58

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z-\mathrm{i})(2z-6)=0$.
2. $(\mathrm{i}z+1)(3z+\mathrm{i})=0$.
3. $(z+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}z)=0$.

59

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $-z^2+2z-3=0$.
2. $z^2+4=0$.
3. $4z^2-12z+9=0$.
4. $-3z^2+3z-1=0$.
5. $2z^2+2z+5=0$.

60

1. Démontrer que $-2-\mathrm{i}$ est solution de l'équation $z^2+4z+5=0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

61

Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $z+\dfrac{1}{z}=1$.

62

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+2\mathrm{i}z=0$.
2. $(-2z+1)(z-1)=1$.
3. $\mathrm{i}\sqrt{3}z^2-6z=0$.
4. $(\overline{z}-3\mathrm{i}-5)(iz-3)=0$.

63

Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=z^2-z+5$.

1. Si le point M' a pour affixe 4, quelle est l'affixe du point M ?
2. Démontrer qu'il existe des points M tels que le point M' associé à M soit M lui-même.

64

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{1}{z}+2z=0$.
2. $\dfrac{z}{3}=\dfrac{-5}{1+z}$.
3. $\dfrac{z+1}{z-2}=\mathrm{i}$.
4. $\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{1}{z}$.

65

1. On considère l'équation

$$(E):\qquad z^2-6z+c=0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

   a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

   b. Justifier que les solutions de (E) sont : $z_A=3+\mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_B=3-\mathrm{i}\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

66

Soit le polynôme P défini par $P(z)=z^3+z^2+4$.

1. Démontrer que -2 est racine de P.
2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que :

$$P(z)=(z+2)(az^2+bz+c).$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

67

1. Déterminer un entier naturel n solution de l'équation (E) :

$$z^3+z^2-2=0$$

2. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$z^3+z^2-2=(z-n)(az^2+bz+c).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

68

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E):\qquad z^4+2z^3-z-2=0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4+2z^3-z-2=\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que $ABCD$ est un quadrilatère non croisé.
   Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.

69

Soit $P(z)=z^3-3z^2+4z-12$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout complexe z,

$$\overline{P(z)}=P(\overline{z}).$$

2. a. Vérifier que $-2\mathrm{i}$ est une racine de P.

   b. En déduire sans aucun calcul que $2\mathrm{i}$ est aussi solution de cette équation.

   c. Déduire des questions précédentes une factorisation de P.