CHAPITRE 3

Fonctions affines

Plan du chapitre

1. Rappels sur les fonctions affines

1.1 Expression

Définition 1

Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme $f(x) = mx + p$, où m et p sont des réels, sont appelées **fonctions affines**.

Cas particuliers :

- si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite **constante** ;
- si $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite **linéaire**.

1.2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère.

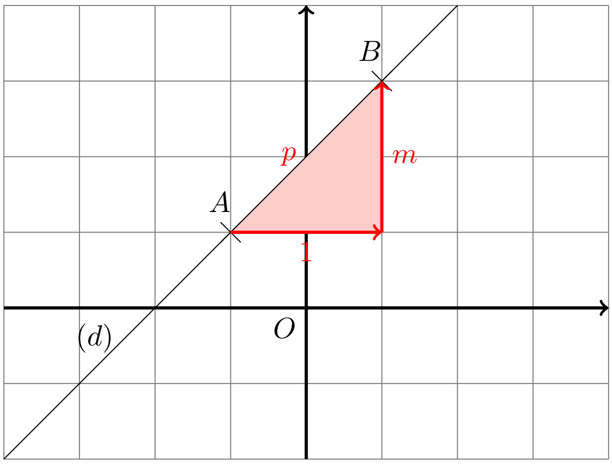
Théorème 1

Toute fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est représentée par **une droite** $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées qui aura pour équation $y = mx + p$.
Réciproquement, toute expression de la forme $y = mx + p$ est celle d'une fonction affine.
Par ailleurs :

- p s'appelle **ordonnée à l'origine** : la droite $\mathscr{D}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.
- m s'appelle **le coefficient directeur ou pente** de la droite $\mathscr{D}$, et **le taux d'accroissement de f** :
  Si $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ sont deux points de $\mathscr{D}$ tels que $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$ alors :

$$m = \frac{f(x_\mathrm{B}) - f(x_\mathrm{A})}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Illustration.



Exemple. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-1) + 7(x-3)$. Démontrer que la fonction f est une fonction affine.

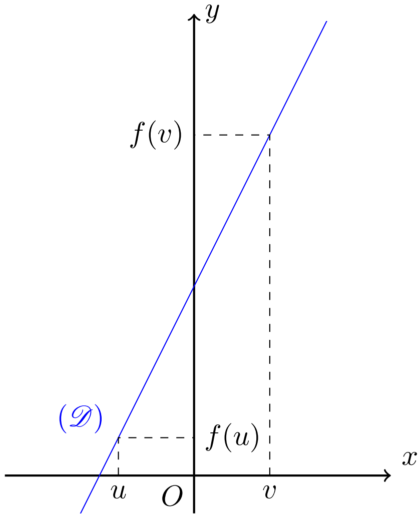
2. Variations d'une fonction affine

Théorème 2

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

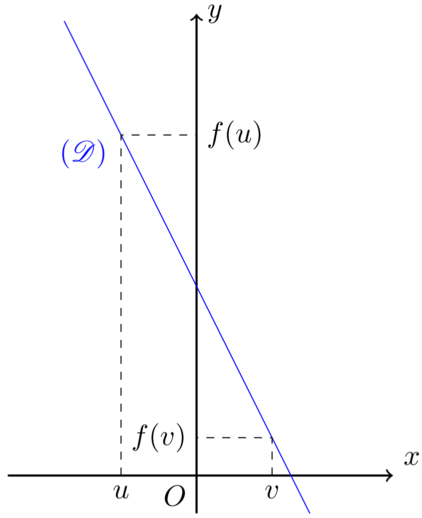
$m > 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
On dit que f **conserve l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$:



$m < 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.
On dit que f **ne conserve pas l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$:



Exemples.

1. Pour $f : x \longmapsto 1,5x$: comme $m = 1,5 > 0$, si $u < v$ alors, $1,5u < 1,5v$, c'est-à-dire $f(u) < f(v)$.
2. Pour $g : x \longmapsto -0,4x$: comme $m = -0,4 < 0$, si $u < v$ alors,$-0,4u > -0,4v$, c'est-à-dire $f(u) > f(v)$.

Remarque : à partir des variations d'une fonction, on peut élaborer son **tableau de variations** : c'est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de cette fonction.

À retenir :

1. Cas $m < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	

2. Cas $m = 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f		$\rightarrow$	

3. Cas $m > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$	

Exemple. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 2$.

3. Signe d'une fonction affine

Définition 2

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.

- On appelle *racine* de f le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
- Le point de coordonnées $(x_0\,; 0)$ est le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Propriété

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$ admettant pour racine x_0. Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :

❒ Si $m > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

❒ Si $m < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	