

Dérivation globale


I. Fonctions dérivables sur un intervalle I

1. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Définition 1.

On dit que f est **dérivable** sur un intervalle I si f est dérivable en **tout point** x_0 de I . La fonction qui, à chaque réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée **fonction dérivée de f** et se note f' .

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

 **Exercice 1.8.** Démontrons que la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout x_0 de \mathbb{R} et que $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

2. Dérivées de fonctions usuelles

Théorème. Tableau des dérivées à connaître par cœur.

| Fonction f | \mathcal{D}_f | Fonction f' | $\mathcal{D}_{f'}$ |
|---|-----------------|---------------------------------|--------------------|
| $x \mapsto k$ (constante) | \mathbb{R} | $x \mapsto 0$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto ax + b$ | \mathbb{R} | $x \mapsto a$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto x^2$ | \mathbb{R} | $x \mapsto 2x$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto x^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$ | \mathbb{R} | $x \mapsto nx^{n-1}$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | \mathbb{R}^* | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ | \mathbb{R}^* |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $[0; +\infty[$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$ |

Remarque. Toutes ces formules se démontrent à l'aide du taux d'accroissement vu au chapitre 4.

Quid de la valeur absolue ?

La fonction *valeur absolue* f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$ est *dérivable* sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration à faire. ■

**Exercice 2.8.**

1. Démontrer le résultat de la fonction carré.
2. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

3. Dérivée d'une somme, d'un polynôme

Théorème.

Soit u et v deux fonctions définies et *dérivables* sur un même intervalle.

- La dérivée d'une *somme* de deux fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions :

$$(u + v)' = u' + v'$$

- La dérivée d'un *produit* d'une fonction par *un nombre* k est le produit par k de la dérivée de la fonction :

$$(k \times u)' = k \times u'$$



Exercice 3.8. Soit $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 5$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

4. Dérivée d'un produit, d'un quotient**A. Dérivée d'un produit**

Théorème.

Soit deux fonctions u et v définies et *dérivables* sur le même intervalle.

La dérivée du *produit* de ces deux fonctions est :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$




Exercice 4.8. Soit $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 4)$. Calculer $f'(x)$ en utilisant la formule précédente.

B. Dérivée de l'inverse

Théorème.

Soit une fonction v définie et *dérivable* sur un intervalle I telle que v *ne s'annule pas* sur cet intervalle I . La dérivée de l'*inverse* de v est :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$


 **Exercice 5.8.** Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{3x-3}$. Calculez $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. Dérivée d'un quotient

Théorème.

Soit deux fonctions u et v définies et *dérivables* sur le même intervalle où v ne s'annule pas sur cet intervalle. La dérivée du *quotient* de ces deux fonctions est :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$


 **Exercice 6.8.** Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{4-x}$. Calculez $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

D. Dérivation et composition

Théorème.

Soit g une fonction *dérivable* sur un intervalle I . Pour tout réel x tel que $mx+p$ appartient à I , la fonction f définie par $f(x) = g(mx+p)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I ,

$$f'(x) = m \times g'(mx+p).$$

 **Exercice 7.8.** Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (7x-4)^9$.
Calculer $f'(x)$.

II. Sens de variation et dérivée

Le théorème suivant, permet de déterminer *les variations* d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et f' la dérivée de f sur I .

Théorème admis.

- Si f' est *nulle* sur I , alors f est *constante* sur I .
- Si f' est *strictement positive* sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est *strictement croissante* sur I .
- Si f' est *strictement négative* sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est *strictement décroissante* sur I .

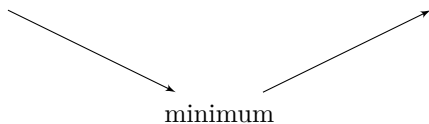
Théorème admis.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et x_0 un réel appartenant à I .

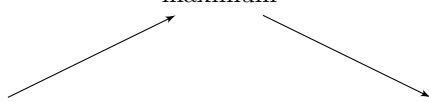
- Si f admet un *extremum local* en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en x_0 *en changeant de signe*, alors f admet un extremum local en x_0 .

Exemples :

1. *Cas d'un minimum* :

| x | a | x_0 | b |
|------------------|--|-------|-----|
| signe de $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| Variation de f |  | | |

2. *Cas d'un maximum* :

| x | a | x_0 | b |
|------------------|---|-------|-----|
| signe de $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| Variation de f |  | | |

Un classique corrigé.

Déterminer les variations de la fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} par l'expression : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$.

Étape 1 : Dériver la fonction La fonction f est un polynôme, donc sa dérivée est :

$$f'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

Étape 2 : Déterminer le signe de la dérivée La dérivée f' est un trinôme du second degré, avec $a = 3$, $b = 8$ et $c = -3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100$.

Le discriminant est strictement positif, donc le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times 3} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Son tableau de signes est donc :

| | | | | | |
|---------------------|---|------|---------------|-----------|-----|
| x | $-\infty$ | -3 | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| Variation de f | <div><div></div><div>23</div><div></div><div>$\frac{121}{27}$</div><div></div></div> | | | | |

Étape 3 : Dédire les variations de la fonction du signe de sa dérivée. Fait à la fin du tableau précédent.