★☆☆☆☆ **Exercice 1.** **/2**

Calculer $J = \int_1^2 \frac{2t-1}{t-3}\,\mathrm{d}t$.

★★☆☆☆ **Exercice 2.** **/8**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que $u_0 = \mathrm{e} - 1$.
2. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

.

   (b) En déduire la valeur de u_1 et de u_2.
3. (a) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.
   (b) La suite (u_n) est décroissante. Justifier cette assertion.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

★★★★☆ **Exercice 3.** /10

Dans tout le texte, on rappelle que e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + x\mathrm{e}}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = -2\ln x - x\mathrm{e} + 1.$$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\ \infty$.
2. Étudier le sens de variation de g.
3. Démontrer que dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α puis donner un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$.
4. Donner le tableau de variations de f.

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}}.$$

2. (a) Montrer que $A_n = I_n +\ \mathrm{e}$.
   (b) Calculer I_0 et A_0.
   (c) Donner une interprétation géométrique de A_0.
3. Montrer que la suite (A_n) converge vers e.