160

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2e^x - 3 = 0$
2. $e^{-x+2} - 1 = 0$
3. $e^{2x} = 4$
4. $(2e^x - 1)(e^x + 6) = 0$.

161

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x) - 5 = 0$
2. $3\ln(x) - 1 = 0$
3. $(\ln(x) + 5)(5 - 4\ln(x)) = 0$
4. $(\ln(x))^2 = 4\ln(x)$.

162

Résoudre en posant $X = \ln x$ ou $X = e^x$:

1. $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$
2. $2(\ln x)^2 - \ln x - 15 = 0$
3. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

163

À partir de sa mise en culture, l'évolution d'une population de bactéries est fonction du temps est donnée par $g(t) = 10^6 e^{0,25t}$ où t est exprimé en heures. Calculer :

1. la population initiale à $t = 0$,
2. le temps au bout duquel la population initiale aura triplé.

164

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), d'un médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est :
$f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{\frac{1}{2}}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}. Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

165

Exprimer en fonction de $\ln 3$:

1. $a = \ln(9)$
2. $b = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$
3. $c = \ln\left(3\sqrt{3}\right)$
4. $d = \ln(36) - 2\ln(2)$

166

Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ uniquement :

1. $a = \ln(10) - \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
2. $b = \ln(0,05)$
3. $c = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$
4. $d = 2\ln(5e^2) + \ln(4e^{-1})$

167

Simplifier les expressions suivantes :

1. $a = \ln(e^4) + 3\ln(e^{-1})$
2. $b = e^{2\ln(5)} - \ln\left((e^5)^2\right)$
3. $c = \ln(e^{-3}) \times \ln(e^3)$
4. $d = 20\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln(2)}$

168

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique en précisant sa raison et son premier terme.

169

Déterminer la valeur exacte du nombre réel :

$$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{2020}{2021}\right).$$

170

1. Démontrer que pour tout réel $x > -1$ on a :
$$2\ln(x+1) = \ln(x^2 + 2x + 1)$$
2. Démontrer que pour tout réel x, on a :
$$\ln(1 + e^{-2x}) = -2x + \ln(1 + e^{2x})$$

171

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln x < 10$
2. $2\ln x + 200 > 0$
3. $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$
4. $2\ln(x) - 6\ln(3) < 0$

172

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \ln(x).$$

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et l'axe des abscisses.
2. Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et l'axe des abscisses.

173

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $0,99^n \leqslant 10^{-30}$
2. $1,02^n > 10^{2020}$

174

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par :

1. $f_1(x) = \ln(3x-7)$
2. $f_2(x) = \ln(-x^2+4x-3)$
3. $f_3(x) = \ln(x) - 3\ln(2-x)$

175

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé que quel ensemble on peut les résoudre :

1. $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$
2. $\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5)$
3. $2\ln(x) = \ln(5x-3)$.

176

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé que quel ensemble on peut les résoudre :

1. $\ln\left[(x-3)(2x+1)\right] = \ln(4)$
2. $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2\ln(2)$

177

Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminé que quel ensemble on peut les résoudre :

1. $\ln(3x-4) < 0$
2. $\ln(-x+3) \geqslant 1$
3. $\ln(1-x) \leqslant \ln(x)$
4. $\ln(3+2x) < \ln(x-3)$

178

On détermine le pH d'une solution en mesurant la concentration en ions H_3O^+.
Le pH est défini par la relation $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$, où $[H_3O^+]$ est la concentration en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ d'ions H_3O^+ de la solution. On admet que $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel $x > 0$.

1. Quel est le pH d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est de $10^{-6,5}$ $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$?
2. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution de pH égal à $8,4$?
3. Si la concentration en ions H_3O^+ d'une solution est multipliée par $10\,000$, quelle augmentation du pH cela produit-il ?

179

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition D :

1. $f_1(x) = \ln(2x-6)$ et $D =]3 \ \ +\infty[$
2. $f_2(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 3)$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f_2(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x})$ sur $D = \mathbb{R}$.

180

On considère la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \ln(2x-1) - x + 1.$$

1. Calculer la limite de f en $\dfrac{1}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$:
$$f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$
b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ avec $\alpha < \beta$.
4. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée de β au dixième près.

181

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\ln x.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par O.
2. Préciser l'équation de cette tangente.

182

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note α cette solution.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

183

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x+1}.$$

1. Calculer la limite de f en 0.

2. a. Vérifier que pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right).$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

184

Soit n un entier naturel non nul. On rappelle le résultat : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.

3. Soit la droite (Δ) d'équation $y = x$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).

4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et (Δ).

a. Déterminer la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.

b. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

185

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a > 0$.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$?

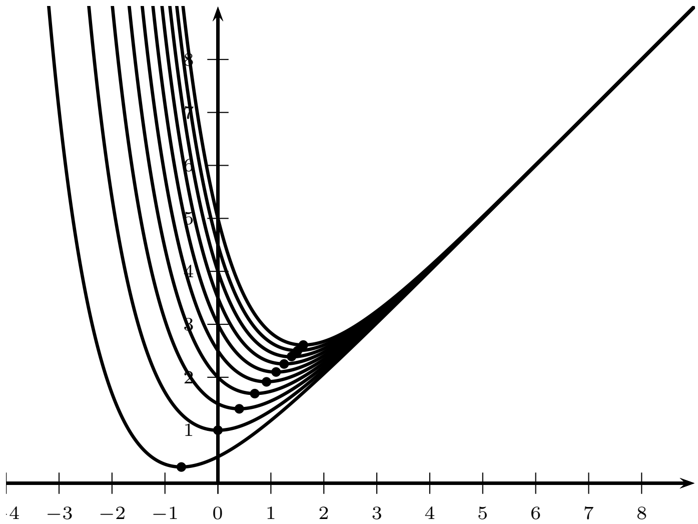
186

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

187

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Démontrer tous les éléments du tableau : limites, extremum, signe de la dérivée.

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.

3. a. En utilisant l'égalité, $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$, comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.

b. Démontrer que la suite (α_n) est décroissante.

c. La suite (α_n) est-elle convergente ? Justifier.