

向量和矩阵

内 容 提 要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 矩阵的转置 (transpose)

向量 (vector)

- 确定一个数域 (number field) : 实数域、复数域等等
- 标量 (scalar) : c , 实数
- 向量 (矢量, vector) :
 - 列向量 (column vector) : $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
 - 行向量 (row vector) : $\boldsymbol{v} = (v_1 \cdots v_n)$
 - 每个分量都是实数, 分量的个数=向量的维数
- 记号
 - 粗体 \boldsymbol{v} , 或者 \vec{v} 代表向量。我们这里不区分方括号圆括号

例子:

- 零向量 (zero vector) : $\mathbf{0}$ 或者 $\vec{0}$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 与数字0不同!

- 反向量 (reverse vector) : $-\mathbf{v}$

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, 那么 $-\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$

例子:

- 平面直角坐标系中的点可以用向量表示:

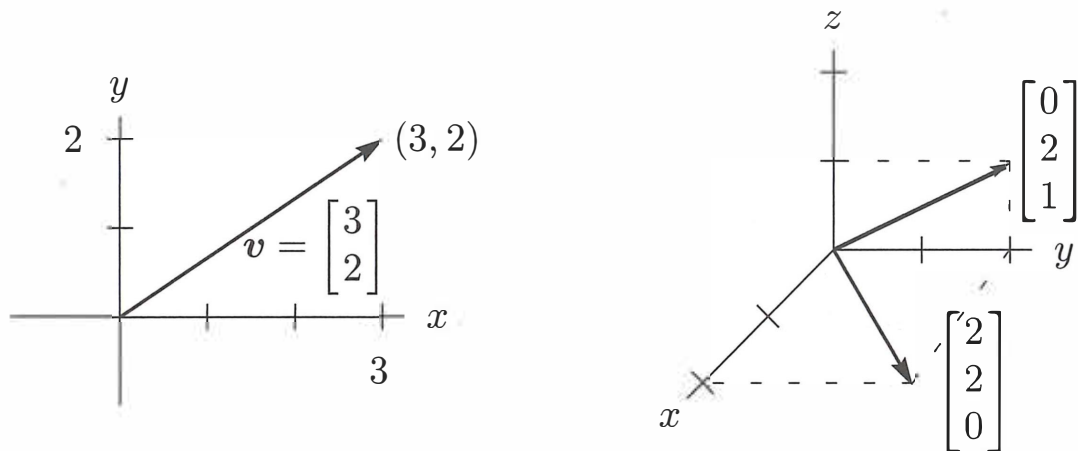
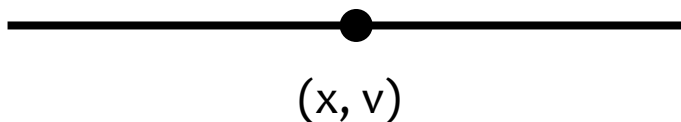


Figure 1.2: Vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ correspond to points (x, y) and (x, y, z) .

例子：

- 直线上一个匀速运动的点，它的状态由它的位置 x 和它的速度 v 共同决定，换句话说，它的状态由二维向量 (x, v) 决定。



- 三维空间中一个运动的点，它的状态由位置 x 和速度 v 共同决定，或者说由六维向量 (x, v) 决定
- 相空间
- 其它向量的例子？

向量的运算：加法

- 向量的加法：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

- 各个分量相加

- 只有分量相同的向量才能相加

- 规律：

- 交换律： $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$

- 结合律： $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

例：

- 零向量 (zero vector) : $\mathbf{0}$ 或者 $\vec{0}$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 反向量: $-\boldsymbol{v}$

- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, 那么 $-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$

- 由定义可知

- $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

- $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$

例：

- 二维平面直角坐标系：平行四边形法则

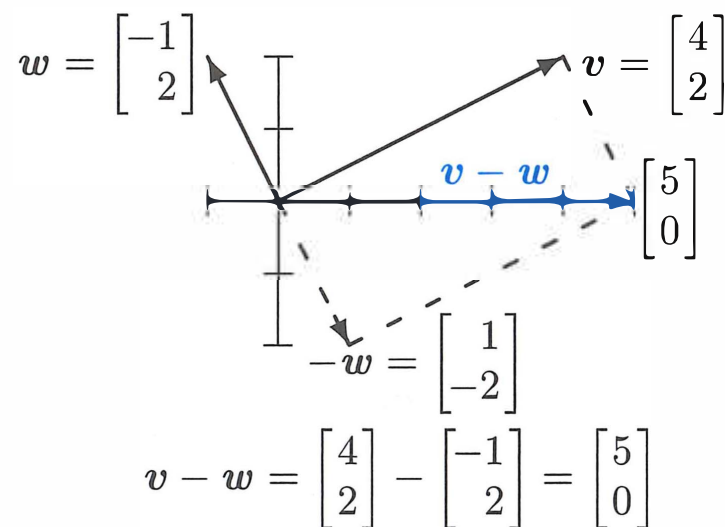
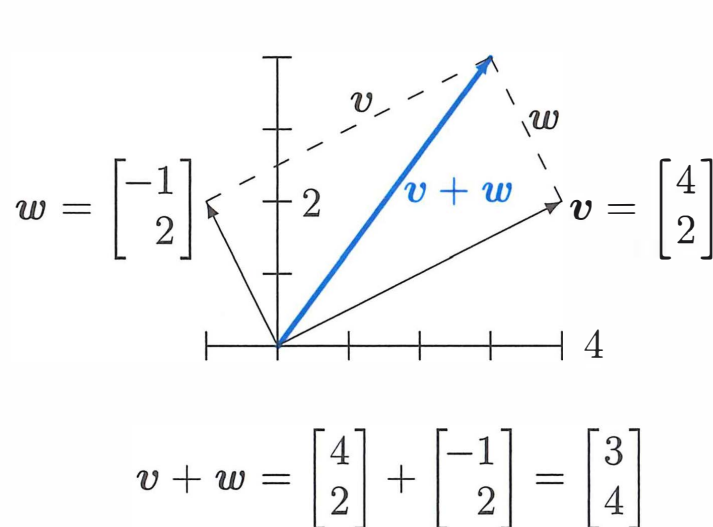


Figure 1.1: Vector addition $v + w = (3, 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of w is $-w$. The linear combination on the right is $v - w = (5, 0)$.

向量的运算：数乘

- 数乘 (scalar product) :

$$c \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

- 数域中的一个元素 c 和一个向量 \boldsymbol{v} 之间的运算
- 规律：
 - $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, (-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$
 - $c(d\boldsymbol{v}) = (cd)\boldsymbol{v} = cd\boldsymbol{v}$
 - $(c + d)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$
 - $c(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = c\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$
 - $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

向量的运算：线性组合

- 线性组合 (linear combination) :

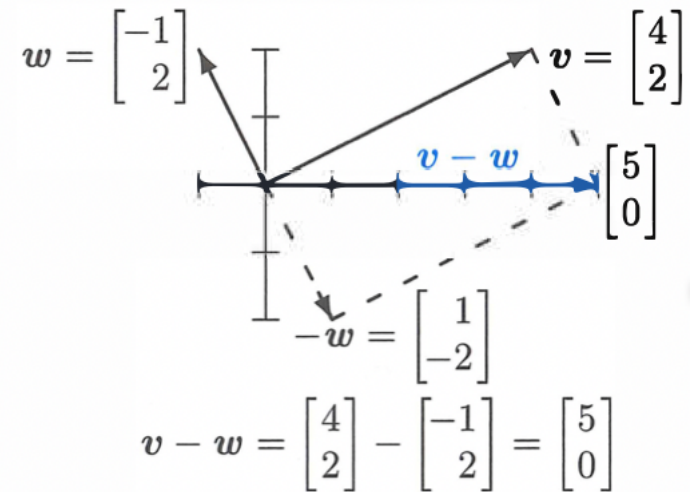
$$cv + dw = c \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 + dw_1 \\ \vdots \\ cv_n + dw_n \end{pmatrix}$$

- 一般： $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m$ 是向量

$v_1, v_2, \cdots v_m$ 的线性组合

- 特殊线性组合：

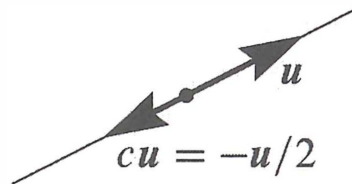
- $1v + 1w = v + w$, 向量加法
- $1v - 1w = v - w$, 向量减法
- $0v + 0w = 0$
- $cv + 0w = cv$



线性组合的几何意义

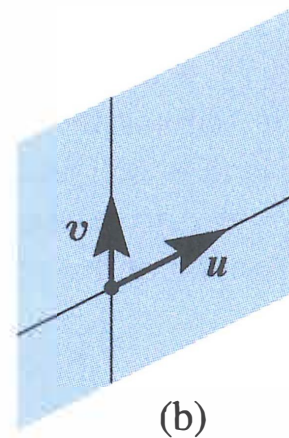
- 考虑三维空间中向量（三个分量）的线性组合

Line containing all $c\mathbf{u}$



(a)

Plane from
all $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$



(b)

Figure 1.3: (a) Line through \mathbf{u} . (b) The plane containing the lines through \mathbf{u} and \mathbf{v} .

- 两个向量所有线性组合总是构成平面吗？
- 三个向量所有线性组合构成什么？四个呢？

线性相关、线性无关

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

不在同一平面

只有线性组合 $0u + 0v + 0w = 0$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在同一个平面

无穷多的线性组合得到 0 向量

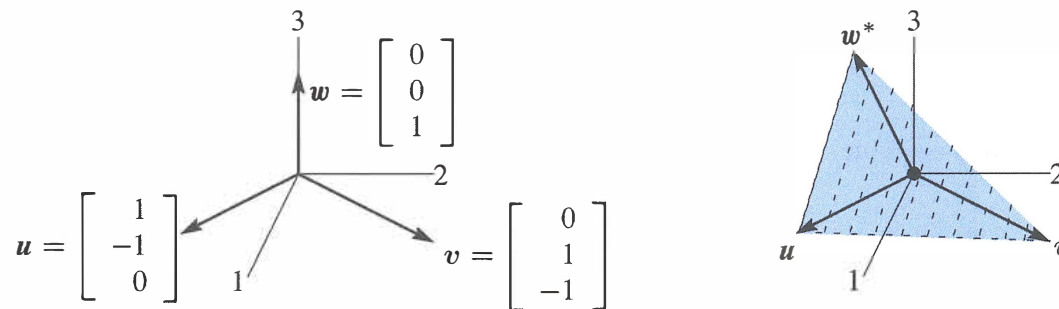


Figure 1.10: Independent vectors u, v, w . Dependent vectors u, v, w^* in a plane.

以后会更严格的定义线性相关、线性无关

小结：向量和向量运算

- 向量 \boldsymbol{v} 的分量 v_1, v_2, \dots, v_n 都是实数（数域中的元素）
- 向量的加法
 - 两个向量参与的运算，结果是一个向量。分量分别相加
 - 交换律、结合律
- 向量的数乘：
 - 一个实数和一个向量参与的运算，结果是一个向量。
 - 结合律、分配律
- 线性组合： $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + c_m\boldsymbol{v}_m$

向量的内积 (inner product)

- 内积：两个向量间的运算，结果是一个数
 - $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n), \boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$
 - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i$
- 如上定义的内积是向量集合上的额外结构，是内积的一种，能够给出通常平面直角坐标系中的长度

向量内积 (inner product)

• 性质:

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$

- $(c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

例子

- 二维平面直角坐标系：

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -4 + 4 = 0$$

- \mathbf{v} 和 \mathbf{w} 正交

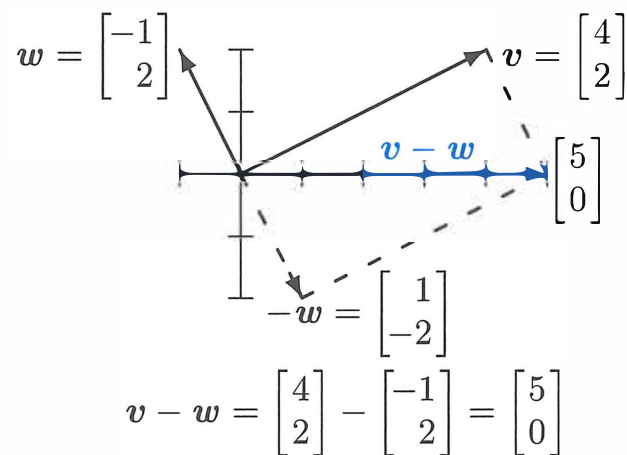
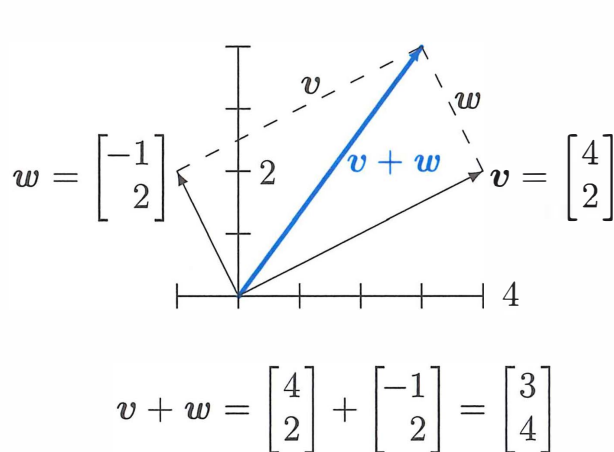


Figure 1.1: Vector addition $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (3, 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of \mathbf{w} is $-\mathbf{w}$. The linear combination on the right is $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (5, 0)$.

例子:

- 超市收入:
 - 商品单价: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$
 - 商品数量 (卖出为正, 买入为负): $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$
 - 净收入: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n p_i q_i$
- 向量维数可能很大
- 其它例子?

向量的长度

- 向量的长度

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = (v_1^2 + v_2^2 \cdots + v_n^2)^{1/2}$$

- 性质: $\|v\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $v = 0$

- 单位向量 (unit vector) :

- 长度为1的向量 $u \cdot u = 1$

- $\frac{v}{\|v\|}$ 是和 v 同方向的单位向量

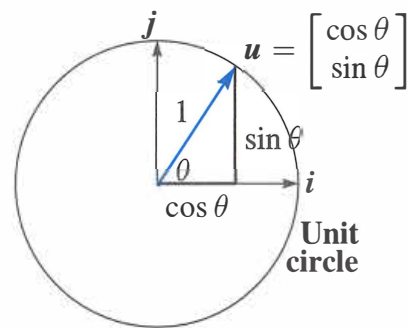
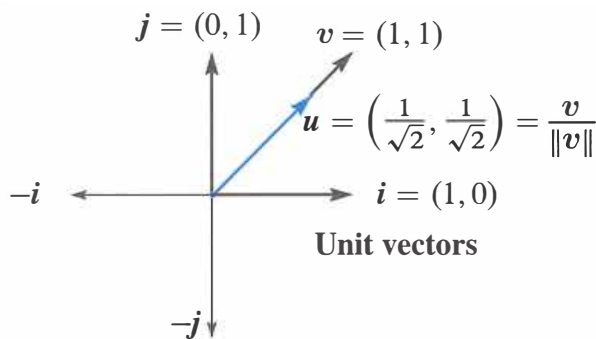


Figure 1.7: The coordinate vectors i and j . The unit vector u at angle 45° (left) divides $v = (1, 1)$ by its length $\|v\| = \sqrt{2}$. The unit vector $u = (\cos \theta, \sin \theta)$ is at angle θ .

向量的夹角

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ 当且仅当 \boldsymbol{v} 垂直于 \boldsymbol{w}

- 两个向量间的夹角

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|}$$

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} > 0$ 夹角小于90度
- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} < 0$ 夹角大于90度, 小于等于180度
- $|\cos \theta| \leq 1$ 因此 $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|$
- 什么时候两个向量同方向?

小结：内积、向量的长度

- 两个向量间的内积，结果是一个数

- $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n), \boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i$

- 向量的长度

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = (v_1^2 + v_2^2 \dots + v_n^2)^{1/2}$$

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ 当且仅当 \boldsymbol{v} 垂直于 \boldsymbol{w}

- 两个向量间的夹角

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|}, \quad |\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|$$

内 容 提 要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 矩阵的转置 (transpose)

矩阵 (matrix)

- 标量 (scalar, 1×1) : c , 实数
- 向量 (矢量, vector) :
 - 列向量 (column vector, $m \times 1$) : $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$
 - 行向量 (row vector, $1 \times n$) : $\mathbf{v} = (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$
- 矩阵 (matrix, $m \times n$) :
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$
 - A_{ij} : 矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素
- 方阵 (square matrix) : $m = n$

例子：计算机图像

- 10X10像素的黑白图片：0代表全白，1代表全黑，10X10矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对图像的操作转化为对矩阵的操作
- 灰色？ 彩色？

例子：黑洞的度量

- Schwarzschild黑洞的度量（度规，metric）

- $ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵
- 其它矩阵的例子？

矩阵和向量的乘法

- $m \times n$ 矩阵 A 作用在 n 维向量 \mathbf{x} 上，结果是一个 m 维向量 $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j$$

- $A\mathbf{x}$ 是 A 所有列的线性组合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} x_2$$

矩阵和向量的乘法

- $m \times n$ 矩阵 A 作用在 n 维向量 \mathbf{x} 上，结果是一个 m 维向量 $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$$

- $A\mathbf{x}$ 是 A 所有行分别和 \mathbf{x} 的内积

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (-1,1,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (0,-1,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

线性方程组用矩阵表示

- $m \times n$ 矩阵 A 作用在 n 维向量 \mathbf{x} 上，结果是一个 m 维向量 $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ ，也可以看成是一个 n 元线性方程组

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i$$

- 线性方程组也可以写成矩阵的形式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

线性方程组解的存在性

- 循环差分矩阵 C 作用在 \mathbf{x} 构成的线性方程组

$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

- 对于一般的 \mathbf{b} : 没有解
- $\mathbf{b} = \mathbf{0}$: 无穷多的解

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

- 两组方程的区别?
- 线性方程组解的存在性转化成矩阵的问题

小结：

- 矩阵和向量的乘法： $m \times n$ 矩阵 A 作用在 n 维向量 \mathbf{x} 上，结果是一个 m 维向量 $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$$

- 也可以看成是 m 个 n 元线性方程构成的方程组

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = b_i$$

- 线性方程组也可以写成矩阵的形式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

内 容 提 要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 矩阵的转置 (transpose)

矩阵加法和数乘

- 矩阵**加法**: $m \times n$ 的矩阵 A 和 B

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

- 各个分量分别相加, 只有同样大小的矩阵可以相加

- 矩阵**数乘**: $(cA)_{ij} = cA_{ij}$

- 每个分量分别乘 c

- 运算规律

- 交换律、结合律、分配律

- 同向量的运算规律相同 (线性空间)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵加法和数乘的性质

- 交换律: $A + B = B + A$
- 分配律: $c(A + B) = cB + cA$
 $(c + d)A = cA + dA$
- 结合律: $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

- $(m \times n \text{ 的矩阵 } A) \times (m \times p \text{ 的矩阵 } B) = m \times p \text{ 的矩阵 } C$
- $C_{ij} = (A \text{ 的第 } i \text{ 行}) \cdot (B \text{ 的第 } j \text{ 列}) = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$
 - AB 可以相乘, A 的列数 $= B$ 的行数
 - AB 可以相乘, A 的列数 $= B$ 的行数
 - AB 可以相乘, A 的列数 $= B$ 的行数

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} * \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ * \\ * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ b_{2j} & & & & & \\ & & \vdots & & & \\ b_{5j} & & & & & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix} \\
 A \text{ is } 4 \text{ by } 5 & B \text{ is } 5 \text{ by } 6 & & AB \text{ is } (4 \times 5)(5 \times 6) = 4 \text{ by } 6
 \end{array}$$

矩阵乘法

- $(m \times n \text{ 的矩阵 } A) \times (m \times p \text{ 的矩阵 } B) = m \times p \text{ 的矩阵 } C$
- $C_{ij} = (A \text{ 的第 } i \text{ 行}) \cdot (B \text{ 的第 } j \text{ 列}) = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$
 - 学习了线性映射之后，我们会对矩阵乘法为什么这么定义有更自然的理解

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} * & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} & \\ * & & & & \\ * & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix} \\
 A \text{ is } 4 \text{ by } 5 & B \text{ is } 5 \text{ by } 6 & & AB \text{ is } (4 \times 5)(5 \times 6) = 4 \text{ by } 6
 \end{array}$$

矩阵乘法

- 例1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 矩阵乘法一般不是可交换的

- 例2: 内积

- $(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $1 \times n$ 矩阵乘 $n \times 1$ 矩阵

- 例3: $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$, $n \times 1$ 矩阵乘 $1 \times n$ 矩阵

矩阵乘法运算性质

- 结合律

$$ABC = A(BC) = (AB)C$$

- 一般没有交换律

$$AB \neq BA, \text{ 对易子 (commutator) : } [A, B] = AB - BA$$

- 左分配律

$$A(B + C) = AB + AC$$

- 右分配律

$$(A + B)C = AC + BC$$

分块矩阵(block matrix)、乘法

- 分块矩阵

- 4x6矩阵：2x3矩阵，每一个块（block）是一个2x2矩阵

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵乘法：每一个块当作矩阵的元素，块之间使用矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

矩阵乘法的四种观点



- 第一种：定义 $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$
 - AB的第i行第j列 = A的第i行 和 B的第j列的内积
 - A看成 $m \times 1$ 的分块矩阵，每一行的元素是 $1 \times n$ 的矩阵（行向量）
 - B看成 $1 \times p$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $n \times 1$ 的矩阵（列向量）

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ * & * & b_{2j} & * & * & * \\ * & * & \vdots & * & * & * \\ * & * & b_{5j} & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

A is 4 by 5
 B is 5 by 6
 AB is $(4 \times 5)(5 \times 6) = 4$ by 6

矩阵乘法的四种观点



- 第二种：A乘B的每一列
 - B看成 $1 \times p$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $n \times 1$ 的矩阵（列向量）

$$A[\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_p]$$

- 第三种：A的每一行乘B
 - A看成 $m \times 1$ 的分块矩阵，每一行的元素是 $1 \times n$ 的矩阵（行向量）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的四种观点



- 第四种：

- A看成 $1 \times n$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $m \times 1$ 的矩阵（列向量）
- B看成 $n \times 1$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $1 \times p$ 的矩阵（行向量）

$$(\tilde{\mathbf{a}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{a}}_n) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i$$

- $\tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i$ 是一个 $m \times p$ 的矩阵（列向量 \times 行向量）
- 这个观点再后面讲奇异值分解的时候很有用

小结

- 矩阵加法和数乘
- 矩阵的乘法
 - $(m \times n \text{ 的矩阵 } A) \times (n \times p \text{ 的矩阵 } B) = m \times p \text{ 的矩阵 } C$
 - $C_{ij} = (A \text{ 的第 } i \text{ 行}) \cdot (B \text{ 的第 } j \text{ 列}) = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$
- 矩阵乘法的性质
 - 结合律: $ABC = A(BC) = (AB)C$
 - 左分配律: $A(B + C) = AB + AC$
 - 右分配律: $(A + B)C = AC + BC$
- 分块矩阵

内 容 提 要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (**inverse**)
- 矩阵的转置 (**transpose**)

逆矩阵 (inverse matrix)

- 方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 满足

$$A^{-1}A = I \text{ 且 } AA^{-1} = I$$

- I 是单位矩阵，非对角元0，对角元1。 $IA = AI = A$
- 左逆=右逆
 - $BA = I, AC = I \Rightarrow B = C$

逆矩阵性质

- 如果 A 可逆，方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一的解
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$
 - 另一方面，可以把 $AA^{-1} = I$ 看成是解一系列线性方程组的问题，其中未知数就是 A^{-1} 的元素
- 如果存在非零向量 \mathbf{x} 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，则 A 不可逆
 - 证明：反证法，假设 A 可逆
 - 则存在 A^{-1} 使得 $A^{-1}A = I$
 - $A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ，同 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 矛盾
- 后面会学到更多逆矩阵是否存在的判定方法

逆矩阵性质

- 2x2矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵的逆（只有所有对角元都不为0时存在）

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵和矩阵乘法

- 假设矩阵 A 和 B 都可逆
- $A + B$ 不一定可逆
- AB 一定可逆: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 - AB 顺序反过来
 - 证明: 用结合律
 - $(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$

例：

- 消元矩阵的逆

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

奇异矩阵 (singular matrix) vs 可逆矩阵

- 奇异矩阵：不可逆的矩阵
- 后面的课程中我们将学习 $n \times n$ 方阵可逆的判定方法（秩、行列式等等）
- 例：
 - 上（下）三角阵的逆还是上（下）三角阵
- 对角占优矩阵可逆 $|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$
 - 证明：想办法证明 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 一组解

小结

- 方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 满足

$$A^{-1}A = I \text{ 且 } AA^{-1} = I$$

- 如果 A 可逆，方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一的解

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

- 如果存在非零向量 \mathbf{x} 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，则 A 不可逆

- 方阵 A 求逆等价于解一系列线性方程组 $AA^{-1} = I$

- 几个特殊矩阵的逆

- 矩阵的逆和乘法的关系

内 容 提 要

- 向量和向量的运算
- 矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 矩阵的转置 (**transpose**)

矩阵的转置 (transpose)

- 转置 A^T
- 定义: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
 - $m \times n$ 的矩阵转置后是 $n \times m$ 的矩阵
- 性质:
 - $(A + B)^T = A^T + B^T$
 - $(AB)^T = B^T A^T$
 - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 例: $A = LDU$, 则 $A^T = U^T D^T L^T$

转置、内积和外积

- x 、 y 是 n 维列向量， $x^T y$ 和 xy^T 的区别？
 - $x^T y$ 是一个数（内积）
 - $y^T x$ 是一个 $n \times n$ 矩阵（外积）
- 量子力学： $\langle x|y\rangle, |x\rangle\langle y|$
- 推广
 - $(Ax)^T y = x^T (A^T y)$

对称矩阵

- 定义: $S^T = S$, $s_{ij} = s_{ji}$
- 例: 对角矩阵总是对称矩阵
- 例: 对称乘积
 - AA^T
 - $A^T A$
 - $x^T A^T A x$

置换矩阵

- 定义：每一行和每一列只有一个1，剩余元素为0的矩阵
- 性质： $P^T = P^{-1}$
- $n \times n$ 的置换矩阵有 $n!$ 个

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} & P_{21} &= \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} & P_{32}P_{21} &= \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \\ P_{31} &= \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} & P_{32} &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} & P_{21}P_{32} &= \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

小结

- 矩阵 A 的转置 A^T ：把 A 的行作为 A^T 的列
- 性质：
 - $(A + B)^T = A^T + B^T$
 - $(AB)^T = B^T A^T$
 - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 如果把向量 x, y 看成列矩阵， $x \cdot y = x^T y$
- 对称矩阵：转置后还是自己的矩阵