**Exercice 1.** **/5**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4$.

1. Étudier la convexité de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
3. Démontrer que pour tout réel $x$ : $\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4 \geqslant -x - 3$.

**Exercice 2.** **/9**

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée $M$.
Pour tout réel $t$ positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant $t$, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et $t$ en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

On suppose que $\theta$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel $t$ de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\boxed{\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).}$$

On choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction $\theta$ dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel $t$ de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

1. Si $\theta$ est une telle fonction, on pose pour tout $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \theta(t)\mathrm{e}^{0,2t}$.
   (a) Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel $t$ de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   (b) Calculer $f(0)$.
   (c) En déduire, pour tout $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ , une expression de $f(t)$, puis en déduire que pour tout réel $t$ positif, $\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0,2t}$.
2. (a) Calculer la limite de $\theta$ en $+\infty$.
   (b) Démontrer que la fonction $\theta$ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Votre professeur de Mathématiques préféré (LOL) aime boire son café à 40 °C.
   Montrer qu'il existe un unique réel $t_0$ dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $\theta\left(t_0\right) = 40$ puis donner la valeur de $t_0$ arrondie à la seconde.

**Exercice 3.** **/6**

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2$.
On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $[2\,;\,3]$.

1. On considère l'algorithme suivant où les variables $a$, $b$ et $m$ sont des nombres réels :

   Tant que $b - a > 0,1$ faire :
       $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
       Si $\mathrm{e}^{m} + \mathrm{e}^{-m} - 4m - 2 > 0$, alors :
           $b \leftarrow m$
       Sinon :
           $a \leftarrow m$
       Fin Si
   Fin Tant que

   (a) Avant l'exécution de cet algorithme, les variables $a$ et $b$ contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

   Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

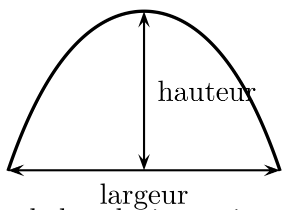
   On justifiera la réponse en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

| | $m$ | Condition $f(m) > 0$ | $a$ | $b$ | Condition $b - a > 10^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Initialisation | | | 2 | 3 | Vraie |
| Étape 1 | | | | | |
| Étape 2 | | | | | |
| Étape 3 | | | | | |
| Étape 4 | | | | | |

   (b) Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

2. Dans cette question, toute trace de recherche sera prose en considération.

   La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
   Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.




   La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

   Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.