Chapitre 9

Variables aléatoires

***

I. Variables aléatoires et loi de probabilité

1. Une situation comme exemple

On illustrera toute ce chapitre par la situation concrète donnée ci-dessous.

> Lors d'une semaine promotionnelle, un cinéma propose l'attraction suivante :
>
> chaque spectateur passe sous un portique électronique et :
>
> - il s'éclaire en vert une fois sur dix, permettant au spectateur de bénéficier d'une entrée gratuite ;
> - il s'éclaire en bleu une fois sur cinq, offrant au spectateur une entrée à demi-tarif ;
> - il s'éclaire en rouge le reste du temps, le spectateur devant alors s'acquitter des 8 euros du billet plein tarif.

2. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

Définition 1.

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

1. On appelle ***variable aléatoire*** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.
2. L'événement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.
3. L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X et cet ensemble est noté $X(\Omega)$.

Dans notre exemple on a donc $X \in \{$________________________$\}$

Remarques.

1. Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
2. Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
3. En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

1. Loi de probabilité

Définition 2.

Soit $\Omega = \{\omega_1\,;\,\omega_2\,;\,\cdots\,;\,\omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $X(\Omega) = \{x_1\,;\,x_2\,;\,\cdots\,;\,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur $X(\Omega)$, qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

On démontre facilement que $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Reprenons notre exemple introductif :

2. Espérance, variance, écart type

Définition 3.

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

1. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n$.
2. $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2$.
3. $\sigma(X) = \sqrt{V}$.

Reprenons notre exemple :