Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \mathrm{e}^{x-1}$.

1. La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = 2 - \mathrm{e}^{x-1}$ et $f''(x) = -\mathrm{e}^{x-1}$.
   Pour tout réel x on a $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ donc $-\mathrm{e}^{x-1} < 0$ ce qui montre que $f''(x) < 0$ et ainsi f est concave sur $\mathbb{R}$.
2. On a $(T_1)\ :\ y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$ donc $(T_1)\ :\ y = x$.
3. f étant concave sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes comme par exemple (T_1).
   On en déduit donc que pour tout réel x, $f(x) \leqslant -x - 3$ soit $2x - \mathrm{e}^{x-1} \leqslant x$.

Exercice 2.

1. f est dérivable sur $[-2\,;\,2]$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{x} \\ &= (x+1)\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

   Pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$.
   Or $x + 1 = 0 \iff x = -1$. On en déduit le tableau de variation de f sur $[-2\,;\,2]$:

x	-2		-1	α	2
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$-2\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$2\mathrm{e}^{2}$

   - Sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$, le maximum de f est $-2\mathrm{e}^{-2} < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.
   - Sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$, la fonction f est continue, strictement croissante à valeurs dans $[-\mathrm{e}^{-1}\,;\,2\mathrm{e}^{2}]$. Or $0 \in [-\mathrm{e}^{-1}\,;\,2\mathrm{e}^{2}]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
   - On en déduit donc que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;\,2]$.
     Or $f(1) < 5$ et $f(2) > 5$ donc $1 < \alpha < 2$.

2. (a) Voici le tableau complété :

	m	Condition $f(m) < 5$	a	b	Condition $b - a > 10^{-1}$
Initialisation			1	2	Vraie
Étape 1	1.5	Faux	1	1.5	Vraie
Étape 2	1.25	Vraie	1.25	1.5	Vraie
Étape 3	1.375	Faux	1.25	1.375	Vraie
Étape 4	1.3125	Vraie	1.3125	1.375	Faux

   (b) Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de α : $1,3125 < \alpha < 1,375$.

Exercice 3.

1. (a) f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour tout réel t positif,

$$\begin{aligned} f'(t) &= Q'(t)\mathrm{e}^{at} + aQ(t)\mathrm{e}^{at} \\ &= (Q'(t) + aQ(t))\mathrm{e}^{at} \end{aligned}$$

Or $Q'(t) = -aQ(t)$ donc $f'(t) = 0$.

(b) $f(0) = Q(0)\mathrm{e}^{a\times 0}$ donc $f(0) = Q(0) = 5$.

(c) $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $f'(t) = 0$ donc f est constante sur $[0\,;+\infty[$: pour tout réel t positif on a $f(t) = f(0) = 5$. Or $f(t) = Q(t)\mathrm{e}^{at}$ donc $Q(t) = \dfrac{f(t)}{\mathrm{e}^{at}}$ soit $Q(t) = \dfrac{5}{\mathrm{e}^{at}} = 5\mathrm{e}^{-at}$.

2. (a) Calculons la limite de Q en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,35t = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{par composition des limites}} \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,35t} = 0 \text{ d'où } \lim_{t\to+\infty} Q(t) = 0.$$

(b) Q est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel t positif :

$$Q'(t) = 5 \times (-0,35)\mathrm{e}^{-0,35t} = -1,75\mathrm{e}^{-0,35t}.$$

On a $-1,75 < 0$ et pour tout réel t positif, $\mathrm{e}^{-0,35t} > 0$ donc par produit $Q'(t) < 0$ ce qui démontre que la fonction Q est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0	t_0	$+\infty$
Variation de Q	5 ↘	2.5 ↘	0

(c) La fonction Q est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ car dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ à valeurs dans $]0\,;5]$. Or $2,5 \in]0\,;5]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $Q(t) = 40$ admet une solution unique t_0 dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

- On localise t_0 à l'unité : $1 < t_0 < 2$.
- On localise t_0 à 10^{-1} : $1,9 < t_0 < 2$.
- On localise t_0 à 10^{-1} : $1,98 < t_0 < 1,99$.

On prend $t_0 \simeq 1,98$ par exemple ($1,99$ fonctionne aussi). Or $0,98$ heure est égale à environ 59 minutes donc t_0 est environ égale à 1 heure et 59 minutes.