

Les suites

I. Généralités

Intuitivement, une suite de nombres réels est *une liste ordonnée* de nombres réels, finie ou infinie. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrions noter u_1 , un deuxième u_2 , un troisième u_3 et, de manière générale, un n^{e} u_n .

1. Définition et notations

Définition 1.

Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés. À un rang donné n , on associe un nombre réel u_n .

Exemples.

- Soit la suite $(u_n) : 1, 4, 7, 10, \dots$:

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	4	7	10	13	16

- Soit la suite $(v_n) : 3, 6, 12, 24, 48, 96 \dots$:

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
3	6	12	24	48	96

- Soit la suite $(w_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8 \dots$:

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	1	2	3	5	8

2. Définir une suite

A. Sous forme explicite

Définition 2.

Une suite (u_n) est définie de *façon explicite* si le terme général u_n s'exprime en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

Exemples.

- Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 3n + 5$. On a $u_{10} =$.

- Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{n^2}{2n+1}$. On a $v_3 =$.

B Sous forme récurrente

Définition 3.

Lorsque le terme général un dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une *relation de récurrence* et par un ou plusieurs premier(s) terme(s). La suite est dite *récurrente* à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent.

$$u_0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n).$$

La suite est dite *récurrente d'ordre 2* si un dépend des deux termes qui le précèdent.

$$u_0, u_1 \text{ et } u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}).$$

Exemples.

- Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 - 2 \text{ donc } u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4. \\ u_2 &= 3u_1 - 2 \text{ donc } u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10. \\ u_3 &= 3u_2 - 2 \text{ donc } u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28. \\ u_4 &= 3u_3 - 2 \text{ donc } u_4 = 3 \times 28 - 2 = 82. \end{aligned}$$

Remarque. Ce programme calcule les termes de la suite de façon itérative, c'est à dire qu'il part du premier terme et calcule les suivants jusqu'au terme voulu. Une autre façon de programmer en python est de créer une fonction faisant appel à elle-même à l'ordre inférieur, c'est à dire qu'elle part du terme à déterminer puis descend la récurrence en direction du terme initial.

```
def u(n):
    u=2
    for i in range(1,n+1):
        u=3*u-2
    return u
```

Programme itératif

```
def u(n):
    if n==0:
        return 2
    return 3*u(n-1)-2
```

Programme récursif

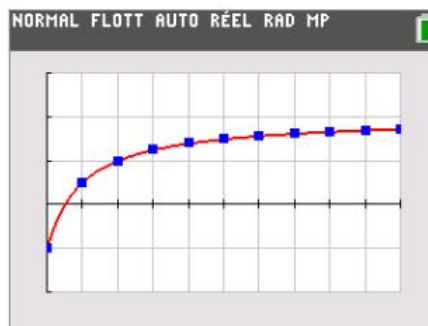
- On donne la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + v_0 = 2 + 1 \text{ donc } v_2 = 3. \\ v_3 &= v_2 + v_1 = 3 + 1 \text{ donc } v_3 = 4. \\ v_4 &= v_3 + v_2 = 4 + 3 \text{ donc } v_4 = 7. \\ v_5 &= v_4 + v_3 = 7 + 4 \text{ donc } v_5 = 11. \end{aligned}$$

3. Visualisation d'une suite

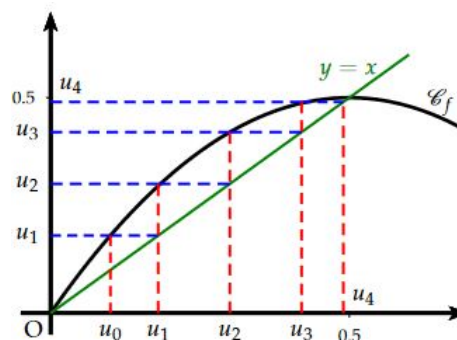
A. Cas d'une suite explicite

Une suite explicite est définie par $u_n = f(n)$, il suffit de connaître la représentation de la fonction f pour représenter la suite. Sur la calculatrice, représentons les termes de u_0 à u_{10} de la suite : $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Ces termes grâce au nuage de points associé à la courbe représentative de la fonction f .



B. Cas d'une suite récurrente d'ordre 1

Une suite définie par récurrence d'ordre 1 est définie par un premier terme (souvent u_0) et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. En plus de la représentation de la fonction f , il faut tracer la droite d'équation $y = x$ afin de reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses. Prenons l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. On obtient alors le graphe suivant, après avoir tracé la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie par : $f(x) = 2x(1 - x)$.



II. Suites arithmétiques

1. Définition

Définition 4.

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.



La **raison d'une suite arithmétique** est un réel **indépendant** de n .

Illustration :

2. Comment reconnaître une suite arithmétique ?

Propriété. Une suite est **arithmétique** lorsque la différence entre deux termes consécutifs est **constante**. On doit donc avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r.$$



Exercice 1.5. Démontrer que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 4n + 1$ est arithmétique.


3. Expression du terme général en fonction de n


- la suite (u_n) commence à u_0 :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= \\ &= u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r \\ &= u_0 + 3r \\ \dots &= \dots \\ u_n &= u_0 + nr \end{aligned}$$

- La suite commence à u_p : on écrit les relations de u_{p+1} à u_n . Par somme télescopique de $n - p$ termes :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

 **Exercice 2.5.** En utilisant la propriété précédente, démontrer que la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = -4n + 9$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

 **Exercice 3.5.** Soit la suite (u_n) arithmétique telle que $u_5 = 7$ et $u_{13} = 63$.

- Calculer la raison de cette suite (u_n) .
- Calculer u_0 puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n .


4. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété. Soit (u_n) une suite *arithmétique* de premier terme u_0 ,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$S = \text{nombre de termes} \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \right).$$

 **Exercice 4.5.** Soit la suite (u_n) arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $u_n = 4n + 5$. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$.

III. Suites géométriques

1. Définition

Définition 5.

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le réel q est appelé *la raison* de la suite géométrique.



Comme pour les suites arithmétiques, la raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n .

Illustration :

Exemple classique. Un capital de 2000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.
On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1,01 \times C_n$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1,01$.

2. Comment reconnaît-on une suite géométrique ?

Propriété. Une suite de termes **non nuls** est géométrique lorsque le **rapport** entre deux termes consécutifs est constant, autrement dit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$



Exercice 5.5. Démontrer que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 5^{2n+2}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

3. Expression du terme général

- La suite commence à u_0 .

Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q . Pour obtenir un on a multiplié n fois par q à partir de u_0 . On a donc : $u_n = q^n u_0$.

- La suite commence à u_p .

De u_p à u_n , on a multiplié $n - p$ fois par q , donc : $u_n = q^{n-p} u_p$.

Propriété. Le terme général u_n d'une **suite géométrique** s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0 alors : $u_n = u_0 q^n$.
- Si le premier terme est u_p alors : $u_n = u_p q^{n-p}$ et en particulier $u_n = u_1 q^{n-1}$.



Exercice 6.5. Soit une suite (u_n) géométrique de raison q . On donne : $u_7 = 4374$ et $u_5 = 486$. Trouver la raison q , le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

4. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

A. Somme des puissances successives

Propriété. Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier naturel.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Posons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ puis calculons $S - qS$.

■

B. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété admise. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n ,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$