束流传输基础概念

## 束流的基本性质

### 能散度

其中是粒子束流强度随能量分布曲线中流强最大值一半处的能量宽度，即**半高全宽**，又称**绝对能散度**。为流强峰值处所对应的能量。

传统加速器的能散度可以达到，而激光加速产生的高能电子的能散度已可低于。

### 电流强度

其中是束的总电荷量，可以是单个脉冲的时间，对应单脉冲峰值电流；也可以是与传统的电流强度定义不同，高能粒子束的电流强度没有除以面积。如再除以面积，则称为电流密度。所谓**强流粒子束**，指的是电流密度的粒子束（对中性束可采用等效流强）。

### 发射度

理论上，束流发射度可以定义为束流中振幅最大的粒子的相空间面积。实际上不可能知道这一振幅，因此发射度的定义往往基于粒子在相空间呈Gaussian分布的假设：

有效发射度（4-rms发射度）定义为

### K-V分布

考虑一个连续分布的轴对称束流，其粒子数密度为常数，束流半径，且所有粒子的能量相同，纵向速度 。束流由外部的均匀聚焦透镜控制，聚焦常数为，单位是 。这样的束流构成了2D K-V(Kapchinskij-Vladimirskij)分布

是横向能量，为常数；是横向的Hamiltonian

其中是电荷为q的粒子具有的势能，电势是由线性空间电荷产生的

定义广义导流系数

其中为等离子体频率，

## 束流光学

### 旁轴近似

当带电粒子在外电磁场作用下的运动局限于离*参考轨道(reference orbit)*很近的空间区域时，其运动可被一组线性方程来简单地描述

其中是聚焦函数，该方程被称为Hill方程。显然，对这样的二阶常微分方程，其解仅依赖于，而不依赖于更高阶的边界条件，这就是**旁轴近似**。

Hill方程的解可表示为类正余弦函数(sine-like and cosine-like)的叠加

## 束流传输中的能量损失机制

碰撞激发：

电离：

## 粒子-束流运动学

### 单粒子运动方程

带电粒子所受Minkovski力为

其中, 为固有时，为电磁场场强张量，具体表达式为

上述方程的时间和空间分量分别对应粒子能量变化率以及Lorentz力方程

其中用到. 选取柱坐标系，其中是x-y平面中的极角，r是到z轴的径向距离

将速度分解为横向与纵向，。相应地，单粒子运动方程也可按此分解，由于

运动方程的径向分量为

角向分量为

纵向分量为

#### 包络方程

1. 无限长圆柱体

对一束无限长、均匀连续分布的在真空中传播的带电粒子束流，在其静止系中，自生电磁场为

其中为电荷密度，对处在束边界上的粒子，初始条件包括

结合角向和纵向运动方程，可得

横向运动方程化为

由粒子能量随时间变化率可得

结合方程(1)(2)可得

由于粒子径向运动速度远小于光速，近似；

1. 假设可得

其中. 作无量纲化可得

其中. 解得

即

现在变换到实验室系，假设电子束能量为10MeV，则其相对论因子. 取电流，束流半径，则电荷密度。变换到静止系可得，进而

实验室系下传输距离，其中是静止系中经历的固有时。根据扩散半径解出扩散时间，可得

带入上述参数可得

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 电子束能量/MeV | 电流/A | 初始半径/cm | 扩散半径/cm | 传输距离/km |
| 10 | 1 | 1 | 10 | 0.18 |
| 10 | 0.1 | 1 | 10 | 0.58 |
| 10 |  | 1 | 10 | 5.8 |
| 10 |  | 1 | 10 | 18.4 |

1. 考虑

运动方程变为

无量纲化后得到

该方程无初等函数解，此处直接给出数值表格如下

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 电子束能量/MeV | 电流/A | 初始半径/cm | 扩散半径/cm | 传输距离/km |
| 10 | 1 | 1 | 10 | 0.48 |
| 10 | 0.1 | 1 | 10 | 1.51 |
| 10 |  | 1 | 10 | 15.1 |
| 10 |  | 1 | 10 | 477.7 |

为方便后续估算，这里也给出拟合得到的经验公式

其中

考虑传输特定距离下注量率的变化，

1. 短脉冲电子束团

对一束短脉冲(ns)电子束团，由于电子速度非常接近光速，其纵向长度可达到m量级，远大于束团横向半径(cm量级)

### 多粒子统计描述

#### 经典统计理论

对由N个粒子组成的系统，其**相空间**是6N维的，其中每个点（称为**代表点**，representative point）都代表了系统的一个微观状态。系统微观状态的改变表现为代表点在相空间中的移动，原则上由**哈密顿正则方程**决定。

对于处于确定宏观状态的系统，其对应的微观状态数目是及其庞大的，无法预知某一时刻某一个特定的微观状态是否出现。为此引入系统微观状态的**几率密度函数**，以下简写为，其归一化条件为

统计物理的一个基本假设是：对处于平衡态的系统，宏观物理量的测量值等于其对应微观物理量的统计平均值。即

原则上我们可以“观察”代表点在相空间中的移动，得出在不同时间的几率密度函数，最后计算上式的统计平均值。实际上由于微观状态数过于庞大，需要的时间很长，为此可以引入**系综**(ensemble)的概念：

系综是处于同一宏观状态、不同微观状态的大量系统的集合，对应与相空间中的一群代表点。引入**系综分布函数**或**代表点密度函数** ，以下简写为，其归一化条件为

其中为系综内包含的系统总数。在相空间体元内某一微观状态出现的概率可表示为

由此可得。

根据哈密顿正则方程可以推出刘维(Liouville)定理

其中隐含了对指标i的求和。利用正则方程与Poisson括号可以将上式写为更简洁的形式

#### 量子统计理论

### 单粒子统计描述

由于Liouville方程的求解和哈密顿正则方程的求解一样困难，在实际应用中往往需要进行降维处理。考虑系统中任一个粒子的分布函数，其物理意义是该粒子处于其空间中(**r**,**v**)点的概率

它显然满足归一化条件

其运动方程被称为**粒子输运方程**，它可以被看做Liouville定理的单粒子形式

其中表示作用在粒子上的外力，等式右边第一项是碰撞项，表示粒子间的相互作用；第二项是外源项。

#### BBKGY Hierarchy

上述粒子输运方程可以通过对Liouville方程积分得到，在这方面Born, Bogoliubov, Kirkwood, Green, Yvon5人分别独立地研究过。

### 流体描述

与上述的统计描述不同，流体描述的基本单元不是粒子，而是流体元。每一个流体元可以看成是一个子系统，其中包含很多粒子。流体描述只关心特定时空点上流体元内有多少粒子，以及该流体元对应的力学量的变化规律。

流体描述分为两种，一种是Lagrange**方法**，该方法对每个流体元的运动行为以及力学量的变化进行研究，类似于多质点体系的动力学描述；另一种是Euler**方法**，该方法采用场的观点，研究固定时空点处流体力学变量的变化，该变量并不与特定流体元挂钩。如果考虑特定流体元的流体力学变量的时间变化率，应采用随体时间微商

流体力学方程组包含流体质量守恒、动量守恒及能量守恒方程，可以笼统地表示为

其中表示某物理量的密度，是该物理量固有的流密度，是随流体运动导致的流密度，分别表示**源**和**汇**。

## 参考文献

1. 张树发. 带电粒子束传输中发散范围的计算[J]. 国防科技大学学报, 1982, 2.
2. 戴宏毅, 王同权, 肖亚斌. 带电粒子束自生力对束流扩散的影响[J]. 国防科技大学学报, 2000, 22(4): 41-44.
3. 戴宏毅, 肖亚斌, 王同权, 张树发. 带电粒子束在真空中传输时的扩散研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版)中文版, 2001(28)4.
4. 郝建红, 王希, 张芳, 赵强, 薛碧曦, 范杰清, 董志伟. 随移动窗推进的带电粒子束团长程传输模拟分析[J]. 国防科技大学学报, 2021, 43: 168-174.
5. Xi WANG, Jianhong HAO, Fang ZHANG, Qiang ZHAO, Jieqing FAN, Bixi XUE, Lei GAO, Chenrui CHAI, Zhiwei DONG. Axial effect analysis of relativistic electron beam propagation in vacuum[J]. Plasma Science and Technology, 2022, 24(6): 065301.
6. 王庆宇，党怡天，铁维昊，牛浩波，孙安邦. 真空中相对论电子束长程传输过程仿真研究[J]. 航天器环境工程, 2024(41): 319-324.
7. Humphries, S. Charged particle beams[M]. Hoboken，NJ：John Wiley and ons，1990.
8. 戴宏毅, 王同权, 肖亚斌, 张树发, 王尚武.粒子束传输技术的研究现状[J]．国防科技参考, 1999(4) : 24－27.
9. 任三孩, 邢艳军, 彭忠, 黄惠军. 粒子束空间传输影响因素及应对方法[J]. 国防科技大学学报, 2023, 45: 138-145.