Exercice 1.

1. $F_1(x) = 5\ln(x^2+3)$ par exemple.
2. $F_2(x) = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4\sin(x)}$ par exemple.
3. $F_3(x) = \dfrac{1}{6}[\ln(x)]^6$ par exemple.
4. $F_4(x) = 2\sqrt{\mathrm{e}^x + x}$ par exemple.

Exercice 2. Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.

La température des macarons passe, en 15 minutes, de $-18\,°\mathrm{C}$ à $1\,°\mathrm{C}$, donc augmente de 19 °C.

En supposant que la vitesse de décongélation est constante, la température des macarons passerait à $1+19=20\,°\mathrm{C}$ au bout de 30 minutes, et à $20+19=39\,°\mathrm{C}$ au bout de 45 minutes.

Mais c'est impossible que la température des macarons soit supérieure à la température ambiante, donc le modèle n'est pas pertinent.

Deuxième modèle

1. $\theta'(t) = a\Big[\theta(t)-20\Big] \iff \theta'(t) = a\theta(t) - 20a \iff \theta'(t) - a\theta(t) = -20a$ qui s'écrit $\theta' - a\theta = -20a$.

   D'après le cours, l'équation différentielle $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$) a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

   Donc l'équation différentielle $\theta' - a\theta = -20a$ a pour solutions les fonctions θ dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et définies par :
$$\theta(t) = k\mathrm{e}^{at} + 20 \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

2. - On sait que $\theta(0) = -18$ donc $k\mathrm{e}^0 + 20 = -18$ donc $k = -38$.
     On en déduit que : $\theta(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{at}$.
   - On sait que $\theta(15) = 1$ donc $20 - 38\mathrm{e}^{15a} = 1$ ce qui équivaut à $\mathrm{e}^{15a} = \dfrac{-19}{-38}$ ou encore $\mathrm{e}^{15a} = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $15a = \ln\dfrac{1}{2}$ soit $15a = -\ln 2$; on en déduit que $a = -\dfrac{\ln 2}{15}$.

   On a donc démontré que pour tout t positif on a bien : $\theta(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$.

3. La température idéale de dégustation des macarons étant de $15\,°\mathrm{C}$, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min.

   Au bout de 30 minutes, la température sera de
   $\theta(30) = 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{30\times\ln 2}{15}} = 20 - 38\mathrm{e}^{-2\ln 2} = 20 - \dfrac{38}{4} = 10{,}5\,°\mathrm{C}$. Donc Marie a tort.

   Il faut chercher une température t pour laquelle $\theta(t) = 15$; on résout cette équation :
$$\theta(t) = 15 \iff 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}} = 15 \iff 5 = 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}} \iff \frac{5}{38} = \mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$$
$$\iff \ln\left(\frac{5}{38}\right) = -\frac{t\ln 2}{15}$$
$$\iff \frac{\ln\left(\frac{5}{38}\right)}{-\frac{\ln 2}{15}} = t$$

   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{38}\right)}{-\frac{\ln 2}{15}} \simeq 43{,}9$ donc il faudra attendre environ 44 minutes.

Exercice 3.

Partie A

1. u dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a $u'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$ ce qui prouve que la fonction u est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. La fonction u est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ car dérivable, elle l'est donc également sur $[2\,;\,3]$. u est strictement croissante sur $[2\,;\,3]$. De plus, $0\in[\ln(2)-1\,;\,\ln(3)]$ intervalle image de l'intervalle $[2\,;\,3]$ par la fonction u. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x)=0$ a une solution unique α dans $[2\,;\,3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0\,;\,+\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Compte-tenu du sens de variation de u et des questions précédentes, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1-\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}[\ln(x)-2]=-\infty$ donc par produit des limites, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]=+\infty$ puis que :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$$

2. (a) f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.
   $\forall x>0$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)-2+x-1)\\&=\frac{1}{x^2}(\ln(x)+x-3)\\&=\frac{u(x)}{x^2}\end{aligned}$$

   (b) Pour tout $x>0$, $x^2>0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty]$.

x	0		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. Un point $M(x\,;\,y)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& f(x) \\ y &=& \ln(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x) \\ f(x) &=& \ln(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x) \\ 0 &=& f(x)-\ln(x) \end{array}\right.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x). \text{ On met au dénominateur } x \text{ :} \\ &= \frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left(2-\ln(x)\right) \end{aligned}$$

Or $2-\ln(x)=0 \iff \ln(x)=2 \iff x=\mathrm{e}^2$.

Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x=\mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y=\ln(\mathrm{e}^2)=2$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{array}{lcl} I &=& \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &=& \displaystyle 2\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \end{array}$$

Or ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :

$$\begin{array}{lcl} I &=& 2\left[\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} - \left[H(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} \\ &=& 2\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)-\ln(1)\right) - \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)^2 - \ln(1)^2\right) \\ &=& 2 \end{array}$$

L'aire délimitée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$ est donc égale à 2.

Bonus : on pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$. On en déduit que $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ par exemple. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ à dérivées continues. On intègre par parties.

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\mathrm{d}x &=& \left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x \\ &=& \left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{4}\left[x^2\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &=& \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 0 - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4} \\ &=& \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4} \end{array}$$