1. (a) $u_1 = \dfrac{2}{3}u_0 + \dfrac{1}{3} \times 0 + 1$ donc $u_1 = \dfrac{7}{3}$, de même $u_2 = \dfrac{26}{9}$.
   (b) $u_2 > u_1 > u_0$, il semble donc que la suite (u_n) soit croissante.
2. (a) Démontrons cela par récurrence : soit $\mathscr{P}_n$: « $n \leqslant u_n \leqslant n+3$ ».

   Initialisation : $u_0 = 2$ et $0+3 = 3$, on a bien :
   $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+3$: *la propriété $\mathscr{P}_0$ est bien vraie.*
   Hérédité : supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire $k \leqslant u_k \leqslant k+3$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire : $k+1 \leqslant u_{k+1} \leqslant k+4$.

$$\begin{array}{rcll}
k & \leqslant u_k & \leqslant k+3 & \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
\dfrac{2}{3}k & \leqslant \dfrac{2}{3}u_k & \leqslant \dfrac{2}{3}(k+3) & \\
\dfrac{2}{3}k + \dfrac{1}{3}k & \leqslant \dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k & \leqslant \dfrac{2}{3}(k+3) + \dfrac{1}{3}k & \\
\dfrac{2}{3}k + \dfrac{1}{3}k + 1 & \leqslant u_{k+1} & \leqslant \dfrac{2}{3}(k+3) + \dfrac{1}{3}k + 1 & \\
k+1 & \leqslant u_{k+1} & \leqslant k+3 & \\
k+1 & \leqslant u_{k+1} & \leqslant k+4 &
\end{array}$$

   La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
   <u>Conclusion :</u> $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_n \leqslant n+3$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl}
u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - u_n \\
 & = & -\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{3}{3} \\
 & = & \dfrac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) \\
 & = & \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)
\end{array}$$

   (c) Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\dfrac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.
3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl}
v_{n+1} & = & u_{n+1} - (n+1) \\
 & = & \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - n - 1 \\
 & = & \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{2}{3}n = \dfrac{2}{3}(u_n - n) \\
 & = & \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{2}{3}n = \dfrac{2}{3}(u_n - n) \\
 & = & \dfrac{2}{3}v_n
\end{array}$$

   v_{n+1} s'écrit sous la forme $v_n \times q$ avec $q = \dfrac{2}{3}$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.
   (b) On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n.$$

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :
$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

(c) $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par somme des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. (a) S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premier entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :
$\frac{0+n}{2} \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ (résultat classique).

Finalement, on a $S_n = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) On en déduit :

$$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites :

$$\lim_{n\to+\infty} 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\frac{1}{2}$.