线性方程组和矩阵运算

向量和矩阵

- 标量（scalar, 1×1）：c，实数
- 向量（矢量，vector）：
  - 列向量（column vector, m×1）：$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$
  - 行向量（row vector, 1×n）：$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$
- 矩阵（matrix, m×n）：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

  - A_{ij}: 矩阵A第i行第j列的元素。m=n：方阵

应用：矩阵力学

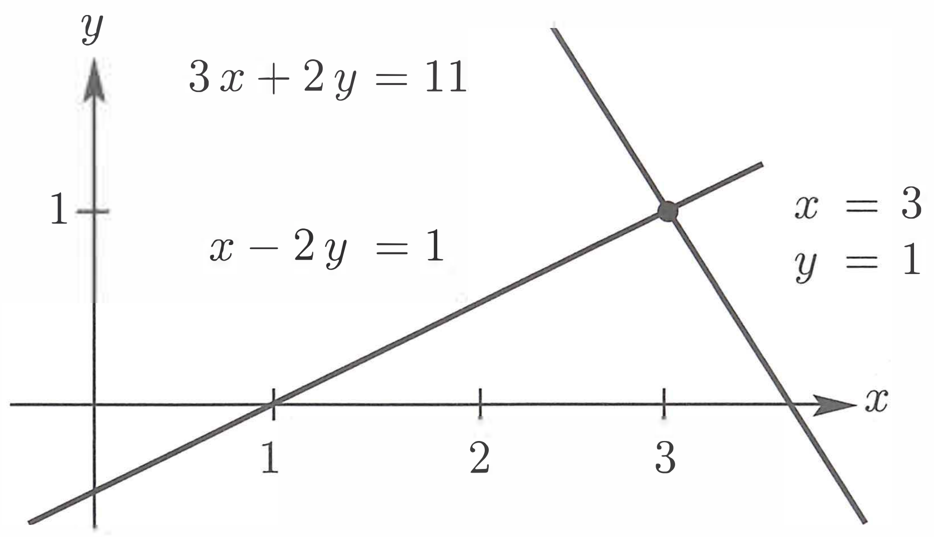
内容提要

- **线性方程和矩阵**
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置（transpose）

线性方程组：二元

- **线性方程：**
  - 未知数**最高**次数是1的方程
- 矩阵形式：$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
- **行观点：** 点乘
  - 几何问题转化为代数问题

$$\begin{aligned} x &- 2y &= 1 \\ 3x &+ 2y &= 11 \end{aligned}$$



$(1 \quad -2)\cdot(x \quad y) = x - 2y = 1$

$(3 \quad 2)\cdot(x \quad y) = 3x + 2y = 11$

线性方程组：二元

- **线性方程：**
  - 未知数最高次数是1的方程
- 矩阵形式：$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 11\end{pmatrix}$
- **列观点：** 线性组合

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ 3x & + & 2y & = & 11 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}1\\ 11\end{pmatrix}$$

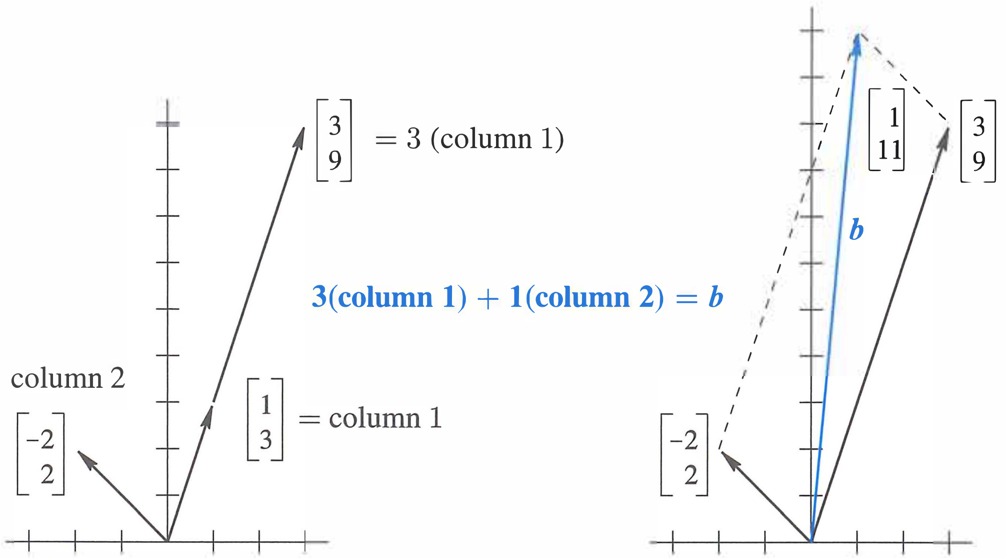


Figure 2.2: *Column picture*: A combination of columns produces the right side (1, 11).

线性方程组：三元

- 三元线性方程：

$$\begin{aligned} x &+ 2y + 3z = 6 \\ 2x &+ 5y + 2z = 4 \\ 6x &- 3y + z = 2 \end{aligned}$$

- 矩阵形式：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 行观点：点乘

$$\begin{aligned} (1 \quad 2 \quad 3) \cdot (x \quad y \quad z) &= 6 \\ (2 \quad 5 \quad 2) \cdot (x \quad y \quad z) &= 4 \\ (6 \quad -3 \quad 1) \cdot (x \quad y \quad z) &= 2 \end{aligned}$$

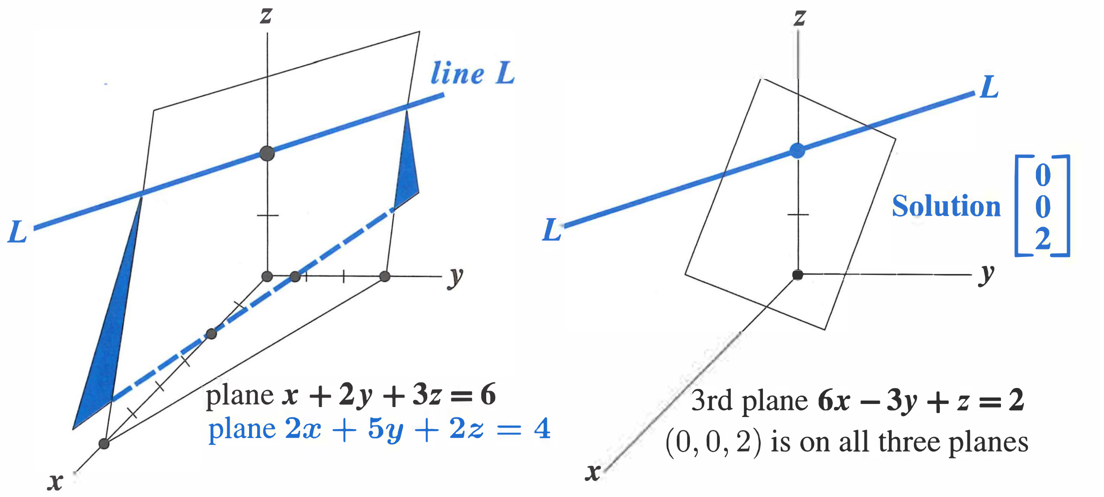


Figure 2.3: *Row picture*: Two planes meet at a line L. Three planes meet at a point.

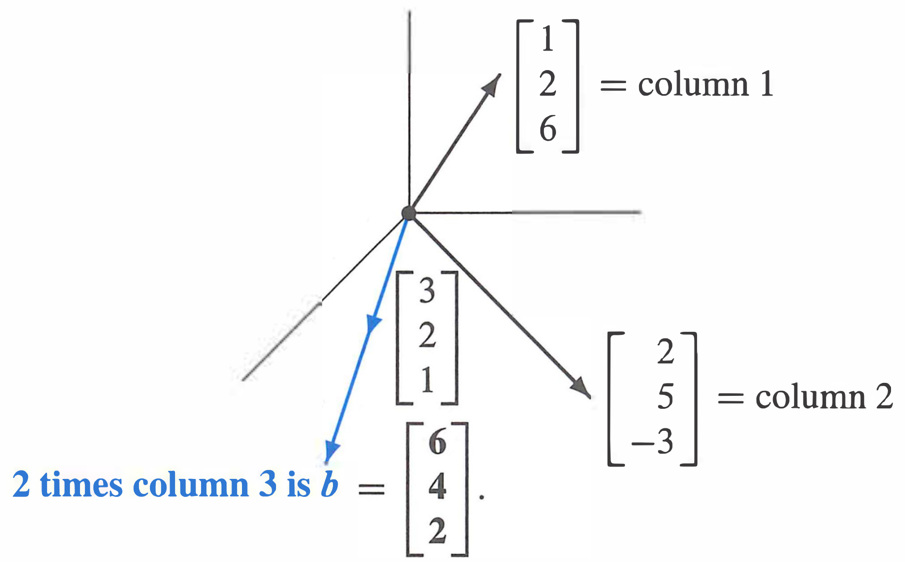
线性方程组：三元

- 三元线性方程：

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 5y + 2z &= 4 \\ 6x - 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

- 矩阵形式：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 列观点：线性组合

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



一般线性方程组

- 考虑n个n元线性方程构成的方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j = b_i, \qquad\qquad i = 1, \cdots, n$$

- 把系数写成系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- 那么线性方程组也可以写成矩阵和向量的作用（乘法）

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

一般线性方程组：行观点

- 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- 矩阵写成n个行向量：$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$
- 点乘：$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = b_i, \qquad i = 1, \cdots, n$
  - 每一个方程代表n维空间中的一个超平面（**hyper-plane**）
  - n个方程：n个超平面相交

图请
自行
脑补

一般线性方程组：列观点

- 线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$
- 矩阵写成n个列向量：$A=(\tilde{\boldsymbol{a}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{a}}_n)$
- n维向量的线性组合：

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{a}}_i x_i = \boldsymbol{b}$$

请自行脑补图

几何问题转化为代数问题→ 方程的问题转化为矩阵问题

矩阵性质→方程的性质

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The basic operations on vectors are multiplication $c\boldsymbol{v}$ and vector addition $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.
2. Together those operations give *linear combinations* $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$.
3. Matrix-vector multiplication $A\boldsymbol{x}$ can be computed by dot products, a row at a time. But $A\boldsymbol{x}$ must be understood as a *combination of the columns of* A.
4. Column picture: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ asks for a combination of columns to produce $\boldsymbol{b}$.
5. Row picture: Each equation in $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gives a line ($n = 2$) or a plane ($n = 3$) or a "hyperplane" ($n > 3$). They intersect at the solution or solutions, if any.

内容提要

- 线性方程和矩阵
- **消元法（elimination）解线性方程**
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置（transpose）

消元法解线性方程组

- 2元线性方程组

$$\textbf{Before} \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \qquad \textbf{After} \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 8y &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(\textit{multiply equation } 1 \textit{ by } 3) \\ &(\textit{subtract to eliminate } 3x) \end{aligned}$$

- 消元法：得到一个上三角方程组
  - 在第二个方程中消去x：从第二个方程减去第一个方程乘一个系数（例子中为3）
- 消元后第二个方程解出$y = 1$, 代回到第一个方程得到$x = 3$

消元法解线性方程组

- 2元线性方程组

Before
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

After
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \qquad &(\textit{multiply equation } 1 \textit{ by } 3) \\ 8y &= 8 \qquad &(\textit{subtract to eliminate } 3x) \end{aligned}$$

- 几何图像：消元将第二条直线围绕着交点转至水平方向（降维）

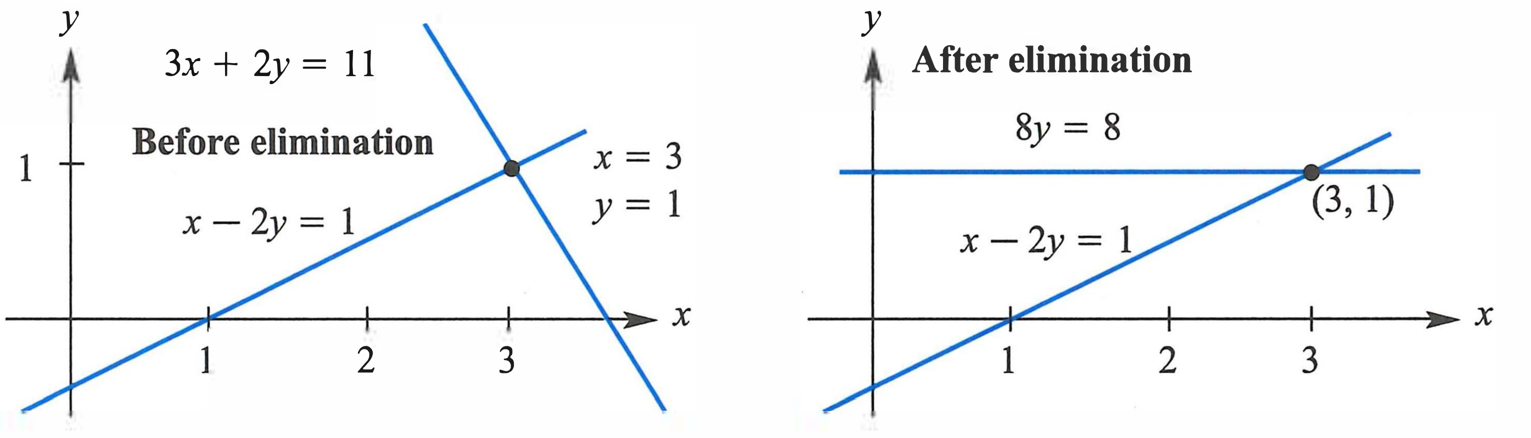


Figure 2.5: Eliminating x makes the second line horizontal. Then $8y = 8$ gives $y = 1$.

消元法解线性方程组

主元（pivot）

$$4x - 8y = 4$$
$$3x + 2y = 11$$

被消变量的系数

乘子l_{ij}=$\dfrac{第i行被消变量的系数}{第j行的主元}$

方程2 − 乘子l_{21}×方程1 $\quad l_{21} = \dfrac{3}{4}$

消元法解线性方程组

- 主元：消元法得到上三角方程之后对角线系数
- 例：主元为1和8（两个）

Before $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$ **After** $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 8y &= 8 \end{aligned}$ $\begin{aligned} &(\textit{multiply equation } 1 \textit{ by } 3) \\ &(\textit{subtract to eliminate } 3x) \end{aligned}$

- 例：主元为a_{11}至a_{nn}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

消元法失效

- 2元线性方程组：两条直线求交点、两个向量的线性组合=b
- 例1:

$$
\begin{aligned}
x - 2y &= 1 \\
3x - 6y &= 11
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x - 2y &= 1 \\
\mathbf{0}y &= 8.
\end{aligned}
}
$$

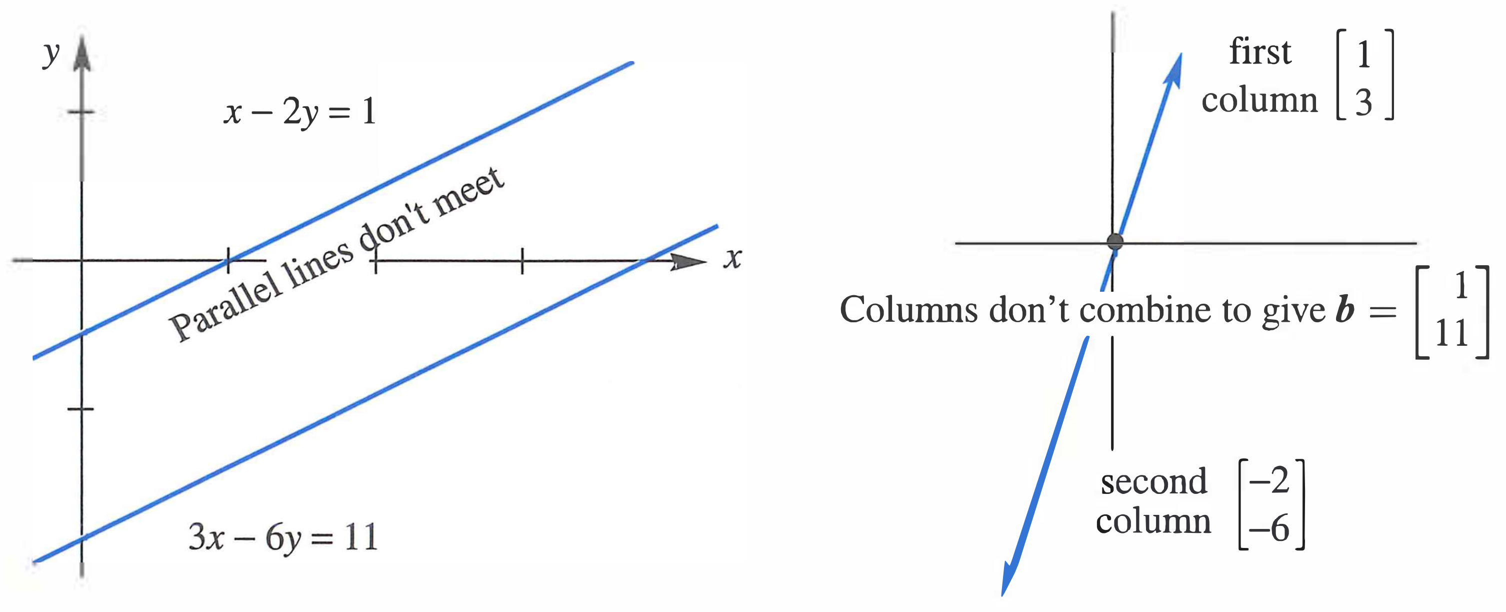


Figure 2.6: Row picture and column picture for Example 1: ***no solution***.

只有一个主元（0不是主元）

消元法失效

- 2元线性方程组：两条直线求交点、两个向量的线性组合=b
- 例2:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ \mathbf{0}y &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

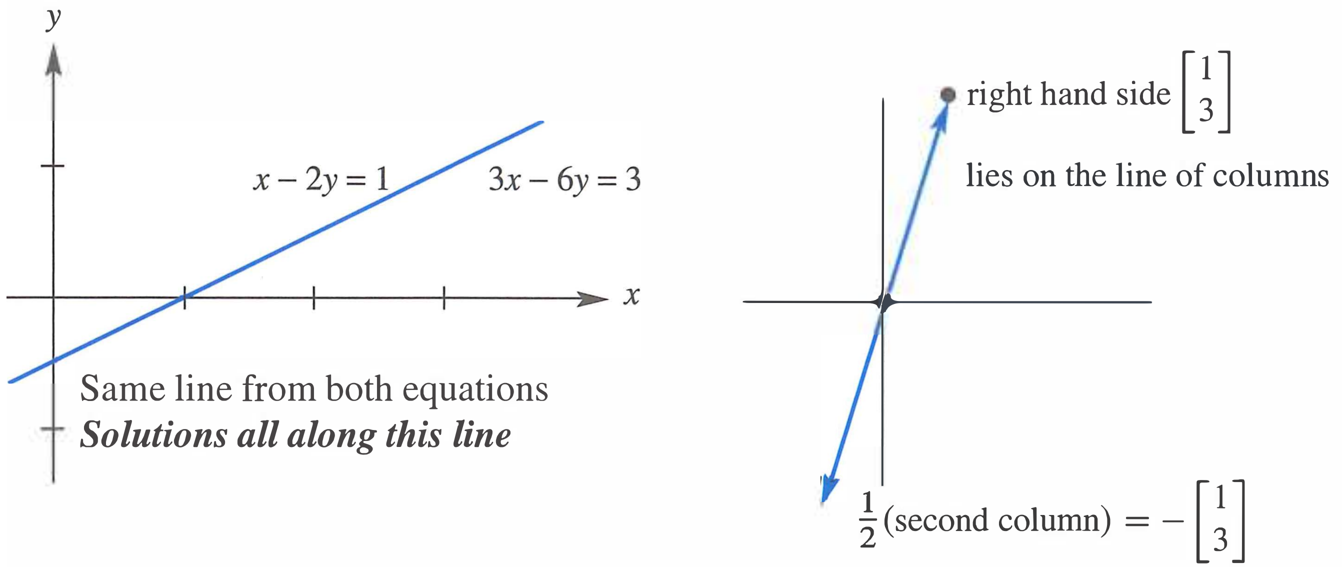


Figure 2.7: Row and column pictures for Example 2: *infinitely many solutions*.

只有一个主元（0不是主元）

消元法失效

- 失效条件：n个未知数，主元数目少于n
  - 消元法得到$0 \neq 0$：没有解

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c}\text{Subtract 3 times} \\ \text{eqn. 1 from eqn. 2}\end{array} \qquad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ \mathbf{0}y &= 8. \end{aligned}$$

  - 消元法得到$0 = 0$：无穷多解

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c}\text{Subtract 3 times} \\ \text{eqn. 1 from eqn. 2}\end{array} \qquad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ \mathbf{0}y &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

消元法“失效”

- 有些时候主元看上去是0，但其实交换一下方程就可以恢复
- 例：

$$
\begin{aligned}
0x + 2y &= 4 \\
3x - 2y &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x - 2y &= 5 \\
2y &= 4.
\end{aligned}
$$

消元法

- n元线性方程组求解

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = b_i, \qquad\qquad i = 1, \cdots, n$$

- 算法：
  1. 找到第1个x_1系数不为0的方程并移到最上面。x_1的系数就是第一个主元
  2. 从第2个到第n个方程中消去x_1（方程i – l_{i1}x方程1）
  3. 得到第2个到第n个方程构成n-1元的线性方程组，重复步骤1。
  4. 最后结果要么是一个上三角方程组，要么失效（主元数目小于未知数）
  5. 上三角的情况，从最后一个方程开始解出全部未知数
- 递归。操作：对换、倍加（某一行乘系数加到另一行）

例：三元线性方程组

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x+2y+2z &= 9 \\ x+2y+3z &= 10 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ y+z &= 3 \\ y+2z &= 4 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ y+z &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. A linear system ($A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) becomes **upper triangular** ($U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$) after elimination.
2. We **subtract** ℓ_{ij} times equation j from equation i, to make the (i, j) entry zero.
3. The **multiplier** is $\ell_{ij} = \dfrac{\text{entry to eliminate in row } i}{\text{pivot in row } j}$. **Pivots** can not be zero!
4. When zero is in the pivot position, **exchange rows** if there is a nonzero below it.
5. The upper triangular $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ is solved by **back substitution** (starting at the bottom).
6. When **breakdown** is permanent, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has no solution or infinitely many.

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- **消元法和矩阵**
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置（transpose）

消元法操作

- 对换（交换两行）、**倍加**（某一行乘系数加到另一行）

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- 从第二行中消去未知数x_1，主元2，$l_{21} = 2, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$
- 倍加：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$
- 作用在方程左边？

消元矩阵

- $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}2\\8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}$
- $E\left[\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}4\\9\\-3\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix}x_3\right]=E\begin{pmatrix}2x_1+4x_2-2x_3\\4x_1+9x_2-3x_3\\-2x_1-3x_2+7x_3\end{pmatrix}$

$=E\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}x_1+E\begin{pmatrix}4\\9\\-3\end{pmatrix}x_2+E\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix}x_3$ 为什么等号成立?

$=(E\boldsymbol{a}_1 \quad E\boldsymbol{a}_2 \quad E\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{a}_i$是系数矩阵$A$的列

矩阵乘法

$$EA\boldsymbol{x} = E(A\boldsymbol{x}) = (EA)\boldsymbol{x}$$

$$EA = (E\boldsymbol{a}_1 \quad E\boldsymbol{a}_2 \quad E\boldsymbol{a}_3)$$

- 行观点?

$$E\begin{pmatrix} (2 \quad 4 \quad -2)\cdot(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \\ (4 \quad 9 \quad -3)\cdot(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \\ (-2 \quad -3 \quad 7)\cdot(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \end{pmatrix}$$

消元法操作

- **对换**（交换两行）、倍加（某一行乘系数加到另一行）
- 置换矩阵：$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}$
- 一般的nxn的置换i和j行的矩阵怎么写？

增广矩阵（augmented matrix）

- 方程中：置换和倍加同时作用在系数矩阵A和$\boldsymbol{b}$上
- 把A和$\boldsymbol{b}$写在一起构成增广矩阵$(A\ \boldsymbol{b})$
  - n行，n+1列的矩阵
- E和P作用在增广矩阵上（乘法），分别作用在A，$\boldsymbol{b}$上
  - $E(A\ \boldsymbol{b}) = (EA\ E\boldsymbol{b})$
 $P(A\ \boldsymbol{b}) = (PA\ P\boldsymbol{b})$
- 矩阵乘法并不需要两个矩阵相同
  - 第一个的列数=第二个行数

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. $A\boldsymbol{x} = x_1$ times column $1 + \cdots + x_n$ times column n. And $(A\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

2. Identity matrix $= I$, elimination matrix $= E_{ij}$ using ℓ_{ij}, exchange matrix $= P_{ij}$.

3. Multiplying $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ by E_{21} subtracts a multiple ℓ_{21} of equation 1 from equation 2. The number $-\ell_{21}$ is the $(2,1)$ entry of the elimination matrix E_{21}.

4. For the augmented matrix $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$, that elimination step gives $\begin{bmatrix} E_{21}A & E_{21}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$.

5. When A multiplies any matrix B, it multiplies each column of B separately.

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法和矩阵
- **矩阵的运算**
- 矩阵的逆（inverse）
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置（transpose）

矩阵加法和数乘

- 矩阵加法：$m\times n$的矩阵A和B

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$$

  - 各个分量分别相加，只有同样大小的矩阵可以相加
- 矩阵数乘：$(cA)_{ij}=cA_{ij}$
  - 每个分量分别乘c

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 4\\9 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\7 & 8\\9 & 9\end{bmatrix}\quad \text{and}\quad 2\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 8\\0 & 0\end{bmatrix}$$

- 运算规律
  - 交换律、结合律、分配律
- 同向量的运算规律相同（线性空间）

矩阵加法和数乘的性质

- 交换律：$A + B = B + A$
- 分配律：$c(A + B) = cB + cA$
  $(c + d)A = cA + dA$
- 结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C$

矩阵乘法

- $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$
- $C_{ij}=(A$的第i行$)\cdot(B$的第j列$)=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$
  - AB 相乘，A的列数=B的行数

  - AB 相乘，A的列数=B的行数
  - AB 相乘，A的列数=B的行数

$$
\begin{bmatrix} & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ & * & & \\ & * & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix}
$$

A is 4 by 5 $\quad$ B is 5 by 6 $\quad$ AB is $(4\times 5)(5\times 6)=4$ by 6

矩阵乘法

- 例1:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}，\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
  - 矩阵乘法一般不是可交换的
- 例2: 内积
- $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 1xn矩阵乘nx1矩阵
- 例3: $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, nx1矩阵乘1xn矩阵

矩阵乘法运算性质

- 结合律

$$ABC = A(BC) = (AB)C$$

- 没有交换律

$AB \neq BA$，对易子（commutator）：$[A, B] = AB - BA$

- 左分配律

$$A(B + C) = AB + AC$$

- 右分配律

$$(A + B)C = AC + BC$$

分块矩阵(block matrix)及其乘法

- 分块矩阵
  - 4x6矩阵：2x3矩阵，每一个块（block）是一个2x2矩阵

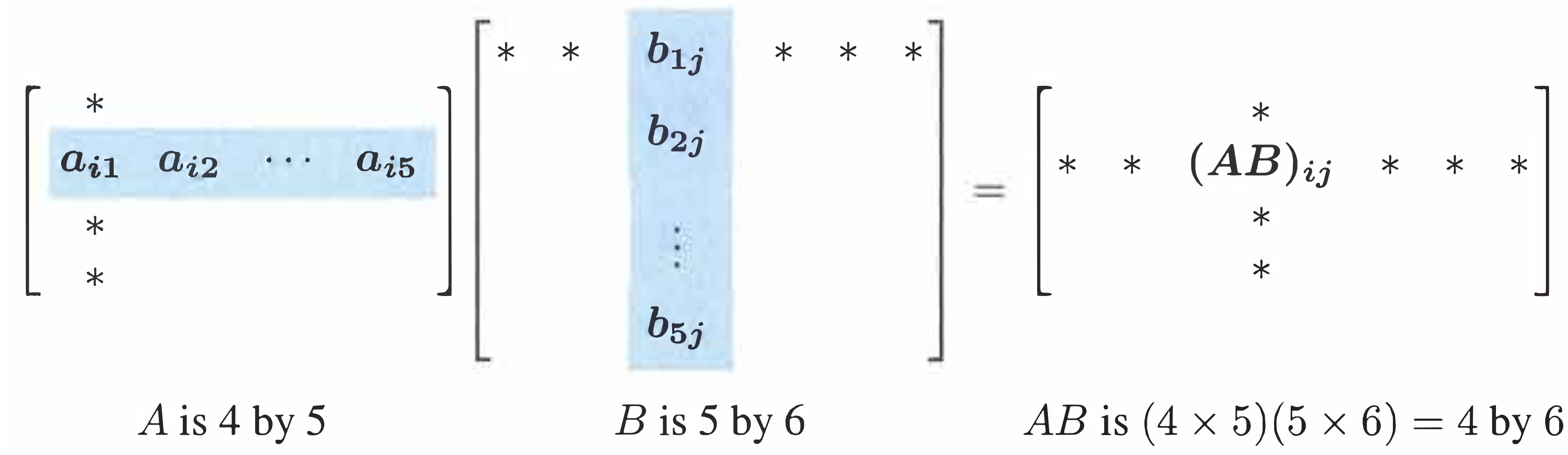
$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵乘法：每一个块当作矩阵的元素，块之间使用矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}.$$

矩阵乘法的四种理解（茴字的四种写法）

- 第一种：定义$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$
  - AB的第i行第j列 = A的第i行 和 B的第j列的内积
  - A看成mx1的分块矩阵，每一行的元素是1xn的矩阵（行向量）
  - B看成1xp的分块矩阵，每一列的元素是nx1的矩阵（列向量）



矩阵乘法的四种理解（茴字的四种写法）

- 第二种：A乘B的每一列
  - B看成1xp的分块矩阵，每一列的元素是nx1的矩阵（列向量）

$$A\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 \cdots A\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}.$$

- 第三种：A的每一行乘B
  - A看成mx1的分块矩阵，每一行的元素是1xn的矩阵（行向量）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的四种理解（茴字的四种写法）

- 第四种：
  - A看成1xn的分块矩阵，每一列的元素是mx1的矩阵（列向量）
  - B看成nx1的分块矩阵，每一列的元素是1xp的矩阵（行向量）

$$\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{b}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{a}}_i \tilde{\boldsymbol{b}}_i$$

  - $\tilde{\boldsymbol{a}}_i \tilde{\boldsymbol{b}}_i$是一个mxp的矩阵（列向量x行向量）

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The (i, j) entry of AB is (row i of A) · (column j of B).
2. An m by n matrix times an n by p matrix uses mnp separate multiplications.
3. A times BC equals AB times C (surprisingly important).
4. AB is also the sum of these n matrices : (column j of A) times (row j of B).
5. Block multiplication is allowed when the block shapes match correctly.
6. Block elimination produces the *Schur complement* $D - CA^{-1}B$.

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- **矩阵的逆（inverse）**
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置（transpose）

逆矩阵（inverse matrix）

- 方阵A的逆矩阵A^{-1}满足

$$A^{-1}A = I \text{ 且 } AA^{-1} = I$$

  - I是单位矩阵，非对角元0，对角元1。$IA = AI = A$
- 逆矩阵存在的判定：
  - nxn方阵A的逆矩阵A^{-1} 存在当且仅当有n个主元
  - 还有更多其它的判定方法
- 左逆=右逆
  - $BA = I, AC = I$ => $A = B$

逆矩阵（inverse matrix）

- 如果A可逆，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一的解

$$\boldsymbol{b}=A^{-1}\boldsymbol{x}$$

- 如果存在非零向量$\boldsymbol{x}$使得$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则$A$不可逆
- 2X2矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵的逆（只有所有对角元都不为0时存在）

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵和矩阵乘法

- 假设矩阵A和B都可逆
- $A+B$不一定可逆
- AB一定可逆：$(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$
  - AB顺序反过来
  - 证明：用结合律
  - $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}\,A_1^{-1}$

例：

- 消元矩阵的逆

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ \mathbf{20} & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

高斯-若当消元法（Gauss-Jordan elimination）

- 把$AA^{-1} = I$看成线性方程组

$$A(\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n) = I$$

  - $$\boldsymbol{e}_i = (0 \quad \cdots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第i位}}}{1} \quad \cdots \quad 0)$$

- 可以用消元法解$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$
- 对增广矩阵$(K \quad I) = (K \quad \boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n)$做消元操作

高斯-若当消元法

- 例：所有主元的乘积=行列式，矩阵可逆⇔ 行列式不为0

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

高斯-若当消元法

- 例：

$$\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{3} & 1 & 0 \\ 4 & \mathbf{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

奇异矩阵（singular matrix）vs可逆矩阵

- 奇异矩阵：不可逆的矩阵
- nxn方阵可逆当且仅当存在n个主元
  - 证明（参加88页）
- 例：
  - 上（下）三角阵的逆还是上（下）三角阵（主元/行列式=？）
  - 对角占优矩阵可逆$|A_{ii}| > \sum_{j\neq i}|A_{ij}|$
  - 证明：想办法证明$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$只有$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$一组解

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The inverse matrix gives $AA^{-1} = I$ and $A^{-1}A = I$.

2. A is invertible if and only if it has n pivots (row exchanges allowed).

3. *Important*. If $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ for a nonzero vector $\boldsymbol{x}$, then A has no inverse.

4. The inverse of AB is the reverse product $B^{-1}A^{-1}$. And $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

5. The Gauss-Jordan method solves $AA^{-1} = I$ to find the n columns of A^{-1}. The augmented matrix $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ is row-reduced to $\begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$.

6. Diagonally dominant matrices are invertible. Each $|a_{ii}|$ dominates its row.

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- **消元法和LU分解**
- 矩阵的转置（transpose）

消元法和LU分解

- 消元矩阵和其逆：单个消元矩阵和逆矩阵都是下三角的

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 消元法：将矩阵变换为上三角，消元过程可以用矩阵乘法实现

$$E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

LU分解

- 假如一个矩阵在消元过程中没有对换操作
$$E_{n,n-1}\cdots E_{ij}\cdots E_{21}A=U$$
  - $E_{n,n-1}\cdots E_{ij}\cdots E_{21}$代表一系列消元矩阵的乘积
- 左右两边左乘$E_{n,n-1}\cdots E_{ij}\cdots E_{21}$ 的逆
$$A=E_{21}^{-1}\cdots E_{ij}^{-1}\cdots E_{n,n-1}^{-1}U$$
- 每一个E_{ij}^{-1}都是下三角的，所以$L=E_{21}^{-1}\cdots E_{ij}^{-1}\cdots E_{n,n-1}^{-1}$下三角的
$$A=LU$$

LU分解

- 例：

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}=LU.$$

LDU分解

- 例：

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}=LU.$$

- U的对角元不为一，可以继续分解$U=D\widetilde{U}, A=LD\widetilde{U}$

$$\text{Split } U \text{ into } \begin{bmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&u_{12}/d_1&u_{13}/d_1&\cdot\\&1&u_{23}/d_2&\cdot\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{bmatrix}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. Gaussian elimination (with no row exchanges) factors A into L times U.
2. The lower triangular L contains the numbers ℓ_{ij} that multiply pivot rows, going from A to U. The product LU adds those rows back to recover A.
3. On the right side we solve $L\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ (forward) and $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ (backward).
4. ***Factor*** : There are $\frac{1}{3}(n^3 - n)$ multiplications and subtractions on the left side.
5. ***Solve*** : There are n^2 multiplications and subtractions on the right side.
6. For a band matrix, change $\frac{1}{3}n^3$ to nw^2 and change n^2 to $2wn$.

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- 消元法和LU分解
- **矩阵的转置（transpose）**

矩阵的转置（transpose）

- 转置A^T
- 定义： $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
  - mxn的矩阵转置后是nxm的矩阵
- 性质：
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 例：$A = LDU$，则$A^T = U^T D^T L^T$，$D = D^T$

转置、内积和外积

- x、y是n维列向量，$x^T y$和xy^T的区别?
  - $x^T y$是一个数（内积）
  - $y^T x$是一个nxn矩阵（外积）
- 量子力学：$\langle x|y\rangle, |x\rangle\langle y|$
- 推广
  - $(Ax)^T y = x^T(A^T y)$

对称矩阵

- 定义：$S^T = S$, $s_{ij} = s_{ji}$
- 例：对角矩阵总是对称矩阵
- 例：对称乘积
  - AA^T
  - A^TA
  - x^TA^TAx

置换矩阵

- 定义：每一行和每一列只有一个1，剩余元素为0的矩阵
- 性质：$P^T = P^{-1}$
- nxn的置换矩阵有$n!$个

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad P_{21} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad P_{32}P_{21} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \quad P_{21}P_{32} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The transpose puts the rows of A into the columns of A^{T}. Then $(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}$.

2. The transpose of AB is $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. The transpose of A^{-1} is the inverse of A^{T}.

3. The dot product is $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$. Then $(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ equals the dot product $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})$.

4. When S is symmetric ($S^{\mathrm{T}} = S$), its LDU factorization is symmetric: $S = LDL^{\mathrm{T}}$.

5. A permutation matrix P has a 1 in each row and column, and $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}$.

6. There are $n!$ permutation matrices of size n. *Half even, half odd.*

7. If A is invertible then a permutation P will reorder its rows for $PA = LU$.

本章重点：矩阵乘法

- $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$
- $C_{ij} = (A\text{的第i行})\cdot(B\text{的第}j\text{列}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$
- **性质**
  - 结合律：$ABC = A(BC) = (AB)C$
  - 没有交换律：$AB \neq BA$
  - 左分配律：$A(B+C) = AB + AC$
  - 右分配律：$(A+B)C = AC + BC$
- 逆矩阵：定义、判定、高斯-若当消元法求逆矩阵