Exercice 1. E est un ensemble à dix éléments : $\{a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\,;\, e\,;\, f\,;\, g\,;\, h\,;\, i\,;\, j\}$.

1. (a) Les deux éléments a et b étant fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi les 8 restants : il y a donc $\binom{8}{3}$ parties à 5 éléments de E contenant a et b.

   (b) L'élément a est choisi mais pas b : il reste donc à choisir 4 éléments parmi les 8 restants (a ne peut être repris et b est exclu). Il y a donc $\binom{8}{4}$ parties à 5 éléments de E contenant a et pas b.

   (c) Même idée que précédemment : Il y a donc $\binom{8}{4}$ parties à 5 éléments de E contenant b mais pas a.

   (d) Les éléments a et b sont exclus : il faut donc choisir 5 éléments parmi les 8 restants (a et b ne pouvant être pris). Il y a donc $\binom{8}{5}$ parties à 5 éléments de E ne contenant ni a et ni b.

2. On souhaite dénombrer le nombre de parties de E à 5 éléments : il y en a $\binom{10}{5}$.
   Par ailleurs, on a effectué une partition de ces parties : celles qui contiennent a et pas b, celles qui contiennent b et pas a, celles qui contiennent a et b, et enfin celles qui ne contiennent ni a ni b.
   On en déduit donc que : $\binom{10}{5} = \binom{8}{3} + 2\binom{8}{4} + \binom{8}{5}$.

3. Soit E est un ensemble à n éléments et dénombrons le nombre de parties à k éléments avec $2 \leqslant k \leqslant n$. Soit a et b deux éléments de E.
   - On dénombre les parties de E à k éléments contenant a et b.
     Comme a et b sont fixés, il reste à choisir $k-2$ (on enlève a et b) éléments parmi $n-2$ (a et b étant pris, il reste alors $n-2$ éléments dans E) : il y en a $\binom{n-2}{k-2}$.
   - On dénombre les parties de E à k éléments contenant a et pas b.
     Comme a est fixé, il reste à choisir $k-1$ (on enlève a) éléments parmi $n-2$ (a est choisi mais b est exclu, il reste alors $n-2$ éléments dans E) : il y en a $\binom{n-2}{k-1}$.
   - On dénombre les parties de E à k éléments contenant b et pas a.
     Il y en a $\binom{n-2}{k-1}$ comme précédemment.
   - On dénombre les parties de E à k éléments ne contenant a ni b.
     a et b étant exclus, il reste à choisir k éléments parmi $n-2$ (a et b sont exclus) : il y en a $\binom{n-2}{k}$.

   On souhaite dénombrer le nombre de parties de E à k éléments : il y en a $\binom{n}{k}$.
   On utilise le même procédé de partition que précédemment :
   $$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

Exercice 2. Soit n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant k+1$.

$$\begin{aligned}(n-k) \times \binom{n}{k} &= (n-k) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}(k+1) \times \binom{n}{k+1} &= (k+1) \times \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1)!)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)}\end{aligned}$$

D'où l'égalité.