1. Évolution d'une population

En 1798, **Thomas Malthus** (1766-1834) publie son *Essai sur le principe de population*, dans lequel il expose l'idée selon laquelle la population croît beaucoup plus rapidement que les ressources.
Aujourd'hui, pour étudier une évolution, on peut dans un premier temps représenter les données par un nuage de points puis on introduit une fonction u, dont la variable entière en est un palier (en général une année).
En notant $u(0)$ la valeur à l'instant 0 (ou au palier 0) et $u(n)$ la valeur au palier n, on s'intéresse aux valeurs :

- de la ***variation absolue*** entre les paliers n et $n+1$: $u(n+1)-u(n)$.
- du ***taux de variation*** entre les paliers n et $n+1$: $\dfrac{u(n+1)-u(n)}{u(n)}$.

2. Modèle affine : suite arithmétique

Définition 1. Lorsque la variation absolue $u(n+1)-u(n)$ de la grandeur u entre deux paliers n et $n+1$ est ***constante***, on dit que la croissance (ou décroissance) est ***linéaire***.

Propriétés. Pour tout entier naturel n on a $u(n+1)-u(n) = r$ où r est une constante et on a $\boxed{u(n) = u(0) + nr}$.

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ etc. est une ***suite arithmétique***.
Dans un repère les points de coordonnées $(n\,;\,u(n))$ sont ***alignés***.
Ces points sont situés sur la droite d'équation $y = u(0) + r \times x$.

Exemple 1. Soit u une suite arithmétique. Compléter les égalités suivantes :

1. $u(0) = 5$
2. $u(1) = 9$
3. $u(2) = \dots$
4. $u(3) = \dots$
5. $u(4) = \dots$

Exemple 2. Soit u une suite arithmétique de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $r = 20$.
Exprimer u_n en fonction de n.

. . . .

Remarques. Dans la réalité la variation absolue n'est pas tout à fait ***constante*** et les points ne sont pas tout à fait alignés. Pour établir un modèle, on peut utiliser un ***tableur*** ou la ***calculatrice*** pour obtenir une équation de la droite qui ajuste le nuage de points.

3. Modèle exponentiel : suite géométrique

Définition 2. Lorsque le taux de variation t de la grandeur u entre deux paliers n et $n+1$ est ***constante***, on dit que la croissance (ou décroissance) est ***exponentielle***.

Propriété. Pour tout entier naturel n on a $u(n+1) = (1+t)u(n)$ et en posant $q = 1+t$ on a alors $u(n+1) = qu(n)$ et :

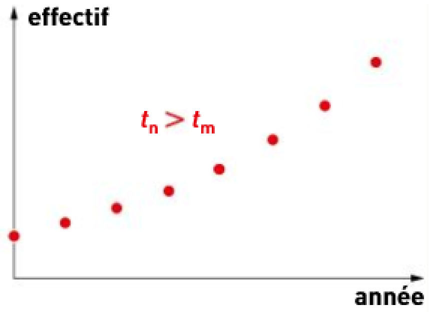
$$\boxed{u(n) = u(0)q^n}$$

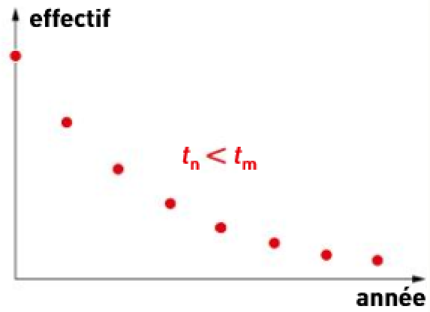
La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ etc. est une ***suite géométrique***.

Remarque. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on peut déterminer le temps de ***doublement*** de la population. Ce temps de doublement ne dépend pas de la population initiale.
Modèle démographique de Malthus.

Lorsque pour une population donnée, on connaît le ***taux de natalité*** t_n et le ***taux de mortalité*** t_m, exprimés en ‰(pour mille), le taux annuel d'évolution t, exprimé en ‰est égal à $t = t_n - t_m$. Si l'on suppose que ces taux restent ***constants***, la population évolue alors de t‰ par an. La croissance est exponentielle et, chaque année, la population est multipliée par $1 + \dfrac{t}{1\,000}$.

Selon le modèle de Malthus, si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité, l'effectif de la population croît vers l'***infini***, et si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité, l'effectif de la population décroît vers 0.





4. Validité des prévisions

Modéliser l'évolution d'une population ou d'une ressource permet de faire des prévisions. Mais les modèles que l'on peut élaborer ne sont pas valables à très long terme.
Les données dont on dispose aujourd'hui montrent par exemple que le modèle très controversé qu'avait élaboré Malthus n'est pas réaliste. Le modèle du mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1839) a aussi atteint ses limites.
Aujourd'hui, on prévoit que la population mondiale sera d'environ 9,7 milliards d'habitants à l'horizon 2050.

Le vocabulaire à retenir.

- **Suite arithmétique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en additionnant au précédent une constante.
- **Suite géométrique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en multipliant au précédent une constante.
- **Taux de mortalité :** rapport entre le nombre annuel de décès et la population totale moyenne sur cette année. Il est en général exprimé en pour mille (‰).
- **Taux de natalité :** rapport entre le nombre annuel de naissances et la population totale moyenne sur cette année. Il est en général exprimé en pour mille (‰).
- **Variation absolue** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $u(n+1) - u(n)$.
- **Taux de variation** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.