Exercice 1.

1. (a) F est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1\times\ln x + x\times\ln x - 1 \\ &= \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent $F' = f$ donc F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
On a donc : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\ \mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1) = (\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (1\ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1.$

(b) $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\ \mathrm{d}x.$

On pose $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, on a $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$

u et v sont dérivables sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ à dérivées continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On a : $u'(x) = 2\times\dfrac{\ln x}{x}$ et $v(x) = x$ par exemple. Il vient :

$$\begin{aligned} J &= \left[x(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\frac{\ln x}{x}\times x\ \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\ \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - 2I \end{aligned}$$

(c) Puisque $I = 1$, on obtient : $J = \mathrm{e} - 2$.

(d) Pour tout x de $[1\,;\,\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\ln x)^2 \leqslant \ln x$ donc $g(x) \leqslant f(x)$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\ \mathrm{d}x \\ &= I - J \\ &= 3 - \mathrm{e} \end{aligned}$$

2. On a $M(x\,;\,\ln(x))$ et $N(x\,;\,(\ln(x))^2)$ donc $MN = \ln x - (\ln x)^2$. Posons $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$.
h est dérivable sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ et pour tout x de cet intervalle , $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$.
$h'(x) = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$
Puisque x est positif, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$.
$1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < \dfrac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \iff x < \sqrt{\mathrm{e}}.$
Par conséquent, h a un maximum pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.
$h(\sqrt{\mathrm{e}}) = \ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - (\ln(\sqrt{\mathrm{e}}))^2 = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}.$
MN est maximum pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ et vaut alors $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$.

1. (a) Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi) + \sin^2(x+2\pi) \\ &= \cos(x) + \sin^2(x) \quad \text{car} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que f est bien $2\pi -$ périodique.

(b) Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + \sin^2(-x) \\ &= \cos(-x) + (\sin(-x))^2 \\ &= \cos(x) + (-\sin(x))^2 \\ &= \cos(x) + \sin^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que f est paire.

(c) f étant $2\pi -$ périodique et paire, on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0\,;\,\pi]$.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \sin(x)(2\cos(x) - 1) \end{aligned}$$

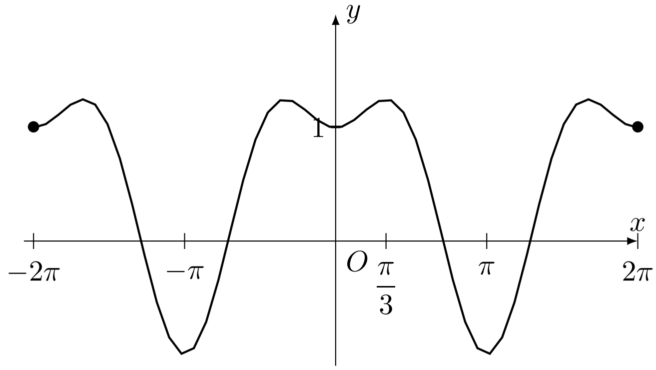
(b) Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ on a $\sin(x) \geqslant 0$.
Or $2\cos(x) - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
À l'aide du cercle trigonométrique, sur $[0\,;\,\pi]$, l'inéquation $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ a pour solution $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$. On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
signe de $\sin(x)$	0	$+$	0	$+$	0
signe de $2\cos(x) - 1$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

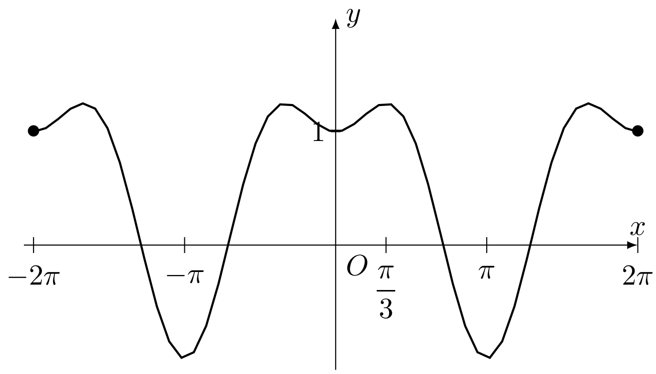
On en déduit le tableau de variation de f sur $[0\,;\,\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
Variation de f	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1

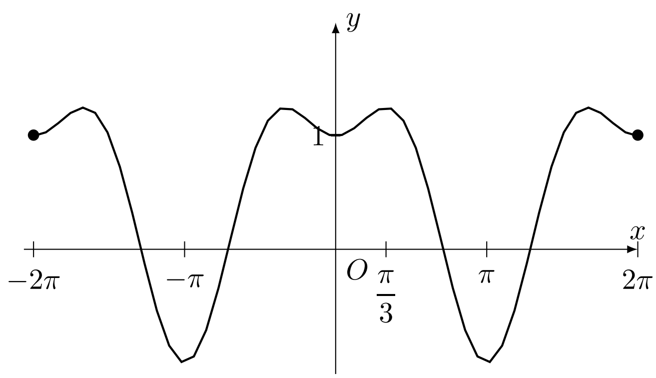
3. Voici le tracé complet sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$:



3. Voici le tracé complet sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$:



3. Voici le tracé complet sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$:



3. Voici le tracé complet sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$: