

特征值和特征向量

颜文斌
清华大学

内容提要

- 特征值和特征向量
- 特征多项式
- 矩阵对角化
- 微分方程组
- 对称矩阵
- 正定矩阵

牛顿第二定律

- 三维振子的运动方程

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_x & 0 & 0 \\ 0 & -k_y & 0 \\ 0 & 0 & -k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

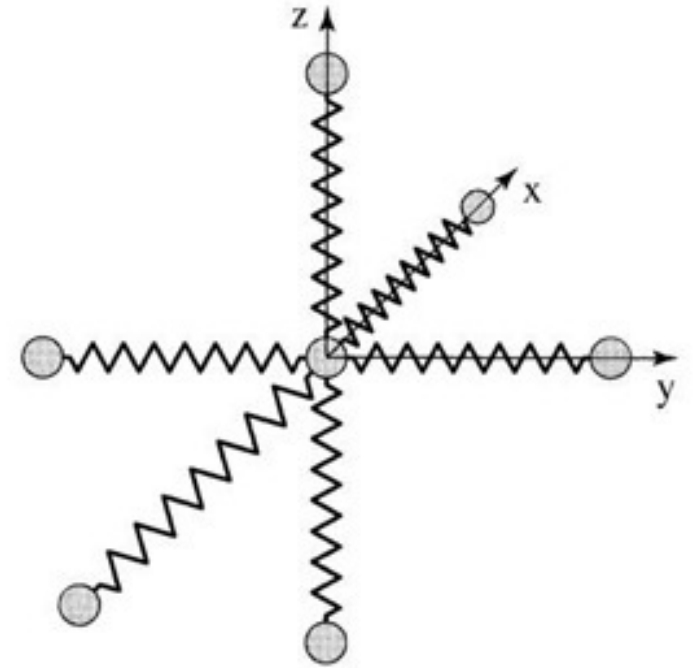


Illustration from: <http://what-when-how.com/electronic-properties-of-materials/heat-capacity-thermal-properties-of-materials/>

牛顿第二定律

- 三维振子的运动方程

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_z \\ 1/m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- $\frac{dx}{dt} = Ax$

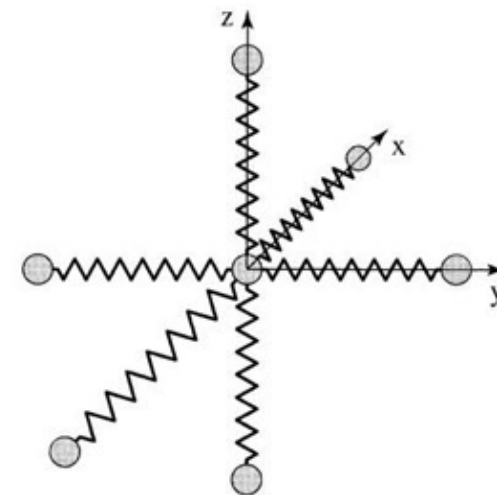
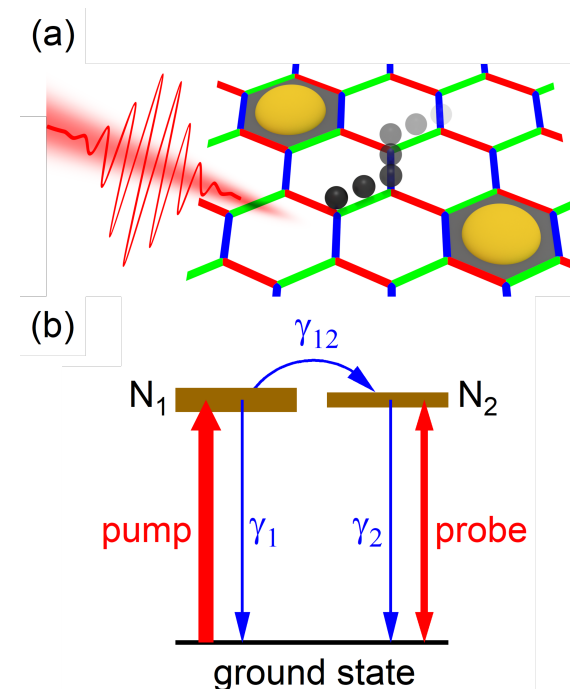


Illustration from: <http://what-when-how.com/electronic-properties-of-materials/heat-capacity-thermal-properties-of-materials/>

能级跃迁

- 假设某种材料有3个能级，能级1的能量>能级2的能量>能级3的能量

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= -\gamma_1 N_1 - \gamma_{12} N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= \gamma_{12} N_1 - \gamma_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= \gamma_1 N_1 + \gamma_2 N_2\end{aligned}$$
$$\bullet \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 - \gamma_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$



线性常微分方程

- 描述向量随时间的变化

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

- 大小、方向的改变
- 特殊的 \mathbf{x}_0 满足 $A\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0$ ：对于这些特殊向量，方向不变，大小改变
 - 解 $\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{x}_0$

特征向量 (eigenvector)

- 考虑方阵 A , A 的**特征向量**定义为下面方程的**非零解**

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- 其中 λ 是一个数, 被称作 A 的**特征值** (eigenvalue)
 - 换句话说, 特征向量是 $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ 的非零解
 - 有相同特征值 λ 的特征向量构成一个**线性空间**
 - 方程 $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ 有非零解的条件 $\det(A - \lambda I) = 0$ (特征多项式)
- 例: 特征值为1和1/2

$$A = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} .8 - \lambda & .3 \\ .2 & .7 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)$$

例

$$A = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} .8 - \lambda & .3 \\ .2 & .7 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)$$

- 特征值1对应的特征向量

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 特征值1/2对应的特征向量

$$\left(A - \frac{1}{2}I \right) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} = c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例

- \mathbb{R}^m 投影矩阵 P
 - 投影到某个子空间 V
 - 如果 $\mathbf{x} \in V$, 则 $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$
 - 如果 $\mathbf{x} \in V^\perp$, 则 $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- P 的特征值为 0 或者 1

The projection matrix $P = \begin{bmatrix} .5 & .5 \\ .5 & .5 \end{bmatrix}$ has eigenvalues $\lambda = 1$ and $\lambda = 0$.

性质

- 假设 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 问 $A^n\mathbf{x} = ?$
 - $A^n\mathbf{x} = \lambda A^{n-1}\mathbf{x} = \dots = \lambda^n\mathbf{x}$
 - 结论： A 的特征向量也是 A^n 的特征向量， 特征值是 λ 的 n 次方
 - 思考： 是否存在矩阵 A 和向量 \mathbf{x} ， 使得 \mathbf{x} 是 A^n 的特征向量但不是 A 的特征向量？
- 假设 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 问 $A^{-1}\mathbf{x} = ?$
 - $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$
 - 结论： A 的特征向量也是 A^{-1} 的特征向量， 特征值是 λ^{-1}

性质

- **定理**： A 是一个三角矩阵， A 的特征值就是对角元
- 证明：
 - $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ 有非零解 $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
 - 因为 A 是一个三角矩阵 $\det(A - \lambda I) = \prod_i (a_{ii} - \lambda) = 0$
 - 方程解为 a_{ii}
- **定理**： A 是一个 $n \times n$ 方阵， A 可逆当且仅当 A 的所有特征值非零
- 证明：
 - A 可逆 $\Leftrightarrow \text{rank}(A)=n \Leftrightarrow N(A)$ 只有零向量 $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow A$ 没有特征值为零的特征向量 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值非零

性质

- **定理（特征子空间）**： $n \times n$ 矩阵 A 的所有特征值为 λ 的向量再加零向量构成 \mathbb{R}^n 的一个线性子空间，这个线性子空间就是 $N(A - \lambda I)$
- **定理**：假设 $n \times n$ 矩阵 A 有特征向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ ，对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ，且这些特征值两两不等，则 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 线性无关
- **证明**：
 - 假设 $r=1$ ，则定理自动成立。
 - 假设 $r=m-1$ 定理成立，那么如果定理在 $r=m$ 时不成立，则 $\mathbf{x}_m = c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{m-1} \mathbf{x}_{m-1}$ ，两边同时左乘 A 得 $\lambda_m \mathbf{x}_m = c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{m-1} \lambda_{m-1} \mathbf{x}_{m-1}$
 - 前一个式子乘 λ_m 再减去后一个得 $\mathbf{0} = c_1 (\lambda_m - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + \dots + c_{m-1} (\lambda_m - \lambda_{m-1}) \mathbf{x}_{m-1}$ ， $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}$ 线性无关可得所有的 c_i 都是0，矛盾

内容提要

- 特征值和特征向量
- **特征多项式**
- 矩阵对角化
- 微分方程组
- 对称矩阵
- 正定矩阵

特征方程

- 求特征值需要解如下的特征方程

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- $\det(\lambda I - A)$ 叫做 A 的**特征多项式** (characteristic polynomial)

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

- 特征多项式的性质

- $a_n = (-1)^n \det A$, 由方程 $a_n = (-1)^n \prod_i \lambda_i$, $\{\lambda_i\}$ 所有特征值 (包括重根)
- $\det A = \prod_i \lambda_i$, A 的行列式=所有特征值的**乘积** (包括重根)
- $a_1 = -\text{Tr } A$, 由方程 $a_1 = -\sum_i \lambda_i$, $\{\lambda_i\}$ 是所有的特征值 (包括重根)
- $\text{Tr } A = \sum_i \lambda_i$, A 的迹=所有特征值的**和** (包括重根)
- 三角矩阵的特征值就是它的对角元

特征方程

- 求特征值需要解如下的特征方程

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- 即使 A 是实矩阵，特征方程的解不一定是实数

The 90° rotation $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

性质

- **定理**： A 和 B 都是 $n \times n$ 的方阵，而且 B 可逆，则 A 和 $B^{-1}AB$ 有相同的特征多项式
- 证明：
 - $\det(\lambda I - B^{-1}AB) = \det(\lambda B^{-1}B - B^{-1}AB) = \det B^{-1}(\lambda I - A)B = \det B^{-1} \det(\lambda I - A) \det B = \det(\lambda I - A)$
- $B^{-1}AB$ ：相似变换 (similarity transformation)
- 思考：对角矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ 的特征值是？

小结

1. $Ax = \lambda x$ says that eigenvectors x keep the same direction when multiplied by A .
2. $Ax = \lambda x$ also says that $\det(A - \lambda I) = 0$. This determines n eigenvalues.
3. The eigenvalues of A^2 and A^{-1} are λ^2 and λ^{-1} , with the same eigenvectors.
4. The sum of the λ 's equals the sum down the main diagonal of A (*the trace*).
The product of the λ 's equals the determinant of A .
5. Projections P , reflections R , 90° rotations Q have special eigenvalues $1, 0, -1, i, -i$.
Singular matrices have $\lambda = 0$. Triangular matrices have λ 's on their diagonal.
6. *Special properties of a matrix lead to special eigenvalues and eigenvectors.*
That is a major theme of this chapter (it is captured in a table at the very end).

内容提要

- 特征值和特征向量
- 特征多项式
- **矩阵对角化**
- 微分方程组
- 对称矩阵
- 正定矩阵

例

- 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 相应的特征值为1和6
 - $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
- 矩阵对角化 $X^{-1}AX = \Lambda$, Λ 是个对角矩阵, 或者 $X^{-1}A = \Lambda X^{-1}$
 - $A^n = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1}) \cdots (X\Lambda X^{-1}) = X\Lambda^n X^{-1}$
 - $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}X^{-1}\mathbf{x} = X^{-1}A\mathbf{x} = \Lambda X^{-1}\mathbf{x}$, 解 $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \Lambda\mathbf{y}$, $\mathbf{x} = X\mathbf{y}$
- X 可逆, 要求 X 的列线性无关

不是所有矩阵都可以对角化

- 例：

- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$

- 特征方程 $\lambda^2 = 0$, 特征向量 $c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

- 特征方程 $\lambda^2 = 0$, 特征向量 $c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- 线性无关的特征向量的数量 **小于** 矩阵的阶

可对角化判定

- **定理**： $n \times n$ 的矩阵 A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 。此时 $A = X\Lambda X^{-1}$ ，且 $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ ， $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$
- **证明**：
 - 假设 $n \times n$ 的矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ， $AX = (A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{x}_n) = X\Lambda$ ，所以 A 可对角化
 - 反过来如果 A 可对角化 $A = X\Lambda X^{-1}$ ，那么 $AX = X\Lambda$ ，也就是说 $(A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{x}_n)$ ，所以 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 是 A 的特征向量，又因为 X 可逆，所以 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 线性无关
- **推论**：有 n 个互不相同特征值的 $n \times n$ 矩阵 A 可对角化

对角化例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 计算特征值 $0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$
 $= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$ $\lambda = 1$ and $\lambda = -2$

2. 找3个线性无关的特征向量

Basis for $\lambda = 1$: $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Basis for $\lambda = -2$: $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. 构造可逆矩阵 $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. 对角矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

例

- 以下矩阵可对角化吗？

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- 提示：特征值是多少？

有重复特征值时的对角化

- **几何重数 (GM)** : 特征值 λ 对应的最大线性无关的特征向量个数, 也就是 $\dim N(\lambda I - A)$
- **代数重数 (AM)** : 特征值 λ 在特征方程 $\det(\lambda I - A) = 0$ 中的重复次数
- $GM \leq AM$
- **推论** : 假设 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$, A 可对角化当且仅当 $\sum_{i=1}^r \dim N(\lambda_i I - A) = n$
- **证明** : left as an exercise 😊

同时对角化

- **定理**：如果矩阵 A 和 B 可以对角化，他们可以同时对角化当且仅当 $AB - BA = 0$
- **证明**：
 - 矩阵 A 和 B 可以同时对角化，所以 $A = X\Lambda_A X^{-1}$, $B = X\Lambda_B X^{-1}$, 所以 $AB - BA = X\Lambda_A X^{-1}X\Lambda_B X^{-1} - X\Lambda_B X^{-1}X\Lambda_A X^{-1} = X(\Lambda_A\Lambda_B - \Lambda_B\Lambda_A)X^{-1} = 0$
 - 反过来，我们只证明一种简单情况，即 A 和 B 的特征值不相同。假设 \mathbf{x}_i 是 A 的特征值为 λ_i 的特征向量。所以 $AB\mathbf{x}_i = BA\mathbf{x}_i = B\lambda_i\mathbf{x}_i = \lambda_i B\mathbf{x}_i$ 。所以 $B\mathbf{x}_i$ 也是 A 的特征值为 λ_i 的特征向量，所以 $B\mathbf{x}_i = c\mathbf{x}_i$ ，所以 \mathbf{x}_i 也是 B 的特征向量。所以 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 是 A 和 B 的共同特征向量。所以 A 和 B 可以同时对角化

小结

1. If A has n independent eigenvectors $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, they go into the columns of X .

$$A \text{ is diagonalized by } X \quad X^{-1}AX = \Lambda \quad \text{and} \quad A = X\Lambda X^{-1}.$$

2. The powers of A are $A^k = X\Lambda^k X^{-1}$. The eigenvectors in X are unchanged.
3. The eigenvalues of A^k are $(\lambda_1)^k, \dots, (\lambda_n)^k$ in the matrix Λ^k .
4. The solution to $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$ starting from \mathbf{u}_0 is $\mathbf{u}_k = A^k\mathbf{u}_0 = X\Lambda^k X^{-1}\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}_k = c_1(\lambda_1)^k \mathbf{x}_1 + \dots + c_n(\lambda_n)^k \mathbf{x}_n \quad \text{provided} \quad \mathbf{u}_0 = c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n.$$

That shows Steps 1, 2, 3 (c 's from $X^{-1}\mathbf{u}_0$, λ^k from Λ^k , and \mathbf{x} 's from X)

5. A is diagonalizable if every eigenvalue has enough eigenvectors (GM = AM).

内容提要

- 特征值和特征向量
- 特征多项式
- 矩阵对角化
- **微分方程组**
- 对称矩阵
- 正定矩阵

一阶线性常微分方程组

- 给定 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, 解方程 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t)$
 - A 是一个常数矩阵, 方程对于 $\mathbf{x}(t)$ 是线性的
- 如果 A 可对角化, $A = X\Lambda X^{-1}$, 方程左右同时左乘 X^{-1}
 - $X^{-1} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = X^{-1}A\mathbf{x}(t) = \Lambda X^{-1}\mathbf{x}(t)$
 - 先解 $\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \Lambda\mathbf{y}(t)$, 然后 $\mathbf{x}(t) = X\mathbf{y}(t)$
 - $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$, 初条件 $\mathbf{x}(0) = X\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$ 可知 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = X^{-1} \mathbf{x}_0$

例

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

The eigenvectors are $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ and $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$ and $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 1)$.

Step 1 The vector $\mathbf{u}(0) = (9, 7, 4)$ is $2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$. Thus $(c_1, c_2, c_3) = (2, 3, 4)$.

Step 2 The factors $e^{\lambda t}$ give exponential solutions $e^t \mathbf{x}_1$ and $e^{2t} \mathbf{x}_2$ and $e^{3t} \mathbf{x}_3$.

Step 3 The combination that starts from $\mathbf{u}(0)$ is $\mathbf{u}(t) = 2e^t \mathbf{x}_1 + 3e^{2t} \mathbf{x}_2 + 4e^{3t} \mathbf{x}_3$.

The coefficients 2, 3, 4 came from solving the linear equation $c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{u}(0)$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{which is } X\mathbf{c} = \mathbf{u}(0). \quad (7)$$

二阶线性常微分方程

- 考虑线性方程 $m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = 0$
 - 有阻尼的一维振子的运动
- 转化成一阶线性方程组： $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$
 - 特征方程 $\lambda^2 + b\lambda + k = 0$, 假设解为 λ_1, λ_2
 - 特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$
 - 通解 $\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

解的稳定性

- $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t)$
- 解 : $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{x}_i$
- 讨论 $t \rightarrow +\infty$ 时解的行为, $\lambda_i = r_i + is_i$:
 - $r_i > 0$: $e^{(r_i + is_i)t}$ 发散
 - $r_i < 0$: $e^{(r_i + is_i)t}$ 收敛到0
- **结论** : $t \rightarrow +\infty$ 时解不发散 \Rightarrow 所有特征值的实部都小于0
 - 2x2矩阵 : $\text{Tr}A < 0$, $\det A > 0$

小结

1. The equation $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ is linear with constant coefficients in A . Start from $\mathbf{u}(0)$.
2. Its solution is usually a combination of exponentials, involving every λ and \mathbf{x} :

Independent eigenvectors

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n.$$

3. The constants c_1, \dots, c_n are determined by $\mathbf{u}(0) = c_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + c_n \mathbf{x}_n = X\mathbf{c}$.
4. $\mathbf{u}(t)$ approaches zero (**stability**) if every λ has negative real part: All $e^{\lambda t} \rightarrow 0$.
5. Solutions have the short form $\mathbf{u}(t) = e^{At} \mathbf{u}(0)$, with the matrix exponential e^{At} .
6. Equations with y'' reduce to $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ by combining y and y' into the vector \mathbf{u} .

内容提要

- 特征值和特征向量
- 特征多项式
- 矩阵对角化
- 微分方程组
- **对称矩阵**
- 正定矩阵

转动惯量张量

- 描述刚体的转动需要转动惯量张量

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k x_k y_k & \sum_k m_k (z_k^2 + x_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k x_k z_k & -\sum_k m_k x_k y_k & \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix}$$

- 惯量张量是一个对称矩阵 $I^T = I$

惯量主轴

- 总可以在三维空间中找到一个直角坐标系使得惯量张量时对角的, 此时的坐标轴被称为惯量主轴

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

- 为什么总是可以做到？

对称矩阵的特征值性质

- 考虑对称矩阵 S , $S = S^T$
- **定理1** : S 是一个 $n \times n$ 实对称矩阵, 则 S 至少有一个实特征值 λ
- 证明 :
 - 根据代数学基本定理, 至少有一个复特征值 λ , 假设它对应的特征向量是 \mathbf{z} (一般也是复的), 则 $\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{z} > 0$
 - $\bar{\mathbf{z}}^T A \mathbf{z} = \lambda \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{z} = \lambda (\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{z})^T = \lambda \mathbf{z}^T \bar{\mathbf{z}} = (A \mathbf{z})^T \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^T A \bar{\mathbf{z}}$
 - 另一方面 $A \bar{\mathbf{z}} = \bar{A} \bar{\mathbf{z}} = \overline{A \mathbf{z}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{z}}$, 所以 $\lambda \mathbf{z}^T \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^T A \bar{\mathbf{z}} = \bar{\lambda} \mathbf{z}^T \bar{\mathbf{z}}$
 - 所以 $\lambda - \bar{\lambda} = 0$
- **推论** : $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, 如果 \mathbf{z} 是对称矩阵 S 的特征向量, 则 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 也是的 S 特征向量且特征值和 \mathbf{z} 相同

对称矩阵的性质

- **定理2**： S 是一个 $n \times n$ 对称矩阵， \boldsymbol{v} 是 S 的一个特征向量， 如果 \boldsymbol{w} 和 \boldsymbol{v} 正交， 则 $S\boldsymbol{w}$ 也和 \boldsymbol{v} 正交。如果是的一个线性
- 证明： $(S\boldsymbol{w})^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^T S^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^T S \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v} = 0$
- **定理3**： S 是一个 $n \times n$ 对称矩阵， 如果 W 是 \mathbb{R}^n 的一个线性子空间且 $\forall \boldsymbol{w} \in W, S\boldsymbol{w} \in W$ (W 在 S 作用下稳定)， 那么 $\forall \boldsymbol{u} \in W^\perp, S\boldsymbol{u} \in W^\perp$ (W^\perp 在 S 作用下稳定)
- 证明： $\forall \boldsymbol{u} \in W^\perp, \boldsymbol{w} \in W, (S\boldsymbol{u})^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^T S^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^T (S\boldsymbol{w}) = 0$ ， 所以 $S\boldsymbol{u} \in W^\perp$

对称矩阵的特征向量

- **定理（谱定理）**： $n \times n$ 对称矩阵 S 的特征向量构成 \mathbb{R}^n 的一组正交归一基
- 证明：
 - 由定理1和推论可知 S 至少有一个实特征值 λ_1 和实特征向量 \mathbf{q}_1 且 $\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 = 1$ ， S 作用在 \mathbf{q}_1 张成的一维线性空间上是稳定的。
 - 由定理3可知 S 作用在 $C(\mathbf{q}_1)^\perp$ （张成的线性空间的补空间）上也是稳定的
 - 假设 $C(\mathbf{q}_1)^\perp$ 上有一组正交归一基为 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ ，构造矩阵 $X = [\mathbf{q}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$ ，且 X 是正交的 $X^T X = I$
 - $X^T S X = X^T [\mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] = X^T [S\mathbf{q}_1, S\mathbf{a}_2, \dots, S\mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & (\mathbf{a}_i^T S \mathbf{a}_j) \end{bmatrix}$
 $(\mathbf{a}_i^T S \mathbf{a}_j)$ 代表 ij 矩阵元为 $\mathbf{a}_i^T S \mathbf{a}_j$ 的 $n-1 \times n-1$ 对称矩阵
 - 重复上述步骤，直到用 S 的特征向量构造出 \mathbb{R}^n 的一组正交归一基

对称矩阵的对角化

- 对称矩阵 S 总可以被某个正交矩阵 Q 对角化, $S = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$
- 构造 Q
 - 如果 S 的特征值互不相同, 对应的归一特征向量 \mathbf{q}_i 两两正交, $Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$
 - 如果 S 的特征值有重复, 去 $\{\mathbf{q}_i\}$ 为相应的特征子空间中的正交基
- $S = Q\Lambda Q^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$

例

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ and } S - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

- 特征多项式： $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ ，特征值为0和5
- 归一化特征向量 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$Q^{-1}SQ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \Lambda$$