向量空间

颜文斌
清华大学

内容提要

- **向量空间**
- 线性独立、基和维度
- 矩阵A的零空间（$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解空间）
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- 四个子空间的维度

向量空间$\mathbb{R}^n$和 $\mathbb{C}^n$

- $\mathbb{R}^n$：所有n个实数分量的列向量的集合
- $\mathbb{C}^n$：所有n个复数分量的列向量的集合

$$\begin{bmatrix} 4 \\ \pi \end{bmatrix} \text{ is in } \mathbf{R}^2, \quad (1,1,0,1,1) \text{ is in } \mathbf{R}^5, \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \text{ is in } \mathbf{C}^2$$

- 性质：$\mathbb{R}^n$/ $\mathbb{C}^n$中的元素的线性组合还属于$\mathbb{R}^n$/ $\mathbb{C}^n$
  - 注意：数乘时所乘的数要和向量的分量属于同一个数域

一般向量空间（线性空间）

- 定义：域$\mathbb{F}$上的向量空间是满足以下公理的集合V（131页）
  1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
  2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$
  3. 存在唯一的零向量$\mathbf{0}$使得对于任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$
  4. 对任意$\boldsymbol{x}$，存在唯一的向量$-\boldsymbol{x}$使得$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$
  5. 1乘$\boldsymbol{x}$等于$\boldsymbol{x}$
  6. $(c_1c_2)\boldsymbol{x}=c_1(c_2\boldsymbol{x})$
  7. $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}$
  8. $(c_1+c_2)\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{x}$
- 向量空间：（粗略的说）定义了加法和数乘的空间

向量空间

- 向量空间中的元素不一定是狭义的“向量（一列数）”
- 例：实数上的向量空间
  - M : 所有mxn实矩阵构成的空间
  - F: 所有实函数$f(x)$构成的空间
  - Z: 只有零向量的空间
- 维数：
  - M : mn
  - F: 无穷
  - Z: 0

子空间（subspace）

- **定义**：

线性空间V的子空间V_S是V的一个子集，并且满足下面两个条件：
对于属于子空间的矢量$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$，以及一个标量c

1. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 是V_S的元素
2. $c\boldsymbol{v}$是V_S的元素

- 子空间对于加法和数乘“封闭”，所有线性组合都在同一个子空间
- 所有的子空间必然包含零向量（提示：$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})$）

子空间判定

- 例： $\mathbb{R}^3$中的子空间
  - 不过原点的平面：不是
  - 原点本身：是
  - 过原点的直线：是
  - 过原点的平面：是
  - $\mathbb{R}^3$本身：是
- 直线或者平面的一部分：
  - 平面的某一象限：不是
  - 平面的第一象限和第三象限的并集：不是
- $\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$在子空间中，那么所有线性组合$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$也在子空间中

子空间判定

- 2x2矩阵构成的线性空间M
  - U：所有的上三角矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
  - D：所有的对角矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$
  - 零向量是什么？
  - 单位矩阵I构成子空间吗？

矩阵A的列空间

- 定义：

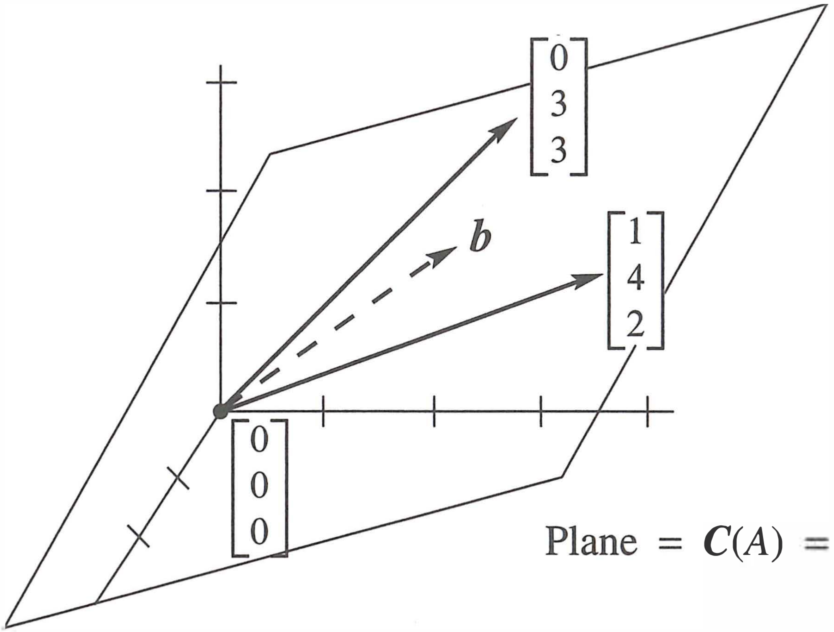
矩阵A的列空间$C(A)$是A的所有列的线性组合

- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ：
  - $A\boldsymbol{x} \in C(A)$
  - 方程是否有解$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$是否属于$C(A)$
- 如果A是个mxn的矩阵：$C(A)$是$\mathbb{R}^m$的子空间
- 如果把A看成是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的线性变换，是$C(A)$是这个线性变换的**像**（image）

矩阵A的列空间

- 例：

$$A\boldsymbol{x} \quad \text{is} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{which is} \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = .4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + .3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \text{has} \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} .4 \\ .3 \end{bmatrix}$$

Plane = $\boldsymbol{C}(A)$ = all vectors $A\boldsymbol{x}$

线性扩张（span）

- 一般来说，向量空间V的子集S不是子空间
- 从S构造出子空间？
- 线性扩张：SS =所有S中向量的线性组合
  - SS是V的子空间
  - $C(A)$是A所有列的线性扩张
- 例：以下矩阵的列空间？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. $\mathbf{R}^n$ contains all column vectors with n real components.

2. $\mathbf{M}$ (2 by 2 matrices) and $\mathbf{F}$ (functions) and $\mathbf{Z}$ (zero vector alone) are vector spaces.

3. A subspace containing $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{w}$ must contain all their combinations $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$.

4. The combinations of the columns of A form the ***column space*** $C(A)$. Then the column space is "spanned" by the columns.

5. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has a solution exactly when $\boldsymbol{b}$ is in the column space of A.

$$C(A) = \textbf{ all combinations of the columns} = \textbf{all vectors } A\boldsymbol{x}.$$

内容提要

- 向量空间
- **线性独立、基和维度**
- 矩阵A的零空间（$Ax = 0$的解空间）
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- 四个子空间的维度

线性独立

- 定义：n个向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$是线性独立的，当且仅当
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \text{ 只在} x_i = 0 \text{时成立}$$
- 线性相关： n个向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$不是线性独立，那么他们是线性相关的
- 判定：
  - $A = (\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n)$
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是否只有零解
  - 通常A是一个mxn的矩阵，需要知道一般线性方程组的解
- 等价描述：$\{\boldsymbol{v}_i\}$是线性独立的，则集合中每一个向量都不能写集合中成其它向量的线性组合

线性独立

- 例：$\mathbb{R}^2$

(a) The vectors $(1, 0)$ and $(0, 1)$ are independent.

(b) The vectors $(1, 0)$ and $(1, 0.00001)$ are independent.

(c) The vectors $(1, 1)$ and $(-1, -1)$ are *dependent*.

(d) The vectors $(1, 1)$ and $(0, 0)$ are *dependent* because of the zero vector.

(e) In $\mathbf{R}^2$, any three vectors (a, b) and (c, d) and (e, f) are *dependent*.

线性空间的基

- 定义：线性空间V的基是一组**线性无关**的向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$，并且他们**张成**整个线性空间V
  - 线性无关：$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ 只在$x_i = 0$时成立
  - 扩张成V：V中的任何一个向量$\boldsymbol{v}$都可以写成$\{\boldsymbol{v}_i\}$的线性组合
  - $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 总是$S\{\boldsymbol{v}_i\}$的基
- 例：

The basis vectors $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ are independent. They span $\mathbf{R}^2$.

  - 推广：$\{\boldsymbol{e}_i\}$ 构成$\mathbb{R}^n$中的一组基

线性空间的基

- V中的任何一个向量$\boldsymbol{v}$都可以写成基$\{\boldsymbol{v}_i\}$的线性组合
- 假设$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$，这个线性组合是唯一的
- 证明：
  - 如果$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$且$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v}_i$，则$\boldsymbol{0}=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\boldsymbol{v}_i$
  - 因为$\{\boldsymbol{v}_i\}$线性独立（基的定义），则$(a_i-b_i)=0$

线性空间的维度

- 定义：线性空间V的维度$\dim V$等于任意一组基中向量的个数
- 线性空间的维度和基的选取无关：
- 证明：
  - 两组基：$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$和$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$，假设m>n
  - 因为$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$是基，$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{w}_j$
  - 考虑线性组合$\sum_{i=1}^{m} x_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i,j} x_i\, a_{ij}\boldsymbol{w}_j$，因为$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$是基，所以$\sum_{i,j} x_i\, a_{ij}\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$推出$\sum_i x_i\, a_{ij} = 0$
  - 但是$\sum_{i,j} x_i\, a_{ij} = 0$中未知数的个数m大于方程的个数n，所以有非零解
  - 同$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$线性独立矛盾（$\sum_{i=1}^{m} x_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$只有零解）=>m不能大于n
  - 同理m不能小于n。最终m=n

线性空间的维度

- 两个线性空间V_1和V_2， 如果任意$\boldsymbol{v} \in V_1$ 可以写成V_2中向量的线性组合，则$\dim V_1 \le \dim V_2$
- 证明：
  - V_1和V_2的基分别记为：$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$和$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$
  - 由假设，$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{w}_j$
  - 考虑线性组合$\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{m} x_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i,j} x_i\, a_{ij}\boldsymbol{w}_j$，因为$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$是基，所以$\sum_i x_i\, a_{ij} = 0$
  - 又因为$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$是基，所以$\sum_i x_i\, a_{ij} = 0$只有0解（$x_i = 0$）
  - $m \le n$, 或者说$\dim V_1 \le \dim V_2$

线性空间的维度

- 例：Z
  - 维度为0，基是空集
- 例：矩阵

The dimension of the whole n by n matrix space is n^2.

The dimension of the subspace of *upper triangular* matrices is $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

The dimension of the subspace of *diagonal* matrices is n.

The dimension of the subspace of *symmetric* matrices is $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (why ?).

线性空间的维度

- 例：函数空间

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0 && \text{is solved by any linear function } y = cx + d \\
y'' &= -y && \text{is solved by any combination } y = c\sin x + d\cos x \\
y'' &= y && \text{is solved by any combination } y = ce^{x} + de^{-x}.
\end{aligned}
$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The columns of A are ***independent*** if $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ is the only solution to $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

2. The vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ ***span*** a space if their combinations fill that space.

3. ***A basis consists of linearly independent vectors that span the space.*** Every vector in the space is a *unique* combination of the basis vectors.

4. All bases for a space have the same number of vectors. This number of vectors in a basis is the ***dimension*** of the space.

5. The pivot columns are one basis for the column space. The dimension is r.

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- **矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间（$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解空间）**
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- 四个子空间的维度

矩阵A的零空间（Nullspace）

- 定义：mxn矩阵A的零空间$N(A)$是$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$所有解构成的空间。
  - $N(A)$是$\mathbb{R}^n$的子空间
  - $C(A)$是$\mathbb{R}^m$的子空间
- 如果A是可逆的，则$N(A)=\mathrm{Z}$（只有零向量）
- 例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1+2x_2&=0\\ 3x_1+6x_2&=0\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1+2x_2&=0\\ \mathbf{0}&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

  - $N(A)$：$x_1+2x_2=0$定义的直线

矩阵A的零空间

- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

  - $N(A)$：$x_1 + 2x_2 = 0$定义的直线
  - $N(A)$：$\begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $N(A)$：$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$的线性扩张
- 想法：$N(A)$写成某些特殊向量（基）的线性扩张

矩阵A的零空间

- 考虑mxn的矩阵A且n大于m
- 描述$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解空间
  - n个未知数，m个方程
  - 将A写成$(B \quad C)$，其中B是mxm矩阵， C是mx(n-m)矩阵
  - $\boldsymbol{x}$写成$(\boldsymbol{y}_1 \quad \boldsymbol{y}_2)^T$，其中$\boldsymbol{y}_1 = (x_{i_1} \quad \cdots \quad x_{i_m})$，$\boldsymbol{y}_2 = (x_{i_{m+1}} \quad \cdots \quad x_{i_n})$
  - 原方程等价于$B\boldsymbol{y}_1 = -C\boldsymbol{y}_2$
  - 原方程的解：$\boldsymbol{y}_2$是自由参数，解出$\boldsymbol{y}_1$
- 高斯消元法

主列（pivot column）和自由列（free column）

- mxn的矩阵A且n大于m，描述$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解空间（$N(A)$）
- 将A写成$(B \quad C)$，其中B是mxm矩阵， C是mx(n-m)矩阵
- 假设B可逆而且$B = L\widetilde{U}$，定义$U = (\widetilde{U} \quad L^{-1}C)$
  - $\tilde{A}$和A有相同的零空间$N(A) = N(U)$
  - U对应的列叫主列， $L^{-1}C$对应的列叫自由列
- 假设P$B = L\widetilde{U}$，同样可以定义$U = (\widetilde{U} \quad D)$，且$N(A) = N(U)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \text{ becomes } U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \end{array}$$

pivot columns **free columns**

行缩减梯形式（the reduced row echelon form）

- mxn矩阵A做消元得到U， U是一个阶梯矩阵，每一行第一个非零分量都在上一行第一个非零分量的右边
  - $N(A) = N(U)$ （证明思路：行变换不改变解、行变换矩阵可逆）
- 从U继续以下操作
  - 消元，将每个主元（每一行的第一个非零分量）上面的分量变成0
  - 结果每一行除以该行的主元，得到矩阵R
- 矩阵R被叫做A的行缩减梯形式，$R = \mathrm{rref}(A)$
  - $N(A) = N(U) = N(R)$
  - R的每一行的第一个非零元素总是1

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{becomes} \quad R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \end{array} \end{array}$$

行缩减梯形式和$N(A)$的描述

Pivot Variables and Free Variables in the Echelon Matrix R

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} p & p & f & p & f \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_1=\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_2=\begin{bmatrix} -c \\ -d \\ \mathbf{0} \\ -e \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

3 pivot columns p
2 free columns f
to be revealed by R

I in pivot columns
F in free columns
3 pivots: rank $r=3$

special $R\boldsymbol{s}_1=\mathbf{0}$ and $R\boldsymbol{s}_2=\mathbf{0}$
take $-a$ to $-e$ from R
$R\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$ means $A\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$

R shows clearly: *column* $3=a\,($*column* $1)+b\,($*column* $2)$. The same must be true for A.
The special solution $\boldsymbol{s}_1$ repeats that combination so $(-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b},\mathbf{1},0,0)$ has $R\boldsymbol{s}_1=\mathbf{0}$.
Nullspace of $A=$ Nullspace of $R=$ all combinations of $\boldsymbol{s}_1$ and $\boldsymbol{s}_2$.

问题：R的列空间？

行缩减梯形式和$N(A)$的描述

- $N(A) = N(U) = N(R)$
- R中：包含主元的列是主列（或者说每行第一个非零分量所在的列是主列），其它的是自由列
- 主列上只有一个非零分量1，其它分量都是0
- 自由列可以写成主列的线性组合
  - 方程$\boldsymbol{R}x = \boldsymbol{0}$中，主列对应的未知数可以用自由列对应的未知数表示
- $N(R)$ 可以写成一系列特解的线性扩张
  - 每一个特解对应一个自由列，该自由列对应的未知数取1，其它自由列对应的未知数取0，主列对应的未知数由$\boldsymbol{R}x = \boldsymbol{0}$决定

矩阵的秩（rank）

- 定义：矩阵A的秩为行空间或者列空间的维数（后面会证明行秩=列秩）
  - 等于行缩减梯形式$R = \mathrm{rref}(A)$的非零行数
  - 等于行缩减梯形式$R = \mathrm{rref}(A)$的主列数
- 例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \text{ all have rank } 1.$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \text{ have only one pivot.}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The nullspace $\boldsymbol{N}(A)$ is a subspace of $\mathbf{R}^n$. It contains all solutions to $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

2. Elimination on A produces a row reduced R with pivot columns and free columns.

3. Every free column leads to a special solution. That free variable is 1, the others are 0.

4. The *rank* r of A is the number of pivots. All pivots are 1's in $R = \mathsf{rref}(\mathsf{A})$.

5. The complete solution to $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ is a combination of the $n - r$ special solutions.

6. A always has a free column if $n > m$, giving a *nonzero solution* to $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵A的零空间（$Ax = 0$的解空间）
- **方程$\boldsymbol{Ax = b}$的完整解**
- 四个子空间的维度

线性方程组的通解（complete solution）

- 零空间：线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解
- 考虑线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$
  - A是mxn矩阵
- 通解：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n$
  - $\boldsymbol{x}_p$是一个特解
  - $\boldsymbol{x}_n$是A的零空间$N(A)$的任意元素
- 方法：转化成行缩减梯形式的解

线性方程组的通解

- 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
    - A是mxn矩阵
- 增广矩阵$(A \quad \boldsymbol{b})$，行缩减梯形式为$(R \quad \boldsymbol{d})$
    - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 和$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$有同样的解
    - 原因？（提示：把消元操作换成矩阵乘法）
    - **解存在**：R的零行对应$\boldsymbol{d}$的零行

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \boldsymbol{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \boldsymbol{b}_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \boldsymbol{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \boldsymbol{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

线性方程组的通解

- 增广矩阵$(A \quad \boldsymbol{b})$，行缩减梯形式为$(R \quad \boldsymbol{d})$
  - 特解：$R\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{d}$
  - $n-r$个通解：$x_n \in N(A)$
- 例：

$$R\boldsymbol{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性方程组的通解

- 例：假设A是一个可逆的方阵，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解？
  - $\text{rref}(A)=I,\quad N(A)=Z$
  - $(A,\boldsymbol{b})=(I,A^{-1}\boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p=A^{-1}\boldsymbol{b}$
- 例：

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\-2&-3\end{bmatrix}\text{ and }\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&b_1\\1&2&b_2\\-2&-3&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&b_1\\0&1&b_2-b_1\\0&-1&b_3+2b_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2b_1-b_2\\0&1&b_2-b_1\\0&0&\boldsymbol{b_3+b_1+b_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix}2b_1-b_2\\b_2-b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

满列秩（full column rank）矩阵

- 定义：A满列秩，如果秩r=列数n
  - A的所有列都是主列
  - 零空间$N(A)$只有零向量
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$如果有解，$\boldsymbol{b} \in C(A)$，且只有一个解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ and } \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{b_3} + \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

满行秩（full row rank）矩阵

- 定义：A满行秩，如果秩r=行数m
  - A的所有行都有主元，R没有零行
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$对于任意$\boldsymbol{b}$都有解
  - $C(A) = \mathbb{R}^m$
  - n-r=n-m个特殊解，张成$\mathbb{R}^n$内的一个n-m维线性空间

线性方程组解的总结

The four possibilities for linear equations depend on the rank r

$\boldsymbol{r=m}$	and	$\boldsymbol{r=n}$	*Square and invertible*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has 1 solution
$\boldsymbol{r=m}$	and	$r<n$	*Short and wide*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has ∞ solutions
$r<m$	and	$\boldsymbol{r=n}$	*Tall and thin*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has 0 or 1 solution
$r<m$	and	$r<n$	*Not full rank*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has 0 or ∞ solutions

Four types for R	$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Their ranks	$\boldsymbol{r=m=n}$	$\boldsymbol{r=m<n}$	$\boldsymbol{r=n<m}$	$\boldsymbol{r<m, r<n}$

Cases 1 and 2 have full row rank $r = m$. Cases 1 and 3 have full column rank $r = n$. Case 4 is the most general in theory and it is the least common in practice.

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The rank r is the number of pivots. The matrix R has $m - r$ zero rows.
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is solvable if and only if the last $m - r$ equations reduce to $0 = 0$.
3. One particular solution $\boldsymbol{x}_p$ has all free variables equal to zero.
4. The pivot variables are determined after the free variables are chosen.
5. Full column rank $r = n$ means no free variables: one solution or none.
6. Full row rank $r = m$ means one solution if $m = n$ or infinitely many if $m < n$.

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵A的零空间（$Ax = 0$的解空间）
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- **四个子空间的维度**

四个同矩阵A有关的线性子空间

- mxn矩阵A
  - 行空间$C(A^T)$：所有行向量的线性扩张，$\mathbb{R}^n$的子空间
  - 列空间$C(A)$ ：所有列向量的线性扩张， $\mathbb{R}^m$的子空间
  - 零空间$N(A)$ ：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解构成的线性空间， $\mathbb{R}^n$的子空间
  - 左零空间（left null space） $N(A^T)$ ： $\boldsymbol{x}^T A = \boldsymbol{0}$的解构成的线性空间， $\mathbb{R}^m$的子空间
- 维度（线性代数基本定理）：
  - $C(A^T)$和$C(A)$的维度都等于A的秩r（行秩=列秩）
  - $N(A)$的维度等于n-r
  - $N(A^T)$的维度等于m-r

行变换和列变换（矩阵的初等变换）

- 行变换：用E_{ij}和P_{ij}左乘矩阵A
  - $\left(E_{ij}\right)_{ab} = \delta_{ab} - l_{ij}\delta_{ia}\delta_{jb}$
  - $\left(P_{ij}\right)_{ab} = \delta_{ab} - \delta_{ia}\delta_{ib} - \delta_{ja}\delta_{jb} + \delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ja}\delta_{ib}$
  - $\delta_{ab} = 1\ if\ a = b, \quad 0\ if\ a \neq b$, Kronecker delta
  - $\left(E_{ij}A\right)_{ab} = \sum_c \left(E_{ij}\right)_{ac} A_{cb} = A_{ab} - l_{ij}\delta_{ia}A_{jb}$
  - $\left(P_{ij}A\right)_{ab} = \sum_c \left(P_{ij}\right)_{ac} A_{cb} = A_{ab} - \delta_{ia}A_{ib} - \delta_{ja}A_{jb} + \delta_{ia}A_{jb} + \delta_{ja}A_{ib}$
- 列变换：用E_{ij}和P_{ij}右乘矩阵A
  - $\left(AE_{ij}\right)_{ab} = \sum_c A_{ac}\left(E_{ij}\right)_{cb} = A_{ab} - l_{ij}\, A_{ai}\delta_{jb}$ j列 - l_{ij} i列
  - $\left(AP_{ij}\right)_{ab} = \sum_c A_{ac}\left(P_{ij}\right)_{cb} = A_{ab} - A_{ai}\delta_{ib} - A_{aj}\delta_{jb} + A_{ai}\delta_{jb} + A_{aj}\delta_{ib}$

交换i列和j列

行变换和子空间

- 假设E是一系列行变换对应的矩阵， E可逆
- A和EA有相同的零空间
  - $N(A) = N(EA)$
  - 证明思路：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解是$EA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解，反之也成立
- A和EA列空间的维度相同（列空间不一定一样！！！）
  - $\dim C(A) = \dim C(EA)$
  - 证明思路：将$A\boldsymbol{x}$或者$EA\boldsymbol{x}$理解成各自列向量的线性组合，则A和EA的相同列的线性组合总是同时为**0**或者不为**0**

列变换和子空间

- 假设E是一系列列变换对应的矩阵， E可逆
- A和AE有相同的零空间维度
  - $\dim N(A) = \dim N(AE)$
  - 证明思路：$\boldsymbol{x}$是$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解，那么$E^{-1}\boldsymbol{x}$就是$AE\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解，两个空间$N(A)$，$N(AE)$的基有一一对应
- A和AE 有相同的列空间
  - $C(A) = C(AE)$
  - 证明思路：AE的每一列显然是A的列向量的线性组合，又因为$A = (AE)E^{-1}$**，**A的每一列也是AE的列向量的线性组合

矩阵A的子空间在初等变换下的性质

- 矩阵A在初等变换下
  - 列空间$C(A)$的维度不变
  - 零空间$N(A)$的维度不变
- 行变换下
  - 零空间$N(A)$不变
- 列变换下
  - 列空间$C(A)$不变
- 矩阵A^T的子空间在初等变换下如何？

矩阵和初等变换

- 矩阵A可以通过行变换+每一行除以主元变成阶梯形式$R = \mathrm{rref}(A)$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- R可以通过列变换变成矩阵$\tilde{I}$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于矩阵$\tilde{I}$：行秩（$\dim C(\tilde{I}^T)$）=列秩（$\dim C(\tilde{I})$）=r，$\dim C(\tilde{I}) + \dim N(\tilde{I}) = n$，$\dim C(\tilde{I}^T) + \dim N(\tilde{I}^T) = m$

矩阵和初等变换

- 矩阵A可以通过行变换+每一行除以主元+列变换变成矩阵$\tilde{I}$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于矩阵$\tilde{I}$：行秩（$\dim C(\tilde{I}^T)$）=列秩（$\dim C(\tilde{I})$）=r，$\dim C(\tilde{I}) + \dim N(\tilde{I}) = n$，$\dim C(\tilde{I}^T) + \dim N(\tilde{I}^T) = m$
- 以上的这些量在初等变化下都不变，所以：
- **线性代数基本定理**:

行秩（$\dim C(A^T)$）=列秩（$\dim C(A)$）=r，$\dim C(A) + \dim N(A) = n$，$\dim C(A^T) + \dim N(A^T) = m$

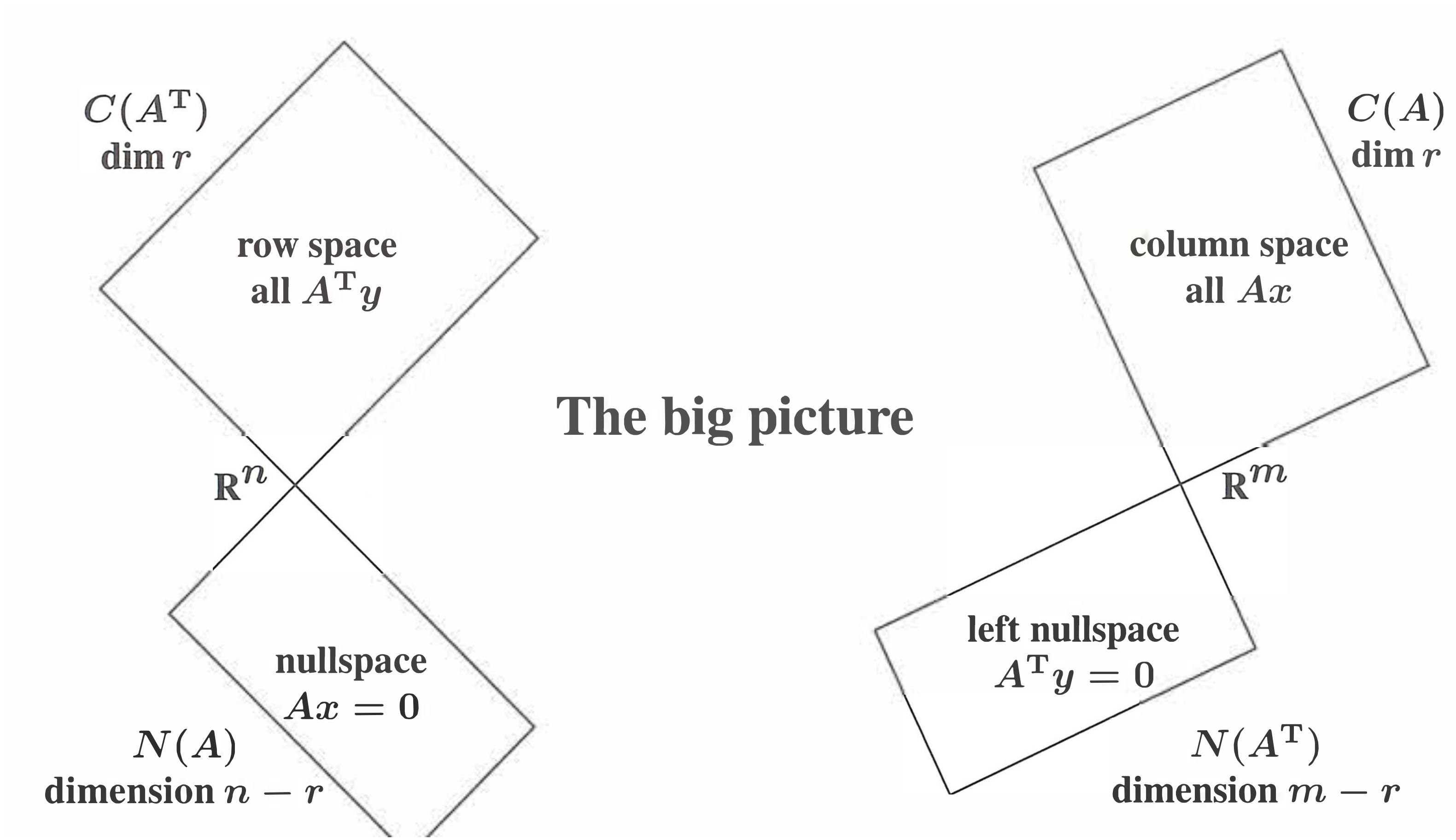
线性代数基本定理

- 行秩=列秩

$$\dim C(A^T) = \dim C(A) = r$$

- $\dim C(A) + \dim N(A) = r + \dim N(A) = n$
- $\dim C(A^T) + \dim N(A^T) = r + \dim N(A^T) = m$

矩阵的四个子空间



$C(A^{\mathrm{T}})$
dim r
row space
all $A^{\mathrm{T}}y$
$\mathbf{R}^n$
nullspace
$Ax = 0$
$N(A)$
dimension $n - r$
The big picture
$C(A)$
dim r
column space
all Ax
$\mathbf{R}^m$
left nullspace
$A^{\mathrm{T}}y = 0$
$N(A^{\mathrm{T}})$
dimension $m - r$

小结：

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The r pivot rows of R are a basis for the row spaces of R and A (same space).
2. The r pivot columns of A (!) are a basis for its column space $\boldsymbol{C}(A)$.
3. The $n - r$ special solutions are a basis for the nullspaces of A and R (same space).
4. If $EA = R$, the last $m - r$ rows of E are a basis for the left nullspace of A.