# 行列式

颜文斌
清华大学

# 内容提要

- **行列式的定义**
- 行列式的性质
- Cramer法则，矩阵的逆和体积

# 2x2矩阵的行列式（determinant）

- 2x2矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
- 2x2矩阵的行列式

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

  - 也记做$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
  - 2x2矩阵可逆，当且仅当$\det A \neq 0$

# 3x3矩阵的行列式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式（递归定义）

- nxn方阵$A$，记$A_{ij}$为去掉第i行和第j列的n-1xn-1矩阵
- **余子式**$C_{ij}$：定义为$(-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$
- $A$的行列式：
  - n=1： $\mathrm{det}A = A_{11}$
  - n>1：

$$\text{行展开：}\mathrm{det}A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
$$\text{列展开：}\mathrm{det}A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$$

- 余因子前面的正/负系数：

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

# 例

- 单位矩阵的行列式为1

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

- 对角矩阵的行列式为对角元的乘积

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 如果矩阵$A$某一行（列）全是零，则$\det A = 0$

# 例（Lay书中的例子）

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det A = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot C_{21} + 0\cdot C_{31} - 0\cdot C_{41} + 0\cdot C_{51}$$

$$\det A = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

# 行列式定义的推论

- 定理：三角矩阵的行列式等于对角元的乘积
- 证明：先考虑$A$是上三角阵
  - $A$是1x1矩阵，定理成立
  - 假设定理对n-1xn-1矩阵成立，那么对于nxn矩阵$A$
    - $\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1} = a_{11}C_{11} = a_{11}\det A_{11}$
    - $A_{11}$是n-1xn-1矩阵，由假设可知$\det A_{11} = \prod_{i=2}^{n} a_{ii}$
    - 因此nxn矩阵$A$的行列式$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$，也就说，定理对nxn矩阵成立
  - 由数学归纳法，定理成立
- 下三角矩阵证明类似

# 小结

- nxn方阵$A$，记$A_{ij}$为去掉第i行和第j列的n-1xn-1矩阵
- **余子式**$C_{ij}$：定义为$(-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$
- $A$的行列式：

  行展开：$\mathrm{det}A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

  列展开：$\mathrm{det}A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$
- 推论：如果矩阵$A$某一行（列）全是零$\mathrm{det}A = 0$
- 定理：三角矩阵的行列式等于对角元的乘积

# 内容提要

- 行列式的定义
- **行列式的性质**
- Cramer法则，矩阵的逆和体积

# 行列式

- $A$的行列式：

  行展开：$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

  列展开：$\det A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$
- $\det A$：
  - nxn实方阵到实数的映射
  - 换句话说，n个n维实向量到实数的映射
  - 如果矩阵$A$某一行（列）全是零$\det A = 0$

# 行列式性质1

- 行列式：n个n维实向量到实数的映射， $\det A = T(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
- **定理（线性）**： $$T(\boldsymbol{a}_1, \cdots, k\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = kT\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$ $$T(\cdots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, \cdots) = T\,(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + T\,(\cdots, \boldsymbol{b}_i, \cdots)$$
- 证明：
  - 用定义，对第i列做展开det$A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$
  - 第i列乘k，

$$T(\boldsymbol{a}_1, \cdots, k\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = ka_{1i}C_{1i} + ka_{2i}C_{2i} + \cdots + ka_{ni}C_{ni} = k\det A$$

  - 另一个性质的证明类似

# 行列式性质2

- **定理**：交换$A$任意两行或者两列得到矩阵$B$，则$\det A = -\det B$
- 证明：数学归纳法
  - 用定义证明定理对2x2矩阵成立
  - 假设定理对n-1xn-1矩阵成立
  - 对于nxn矩阵$A$和$B$，且$A$交换第i和第j行（列）得到$B$，对$\det A$和$\det B$对第k行（列）做行（列）展开（k不等于i和j）
  - 两者展开式中余因子的部分是n-1xn-1的矩阵的行列式，且交换了两行（列），由假设，余因子差一个负号。另外，k行元素不变，所以$\det A = -\det B$对nxn矩阵也成立
  - 定理成立

# 行列式性质2

- **定理**：交换$A$任意两行或者两列得到矩阵$B$，则$\det A = -\det B$
- 推论：如果$A$任意两行或者两列相同，则$\det A = 0$
- 证明：交换$A$相同的两行，由定理$\det A = -\det A$，所以$\det A = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 20 + 6 + 4 - 4 - 20 - 6 = 0$$

# 行列式性质3

- **定理**：将$A$的第i行（列）乘一个常数加到第j行（列）得到$B$，则$\det A = \det B$
- 证明：
- $T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j+k\boldsymbol{a}_i,\cdots\right)=T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j\cdots\right)+T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,k\boldsymbol{a}_i\cdots\right)= T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j\cdots\right)+kT\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_i\cdots\right)=T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j\cdots\right)$
- 推论： $A$的行（列）之间线性相关，则$\det A=0$。换句话说，秩小于矩阵$A$的阶，则$\det A=0$

# 行列式和行缩减阶梯形式

- 综合性质1、2、3，说明矩阵$A$的行列式在行变换下不变
- 假设矩阵$A$变成rref$A$的过程中有r次换行，那么

$$\det A = (-1)^r \det \mathrm{rref}A = \begin{cases} (-1)^r \text{所有主元的乘积，如果}A\text{可逆} \\ 0\text{，如果}A\text{不可逆} \end{cases}$$

# 行列式和逆矩阵

- 定理：方阵$A$可逆当且仅当$\det A \neq 0$
- 证明：利用前面的结论，把$\det A$和主元乘积结合起来

- 推论：方阵 $A$的行（列）之间线性相关，则$\det A = 0$，则$A$不可逆

# 行列式和矩阵运算

- 行列式和转置：行列式在转置下不变
$$\det A^T = \det A$$
- 行列式和矩阵乘法：矩阵乘积的行列式=行列式的乘积
$$\det AB = \det A \det B$$
- 证明：参考Lay书中的174页

- 推论：$\det A^{-1} = 1/\det A$

# 内容提要

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- **Cramer法则，矩阵的逆和体积**