Chapitre 1

Géométrie repérée

***

I. Rappels de Seconde

Ce paragraphe étant constitué de rappels, les exemples seront donc limités.

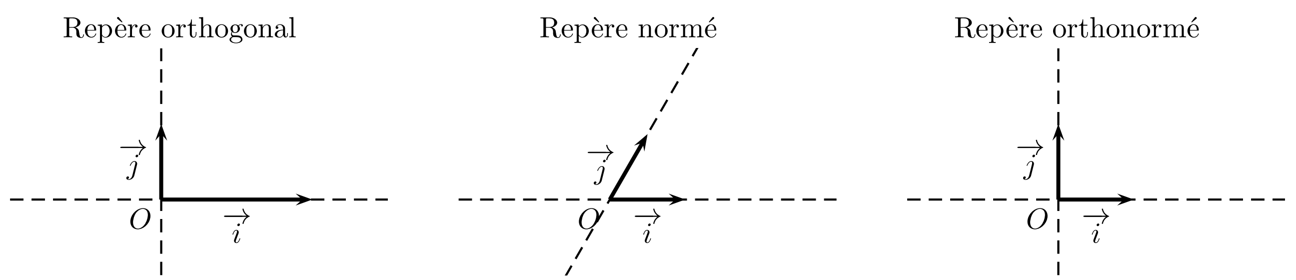
Définition 1.

Soient O un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de ce plan de directions différentes (***non colinéaires***), alors $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ est appelé ________________ du plan.
O est appelé ______________________ du repère et le couple $\left(\overrightarrow{i}\,, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé ___________du repère.

Définition 2.

Soit un repère $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ du plan.

1. Si les directions de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$ sont ______________________, le repère est dit ***orthogonal***.
2. Si les normes de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$ sont ***égales à 1***, le repère est dit ___________
3. Si les directions de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$ sont ***orthogonales et que les normes de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$ sont égales à 1***, le repère est dit ____________________________.
4. Le cas échéant, le repère est dit ____________________________.



Propriété admise. Le plan est muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x; y)$, appelé *coordonnées de* $\vec{u}$, tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

On notera indifféremment $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ ou $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple. Soit $\overrightarrow{u} = -4\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$.
Ainsi :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}.$$

Propriétés.

Le plan est muni d'un repère.
Soient $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs et k un nombre.

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow$ ______ = ______ et ______ = ______.
2. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées (______ ; ______).
3. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (______ ; ______).

Démonstration. Choisir une des trois propriétés suivantes et en faire la démonstration. ■

Définition 3.

Le plan étant muni d'un repère $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j})$, on appelle ***coordonnées*** du point M le couple $(x\,; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, x étant appelé ____________________ de M et y étant ____________________ de M.

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

Propriété. Le plan est muni d'un repère.

Soient $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}}.$$

Propriété. Le plan est de nouveau muni d'un repère.

Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ et $K(x_K\,;\,y_K)$ milieu de $[AB]$.
Alors les coordonnées du point K sont :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}}$$

Propriété. Le plan est muni d'un repère ***orthonormé***.

Soient A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$, Alors la distance AB est donnée par :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

II. Condition de colinéarité de deux vecteurs

Propriété. Le plan est muni d'un repère.

Soient $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan. On rappelle que le ***déterminant*** associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté det défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}.$$

Alors : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires } \iff \det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0 \iff xy' - x'y = 0}$.

III. Équations cartésiennes d'une droite

Théorème. Le plan est muni d'un repère.

1. Toute ***droite*** du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.
2. L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ est une droite.

Définition 4.

Le plan est muni d'un repère.

Soit $\mathcal{D}$ une droite et A et B deux points de cette droite. On appelle ***vecteur directeur*** de $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ ***colinéaire*** à $\overrightarrow{AB}$.

Théorème. Le plan est muni d'un repère.

Toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ admet $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Exercice 1.1. Soit (d) la droite d'équation cartésienne $2x - 5y + 2 = 0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de (d).
2. Tracer la droite (d) dans un repère.
3. Soit $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. Déterminer une équation de la droite (d_1) parallèle à (d) et passant par A.
4. Soit $B\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$. Le point B appartient-il à (d) ? Justifier.
5. Déterminer une équation de la droite (AB).

Propriété. Le plan est muni d'un repère.

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$. Alors $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 2.1. Soit (d) la droite d'équation réduite $y = \dfrac{3}{4}x - 6$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de (d).
2. Préciser les coordonnées d'un vecteur directeur de (d) à coefficients entiers.

Propriété. Deux droites sont ***parallèles*** si et seulement si leurs ***vecteurs directeurs*** sont ____________________.

Exercice 3.1. On considère les droites $(d)\ :\ 3x + 6y = 1$ et $(d')\ :\ y = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

1. Préciser les coordonnées d'un vecteur directeur des droites (d) et (d').
2. Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ?

IV. Équation cartésienne d'un cercle

Propriété. Le plan est muni d'un repère ***orthonormal***.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_0\,;\,y_0)$ et de rayon r.
Alors tout point de M de $\mathcal{C}$ a ses coordonnées qui vérifient :

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}.$$

Exercice 4.1. Dans un repère **orthonormal** du plan, on considère le point $A\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$.
Établir l'équation du cercle de centre A et de rayon 4.

Exercice 5.1.
Dans un repère ***orthonormal*** du plan, on considère l'équation cartésienne :

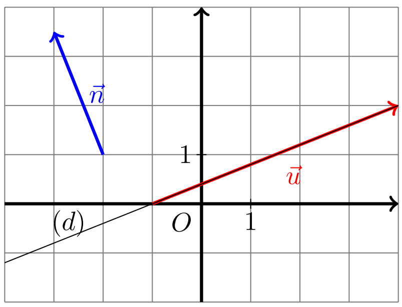
$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

Démontrer que cette équation est celle d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

V. Vecteur normal à une droite

Définition 5.

Un vecteur ***normal*** à une droite (d) est un ***vecteur non nul orthogonal*** à tout vecteur directeur de (d).



Propriété.

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Alors une équation de (d) est : $ax+by+c=0$.
Réciproquement, si a et b ne sont pas nuls tous les deux, l'équation $ax+by+c=0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple. Soit la droite (d) d'équation cartésienne $7x-4y-4=0$.
Un vecteur normal $\vec{n}$ à (d) a donc pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Exercice 6.1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathscr{D}$ si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

Exercice 7.1. Déterminer dans chacun des cas suivants une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point A et qui admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$:

1. $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-9\end{pmatrix}$
2. $A\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$
3. $A\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$