Formulaire.

- $u'u^n \xhookrightarrow{primitive} \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
- $u'\mathrm{e}^u \xhookrightarrow{primitive} \mathrm{e}^u$
- $\dfrac{u'}{u} \xhookrightarrow{primitive} \ln(|u|)$
- $\dfrac{u'}{\sqrt{u}} \xhookrightarrow{primitive} 2\sqrt{u}$
- $u'\cos(u) \xhookrightarrow{primitive} \sin(u)$
- $u'\sin(u) \xhookrightarrow{primitive} -\cos(u)$

Exercice 1. **/4**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

1. $f_1(x) = \dfrac{10x}{x^2+3}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-4\sin(x)}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{[\ln(x)]^5}{x}$ sur $I =]0\,;\,1]$.
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+x}}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 2. **/6**

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.

Elle les sort de son congélateur à −18 °C et les place dans une pièce à 20 °C.

Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 1 °C.

Premier modèle.

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.

Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.

Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle.

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 20] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) s'écrit également : $\theta' = a\theta - 20a$ puis déterminer alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à −18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 1 °C.

2. Montrer que pour t positif : $\theta(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$.
3. La température idéale de dégustation des macarons étant de 15 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 3. **/10**

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Donne une interprétation graphique de ce résultat.

Bonus : en utilisant une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,dx$.