

Exercice 209.

1. $f'(t) = -\sin(t) \times \sin(t) + \cos(t) \times \cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.
2. $f'(t) = -3 \times 2 \cos(t) \times (-\sin(t)) = 6 \cos(t) \sin(t)$.
3. $f'(t) = 4 \cos(t) \sin^3(t) - 4 \sin(4t)$
4. $f(t) = \tan(t)$ donc $f(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.
 $f'(t) = \frac{\cos(t) \times \cos(t) - \sin(t) \times (-\sin(t))}{\cos^2(t)}$ donc $f'(t) = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)}$ soit $f'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$.

Exercice 210.

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t , $f'(t) = -2 \cos(t) \sin(t) + 2 \sin(t) \cos(t) = 0$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 0$ donc f est constante sur \mathbb{R} .
 $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $f(t) = f(0) = \cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$ donc pour tout réel t on a bien la relation :
$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Exercice 211.

Rappel : T est une période pour f si et seulement si $f(x + T) = f(x)$.

1. Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} f\left(t + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left[6\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\right] \\ &= \sin(6t + 2\pi - 3) \\ &= \sin(6t - 3) = f(t) \end{aligned}$$

Car la fonction \sin est périodique de période 2π donc $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ ce qui prouve que $T = \frac{\pi}{3}$ est une période de f .

2. On a :

$$\begin{aligned} f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \tan\left[2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] \\ &= \tan\left(2t + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sin\left(2t + \pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2t + \pi + \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)}{-\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ car } \cos(t + \pi) = -\cos(t), \sin(t + \pi) = -\sin(t) \\ &= \frac{\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Donc $\frac{\pi}{2}$ est une période de f .

3. Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} f(t + \pi) &= \cos^2(t + \pi) - \sin^2(t + \pi) \\ &= (-\cos(t))^2 - (-\sin(t))^2 \text{ car } \cos(t + \pi) = -\cos(t), \sin(t + \pi) = -\sin(t) \\ &= (\cos(t))^2 - (\sin(t))^2 \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Ainsi $T = \pi$ est une période de f .

4. Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \left| \cos\left(2t + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \right| \\ &= \left| -\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \right| \quad \text{car} \quad \cos(t + \pi) = -\cos(t) \\ &= \left| \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \right| \quad \text{car} \quad |-T| = |T| \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Ainsi $T = \frac{\pi}{2}$ est une période de f .