奇异值分解

颜文斌
清华大学

内容提要

- **奇异值分解**
- 主成分分析
- 奇异值分解和几何

矩阵对角化

- 矩阵对角化有很多应用：简化计算、解方程……
- 不是所有矩阵都可以对角化的
  - 可对角化矩阵例：对称矩阵
- 特征值和特征向量只使用于方阵
- 对于一般的mxn矩阵A，有没有类似的操作？
  - 回忆方程$Ax = b$不一定有解，但是$A^TAx = A^Tb$有解
  - 考虑方阵A^TA和AA^T，他们都是**半正定**矩阵，所以可以对角化而且特征值大于等于0

对角化A^TA和AA^T

- mxn矩阵A， A^TA和AA^T都是**半正定**矩阵，
  - 证明：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{x} = \|A\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$，所以$A^TA$是半正定的。$AA^T$同理
- A^TA和AA^T都可以对角化
  - $A^TA = V\Lambda_1 V^T$， $AA^T = U\Lambda_2 U^T$
  - $V^T A^T A V = (AV)^T A(V) = \Lambda_1$
  - $U^T A A^T U = (U^T) A (A^T U) = \Lambda_2$
- 猜测：找到正交矩阵U和V使得mxn矩阵U^TAV可以写成Σ？其中Σ是某种意义上的“对角”矩阵

奇异值（singular value）

- mxn的实矩阵A， A^TA是一个nxn的对称矩阵，$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$是由$A^TA$的特征向量构成的$\mathbb{R}^n$中的正交归一基，对应的实特征值为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，假设$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$
- A^TA的所有特征值都非负：$\|A\boldsymbol{q}_i\|^2 = \boldsymbol{q}_i^T A^T A \boldsymbol{q}_i = \lambda_i \geq 0$
- 矩阵A的奇异值定义为A^TA的特征值的平方根：$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
  - $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$
  - $\sigma_i = \|A\boldsymbol{q}_i\|$

例

- 求以下矩阵的奇异值

$$A=\begin{bmatrix}4 & 11 & 14\\ 8 & 7 & -2\end{bmatrix}\qquad A^TA=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 11 & 7\\ 14 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 11 & 14\\ 8 & 7 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80 & 100 & 40\\ 100 & 170 & 140\\ 40 & 140 & 200\end{bmatrix}$$

- 特征方程：$\det\begin{bmatrix}80-\lambda & 100 & 40\\ 100 & 170-\lambda & 140\\ 40 & 140 & 200-\lambda\end{bmatrix}$

$$=-\lambda(\lambda-90)(\lambda-360)$$

- 特征值：360，90，0。奇异值：$6\sqrt{10}$，$3\sqrt{10}$，0

A的秩和 $A^T A$的秩

- **定理**： mxn矩阵A，$\mathrm{rank}(A^T A) = \mathrm{rank}(A)$
- 证明：
  - $\mathrm{rank}(A^T A) = n - \dim N(A^T A)$，$\mathrm{rank}(A) = n - \dim N(A)$，所以我们只需证明$\dim N(A^T A) = \dim N(A)$
  - 如果$\boldsymbol{x} \in N(A)$，则$A\boldsymbol{x} = 0$，等号两边同时左乘A^T得到$A^T A\boldsymbol{x} = 0$，所以$\boldsymbol{x} \in N(A^T A)$
  - 如果$\boldsymbol{x} \in N(A^T A)$，则$A^T A\boldsymbol{x} = 0$，等号两边同时左乘$\boldsymbol{x}^T$得到$\boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = 0$，所以$\|A\boldsymbol{x}\| = 0$，所以$A\boldsymbol{x} = 0$，所以$\boldsymbol{x} \in N(A)$
  - $N(A)$和$N(A^T A)$存在一一映射，所以$\dim N(A^T A) = \dim N(A)$，
- 推论：$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{rank}(AA^T) = \mathrm{rank}(A^T A)$

非零奇异值的数量

- **定理**：mxn的实矩阵A的非零奇异值$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 的个数r等于A的秩rank(A)
- 证明：
  - 设$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$为$\mathbb{R}^n$中可以把$A^T A$对角化的正交归一基，$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$为对应的特征值，则$\{A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_n\}$是一个**正交向量集合**，也就是说$\forall\, i \neq j$，$(A\boldsymbol{v}_i)^T \left(A\boldsymbol{v}_j\right) = \boldsymbol{v}_i^T A^T A\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i^T \left(\lambda_j \boldsymbol{v}_j\right) = 0$
  - 假设$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$是所有正特征值，$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$是所有0特征值，则$\{A\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, A\boldsymbol{v}_n\}$都是零向量
  - 因为$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$为$\mathbb{R}^n$中可以把$A^T A$对角化的正交归一基，所以对于任意的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}$可以写成$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$。

非零奇异值的数量（续）

- **定理**：mxn的实矩阵A的非零奇异值$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 的个数r等于A的秩rank(A)
- 证明（续）：
  - 因为$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$为$\mathbb{R}^n$中可以把$A^T A$对角化的正交归一基，所以对于任意的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{x}$可以写成$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$。
  - 我们需要证明A的秩为r，只需要证明列空间$C(A)$的维度为r，需要找到列空间的一组基
  - 因为$C(A)$是由A所有列的线性组合得到的，所以$\forall\, \mathbf{y} \in C(A)$， $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = c_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_nA\boldsymbol{v}_n = c_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_rA\boldsymbol{v}_r$，也就是说$C(A)$中的任何向量都可以写成$\{A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_r\}$的线性组合
  - 所以$\{A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_r\}$是$C(A)$的一组正交基，所以$r = \text{rank}(A)$

奇异值分解：陈述

- 广义“对角”矩阵：mxn矩阵Σ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - D是一个rxr的对角矩阵，Σ所有大于r的行和列都是0
- **定理（奇异值分解）**：mxn矩阵A的秩为r。则存在一个形状如上的mxn矩阵Σ且D的对角元是A的前r个（非零）的奇异值，mxm的正交矩阵U和nxn的正交矩阵V，而且以上矩阵满足关系

$$A = U\Sigma V^T$$

- 可以用两个正交矩阵把任意矩阵A变成简单形式
- 考虑rank(A)=1，矩阵可以写成两个向量的乘积（压缩）

奇异值分解：证明

- 证明：直接构造相应的矩阵
  - A^TA是对称矩阵，由谱定理可知存在一组$\mathbb{R}^n$中的正交归一基，将A^TA对角化
  - 设$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$为$\mathbb{R}^n$中可以把$A^TA$对角化的正交归一基，$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$为对应的特征值。由之前定理$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$是正特征值，$\{\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n\}$是零特征值
  - 因为$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$之间是正交的，则$\forall\ i\neq j$，$(A\boldsymbol{v}_i)^T\left(A\boldsymbol{v}_j\right)=\boldsymbol{v}_i^TA^TA\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{v}_i^T\left(\lambda_j\boldsymbol{v}_j\right)=0$，所以$\{A\boldsymbol{v}_1,\cdots,A\boldsymbol{v}_r\}$之间也是正交的，$\{A\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,A\boldsymbol{v}_n\}$是零向量
  - 令$u_i=\frac{1}{\|Av_i\|}Av_i=\frac{1}{\sigma_i}Av_i$，$i=1,\cdots,r$，则$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$是$C(A)$的一组正交归一基。$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$

奇异值分解：证明（续）

- 证明：直接构造相应的矩阵
  - 令$u_i = \frac{1}{\|Av_i\|}Av_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$，$i = 1, \cdots, r$，则$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$是$C(A)$的一组正交归一基。$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
  - 再设$\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$是$N(A^T)$ 中的一组正交归一基。 因为$N(A^T)$是$C(A)$的正交补，则$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$是$\mathbb{R}^m$的一组正交归一基
  - 设矩阵$U = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$和$V = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$， U和V都是正交的
  - $AV = (A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_n) = (\sigma_1\boldsymbol{u}_1, \cdots, \sigma_r\boldsymbol{u}_r, 0, \ldots, 0) = U\Sigma$
  - 所以$A = U\Sigma V^T$，我们得到了A的奇异值分解$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^T$

奇异值分解：例

- 矩阵$A=\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$的奇异值分解
- $A^T A=\begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix}$
- $A^T A$的特征值：360，90，0。A 的奇异值：$6\sqrt{10}$，$3\sqrt{10}$，0
- $V=\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

奇异值分解——例

- 矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 11 & 14\\ 8 & 7 & -2\end{bmatrix}$的奇异值分解
- A 的奇异值：$6\sqrt{10}$，$3\sqrt{10}$，0
- $V=\begin{bmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$，$AV=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 8 & 7\end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sigma_1}A\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}3/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sigma_2}A\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\ -3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$
- $U=(\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2)$

奇异值分解——例

- 矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & 11 & 14\\ 8 & 7 & -2\end{bmatrix}$的奇异值分解 $A=U\Sigma V^T$
- A 的奇异值：$6\sqrt{10}$，$3\sqrt{10}$，0，$\Sigma=\begin{bmatrix}6\sqrt{10} & 0 & 0\\ 0 & 3\sqrt{10} & 0\end{bmatrix}$
- $V=\begin{bmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix}3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$
- $A=\begin{bmatrix}3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\sqrt{10} & 0 & 0\\ 0 & 3\sqrt{10} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ -2/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{bmatrix}$

A和A^T的奇异值分解

- 练习：矩阵$A^T=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 11 & 7\\ 14 & -2\end{bmatrix}$的奇异值分解
- 思考：已知A的奇异值分解，求矩阵A^T的奇异值分解？
- 结论：若A的奇异值分解为$U\Sigma V^T$， A^T的奇异值分解为$A^T=V\Sigma U^T$
- **推论**：$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$是矩阵$AA^T$的特征向量
- 证明：
  - $AA^T=U\Sigma V^TV\Sigma U^T=U\Sigma^2U^T$，所以$AA^TU=U\Sigma^2$
- V和U分别是将A^TA和AA^T对角化的正交矩阵

A和A^T的奇异值分解

- **定理**：A^TA和AA^T的非零特征值都相同
- 证明：可以直接用A的奇异值分解证明，我们这里直接证明
  - 假设x_i是A^TA的特征值为$\lambda_i \neq 0$的特征向量，$(\lambda_i I - A^TA)x_i = 0$
  - 等号两端同时左乘：$0 = A(\lambda_i I - A^TA)x_i = (\lambda_i A - AA^TA)x_i = (\lambda_i I - AA^T)(Ax_i)$。又因为$x^TA^TAx = \lambda_i x^Tx > 0$，所以$Ax_i \neq 0$。所以$Ax_i$ 是 AA^T 的特征值为 λ_i 的特征向量
  - 同理，如果x_i是AA^T的特征值为$\lambda_i \neq 0$的特征向量，A^Tx_i是A^TA的特征值为λ_i的特征向量
  - 这样，我们就有A^TA和AA^T非零特征值和非零特征向量的一一对应

应用：四个子空间的正交归一基

- $A = U\Sigma V^T$
  - $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$是$C(A^T)$的正交归一基，$V_r = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$
  - $\{\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$N(A)$的正交归一基， $V_{n-r} = (\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$
  - $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$是$C(A)$的正交归一基，$U_r = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r)$
  - $\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$是$N(A^T)$ 的正交归一基， $U_{n-r} = (\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$
- 证明？

应用：数据压缩

- 假设rank(A)<min(m,n)，则

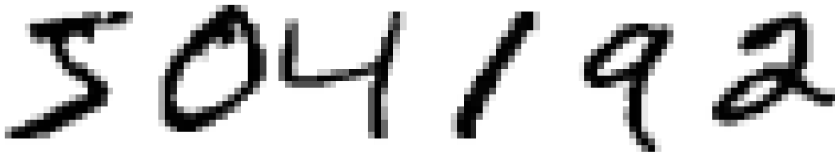
$$A = (U_r, U_{m-r})\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix} = U_r D V_r^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$$

- 可以用U_r, D, V_r这三个矩阵的r(m+1+n)个分量完全决定A（mn）
- **图像压缩**
  - 先考虑黑白图片，可以用一个mxn的矩阵描述，每个元素是该像素的灰度（0-255之间的整数，0是黑，255是白）
  - 如果r(m+1+n)<mn，我们可以只储存或者传输U_r, D, V_r（无损）。例如矩阵秩为1的时候我们只需要储存一个行向量和一个列向量
  - 甚至可以把很小的奇异值当成零忽略，进一步压缩图片（有损）

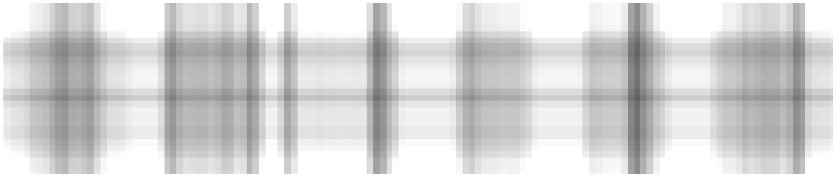
数据压缩的误差估计

- $A=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^T$，我们需要估算取前k个奇异值得到的矩阵和真实矩阵之间的误差
  - 设$A(k)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^T$，则$\delta A=A-A(k)=\sum_{l=k+1}^{r}\sigma_l\boldsymbol{u}_l\boldsymbol{v}_l^T$
  - δA的ij分量的绝对值：
$$\left|\delta A_{ij}\right|=\left|\sum_{l=k+1}^{r}\sigma_l(\boldsymbol{u}_l)_i\left(\boldsymbol{v}_l^T\right)_j\right|\leq\sum_{l=k+1}^{r}\sigma_l\left|(\boldsymbol{u}_l)_i\right|\left|\left(\boldsymbol{v}_l^T\right)_j\right|$$
  - $\boldsymbol{u}_l$，$\boldsymbol{v}_l$的长度都是1，所以$\left|(\boldsymbol{u}_l)_i\right|\leq 1$，$\left|\left(\boldsymbol{v}_l^T\right)_j\right|\leq 1$
  - 所以$\left|\delta A_{ij}\right|\leq\sum_{l=k+1}^{r}\sigma_l$
- 结论：误差由忽略的奇异值控制，取得奇异值越多误差越小

图像压缩例



- 一个128x623=79744像素的黑白图片
  - 秩为24。奇异值分解后有效信息24*(128+623)=18024
  - 取前k个奇异值的近似



k=1

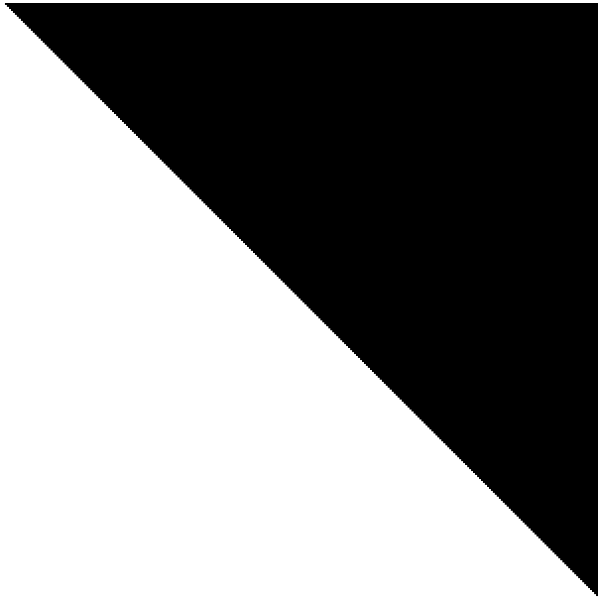
k=3

k=5

k=10

图像压缩例

- 考虑一个300x300的下三角矩阵，对角线和下面的元素全是255



原图：300x300

前1个奇异值 ~ 600

前5个 ~ 3000

前10个 ~ 6000

前30个 ~ 18000

前60个 ~ 36000

前100个 ~ 60000

小结

1. The SVD factors A into $U\Sigma V^{\mathrm{T}}$, with r singular values $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.
2. The numbers $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ are the nonzero eigenvalues of AA^{T} and $A^{\mathrm{T}}A$.
3. The orthonormal columns of U and V are eigenvectors of AA^{T} and $A^{\mathrm{T}}A$.
4. Those columns hold orthonormal bases for the four fundamental subspaces of A.
5. Those bases diagonalize the matrix: $A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i$ for $i \leq r$. This is $\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{U\Sigma}$.
6. $A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \sigma_r \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}$ and σ_1 is the maximum of the ratio $||A\boldsymbol{x}|| \,/\, ||\boldsymbol{x}||$.

内容提要

- 奇异值分解
- **主成分分析**
- 奇异值分解和几何

统计知识

- 假设一组数据来源于n个样本$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$
- 例：所有同学的期中考试成绩
- **平均值（mean）**：$\bar{\mu} = \frac{\sum_i \mu_i}{n}$
- **标准差（standard deviation）**：$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \bar{\mu})^2}{n-1}}$
    - n-1个自由度，因为平均值也是一个自由度
    - 数据的分散程度，标准差越大，数据越分散：

统计知识

- 假设n个样本，每个样本i我们得到两个数据μ_i和ρ_i
- 例：所有同学的期中考试成绩和平时作业成绩
- **协方差**：$\mathrm{cov}(\mu,\rho)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\overline{\mu})(\rho_i-\overline{\rho})}{\mathrm{n}-1}$
  - 描述了μ和ρ之间的相关性
  - $\mathrm{cov}(\mu,\rho)>0$正相关，$\mathrm{cov}(\mu,\rho)<0$负相关

协方差矩阵

- 将数据存在一个mxn的矩阵A_0中，每一行对应一种数据，每一列代表一个样本
- 矩阵A由A_0的每一个元素减去它所在行的平均值得到
$$A_{ij} = (A_0)_{ij} - \frac{\sum_{k=1}^{n} (A_0)_{ik}}{n}$$
  - A中每一行的数据都是以0为中心分布
- **协方差矩阵（covariance matrix）**：
$$S = \frac{AA^T}{n-1}$$
  - S_{ii}：第i种数据的**标准差**。S_{ij}：第i种和第j种数据的**协方差**

例：

应用：最小二乘法