Chapitre 8

Nombres complexes et trigonométrie

***

I. Formules de trigonométrie

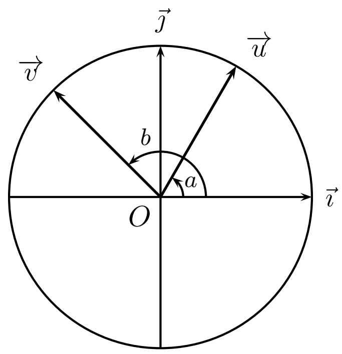
1. Formules d'addition

Propriété.

Soit a et b deux réels.

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b). \tag{8.1}$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a). \tag{8.2}$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b). \tag{8.3}$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a). \tag{8.4}$$

Démonstration. Preuve de la première égalité.
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires (c'est-à-dire de norme 1) et tels que $(\vec{i}\,;\vec{u}) = a$ et $(\vec{i}\,;\vec{v}) = b$ (voir le schéma).



On sait que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{i}) + (\vec{i}\,;\vec{v}) = \;\ldots\ldots$
Or on a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \cos(b-a)$
donc $\vec{u}.\vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car $\cos x = \;\ldots\ldots$
On sait aussi que $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$. Et donc $\vec{u}.\vec{v} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$.

On en déduit que : $\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}$.

Exemples. Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Formules de duplication

Des formules d'addition précédentes, en prenant $b = a$, on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés.

Soit a un réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\cos^2(a) = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Exercice 1.8.

1. Démonter que pour tout réel x : $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. (a) Exprimer $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

(b) En déduire les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ de $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1$.

II. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Définition.

Pour tout réel θ, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Remarques.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est le nombre complexe de ***module*** 1 et d'***argument*** θ.
- **Cas particuliers :** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

Exemple. Écrire la forme algébrique de $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. Relation fonctionnelle

Propriétés.

Soit θ et θ' deux nombres réels et n un entier relatif.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} =$ __________________.
- $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n =$ __________________.
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ __________________.
- $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} =$ __________________.
- $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ __________________.

Exercice 2.8. Simplifier les écritures suivantes :

1. $\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$.

2. $\left(3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4$.

3. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Propriété.

Soit z un nombre complexe ***non nul***, r et θ deux réels avec $r > 0$.
$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi] \Longleftrightarrow z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
L'écriture $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est appelée ***forme exponentielle*** de z.

Exercice 3.8. On donne $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle puis la forme algébrique de $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{13}$.

III. Formules d'Euler et de De Moivre

1. Formules d'Euler

Propriété.

Pour tout réel θ,

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}.$$

Exercice 4.8. Démontrer que pour tout réel x,

$$\cos(2x)\sin(3x) = \frac{1}{2}\left(\sin(5x) + \sin(x)\right).$$

2. Formules de De Moivre

Propriété.

Pour tout réel θ et tout entier naturel n,

$$\boxed{\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}.$$

Exemple. Utiliser la formule de De Moivre pour $n = 2$ et retrouver les formules de duplication.