向量和矩阵

内容提要

- **向量和向量的运算**
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- 矩阵的转置（transpose）

向量（vector）

- 确定一个数域（number field）：实数域、复数域等等
- 标量（scalar）：c，实数
- 向量（矢量，vector）：
  - 列向量（column vector）：$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
  - 行向量（row vector）：$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$
  - 每个分量都是实数，分量的个数=向量的维数
- 记号
  - 粗体$\boldsymbol{v}$，或者$\vec{v}$代表向量。我们这里不区分方括号圆括号

例子:

- 零向量（zero vector）： $\mathbf{0}$或者$\vec{0}$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
    - 与数字0不同！
- 反向量（reverse vector）： $-\boldsymbol{v}$
    - $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$，那么 $-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$

例子：

- 平面直角坐标系中的点可以用向量表示：

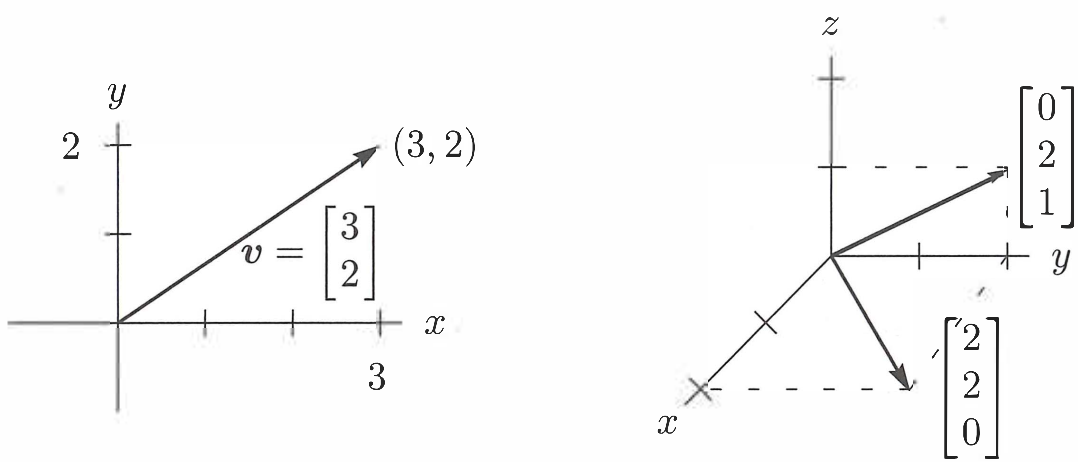


Figure 1.2: Vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ correspond to points (x, y) and (x, y, z).

Figure from Strang, introduction to linear algebra

例子：

- 直线上一个匀速运动的点，它的状态由它的位置 x 和它的速度 v 共同决定，换句话说，它的状态由二维向量 (x, v) 决定。

(x, v)

- 三维空间中一个运动的点，它的状态由位置$\boldsymbol{x}$和速度$\boldsymbol{v}$共同决定，或者说由六维向量$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$决定
- 相空间
- 其它向量的例子？

向量的运算：加法

- 向量的加法：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

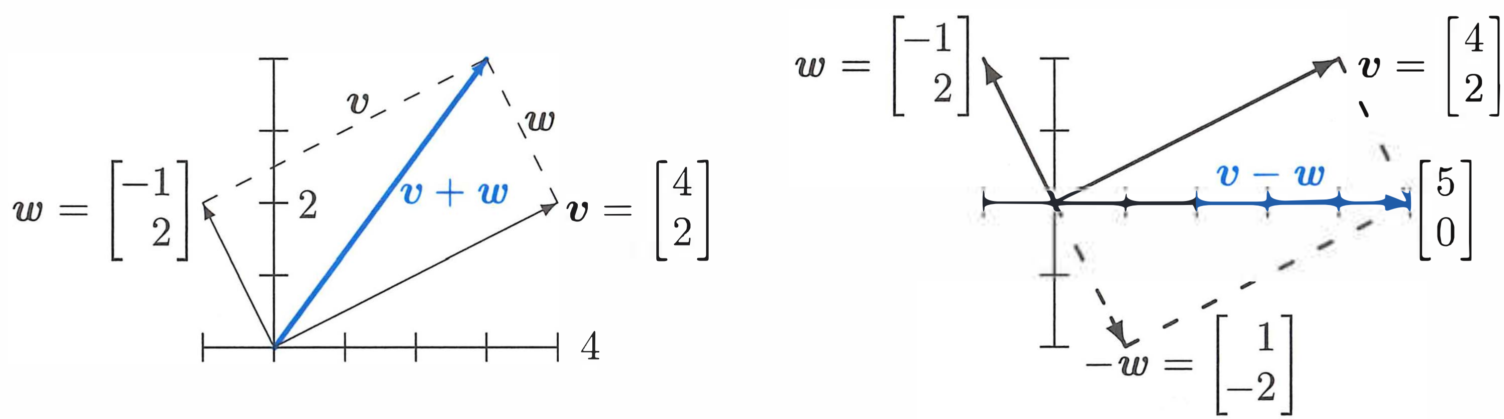
- 各个分量相加
    - 只有分量相同的向量才能相加
- 规律：
    - 交换律：$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$
    - 结合律：$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

例：

- 零向量（zero vector）： $\mathbf{0}$或者$\vec{0}$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
- 反向量： $-\boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$，那么 $-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$
- 由定义可知
  - $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$

例：

- 二维平面直角坐标系：平行四边形法则



$$v + w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad v - w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figure 1.1: Vector addition $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (3,\ 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of $\boldsymbol{w}$ is $-\boldsymbol{w}$. The linear combination on the right is $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (5,\ 0)$.

Figure from Strang, introduction to linear algebra

向量的运算：数乘

- 数乘（scalar product）：

$$c\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

- 数域中的一个元素c 和一个向量$\boldsymbol{v}$之间的运算
- 规律:
  - $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, (-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$
  - $c(d\boldsymbol{v}) = (cd)\boldsymbol{v} = cd\boldsymbol{v}$
  - $(c + d)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$
  - $c(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = c\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$
  - $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

向量的运算：线性组合

- 线性组合（linear combination）：

$$cv + dw = c\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 + dw_1 \\ \vdots \\ cv_n + dw_n \end{pmatrix}$$

- 一般： $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$ 是向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_m$ 的线性组合
- 特殊线性组合：
  - $1\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, 向量加法
  - $1\boldsymbol{v} - 1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, 向量减法
  - $0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$
  - $c\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{v}$

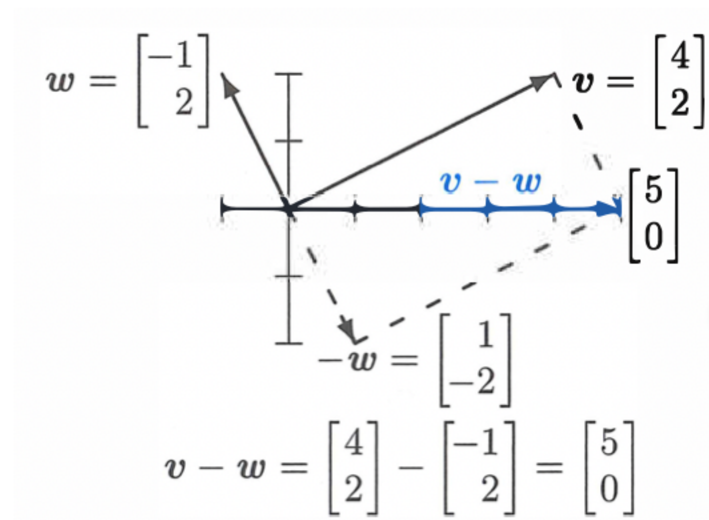


Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性组合的几何意义

- 考虑三维空间中向量（三个分量）的线性组合

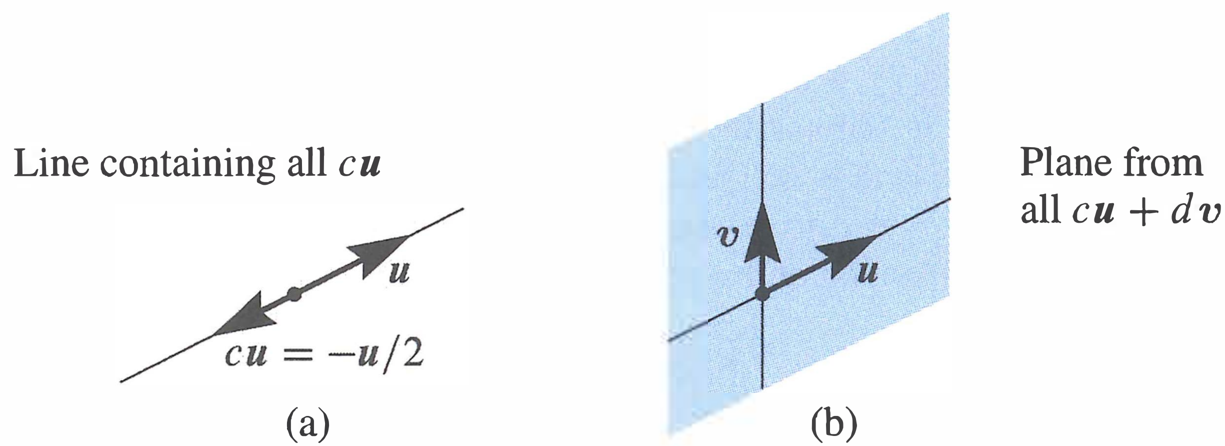


Figure 1.3: (a) Line through $\boldsymbol{u}$. (b) The plane containing the lines through $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.

- 两个向量所有线性组合总是构成平面吗？
- 三个向量所有线性组合构成什么？ 四个呢？

Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性相关、线性无关

$$u=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, w=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

不在同一平面

只有线性组合 $0\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$

$$u=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, w^*=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

在同一个平面

无穷多的线性组合得到**0**向量

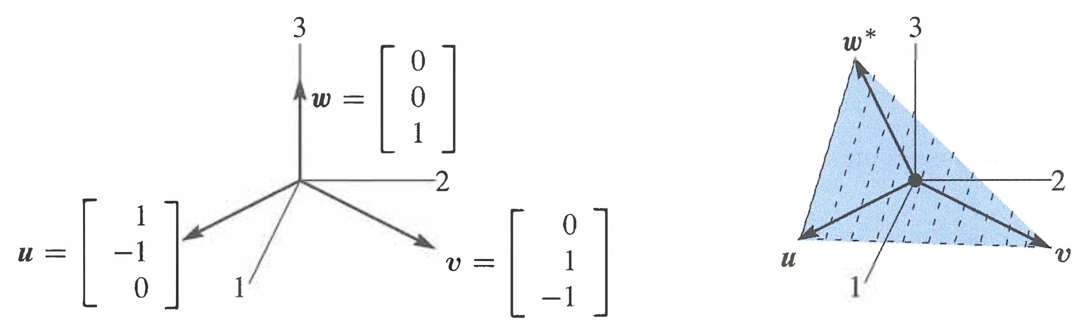


Figure 1.10: Independent vectors $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$. Dependent vectors $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}^*$ in a plane.

以后会更严格的定义线性相关、线性无关

Figure from Strang, introduction to linear algebra

小结：向量和向量运算

- 向量$\boldsymbol{v}$的分量$v_1, v_2, \cdots, v_n$都是实数（数域中的元素）
- 向量的加法
  - 两个向量参与的运算，结果是一个向量。分量分别相加
  - 交换律、结合律
- 向量的数乘:
  - 一个实数和一个向量参与的运算，结果是一个向量。
  - 结合律、分配律
- 线性组合：$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$

向量的内积（inner product）

- **内积**：两个向量间的运算，结果是一个数
  - $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n), w = (w_1, \cdots, w_n)$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
- 如上定义的内积是向量集合上的额外结构，是内积的一种，能够给出通常平面直角坐标系中的长度

向量内积（inner product）

- 性质：
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$
  - $(c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$
  - $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

例子

- 二维平面直角坐标系：

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = -4 + 4 = 0$$

- $\boldsymbol{v}$ 和$\boldsymbol{w}$ 正交

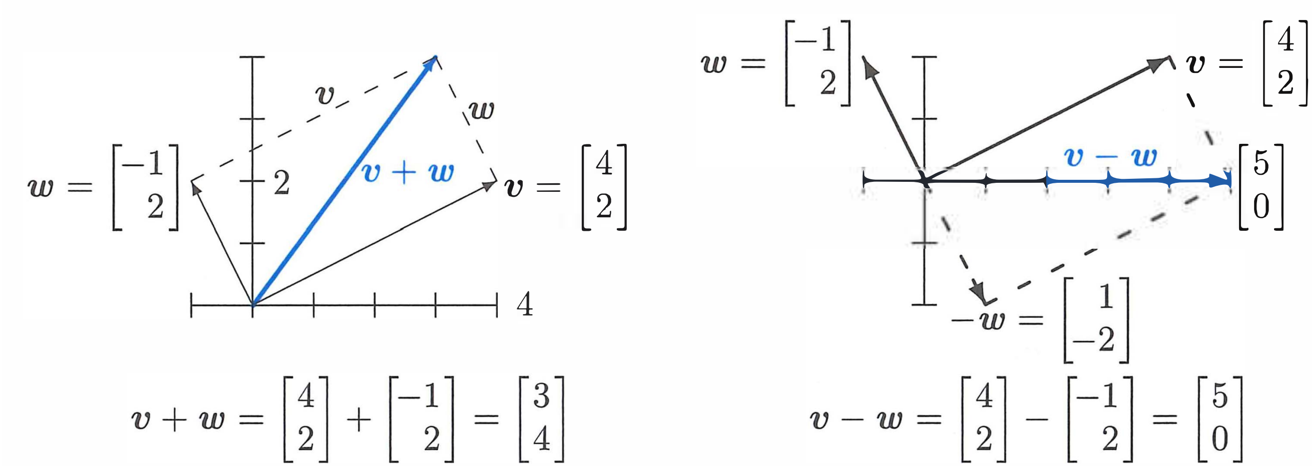


Figure 1.1: Vector addition $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (3,\ 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of $\boldsymbol{w}$ is $-\boldsymbol{w}$. The linear combination on the right is $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (5,\ 0)$.

Figure from Strang, introduction to linear algebra

例子:

- 超市收入:
  - 商品单价：$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$
  - 商品数量（卖出为正，买入为负）:$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$
  - 净收入：$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_i q_i}$
- 向量维数可能很大

- 其它例子?

向量的长度

- 向量的长度

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = (v_1^2 + v_2^2 \cdots + v_n^2)^{1/2}$$

  - 性质：$\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$，等号成立当且仅当$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
- 单位向量（unit vector）：
  - 长度为1的向量$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1$
  - $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ 是和$\boldsymbol{v}$同方向的单位向量

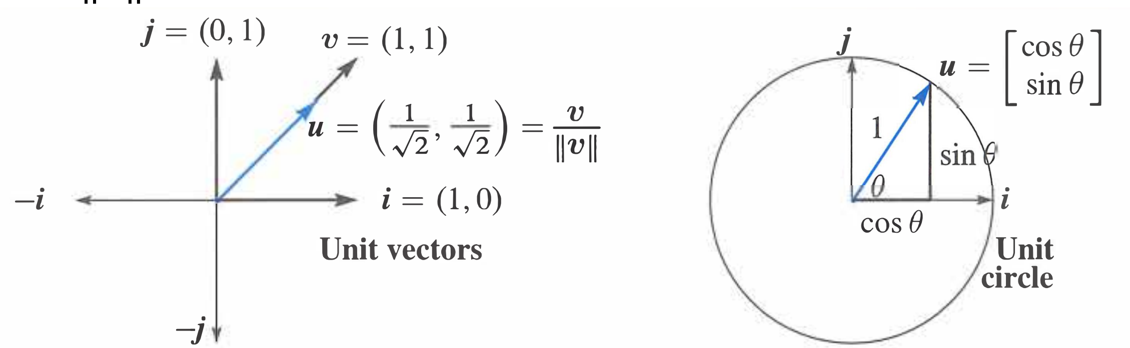


Figure 1.7: The coordinate vectors $\boldsymbol{i}$ and $\boldsymbol{j}$. The unit vector $\boldsymbol{u}$ at angle 45° (left) divides $\boldsymbol{v} = (1, 1)$ by its length $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$. The unit vector $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ is at angle θ.

Figure from Strang, introduction to linear algebra

向量的夹角

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ 当且仅当$\boldsymbol{v}$垂直于$\boldsymbol{w}$
- 两个向量间的夹角
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$$
    - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} > 0$ 夹角小于90度
    - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} < 0$ 夹角大于90度，小于等于180度
    - $|\cos\theta| \le 1$ 因此 $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \le \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$
- 什么时候两个向量同方向?

小结：内积、向量的长度

- 两个向量间的**内积**，结果是一个数
  - $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n), w = (w_1, \cdots, w_n)$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
- 向量的**长度**

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = (v_1^2 + v_2^2 \cdots + v_n^2)^{1/2}$$

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ 当且仅当$\boldsymbol{v}$**垂直**于$\boldsymbol{w}$
- 两个向量间的**夹角**

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}, \quad |\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \le \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$$

内容提要

- 向量和向量的运算
- **矩阵**
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- 矩阵的转置（transpose）

矩阵（matrix）

- 标量（scalar, 1×1 ）： c， 实数
- 向量（矢量，vector）：
  - 列向量（column vector, m×1 ）： $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$
  - 行向量（row vector, 1×n ）： $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$
- 矩阵（matrix, m×n ）：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

  - A_{ij}: 矩阵A第i行第j列的元素（分量）
- 方阵（square matrix）：$m=n$

例子：计算机图像

- 10x10像素的黑白图片：0代表全白，1代表全黑，10x10矩阵

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

- 对图像的操作转化为对矩阵的操作
- 灰色？彩色？

例子：黑洞的度量

- Schwarzchild黑洞的度量（度规，metric）
- $ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵
- 其它矩阵的例子?

例子:

- 单位矩阵（identity matrix）I_n， $I_{n\times n}$
  - 对角元全为1，非对角元为0的方阵

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 矩阵单位（matrix unit） e_{ij}，E_{ij}
  - 只有ij分量为1，其它分量为0
  - 方阵$A = \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij})e_{ij}$

$$e_{ij} =. \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & j & & \\ & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} & \vdots & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

矩阵和向量的乘法

- $m \times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$b = A\boldsymbol{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

- 矩阵和向量的乘法把n维向量$\boldsymbol{x}$映射成m维向量$A\boldsymbol{x}$
- 这是一个**线性映射**

矩阵和向量的乘法

- $m\times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$b=A\boldsymbol{x}$

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j$$

- $A\boldsymbol{x}$是A所有列的线性组合

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}x_2$$

矩阵和向量的乘法

- $m \times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$b = A\boldsymbol{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

- $A\boldsymbol{x}$是A所有行分别和$\boldsymbol{x}$的内积

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (-1,1,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (0,-1,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

线性方程组用矩阵表示

- $m \times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$，也可以看成是一个n元线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i$$

- 线性方程组也可以写成矩阵的形式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

小结：

- 矩阵和向量的乘法：$m \times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$b = A\boldsymbol{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

- 也可以看成是m个n元线性方程构成的方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i$$

- 线性方程组也可以写成矩阵的形式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

内容提要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- **矩阵的运算**
- 矩阵的逆（inverse）
- 矩阵的转置（transpose）

矩阵加法和数乘

- 矩阵**加法**：$m \times n$的矩阵A和B

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

  - 各个分量分别相加，只有同样大小的矩阵可以相加
- 矩阵**数乘**：$(cA)_{ij} = cA_{ij}$
  - 每个分量分别乘c
- 运算规律
  - 交换律、结合律、分配律
- 同向量的运算规律相同（线性空间）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵加法和数乘的性质

- 交换律：$A + B = B + A$
- 分配律：$\begin{matrix} \mathrm{c}(A + B) = cB + cA \\ (c + d)A = cA + dA \end{matrix}$
- 结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

- $(m\times n$的矩阵$A)\times(n\times p$的矩阵$B) = \mathrm{m}\times p$的矩阵C
- $C_{ij} =$ (A的第i行) $\cdot$ (B的第j列) $= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$
  - AB 可以相乘，A的列数=B的行数

  - AB 可以相乘，A的列数=B的行数
  - AB 可以相乘，A的列数=B的行数

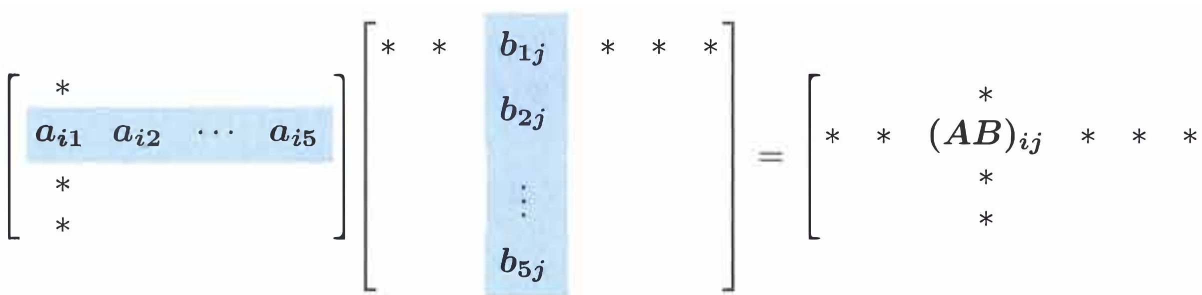
$$\begin{bmatrix} * & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ * & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix}$$

A is 4 by 5 $\qquad$ B is 5 by 6 $\qquad$ AB is $(4\times 5)(5\times 6) = 4$ by 6

Figure from Strang, introduction to linear algebra

矩阵乘法

- $(m \times n$的矩阵$A) \times (n \times p$的矩阵$B) = \mathrm{m} \times p$的矩阵C
- $C_{ij} = (A$的第i行$) \cdot (B$的第j列$) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$
  - 学习了线性映射之后，我们会对矩阵乘法为什么这么定义有更自然的理解



A is 4 by 5 $\qquad$ B is 5 by 6 $\qquad$ AB is $(4 \times 5)(5 \times 6) = 4$ by 6

Figure from Strang, introduction to linear algebra

矩阵乘法和矩阵乘向量

- $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$： $\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\boldsymbol{x}_j$
- $C = AB$： $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$
- 矩阵乘法和矩阵乘向量相容： $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$
- 证明:
  - $\left(A(B\boldsymbol{x})\right)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\boldsymbol{b})_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\sum_{k=1}^{m} B_{jk}\boldsymbol{x}_k)$
  - $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\sum_{k=1}^{m} B_{jk}\boldsymbol{x}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ij}B_{jk}\boldsymbol{x}_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}\boldsymbol{x}_k$
  - $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}\boldsymbol{x}_k = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}\boldsymbol{x}_k = \left((AB)\boldsymbol{x}\right)_i$

矩阵乘法

- 例1:
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
  - 矩阵乘法一般不是可交换的
- 例2:内积
- $(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 1xn矩阵乘nx1矩阵
- 例3: $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$, nx1矩阵乘1xn矩阵

矩阵乘法运算性质

- 结合律

$$ABC = A(BC) = (AB)C$$

- 一般没有交换律

$AB \neq BA$，对易子（commutator）：$[A, B] = AB - BA$

- 左分配律

$$A(B + C) = AB + AC$$

- 右分配律

$$(A + B)C = AC + BC$$

分块矩阵(block matrix)、乘法

- 分块矩阵
  - 4x6矩阵：2x3矩阵，每一个块（block）是一个2x2矩阵

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵乘法：每一个块当作矩阵的元素，块之间使用矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

矩阵乘法的四种观点

- 第一种：定义$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$
  - AB的第i行第j列 = A的第i行 和 B的第j列的内积
  - A看成mx1的分块矩阵，每一行的元素是1xn的矩阵（行向量）
  - B看成1xp的分块矩阵，每一列的元素是nx1的矩阵（列向量）

$$\begin{bmatrix} * & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ * & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix}$$

A is 4 by 5 $\qquad$ B is 5 by 6 $\qquad$ AB is $(4\times 5)(5\times 6) = 4$ by 6

Figure from Strang, introduction to linear algebra

矩阵乘法的四种观点

- 第二种：A乘B的每一列
  - B看成1xp的分块矩阵，每一列的元素是nx1的矩阵（列向量）

$$A\left[\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_p\right] = \left[A\boldsymbol{b}_1 \cdots A\boldsymbol{b}_p\right]$$

- 第三种：A的每一行乘B
  - A看成mx1的分块矩阵，每一行的元素是1xn的矩阵（行向量）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的四种观点

- 第四种：
  - A看成1xn的分块矩阵，每一列的元素是mx1的矩阵（列向量）
  - B看成nx1的分块矩阵，每一列的元素是1xp的矩阵（行向量）

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{b}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{b}}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \widetilde{\boldsymbol{b}}_i
$$

  - $\widetilde{\boldsymbol{a}}_i \widetilde{\boldsymbol{b}}_i$是一个mxp的矩阵（列向量x行向量）
  - 这个观点再后面讲**奇异值分解**的时候很有用

小结

- 矩阵加法和数乘
- 矩阵的乘法
  - $(m\times n$的矩阵$A)\times(m\times p$的矩阵$B) = \mathrm{m}\times p$的矩阵C
  - $C_{ij} = (A$的第i行$)\cdot(B$的第j列$) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$
- 矩阵乘法的性质
  - 结合律：$ABC = A(BC) = (AB)C$
  - 左分配律：$A(B + C) = AB + AC$
  - 右分配律：$(A + B)C = AC + BC$
- 分块矩阵

内容提要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- **矩阵的逆（inverse）**
- 矩阵的转置（transpose）

逆矩阵（inverse matrix）

- 方阵A的逆矩阵A^{-1}满足

$$A^{-1}A = I \text{且} AA^{-1} = I$$

  - I是单位矩阵，非对角元0，对角元1。$IA = AI = A$
- 如果逆矩阵存在，左逆=右逆
- 证明:
  - 假设B是A的左逆，A是C的右逆
  - 则$BA = I, AC = I$
  - 第一个方程等号左右同时右乘C，$B = C$
  - 或者第二个方程等号左右同时左乘B，$B = C$

逆矩阵性质

- 如果存在非零向量$\boldsymbol{x}$使得$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则$A$不可逆
- **证明**:
  - 反证法，假设A可逆
  - 则存在A^{-1}使得$A^{-1}A = I$
  - $A^{-1}A\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$，同$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$矛盾
- 后面会学到更多逆矩阵是否存在的判定方法（矩阵的秩、行列式等等）

逆矩阵性质

- 2X2矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵的逆（只有所有对角元都不为0时存在）

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵和矩阵乘法

- 假设矩阵A和B都可逆
- $A+B$不一定可逆
- AB一定可逆：$(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$
  - AB顺序反过来
- **证明**:
  - 用结合律
  - $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}\,A_1^{-1}$

例：

- 消元矩阵的逆

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ \mathbf{20} & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & 1 \end{bmatrix}$$

奇异矩阵（singular matrix）vs 可逆矩阵

- 奇异矩阵：不可逆的矩阵
  - 后面的课程中我们将学习nxn方阵可逆的判定方法（秩、行列式等等）
- 例：
  - 上（下）三角阵的逆还是上（下）三角阵

逆矩阵和线性方程组的解

- 如果A可逆，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一的解
$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$
- 另一方面，可以把$AA^{-1}=I$ 看成是解一系列线性方程组的问题，其中未知数就是A^{-1}的元素

逆矩阵和线性方程组的解

- 循环差分矩阵C 作用在$\boldsymbol{x}$构成的线性方程组

$$C\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

- 对于一般的$\boldsymbol{b}$：没有解
- $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$：无穷多的解

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

- 两组方程的区别?
- 线性方程组解的存在性转化成矩阵的问题

小结

- 方阵A的逆矩阵A^{-1}满足
$$A^{-1}A = I \text{且} AA^{-1} = I$$
  - 如果A可逆，方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一的解
$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$
  - 如果存在非零向量$\boldsymbol{x}$使得$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则$A$不可逆
- 方阵A求逆等价于解一系列线性方程组$AA^{-1} = I$
- 几个特殊矩阵的逆
- 矩阵的逆和乘法的关系

内容提要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆（inverse）
- **矩阵的转置（transpose）**

矩阵的转置（transpose）

- 转置A^T
- 定义： $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
  - mxn的矩阵转置后是nxm的矩阵
- 性质：
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 例：$A = LDU$ ，则$A^T = U^T D^T L^T$

转置、内积和外积

- x、y是n维列向量，$x^T y$和xy^T的区别？
  - $x^T y$是一个数（内积）
  - xy^T是一个nxn矩阵（外积）
- 量子力学：$\langle x|y\rangle, |x\rangle\langle y|$
- 推广
  - $(Ax)^T y = x^T (A^T y)$

对称矩阵

- 定义：$S^T = S$, $s_{ij} = s_{ji}$
- 例： 对角矩阵总是对称矩阵
- 例： 对称乘积
  - AA^T
  - A^TA
  - x^TA^TAx

置换矩阵

- 定义：每一行和每一列只有一个1，剩余元素为0的矩阵
- 性质：$P^T = P^{-1}$
- nxn的置换矩阵有$n!$个

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad P_{21} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad P_{32}P_{21} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \quad P_{21}P_{32} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

小结

- 矩阵A的转置A^T：把A的行作为A^T的列
- 性质：
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 如果把向量x, y看成列矩阵，$x \cdot y = x^T y$
- 对称矩阵：转置后还是自己的矩阵