Exercice 1. Voici la matrice A carrée d'ordre 3 demandée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. On a :

$$\begin{array}{rcl} A \times B & = & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 + 0,8 \times (-0,2) & 0,8 \times (-0,8) + 0,8 \times 0,8 \\ 0,2 \times 0,2 + 0,2 \times (-0,2) & 0,2 \times (-0,8) + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} A + 0,5B & = & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \\ & = & M \end{array}$$

3. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $M^n = A + 0,5^n B$.
   - **Initialisation :** si $n = 1$ on a $M^1 = M$ et $A + 0,5^1 B = A + 0,5B$.
     Or $M = A + 0,5B$ d'après la question 2. $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** on suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire $M^k = A + 0,5^k B$ et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $M^{k+1} = A + 0,5^{k+1} B$.
     On a : $M^{k+1} = M \times M^k$. Or $M = A + 0,5B$ et par hypothèse de récurrence $M^k = A + 0,5^k B$, on a ainsi :

     $$\begin{array}{rcl} M^{k+1} & = & M \times M^k \\ & = & (A + 0,5B) \times (A + 0,5^k B) \\ & = & A^2 + 0,5^k AB + 0,5BA + 0,5^{k+1} B^2 \end{array}$$

     D'après l'énoncé on sait que pour tout entier naturel n non nul $A^n = A$ et $B^n = B$ on a donc $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
     De plus $AB = BA = 0_2$, on en déduit donc que : $M^{k+1} = A + 0,5^{k+1} B$ et donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   Conclusion : $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 1$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\boxed{\forall \in \mathbb{N}^*,\ M^n = A + 0,5^n B}.$$

Exercice 3.

Partie A. Matrice inversible

1. On a $M^3 - M^2 - 8M = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix}$ donc
   $M^3 - M^2 - 8M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ donc : $M^3 - M^2 - 8M = 6I$.
2. M est inversible si et seulement si il existe une matrice P carrée d'ordre 3 telle que $M \times P = P \times M = I$.
   Or, $M^3 - M^2 - 8M = 6I \iff \dfrac{1}{6}(M^3 - M^2 - 8M) = I$.
   Ainsi $\dfrac{1}{6}(M^3 - M^2 - 8M) = I \iff M \times \dfrac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = \dfrac{1}{6}(M^2 - M - 8I) \times M = I$. On en déduit que M est inversible et son inverse est $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B. Étude d'un cas particulier

1. $A(1\,;\,1) \in \mathscr{P} \iff a \times 1^2 + b \times +c = 1 \iff a + b + c = 1$.
   De même $\mathrm{B}(-1\,;\,-1) \in \mathscr{P} \iff a - b + c = -1$ et $\mathrm{C}(2\,;\,5) \in \mathscr{P} \iff 4a + 2b + c = 5$.

   On obtient le système suivant :
   $\left\{\begin{array}{lcl} a + b + c & = & 1 \\ a - b + c & = & -1 \\ 4a + 2b + c & = & 5 \end{array}\right. \iff$ (matriciellement) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Le résultat précédent peut s'écrire : $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ où M est la matrice inversible de la partie A.

   Ainsi : $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   À la calculatrice :
   $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   On a donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$ qui sont bien entiers.