95

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$:

1. $f \ : \ x \ \to 3x^2 - 5x + 9$; $(E) : y' = 6x - 5$.
2. $f \ : \ x \ \to 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$; $(E) : y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

96

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I :

1. $f \ : \ x \ \to (x-3)^4$; $(E) : y' = 4(x-3)^2$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f \ : \ x \ \to \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$
   $(E) : y' = \dfrac{1}{2x-1}$ et $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

97

La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

1. Déterminer la fonction f.
2. Écrire toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la fonction h telle que $h' = f$ et $h(0) = 0$.

98

Un mobile subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 1,5\ m.s^{-2}$. La vitesse du mobile au temps $t \geqslant 0$ (t en secondes), est $v(t)$, en $m.s^{-1}$, et sa position est donnée par $x(t)$, en mètres, avec $x(0) = 0$.

1. Sachant que la vitesse initiale du mobile est $2\ m.s^{-1}$, exprimer $v(t)$ en fonction de t.
2. En déduire $x(t)$ en fonction de t.

99

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$
3. $f(x) = 0,1x^4 + \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{x}{100}$

100

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{7}$

101

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

102

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
   $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

103

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $\dfrac{y}{5} = y'$

104

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $\dfrac{y}{5} = y'$

105

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
   $$y' = 2\,020y.$$
2. Déterminer la solution de f de l'équation (E) telle que $f(0) = -5$.

106

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1+x}{10}}$ et $(E) \ : \ y' = 0,1y$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x-2} + 5$ et $(E) \ : \ y' = 3y - 15$.

107

On considère l'équation différentielle :
$(E) \ : \ y' = -\dfrac{1}{2}y + 3$.

1. Donner la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

108

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -2y + 5$
2. $y' = y - 3$
3. $2y' + 7y = 6$
4. $3y' - 6y = 1$

109

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée :

1. $y' = 5y - 2$ et $f(0) = -1$.
2. $y' = -5y + 4$ et $f(1) = 0$.
3. $y' = -1$ et $f(2) = 1$.

110

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et l'équation différentielle : $(E)\ :\ y' = y + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. En déduire la seule solution g de l'équation (E) telle que $g(0) = 5$.

111

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n\left(20 - u_n\right).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par
$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$
   a. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.
   b. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,20]$,
$$f(x) \in [0\ ;\ 10].$$
   c. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

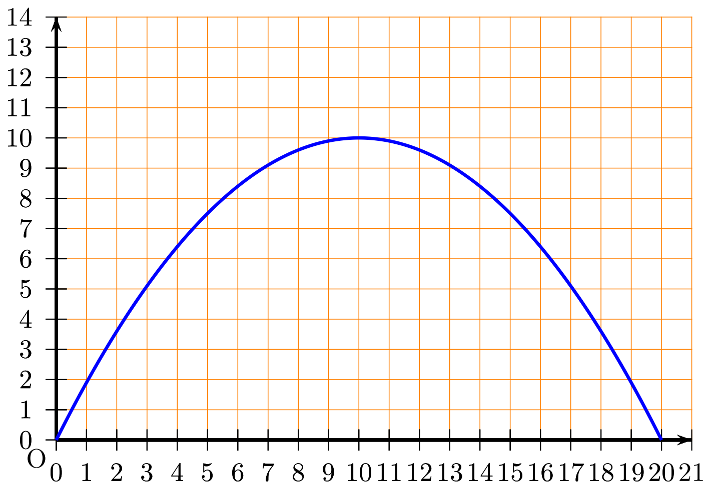
Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

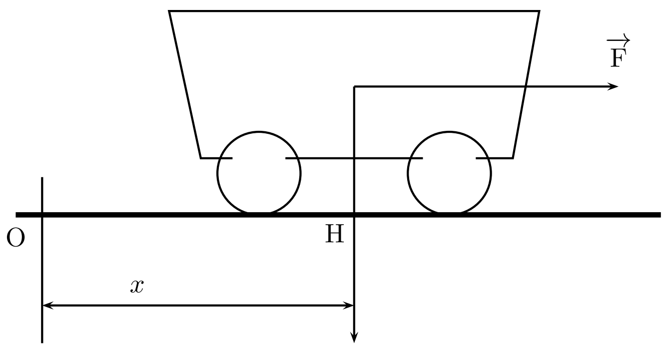
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\quad ;\quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.
   a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
$$(\mathrm{E}_1)\quad :\quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
   b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}.$$
3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?



112



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $\mathrm{N.m^{-1}.s}$.

La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,
$x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{\frac{-t}{8}}$.

3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ?
On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

113

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\begin{cases} u'(t) &= \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12}, \quad t \geqslant 0 \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\begin{cases} h'(t) &= -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12}, \quad t \geqslant 0 \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

114

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) &= 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) &= -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

1. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

3. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

4. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$.
Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.