Exercice 1.

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $I =]-\pi\,;\,\pi]$ et sur $J = [0\,;\,2\pi[$:

1. $2\sin(x) + \sqrt{2} = 0$
2. $4\cos^2(x) - 1 = 0$
3. $2\sin(x) + 1 > 0$
4. $\sqrt{2}\cos(x) \geqslant 1$

Exercice 2.

Démontrer que T est une période de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ et $T = 1$.
2. $f(x) = \cos(x)\sin(x)$ et $T = \pi$
3. $f(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{3+\sin(x)}$ et $T = 2\pi$
4. $f(x) = 5\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $T = 4\pi$.

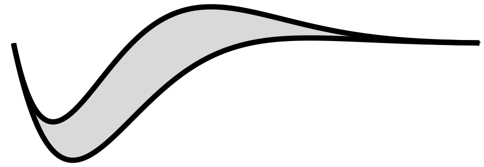
Exercice 3.
f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{2+\cos(x)}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est paire.
3. Démontrer que f est 2π-périodique. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier f ?
4. Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
5. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
6. Tracer $\mathscr{C}$ sur $[-\pi\,;\,3\pi]$.

Exercice 4.
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1$.

1. Déterminer la période et la parité de la fonction f.
2. Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
3. Calculer la fonction dérivée f'et déterminer son signe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice 5.
Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A : étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   (a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   (b) En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Partie B : aire du logo

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

(a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-dessous.

(b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.