Exercice 1.

❶ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2-4x+1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4x+1=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2-4x+1=+\infty.$$

❷ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty.$$

❸ Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{1-2x}{5-x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} 1-2x=-9\\ \lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} 5-x=0\quad\text{avec}\quad 5-x<0\end{array}\right\}\overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{1-2x}{5-x}=+\infty.$$

❹ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2}{1+2x^2}$

On a une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ donc on change d'écriture.
Pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}\frac{-3x^2}{1+4x^2} &= \frac{x^2\times(-3)}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+4\right)}\\ &= \frac{-3}{\dfrac{1}{x^2}+4}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -3=-3\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}+4=4\end{array}\right\}\overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{\dfrac{1}{x^2}+4}=-\dfrac{3}{4}.\ \text{Donc}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{1+4x^2}=-\dfrac{3}{4}.$$

❺ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x+1-\cos(x)$

cos n'ayant pas de limite à l'infini, on encadre.
$\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant1$ donc $-1\leqslant-\cos(x)\leqslant1$ puis $\cancel{4x}\leqslant 4x+1-\cos(x)\leqslant 4x+2$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x+2=-\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} 4x+1-\cos(x)=-\infty$$

❻ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}\overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}=0.$$

❼ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} -\dfrac{1}{x^2}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}\overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

❽ Calculons $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-15x}{x-5}$. On a une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$ donc on change d'écriture.
Pour tout réel $x \neq 5$, $\dfrac{3x^2-15x}{x-5} = \dfrac{3x(x-5)}{x-5}$ donc $\dfrac{3x^2-15x}{x-5} = 3x$.
$\lim\limits_{x\to 5} 3x = 15$ donc $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-15x}{x-5} = 15$.

Exercice 2.

1. $f_1(x) = (x^3-4x^2+2x+1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f_1'(x) = 5(3x^2-8x+2)(x^3-4x^2+2x+1)^4$.
2. $f_2(x) = \sqrt{x^2+\mathrm{e}^x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f_2'(x) = \dfrac{2x+\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x^2+\mathrm{e}^x}}$.
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{2x^3-9x^2+5x+4}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f_3'(x) = (6x^2-18x+5)\mathrm{e}^{2x^3-9x^2+5x+4}$.

Exercice 3.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$ donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 4.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;0[$ telle que pour tout réel $x<0$,

$$3 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 3 + \frac{1}{x}$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 - \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \dfrac{1}{x} = 3$ donc d'après le théorème d'encadrement des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 5.

Voir exercice 3 de révisions...quasiment le même.