Chapitre 6

Fonctions trigonométriques

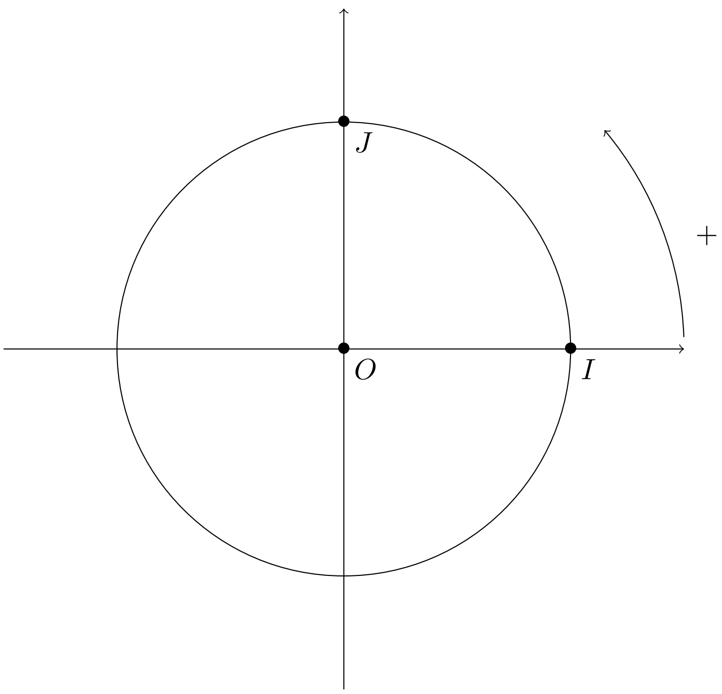
***

I. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

1. Cercle trigonométrique

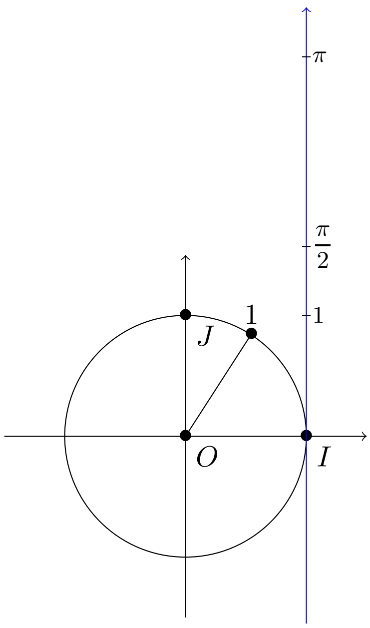
Définition 1.

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.
On appelle ***cercle trigonométrique*** le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, muni d'un sens ***direct*** dit ***trigonométrique*** : le sens ***inverse*** des aiguilles d'une montre.



2. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

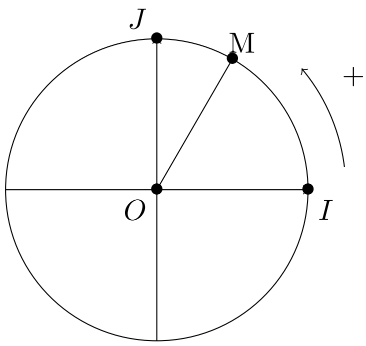
La droite d'équation $x = 1$, tangente au cercle trigonométrique en I représente la droite graduée des réels, I représentant le zéro de cette droite des réels. On enroule cette droite autour du cercle trigonométrique , le point I de la droite restant immobile. Chaque point du cercle est ainsi marqué, repéré par un nombre de la droite des réels. Et même de ***plusieurs***, puisque la droite est infinie et qu'elle fait donc ***plusieurs fois*** le tour du cercle.



Plaçons sur le cercle les points correspondants à $\dfrac{\pi}{2}$, π, $-\pi$ et $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. Conversion radian degré

Propriété. Si M est un point du demi-cercle au dessus de l'axe des abscisses. Le réel x de la droite des réels de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ associé est une mesure en ***radian*** de l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$.



Exercice 1.6.

1. Convertir 36° en radian.
2. Convertir $\dfrac{4\pi}{5}$ radian en degrés.

II. Cosinus et sinus

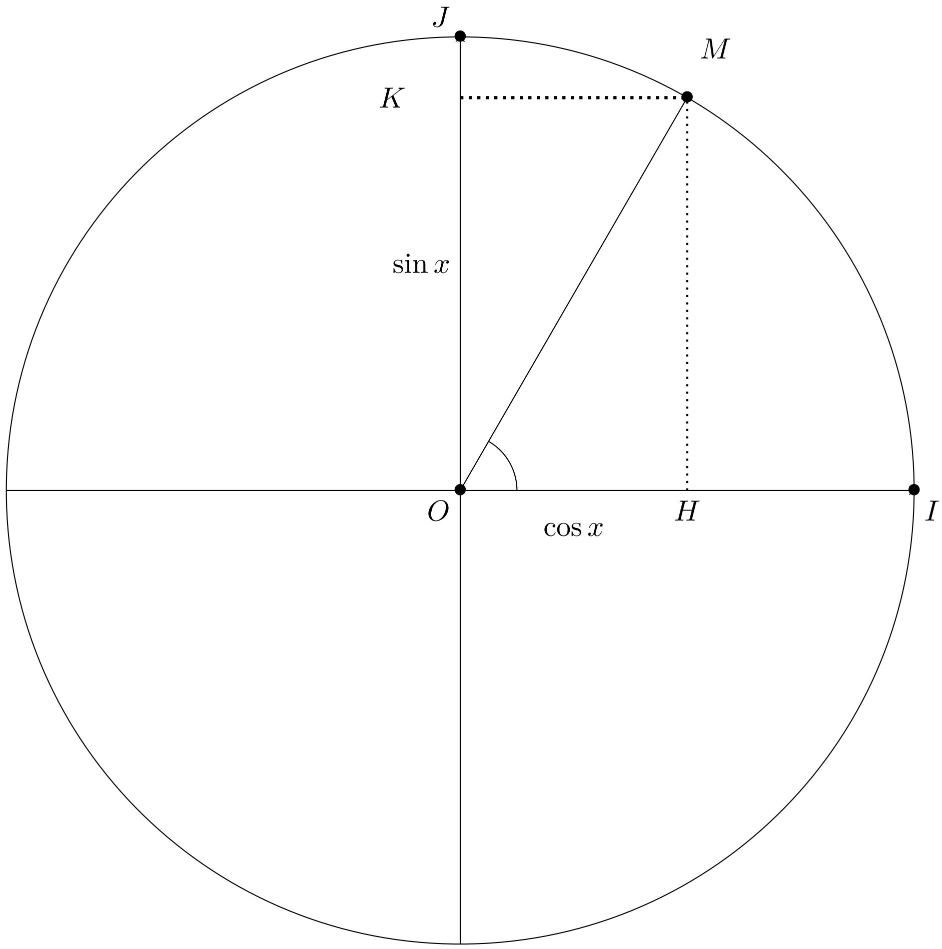
1. Définition

Définition 2.

Soit x un réel et M le point associé à x.

1. le ***cosinus*** de x est ***l'abscisse*** de M.
2. le ***sinus*** de x ***l'ordonnée*** de M.

$$\boxed{\cos x = x_M \qquad \text{et} \qquad \sin x = y_M}.$$



2. Propriétés fondamentales

Propriétés.

Pour tout nombre réel x :

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
2. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ que l'on peut écrire également $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Démonstration.

En effet l'abscisse de M est toujours comprise entre -1 et 1...

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ se montre avec la distance OM qui vaut 1. Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{array}{rcl} OM^2 & = & OH^2 + HM^2 \\ & = & (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 \\ & = & x_M^2 + y_M^2 \\ & = & (\cos x)^2 + (\sin x)^2 \\ & = & 1 \end{array}$$

donc :

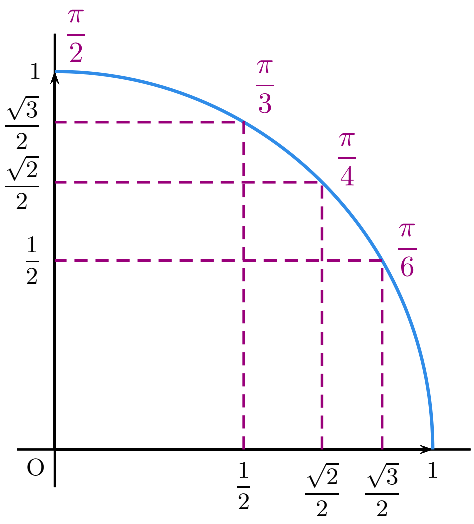
$$\boxed{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$$

■

3. Valeurs remarquables des cosinus et sinus

Propriété.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



III. Fonction cosinus et sinus

1. Périodicité

Définition 3.

Une fonction trigonométrique f définie sur $\mathbb{R}$ est ***périodique*** de ***période*** T si et seulement si :

$$\boxed{f(x+T) = f(x)}.$$

2. Périodicité de sin et cos

Propriété.

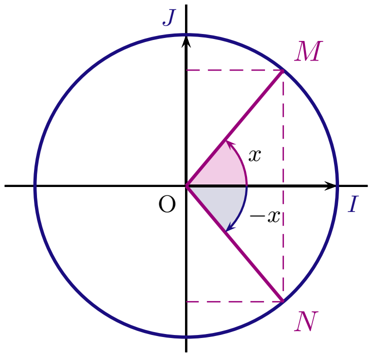
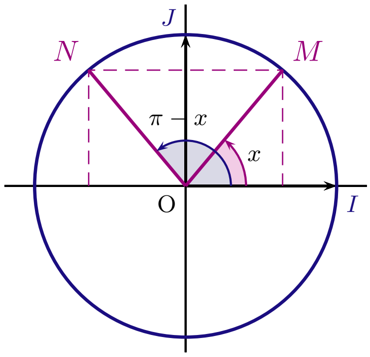
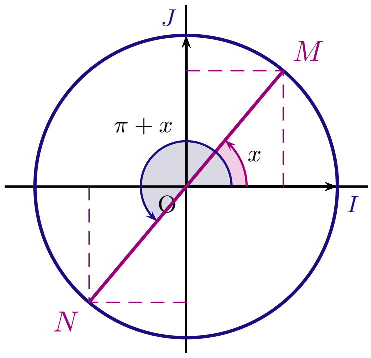
Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $(x+2\pi)$ sont confondus. Ainsi on a :

$$\boxed{\cos(x+2\pi) = \qquad\qquad \text{et } \sin(x+2\pi) = \qquad\qquad}$$

On dit que les fonctions cos et sin sont ***périodiques*** de période 2π.

Exercice 2.6. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\pi x)$ est périodique de période $T = 2$.

3. Angles associés

Pour tout réel x :	Pour tout réel x :	Pour tout réel x :
$\cos(-x) = \ .....$ $\sin(-x) = \ .....$	$\cos(\pi - x) =$ $\sin(\pi - x) =$	$\cos(\pi + x) =$ $\sin(\pi + x) =$
		
M et N sont symétriques par rapport à (OI)	M et N sont symétriques par rapport à (OJ)	M et N sont symétriques par rapport à O

On dit que la fonction cos est ____________ et la fonction sin est __________________.

4. Variations et représentations graphiques

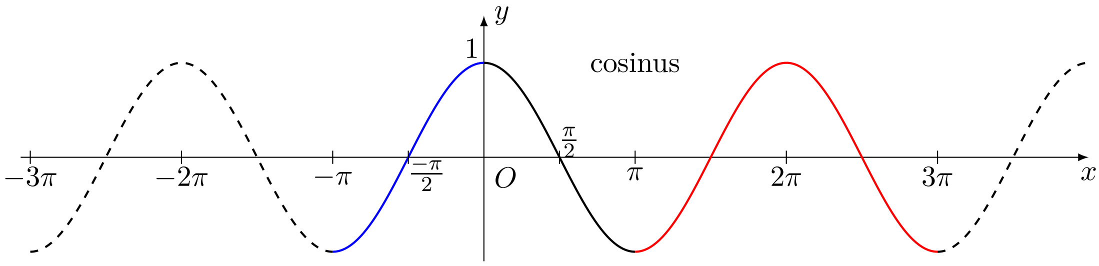
Grâce à la périodicité des fonctions cos et sin, et au fait que l'un est ***paire*** et l'autre ***impaire***, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

A. La fonction cosinus

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,\pi]$:

x	0		π
signe de $\cos'(x)$		$-$	
Variations de cos	1	$\searrow$	-1

Ensuite, grâce à la parité de la fonction cosinus on peut compléter sur $[-\pi\,;\,0]$ puis on reporte sur les autres intervalles grâce à la périodicité.

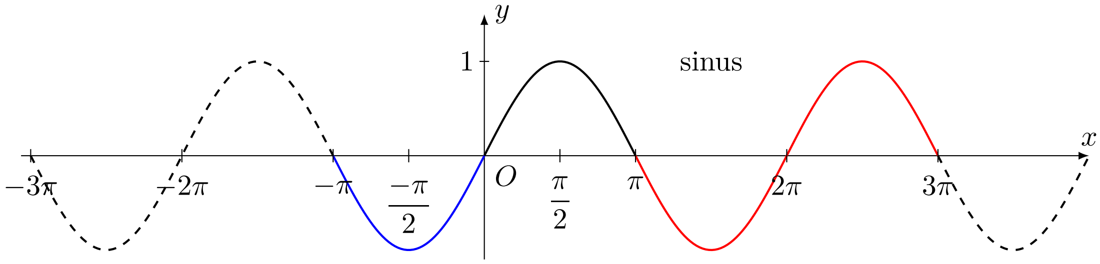


La partie noire pleine est la représentation sur $[0\,;\,\pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction paire donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi\,\vec{i}$).

B. La fonction sinus

De même, pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



La partie noire pleine est la représentation sur $[0\,;\,\pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction impaire donc symétrie par rapport à l'origine) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$).