

向量空间

颜文斌
清华大学

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵 A 的零空间 ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间)
- 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的完整解
- 四个子空间的维度

向量空间 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{C}^n

- \mathbb{R}^n : 所有 n 个实数分量的列向量的集合
- \mathbb{C}^n : 所有 n 个复数分量的列向量的集合

$$\begin{bmatrix} 4 \\ \pi \end{bmatrix} \text{ is in } \mathbf{R}^2, \quad (1, 1, 0, 1, 1) \text{ is in } \mathbf{R}^5, \quad \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{bmatrix} \text{ is in } \mathbf{C}^2$$

- 性质： $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ 中的元素的线性组合还属于 $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$
 - 注意：数乘时所乘的数要和向量的分量属于同一个数域

一般向量空间（线性空间）

- 定义：域 F 上的向量空间是满足以下公理的集合 V （131页）
 1. $x + y = y + x$
 2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
 3. 存在唯一的零向量 0 使得对于任意 x , $x + 0 = x$
 4. 对任意 x , 存在唯一的向量 $-x$ 使得 $x + (-x) = 0$
 5. 1 乘 x 等于 x
 6. $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$
 7. $c(x + y) = cx + cy$
 8. $(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x$
- 向量空间：（粗略的说）定义了加法和数乘的空间

向量空间

- 向量空间中的元素不一定是狭义的“向量（一系列数）”
- 例：实数上的向量空间
 - M: 所有 $m \times n$ 实矩阵构成的空间
 - F: 所有实函数 $f(x)$ 构成的空间
 - Z: 只有零向量的空间
- 维数：
 - M: mn
 - F: 无穷
 - Z: 0

子空间 (subspace)

- 定义：

线性空间 V 的子空间 V_S 是 V 的一个子集，并且满足下面两个条件：
对于属于子空间的矢量 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{w} ， 以及一个标量 c

1. $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 是 V_S 的元素

2. $c\boldsymbol{v}$ 是 V_S 的元素

- 子空间对于加法和数乘“封闭”，所有线性组合都在同一个子空间
- 所有的子空间必然包含零向量（提示： $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})$ ）

子空间判定

- 例： \mathbb{R}^3 中的子空间
 - 不过原点的平面：不是
 - 原点本身：是
 - 过原点的直线：是
 - 过原点的平面：是
 - \mathbb{R}^3 本身：是
- 直线或者平面的一部分：
 - 平面的某一象限：不是
 - 平面的第一象限和第三象限的并集：不是
- \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{w} 在子空间中，那么所有线性组合 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ 也在子空间中

子空间判定

- 2x2矩阵构成的线性空间M
 - U：所有的上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
 - D：所有的对角矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$
 - 零向量是什么？
 - 单位矩阵 I 构成子空间吗？

矩阵 A 的列空间

- 定义：

矩阵 A 的列空间 $C(A)$ 是 A 的所有列的线性组合

- 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ：

- $A\mathbf{x} \in C(A)$

- 方程是否有解 $\Leftrightarrow \mathbf{b}$ 是否属于 $C(A)$

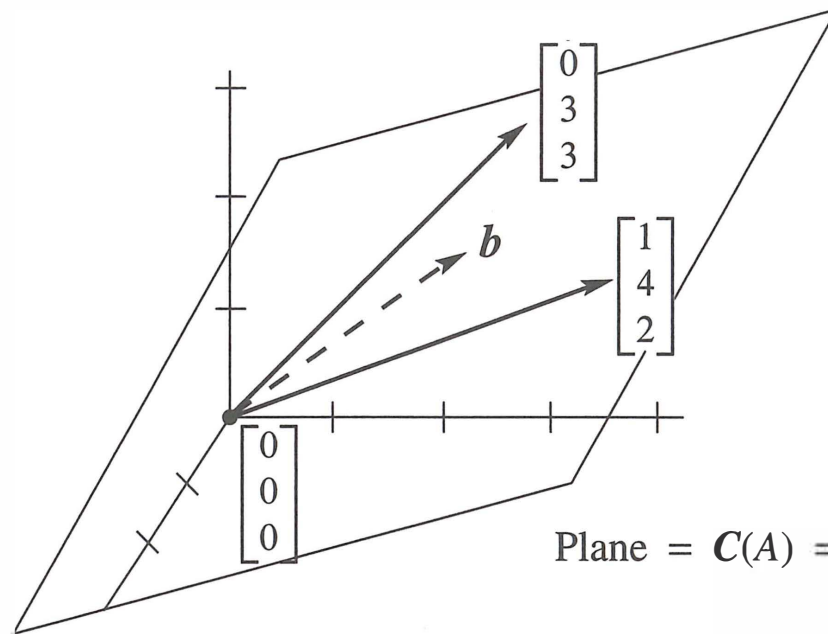
- 如果 A 是个 $m \times n$ 的矩阵： $C(A)$ 是 \mathbb{R}^m 的子空间

- 如果把 A 看成是 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的线性变换，是 $C(A)$ 是这个线性变换的像 (image)

矩阵A的列空间

• 例：

$$A\mathbf{x} \text{ is } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ which is } x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = .4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + .3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ has } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} .4 \\ .3 \end{bmatrix}$$

Plane = $C(A)$ = all vectors $A\mathbf{x}$

线性扩张 (span)

- 一般来说, 向量空间 V 的子集 S 不是子空间
- 从 S 构造出子空间?
- 线性扩张: $\text{span } S$ = 所有 S 中向量的线性组合
 - $\text{span } S$ 是 V 的子空间
 - $C(A)$ 是 A 所有列的线性扩张
- 例: 以下矩阵的列空间?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. \mathbf{R}^n contains all column vectors with n real components.
2. \mathbf{M} (2 by 2 matrices) and \mathbf{F} (functions) and \mathbf{Z} (zero vector alone) are vector spaces.
3. A subspace containing \mathbf{v} and \mathbf{w} must contain all their combinations $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.
4. The combinations of the columns of A form the *column space* $C(A)$. Then the column space is “spanned” by the columns.
5. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution exactly when \mathbf{b} is in the column space of A .

$$C(A) = \text{all combinations of the columns} = \text{all vectors } A\mathbf{x}.$$

内容提要

- 向量空间
- **线性独立、基和维度**
- 矩阵 A 的零空间 ($Ax = 0$ 的解空间)
- 方程 $Ax = \mathbf{b}$ 的完整解
- 四个子空间的维度

线性独立

- 定义：n个向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 是线性独立的，当且仅当

$$\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \text{ 只在 } x_i = 0 \text{ 时成立}$$

- 线性相关：n个向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 不是线性独立，那么他们是线性相关的
- 判定：
 - $A = (\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n)$
 - $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是否只有零解
 - 通常A是一个mxn的矩阵，需要知道一般线性方程组的解
- 等价描述： $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 是线性独立的，则集合中每一个向量都不能写集合中成其它向量的线性组合

线性独立

- 例： \mathbb{R}^2

(a) The vectors $(1, 0)$ and $(0, 1)$ are independent.

(b) The vectors $(1, 0)$ and $(1, 0.00001)$ are independent.

(c) The vectors $(1, 1)$ and $(-1, -1)$ are *dependent*.

(d) The vectors $(1, 1)$ and $(0, 0)$ are *dependent* because of the zero vector.

(e) In \mathbb{R}^2 , any three vectors (a, b) and (c, d) and (e, f) are *dependent*.

线性空间的基

- 定义：线性空间 V 的基是一组**线性无关**的向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ ，并且他们**张成**整个线性空间 V
 - 线性无关： $\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ 只在 $x_i = 0$ 时成立
 - 扩张成 V ： V 中的任何一个向量 \boldsymbol{v} 都可以写成 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的线性组合
 - $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 总是 $S\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的基
- 例：

The basis vectors $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ are independent. They span \mathbf{R}^2 .

- 推广： $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 构成 \mathbb{R}^n 中的一组基

线性空间的基

- V 中的任何一个向量 \boldsymbol{v} 都可以写成基 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的线性组合
- 假设 $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i$ ，这个线性组合是唯一的
- 证明：
 - 如果 $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i$ 且 $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n b_i \boldsymbol{v}_i$ ，则 $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \boldsymbol{v}_i$
 - 因为 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 线性独立（基的定义），则 $(a_i - b_i) = 0$

线性空间的维度

- 定义：线性空间 V 的维度 $\dim V$ 等于任意一组基中向量的个数
- 线性空间的维度和基的选取无关：
- 证明：
 - 两组基： $\{\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ 和 $\{\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n\}$ ，假设 $m > n$
 - 因为 $\{\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n\}$ 是基， $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \boldsymbol{w}_j$
 - 考虑线性组合 $\sum_{i=1}^m x_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \boldsymbol{w}_j$ ，因为 $\{\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n\}$ 是基，所以 $\sum_{i,j} x_i a_{ij} \boldsymbol{w}_j = \mathbf{0}$ 推出 $\sum_i x_i a_{ij} = 0$
 - 但是 $\sum_{i,j} x_i a_{ij} = 0$ 中未知数的个数 m 大于方程的个数 n ，所以有非零解
 - 同 $\{\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ 线性独立矛盾（ $\sum_{i=1}^m x_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ 只有零解） $\Rightarrow m$ 不能大于 n
 - 同理 m 不能小于 n 。最终 $m=n$

线性空间的维度

- 两个线性空间 V_1 和 V_2 ，如果任意 $\boldsymbol{v} \in V_1$ 可以写成 V_2 中向量的线性组合，则 $\dim V_1 \leq \dim V_2$
- 证明：
 - V_1 和 V_2 的基分别记为： $\{\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ 和 $\{\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n\}$
 - 由假设， $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \boldsymbol{w}_j$
 - 考虑线性组合 $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^m x_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \boldsymbol{w}_j$ ，因为 $\{\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n\}$ 是基，所以 $\sum_i x_i a_{ij} = 0$
 - 又因为 $\{\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_m\}$ 是基，所以 $\sum_i x_i a_{ij} = 0$ 只有0解（ $x_i = 0$ ）
 - $m \leq n$, 或者说 $\dim V_1 \leq \dim V_2$

线性空间的维度

- 例：Z
 - 维度为0，基是空集
- 例：矩阵

The dimension of the whole n by n matrix space is n^2 .

The dimension of the subspace of *upper triangular* matrices is $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

The dimension of the subspace of *diagonal* matrices is n .

The dimension of the subspace of *symmetric* matrices is $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (why?).

线性空间的维度

- 例：函数空间

$y'' = 0$ is solved by any linear function $y = cx + d$

$y'' = -y$ is solved by any combination $y = c \sin x + d \cos x$

$y'' = y$ is solved by any combination $y = ce^x + de^{-x}$.

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The columns of A are *independent* if $x = \mathbf{0}$ is the only solution to $Ax = \mathbf{0}$.
2. The vectors v_1, \dots, v_r *span* a space if their combinations fill that space.
3. *A basis consists of linearly independent vectors that span the space.* Every vector in the space is a *unique* combination of the basis vectors.
4. All bases for a space have the same number of vectors. This number of vectors in a basis is the *dimension* of the space.
5. The pivot columns are one basis for the column space. The dimension is r .

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵 A 的零空间（ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间）
- 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的完整解
- 四个子空间的维度

矩阵 A 的零空间 (Nullspace)

- 定义： $m \times n$ 矩阵 A 的零空间 $N(A)$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有解构成的空间。

- $N(A)$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间
- $C(A)$ 是 \mathbb{R}^m 的子空间

- 如果 A 是可逆的，则 $N(A) = \mathbf{Z}$ (只有零向量)

- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array}$$

- $N(A) : x_1 + 2x_2 = 0$ 定义的直线

矩阵 A 的零空间

• 例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array}$$

- $N(A) : x_1 + 2x_2 = 0$ 定义的直线
- $N(A) : \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $N(A) : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性扩张
- 想法： $N(A)$ 写成某些特殊向量（基）的线性扩张

矩阵 A 的零空间

- 考虑 $m \times n$ 的矩阵 A 且 n 大于 m
- 描述 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间
 - n 个未知数, m 个方程
 - 将 A 写成 $(B \ C)$, 其中 B 是 $m \times m$ 矩阵, C 是 $m \times (n-m)$ 矩阵
 - \mathbf{x} 写成 $(\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2)^T$, 其中 $\mathbf{y}_1 = (x_{i_1} \ \cdots \ x_{i_m})$, $\mathbf{y}_2 = (x_{i_{m+1}} \ \cdots \ x_{i_n})$
 - 原方程等价于 $B\mathbf{y}_1 = -C\mathbf{y}_2$
 - 原方程的解: \mathbf{y}_2 是自由参数, 解出 \mathbf{y}_1
- 高斯消元法

主列 (pivot column) 和自由列 (free column)

- $m \times n$ 的矩阵 A 且 n 大于 m , 描述 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间 ($N(A)$)
- 将 A 写成 $(B \quad C)$, 其中 B 是 $m \times m$ 矩阵, C 是 $m \times (n-m)$ 矩阵
- 假设 B 可逆而且 $B = L\tilde{U}$, 定义 $U = (\tilde{U} \quad L^{-1}C)$
 - \tilde{A} 和 A 有相同的零空间 $N(A) = N(U)$
 - U 对应的列叫主列, $L^{-1}C$ 对应的列叫自由列
- 假设 $PB = L\tilde{U}$, 同样可以定义 $U = (\tilde{U} \quad D)$, 且 $N(A) = N(U)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \text{ becomes } U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

pivot columns **free columns**

行缩减梯形式 (the reduced row echelon form)

- $m \times n$ 矩阵 A 做消元得到 U , U 是一个阶梯矩阵, 每一行第一个非零分量都在上一行第一个非零分量的右边
 - $N(A) = N(U)$ (证明思路: 行变换不改变解、行变换矩阵可逆)
- 从 U 继续以下操作
 - 消元, 将每个主元 (每一行的第一个非零分量) 上面的分量变成 0
 - 结果每一行除以该行的主元, 得到矩阵 R
- 矩阵 R 被叫做 A 的行缩减梯形式, $R = \text{rref}(A)$
 - $N(A) = N(U) = N(R)$
 - R 的每一行的第一个非零元素总是 1

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{becomes} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

行缩减梯形式和 $N(A)$ 的描述

Pivot Variables and Free Variables in the Echelon Matrix R

$$A = \begin{bmatrix} p & p & f & p & f \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

3 pivot columns p
2 free columns f
to be revealed by R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I in pivot columns
 F in free columns
3 pivots: rank $r = 3$

$$s_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}$$

special $Rs_1 = \mathbf{0}$ and $Rs_2 = \mathbf{0}$
take $-a$ to $-e$ from R
 $Rs = \mathbf{0}$ means $As = \mathbf{0}$

R shows clearly: $column\ 3 = a(column\ 1) + b(column\ 2)$. The same must be true for A .
The special solution s_1 repeats that combination so $(-a, -b, 1, 0, 0)$ has $Rs_1 = \mathbf{0}$.
Nullspace of $A =$ Nullspace of $R =$ all combinations of s_1 and s_2 .

问题： R 的列空间？

行缩减梯形式和 $N(A)$ 的描述

- $N(A) = N(U) = N(R)$
- R 中：包含主元的列是主列（或者说每行第一个非零分量所在的列是主列），其它的是自由列
- 主列上只有一个非零分量1，其它分量都是0
- 自由列可以写成主列的线性组合
 - 方程 $\mathbf{R}x = \mathbf{0}$ 中，主列对应的未知数可以用自由列对应的未知数表示
- $N(R)$ 可以写成一系列特解的线性扩张
 - 每一个特解对应一个自由列，该自由列对应的未知数取1，其它自由列对应的未知数取0，主列对应的未知数由 $\mathbf{R}x = \mathbf{0}$ 决定

矩阵的秩 (rank)

- 定义：矩阵 A 的秩为行空间或者列空间的维数（后面会证明行秩=列秩）
 - 等于行缩减梯形式 $R = \text{rref}(A)$ 的非零行数
 - 等于行缩减梯形式 $R = \text{rref}(A)$ 的主列数
- 例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ and } [6] \text{ all have rank 1.}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } [1] \text{ have only one pivot.}$$

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The nullspace $\mathcal{N}(A)$ is a subspace of \mathbf{R}^n . It contains all solutions to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Elimination on A produces a row reduced R with pivot columns and free columns.
3. Every free column leads to a special solution. That free variable is 1, the others are 0.
4. The *rank* r of A is the number of pivots. All pivots are 1's in $R = \text{rref}(A)$.
5. The complete solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is a combination of the $n - r$ special solutions.
6. A always has a free column if $n > m$, giving a *nonzero solution* to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵 A 的零空间 ($Ax = 0$ 的解空间)
- **方程 $Ax = b$ 的完整解**
- 四个子空间的维度

线性方程组的通解 (complete solution)

- 零空间：线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解
- 考虑线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
 - A 是 $m \times n$ 矩阵
- 通解： $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$
 - \mathbf{x}_p 是一个特解
 - \mathbf{x}_n 是 A 的零空间 $N(A)$ 的任意元素
- 方法：转化成行缩减梯形式的解

线性方程组的通解

- 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
 - A 是 $m \times n$ 矩阵
- 增广矩阵 $(A \quad \mathbf{b})$, 行缩减梯形式为 $(R \quad \mathbf{d})$
 - $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $R\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 有同样的解
 - 原因? (提示: 把消元操作换成矩阵乘法)
 - **解存在**: R 的零行对应 \mathbf{d} 的零行

$$[A \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \mathbf{b}_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \mathbf{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = [R \quad \mathbf{d}]$$

线性方程组的通解

- 增广矩阵 $(A \quad \mathbf{b})$, 行缩减梯形形式为 $(R \quad \mathbf{d})$
 - 特解: $R\mathbf{x}_p = \mathbf{d}$
 - $n - r$ 个通解: $\mathbf{x}_n \in N(A)$
- 例:

$$R\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性方程组的通解

- 例：假设 A 是一个可逆的方阵， $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解？

- $\text{rref}(A) = I, \quad N(A) = Z$

- $(A, \mathbf{b}) = (I, A^{-1}\mathbf{b})$

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p = A^{-1}\mathbf{b}$

- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{b_3 + b_1 + b_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

满列秩 (full column rank) 矩阵

- 定义：A满列秩，如果秩 r =列数 n
 - A的所有列都是主列
 - 零空间 $N(A)$ 只有零向量
 - $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 如果有解， $\mathbf{b} \in C(A)$ ，且只有一个解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

满行秩 (full row rank) 矩阵

- 定义：A满行秩，如果秩 r =行数 m
 - A的所有行都有主元，R没有零行
 - $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对于任意 \mathbf{b} 都有解
 - $C(A) = \mathbb{R}^m$
 - $n-r=n-m$ 个特殊解，张成 \mathbb{R}^n 内的一个 $n-m$ 维线性空间

线性方程组解的总结

The four possibilities for linear equations depend on the rank r

$r = m$	and	$r = n$	<i>Square and invertible</i>	$Ax = b$	has 1 solution
$r = m$	and	$r < n$	<i>Short and wide</i>	$Ax = b$	has ∞ solutions
$r < m$	and	$r = n$	<i>Tall and thin</i>	$Ax = b$	has 0 or 1 solution
$r < m$	and	$r < n$	<i>Not full rank</i>	$Ax = b$	has 0 or ∞ solutions

Four types for R	$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Their ranks	$r = m = n$	$r = m < n$	$r = n < m$	$r < m, r < n$

Cases 1 and 2 have full row rank $r = m$. Cases 1 and 3 have full column rank $r = n$.
Case 4 is the most general in theory and it is the least common in practice.

小结

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The rank r is the number of pivots. The matrix R has $m - r$ zero rows.
2. $Ax = b$ is solvable if and only if the last $m - r$ equations reduce to $0 = 0$.
3. One particular solution x_p has all free variables equal to zero.
4. The pivot variables are determined after the free variables are chosen.
5. Full column rank $r = n$ means no free variables: one solution or none.
6. Full row rank $r = m$ means one solution if $m = n$ or infinitely many if $m < n$.

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵 A 的零空间（ $Ax = 0$ 的解空间）
- 方程 $Ax = b$ 的完整解
- 四个子空间的维度

四个同矩阵 A 有关的线性子空间

- $m \times n$ 矩阵 A
 - 行空间 $C(A^T)$: 所有行向量的线性扩张, \mathbb{R}^n 的子空间
 - 列空间 $C(A)$: 所有列向量的线性扩张, \mathbb{R}^m 的子空间
 - 零空间 $N(A)$: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解构成的线性空间, \mathbb{R}^n 的子空间
 - 左零空间 (left null space) $N(A^T)$: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ 的解构成的线性空间, \mathbb{R}^m 的子空间
- 维度 (线性代数基本定理) :
 - $C(A^T)$ 和 $C(A)$ 的维度都等于 A 的秩 r (行秩=列秩)
 - $N(A)$ 的维度等于 $n-r$
 - $N(A^T)$ 的维度等于 $m-r$

行变换和列变换（矩阵的初等变换）

- 行变换：用 E_{ij} 和 P_{ij} 左乘矩阵 A

- $(E_{ij})_{ab} = \delta_{ab} - l_{ij}\delta_{ia}\delta_{jb}$
- $(P_{ij})_{ab} = \delta_{ab} - \delta_{ia}\delta_{ib} - \delta_{ja}\delta_{jb} + \delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ja}\delta_{ib}$
- $\delta_{ab} = 1$ if $a = b$, 0 if $a \neq b$, Kronecker delta
- $(E_{ij}A)_{ab} = \sum_c (E_{ij})_{ac} A_{cb} = A_{ab} - l_{ij}\delta_{ia}A_{jb}$
- $(P_{ij}A)_{ab} = \sum_c (P_{ij})_{ac} A_{cb} = A_{ab} - \delta_{ia}A_{ib} - \delta_{ja}A_{jb} + \delta_{ia}A_{jb} + \delta_{ja}A_{ib}$

- 列变换：用 E_{ij} 和 P_{ij} 右乘矩阵 A

- $(AE_{ij})_{ab} = \sum_c A_{ac} (E_{ij})_{cb} = A_{ab} - l_{ij} A_{ai}\delta_{jb}$ j列 - l_{ij} i列
- $(AP_{ij})_{ab} = \sum_c A_{ac} (P_{ij})_{cb} = A_{ab} - A_{ai}\delta_{ib} - A_{aj}\delta_{jb} + A_{ai}\delta_{jb} + A_{aj}\delta_{ib}$
交换i列和j列

行变换和子空间

- 假设 E 是一系列行变换对应的矩阵, E 可逆
- A 和 EA 有相同的零空间
 - $N(A) = N(EA)$
 - 证明思路: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解是 $EA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 反之也成立
- A 和 EA 列空间的维度相同 (列空间不一定一样!!!)
 - $\dim C(A) = \dim C(EA)$
 - 证明思路: 将 $A\mathbf{x}$ 或者 $EA\mathbf{x}$ 理解成各自列向量的线性组合, 则 A 和 EA 的相同列的线性组合总是同时为 $\mathbf{0}$ 或者不为 $\mathbf{0}$ 。然后假设 $\{\mathbf{v}_i\}$ 是 $C(A)$ 的一组基, 证明 $\{E\mathbf{v}_i\}$ 是 $C(EA)$ 的一组基。

列变换和子空间

- 假设 E 是一系列列变换对应的矩阵, E 可逆
- A 和 AE 有相同的零空间维度
 - $\dim N(A) = \dim N(AE)$
 - 证明思路: \mathbf{x} 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 那么 $E^{-1}\mathbf{x}$ 就是 $AE\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 两个空间 $N(A)$, $N(AE)$ 的基有一一对应
- A 和 AE 有相同的列空间
 - $C(A) = C(AE)$
 - 证明思路: AE 的每一列显然是 A 的列向量的线性组合, 又因为 $A = (AE)E^{-1}$, A 的每一列也是 AE 的列向量的线性组合

矩阵 A 的子空间在初等变换下的性质

- 矩阵 A 在初等变换下
 - 列空间 $C(A)$ 的维度不变
 - 零空间 $N(A)$ 的维度不变
- 行变换下
 - 零空间 $N(A)$ 不变
- 列变换下
 - 列空间 $C(A)$ 不变
- 矩阵 A^T 的子空间在初等变换下如何？

矩阵和初等变换

- 矩阵 A 可以通过行变换+每一行除以主元变成阶梯形式 $R = \text{rref}(A)$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- R 可以通过列变换变成矩阵 \tilde{I}

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于矩阵 \tilde{I} ：行秩 $(\dim C(\tilde{I}^T)) =$ 列秩 $(\dim C(\tilde{I})) = r$,
 $\dim C(\tilde{I}) + \dim N(\tilde{I}) = n$, $\dim C(\tilde{I}^T) + \dim N(\tilde{I}^T) = m$

矩阵和初等变换

- 矩阵 A 可以通过行变换+每一行除以主元+列变换变成矩阵 \tilde{I}

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于矩阵 \tilde{I} ：行秩 ($\dim C(\tilde{I}^T)$) = 列秩 ($\dim C(\tilde{I})$) = r ,
 $\dim C(\tilde{I}) + \dim N(\tilde{I}) = n$, $\dim C(\tilde{I}^T) + \dim N(\tilde{I}^T) = m$

- 以上的这些量在初等变化下都不变，所以：

- **线性代数基本定理：**

$$\text{行秩 (} \dim C(A^T) \text{) } = \text{列秩 (} \dim C(A) \text{) } = r, \quad \dim C(A) + \dim N(A) = n, \quad \dim C(A^T) + \dim N(A^T) = m$$

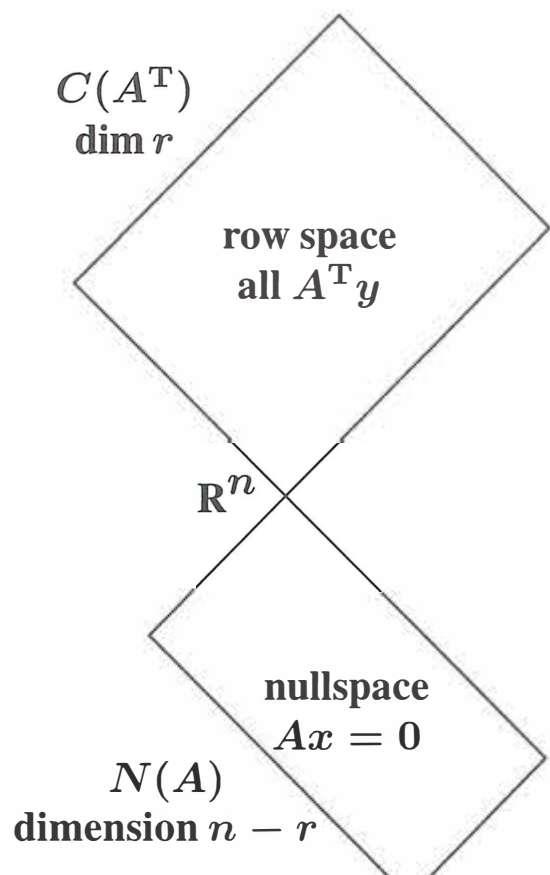
线性代数基本定理

- 行秩=列秩

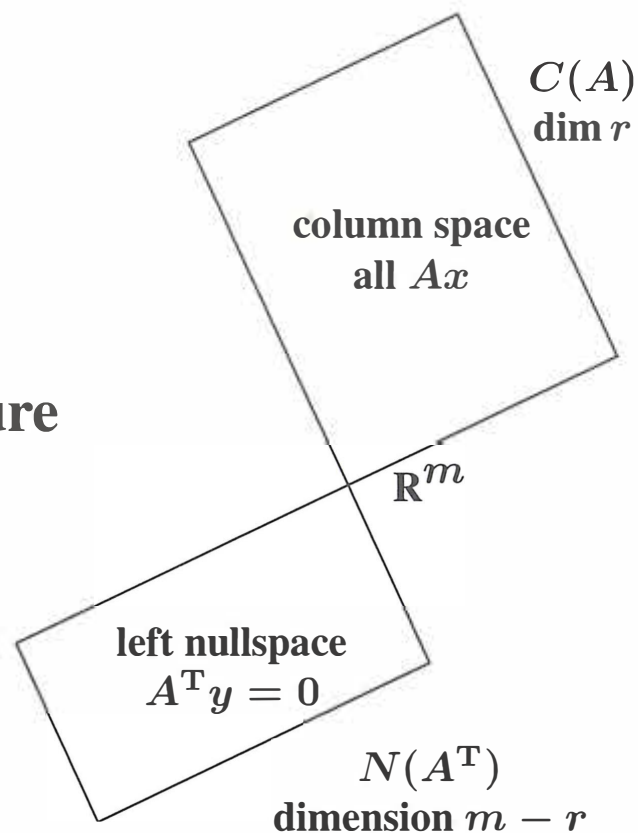
$$\dim C(A^T) = \dim C(A) = r$$

- $\dim C(A) + \dim N(A) = r + \dim N(A) = n$
- $\dim C(A^T) + \dim N(A^T) = r + \dim N(A^T) = m$

矩阵的四个子空间



The big picture



小结：

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The r pivot rows of R are a basis for the row spaces of R and A (same space).
2. The r pivot columns of A (!) are a basis for its column space $C(A)$.
3. The $n - r$ special solutions are a basis for the nullspaces of A and R (same space).
4. If $EA = R$, the last $m - r$ rows of E are a basis for the left nullspace of A .