Chapitre 1

Nombres complexes : partie algébrique

***

I. Ensemble des nombres complexes

1. Préambule

L'équation $x + 5 = 2$ a ses coefficients dans $\mathbb{N}$ mais pourtant sa solution $x =$ ______ n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xhookrightarrow{x^2=2} \mathbb{R} \xhookrightarrow{x^2=-1} \mathbb{C}$$

De même l'équation $2x = -3$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais sa solution $x =$ ______ est dans l'ensemble plus grand des rationnels $\mathbb{Q}$. Continuons ainsi, l'équation $x^2 = \frac{1}{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a ses solutions $x_1 =$ ______ et $x_2 =$ ______ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Ensuite l'équation $x^2 = -1$ a ses coefficients dans $\mathbb{R}$ et ses solutions $x_1 =$ ______ et $x_2 =$ ______ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Ce processus est-il sans fin ? Non ! Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne...

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons cette année) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution (comme l'équation $x^2 = -1$), on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

1. contenant tous les ***nombres réels***,
2. muni de ***deux opérations prolongeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs***,
3. contenant un élément noté i tel que __________,
4. tout nombre z s'écrive de manière unique $z = x + \mathrm{i}y$ où a et b sont ***des réels***,
5. le nombre 0 s'écrit __________.

On admettra qu'un tel ensemble existe : il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition.

L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ unique est appelée ***forme algébrique*** du complexe z.

— Le ***nombre réel*** x est appelé ***partie*** ______________ de z et notée $\mathrm{Re}(z)$.

— Le ***nombre réel*** y est appelé ***partie*** ____________________ de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 1.1. On donne $z = 5 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 6 - 7\mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme algébrique $z + z'$ et $z \times z'$.
2. En déduire $\mathrm{Re}(z + z')$ et $\mathrm{Im}(z \times z')$.

3. La division dans $\mathbb{C}$

Propriété.

Tout nombre complexe non nul z admet un ***unique inverse***, noté $\dfrac{1}{z}$.

Méthode. Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on ***multiplie*** le numérateur et le dénominateur du quotient par ***l'expression conjuguée*** du dénominateur.

Exercice 2.1. Déterminer l'inverse de $3 + 2\mathrm{i}$.

4. Conjugué

Définition.

On appelle ***conjugué*** du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\boxed{\overline{z} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

Exemples. $\overline{3 - 2\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ $\quad \overline{5 + \mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ $\quad \overline{3} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ $\quad \overline{\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Propriétés.

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{\overline{z}} = z \quad (1)$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad (2)$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad (3)$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$
5. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}} \quad (5)$
6. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0 \quad (6)$

Faire une démonstration. ■

Exercice 3.1. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$.
2. $z' = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

II. Techniques opératoires

1. Nombres réels, nombres imaginaires purs

Propriétés.

1. z ***réel*** $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
2. z ***imaginaire pur*** $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$.

Faire au choix une démonstration. ■

Exercice 4.1. Démontrer que le nombre complexe $z = \dfrac{2-7\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}} - \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}$ est un nombre réel après avoir calculé $\overline{z}$.

2. Formule du binôme de Newton

Propriété.

Soit a et b deux nombres complexes. On a alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}}.$$

Cette formule s'appelle ***binôme de Newton*** et elle est démontrée page 4.

Remarque. On peut calculer les coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

Exercice 5.1. Calculer $(1+\mathrm{i})^3$ puis vérifier le résultat à la calculatrice.

3. Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété.

Deux nombres complexes sont ***égaux*** si et seulement si ils ont ***même partie réelle*** et ***même partie imaginaire***.

Faire la preuve. ■

Exercice 6.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + 3 + \mathrm{i} = 2\overline{z} + 1 + 6\mathrm{i}$ en posant $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

Démonstration du binôme de Newton.

On démontre cette égalité par récurrence. On pose $\mathscr{P}_n \ : \ (a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}$.

Initialisation : si $n=0$, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part $\sum_{s=0}^{0} \binom{0}{s} a^s b^{0-s} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ce qui montre que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : soit k un entier naturel quelconque.

On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie c'est-à-dire $(a+b)^k = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^s b^{k-s}$.

Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie soit $(a+b)^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^s b^{k+1-s}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k && (1.1)\\
&= (a+b)\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^s b^{k-s} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} && (1.2)\\
&= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^{s+1} b^{k-s} + \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^s b^{k+1-s} && (1.3)\\
&= \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k}{s} a^{s+1} b^{k-s} + \binom{k}{k} a^{k+1} b^0 + \binom{k}{0} a^0 b^{k+1-0} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} a^s b^{k+1-s} && (1.4)\\
&= \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} a^p b^{k-p+1} + a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} a^s b^{k+1-s} && (1.5)\\
&= a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \left(\binom{k}{s-1} + \binom{k}{s} \right) a^s b^{k+1-s} && (1.6)\\
&= \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^0 + \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k+1}{s} a^s b^{k+1-s} && (1.7)\\
&= \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k+1}{s} a^s b^{k+1-s} + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^0 && (1.8)\\
&= \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^s b^{k+1-s} && (1.9)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie. Ainsi :

- $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$.

On peut en conclure que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour **tout** entier naturel n. ■