Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4$.

1. La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2x$ et $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2$.
   Pour tout réel x on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x) > 0$ ce qui prouve que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. On a $(T_0)\ :\ y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = -1$ et $f(0) = -3$ donc $(T_0)\ :\ y = -x - 3$.
3. f étant convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est située au dessus de chacune de ses tangentes comme par exemple (T_0).
   On en déduit donc que pour tout réel x, $f(x) \geqslant -x - 3$ soit $\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4 \geqslant -x - 3$

Exercice 2.

1. (a) f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout réel t positif,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \theta'(t)\mathrm{e}^{0,2t} + 0,2\theta(t)\mathrm{e}^{0,2t} \\ &= (\theta'(t) + 0,2\theta(t))\mathrm{e}^{0,2t} \end{aligned}$$

   Or $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$ donc $f'(t) = 0$.

   (b) $f(0) = \theta(0)\mathrm{e}^{0,2\times 0}$ donc $f(0) = \theta(0) = 80$.

   (c) $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $f'(t) = 0$ donc f est constante sur $[0\,;+\infty[$: pour tout réel t positif on a $f(t) = f(0) = 80$. Or $f(t) = \theta(t)\mathrm{e}^{0,2t}$ donc $\theta(t) = \dfrac{f(t)}{\mathrm{e}^{0,2t}}$ soit $\theta(t) = \dfrac{80}{\mathrm{e}^{0,2t}} = 80\mathrm{e}^{-0,2t}$.

2. (a) Calculons la limite de θ en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,2t = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0 \text{ d'où } \lim_{t\to+\infty} \theta(t) = 0.$$

   (b) θ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel t positif :

$$\theta'(t) = 80 \times (-0,2)\mathrm{e}^{-0,2t} = -16\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

   On a $-1,6 < 0$ et pour tout réel t positif, $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ donc par produit $\theta'(t) < 0$ ce qui démontre que la fonction θ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0	t_0	$+\infty$
Variation de θ	80	40	0

   (c) La fonction θ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ car dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ à valeurs dans $]0\,;80]$. Or $40 \in]0\,;80]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\theta(t) = 40$ admet une solution unique t_0 dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   - On localise t_0 à l'unité : $3 < t_0 < 4$.
   - On localise t_0 à 10^{-1} : $3,4 < t_0 < 3,5$.
   - On localise t_0 à 10^{-1} : $3,46 < t_0 < 3,47$.

   On prend $t_0 \simeq 3,46$ par exemple ($3,47$ fonctionne aussi). Or $0,46$ minute est égal à environ $0,46\times 60 \simeq 28$ secondes donc il faut attendre environ 3 minutes et 28 secondes pour savourer un café à une température d'environ 40 °C.

Exercice 3.

1. (a) Voici le tableau complété :

	m	Condition $f(m) > 0$	a	b	Condition $b - a > 10^{-1}$
Initialisation			2	3	Vraie
Étape 1	2.5	Vraie	2	2.5	Vraie
Étape 2	2.25	Faux	2.25	2.5	Vraie
Étape 3	2.375	Faux	2.375	2.5	Vraie
Étape 4	2.4375	Faux	2.4375	2.5	Faux

(b) Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de α : $2,4375 < \alpha < 2,5$.

2. $\mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\dfrac{t}{39} - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$ avec $x = \dfrac{t}{39}$

   Cette équation a une unique solution α et $\alpha = \dfrac{t}{39} \iff t = 39\alpha$ donc la hauteur de l'arche est $2t = 78\alpha$

   $2,4375 < \alpha < 2,5 \iff 190,125 < 78\alpha < 195$ donc la hauteur de l'arche est comprise entre 190 et 195 mètres.