. Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{4-x}$. Calculez $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{4\}$.

D. Dérivation et composition

Théorème.

Soit g une fonction ***dérivable*** sur un intervalle I. Pour tout réel x tel que $mx+p$ appartient à I, la fonction f définie par $f(x) = g(mx+p)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$\boxed{f'(x) = m \times g'(mx+p)}.$$

Exercice 7.8. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7x-4)^9$.
Calculer $f'(x)$.

II. Sens de variation et dérivée

Le théorème suivant, permet de déterminer ***les variations*** d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

Théorème admis.

- Si f' est ***nulle*** sur I, alors f est ***constante*** sur I.
- Si f' est ***strictement positive*** sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est ***strictement croissante*** sur I.
- Si f' est ***strictement négative*** sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est ***strictement décroissante*** sur I.

Théorème admis.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

- Si f admet un ***extremum local*** en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en x_0 ***en changeant de signe***, alors f admet un extremum local en x_0.

Exemples :

1. ***Cas d'un minimum*** :

x	a		x_0		b
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	minimum	$\nearrow$	

2. ***Cas d'un maximum*** :

x	a		x_0		b
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$	maximum	$\searrow$	

Un classique corrigé.

Déterminer les variations de la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$.

Étape 1 : Dériver la fonction La fonction f est un polynôme, donc sa dérivée est :

$$f'(x) = 3 \times x^2 + 4 \times 2x - 3$$
$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

Étape 2 : Déterminer le signe de la dérivée La dérivée f' est un trinôme du second degré, avec $a = 3$, $b = 8$ et $c = -3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100$.

Le discriminant est strictement positif, donc le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times 3} = -3$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Son tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	23	$\searrow$	$\frac{121}{27}$	$\nearrow$	

Étape 3 : Déduire les variations de la fonction du signe de sa dérivée. Fait à la fin du tableau précédent.