Exercice 1. /3

Les deux questions sont indépendantes.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 5 - 4\cos(n!)$ est bornée.
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.

Exercice 2. /3

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + n - 3\right).$$

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à la calculatrice.
2. On considère le programme Python :

```python
def seuil():
    u=5;n=0
    while u..... :
        u=... ... ....
        n=n+1
    return .....
```

   Compléter la fonction Python ci-dessus pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 1 000.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n - 5$.

Exercice 3. /4

La cantine scolaire d'un fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts.

1. Normalement, un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Sous ces conditions, montrer qu'il peut constituer $\dbinom{4}{1} \times \dbinom{3}{1} \times \dbinom{5}{1} = 60$ menus différents.
2. Un élève a un régime particulier et ne mange pas de dessert mais a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées. Combien de possibilités a-t-il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves qui aiment gouter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite. Combien ont-ils de menus possibles ?

Exercice 4. /3

On rappelle la formule du binôme de Newton : a et b sont deux réels et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1. En utilisant cette formule, développer, réduire et ordonner $(1+2x)^4$.
2. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 5. **/7**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   (c) On *admet* que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
      i. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.
      ii. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

≪ *En Mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.* ≫
John Von Neumann