

# 线性方程组

# 向量和矩阵

- 标量 (scalar,  $1 \times 1$ ) :  $c$ , 实数

- 向量 (矢量, vector) :

- 列向量 (column vector,  $m \times 1$ ) :  $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

- 行向量 (row vector,  $1 \times n$ ) :  $\boldsymbol{v} = (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$

- 矩阵 (matrix,  $m \times n$ ) :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

- $A_{ij}$ : 矩阵  $A$  第  $i$  行第  $j$  列的元素。 $m=n$ : 方阵

应用：矩阵力学

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (elimination) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (transpose)

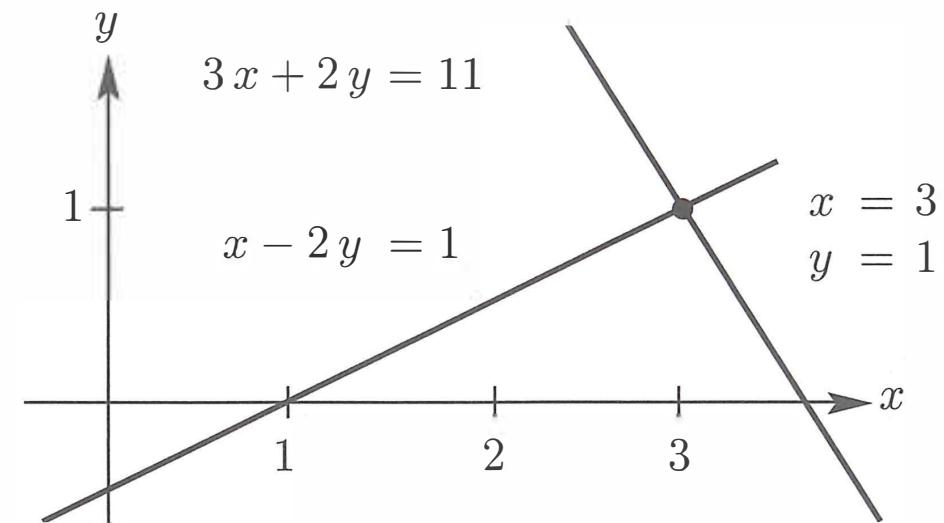
# 线性方程组：二元

- 线性方程：
  - 未知数最高次数是1的方程
- 矩阵形式： $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
- 行观点：点乘
  - 几何问题转化为代数问题

$$(1 \quad -2) \cdot (x \quad y) = x - 2y = 1$$

$$(3 \quad 2) \cdot (x \quad y) = 3x + 2y = 11$$

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 11 \end{array}$$



# 线性方程组：二元

- 线性方程：
  - 未知数最高次数是1的方程
- 矩阵形式： $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
- 列观点：线性组合

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}y = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 11 \end{array}$$

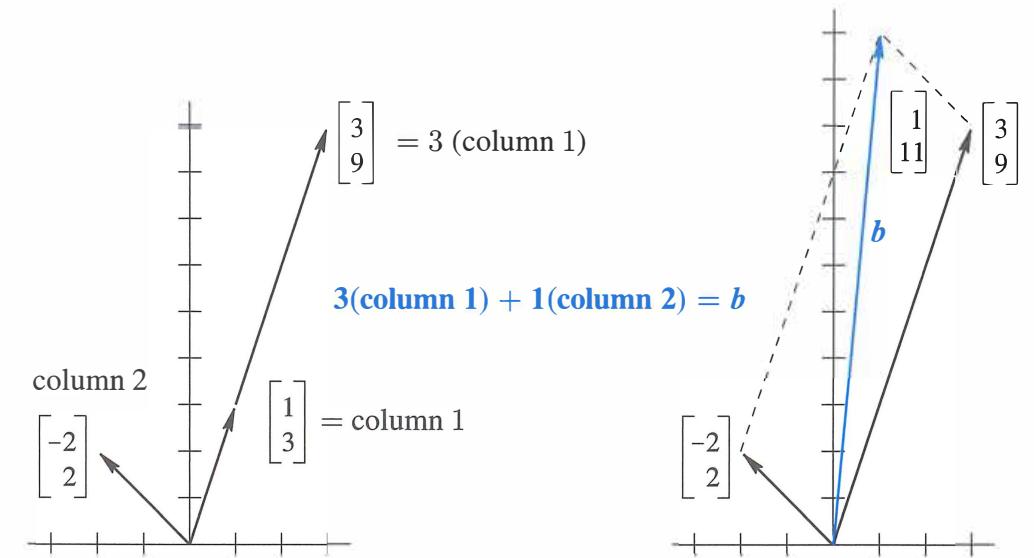


Figure 2.2: Column picture: A combination of columns produces the right side (1, 11).

# 线性方程组：三元

- 三元线性方程：

- 矩阵形式： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 行观点：点乘

$$(1 \ 2 \ 3) \cdot (x \ y \ z) = 6$$

$$(2 \ 5 \ 2) \cdot (x \ y \ z) = 4$$

$$(6 \ -3 \ 1) \cdot (x \ y \ z) = 2$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 6 \\ 2x + 5y + 2z & = & 4 \\ 6x - 3y + z & = & 2 \end{array}$$

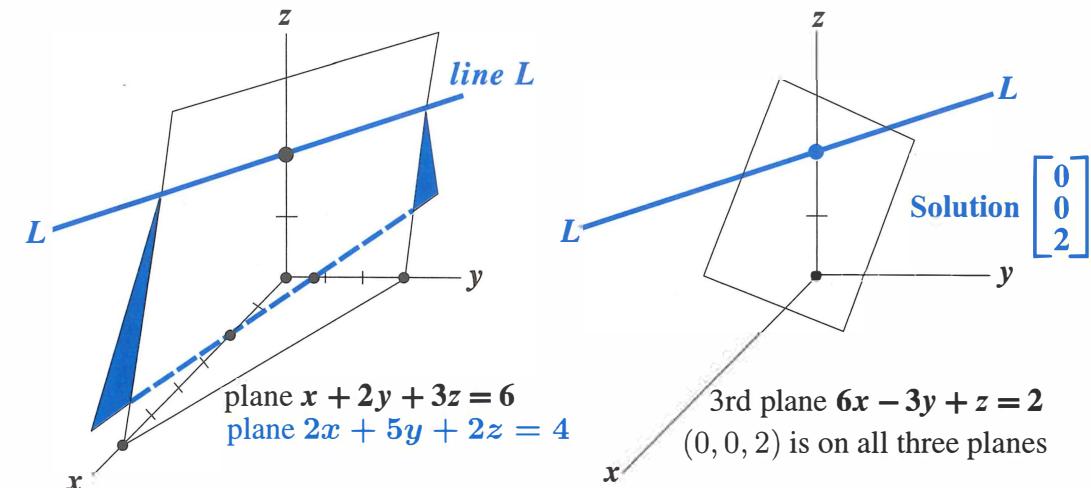


Figure 2.3: Row picture: Two planes meet at a line  $L$ . Three planes meet at a point.

# 线性方程组：三元

- 三元线性方程：

$$x + 2y + 3z = 6$$

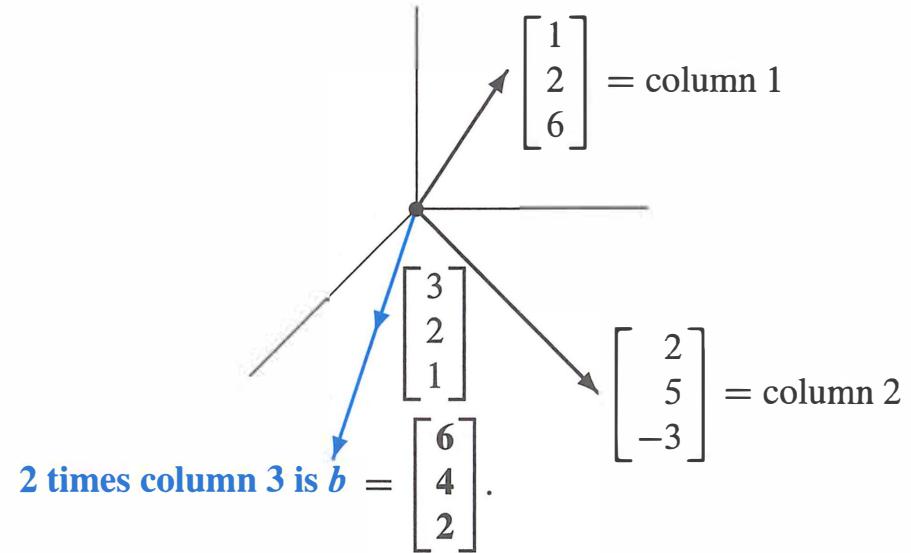
- 矩阵形式：
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x + 5y + 2z = 4$$

$$6x - 3y + z = 2$$

- 列观点：线性组合

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}y + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}z = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



# 一般线性方程组

- 考虑  $n$  个  $n$  元线性方程构成的方程组：

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- 把系数写成系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

- 那么线性方程组也可以写成矩阵和向量的作用（乘法）

$$Ax = \mathbf{b}$$

# 一般线性方程组：行观点

- 线性方程组  $Ax = b$
- 矩阵写成  $n$  个行向量： $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 点乘： $a_i \cdot x = b_i, \quad i = 1, \dots, n$

图请  
自行  
脑补

- 每一个方程代表  $n$  维空间中的一个超平面（hyper-plane）
- $n$  个方程： $n$  个超平面相交

# 一般线性方程组：列观点

- 线性方程组  $Ax = b$
- 矩阵写成n个列向量：  $A = (\tilde{a}_1 \quad \cdots \quad \tilde{a}_n)$
- n维向量的线性组合：

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i x_i = b$$

图请  
自行  
脑补

几何问题转化为代数问题  $\rightarrow$  方程的问题转化为矩阵问题  
矩阵性质  $\rightarrow$  方程的性质

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The basic operations on vectors are multiplication  $c\mathbf{v}$  and vector addition  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ .
2. Together those operations give *linear combinations*  $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ .
3. Matrix-vector multiplication  $A\mathbf{x}$  can be computed by dot products, a row at a time.  
But  $A\mathbf{x}$  must be understood as a *combination of the columns of A*.
4. Column picture:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  asks for a combination of columns to produce  $\mathbf{b}$ .
5. Row picture: Each equation in  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  gives a line ( $n = 2$ ) or a plane ( $n = 3$ ) or a “hyperplane” ( $n > 3$ ). They intersect at the solution or solutions, if any.

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (**elimination**) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (**inverse**)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (**transpose**)

# 消元法解线性方程组

- 2元线性方程组

Before	$x - 2y = 1$ $3x + 2y = 11$	After	$x - 2y = 1$ $\cancel{8y} = 8$	<i>(multiply equation 1 by 3)</i> <i>(subtract to eliminate <math>3x</math>)</i>
--------	--------------------------------	-------	-----------------------------------	---

- 消元法：得到一个上三角方程组

- 在第二个方程中消去 $x$ ：从第二个方程减去第一个方程乘一个系数（例子中为3）
- 消元后第二个方程解出 $y = 1$ , 代回到第一个方程得到 $x = 3$

# 消元法解线性方程组

- 2元线性方程组

Before	$x - 2y = 1$ $3x + 2y = 11$	After	$x - 2y = 1$ $8y = 8$	<i>(multiply equation 1 by 3)</i> <i>(subtract to eliminate <math>3x</math>)</i>
--------	--------------------------------	-------	--------------------------	---

- 几何图像：消元将第二条直线围绕着交点转至水平方向（降维）

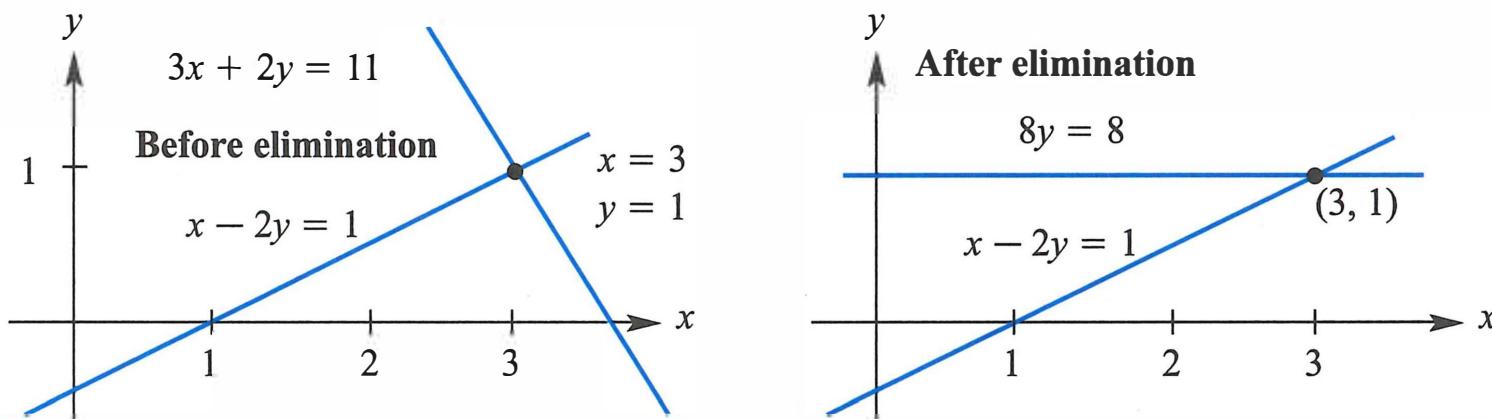


Figure 2.5: Eliminating  $x$  makes the second line horizontal. Then  $8y = 8$  gives  $y = 1$ .

# 消元法解线性方程组

主元 (pivot)



$$4x - 8y = 4$$



$$3x + 2y = 11$$

被消变量的系数

$$\text{乘子 } l_{ij} = \frac{\text{第 } i \text{ 行被消变量的系数}}{\text{第 } j \text{ 行的主元}}$$

方程2 - 乘子  $l_{21}$  × 方程1

$$l_{21} = \frac{3}{4}$$

# 消元法解线性方程组

- 主元：消元法得到上三角方程之后对角线系数
- 例：主元为1和8（两个）

Before	$x - 2y = 1$ $3x + 2y = 11$	After	$x - 2y = 1$ $8y = 8$	<i>(multiply equation 1 by 3)</i> <i>(subtract to eliminate 3x)</i>
--------	--------------------------------	-------	--------------------------	--

- 例：主元为 $a_{11}$ 至 $a_{nn}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# 消元法失效

- 2元线性方程组：两条直线求交点、两个向量的线性组合= $\mathbf{b}$
- 例1：

$$x - 2y = 1$$

$$3x - 6y = 11$$

$$\begin{aligned}x - 2y &= 1 \\0y &= 8.\end{aligned}$$

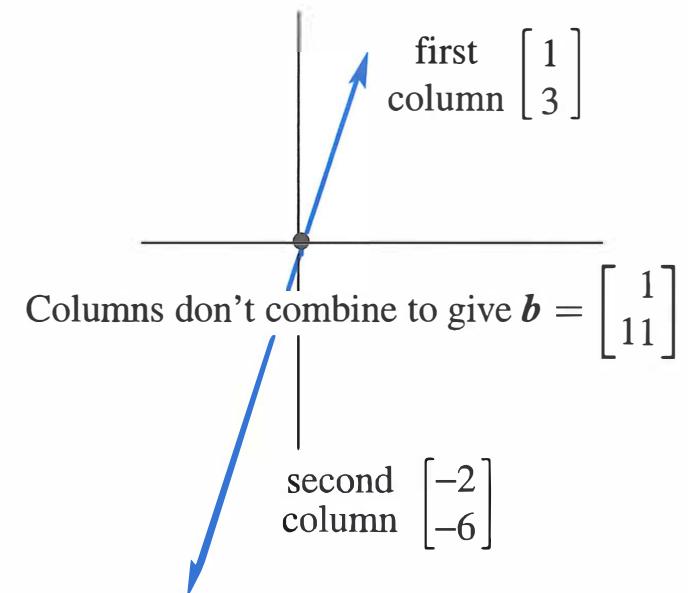
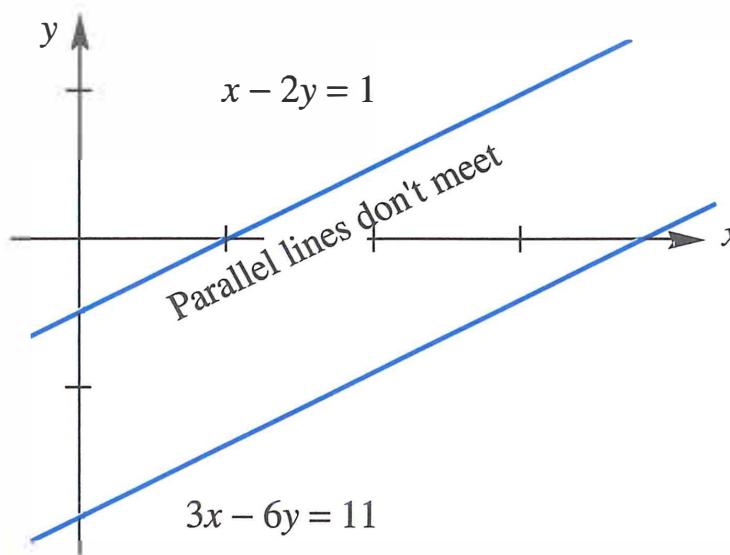


Figure 2.6: Row picture and column picture for Example 1: *no solution*.

只有一个主元 (0不是主元)

# 消元法失效

- 2元线性方程组：两条直线求交点、两个向量的线性组合=  $\mathbf{b}$
- 例2：

$$x - 2y = 1$$

$$3x - 6y = 3$$

$$x - 2y = 1$$

$$0y = 0.$$

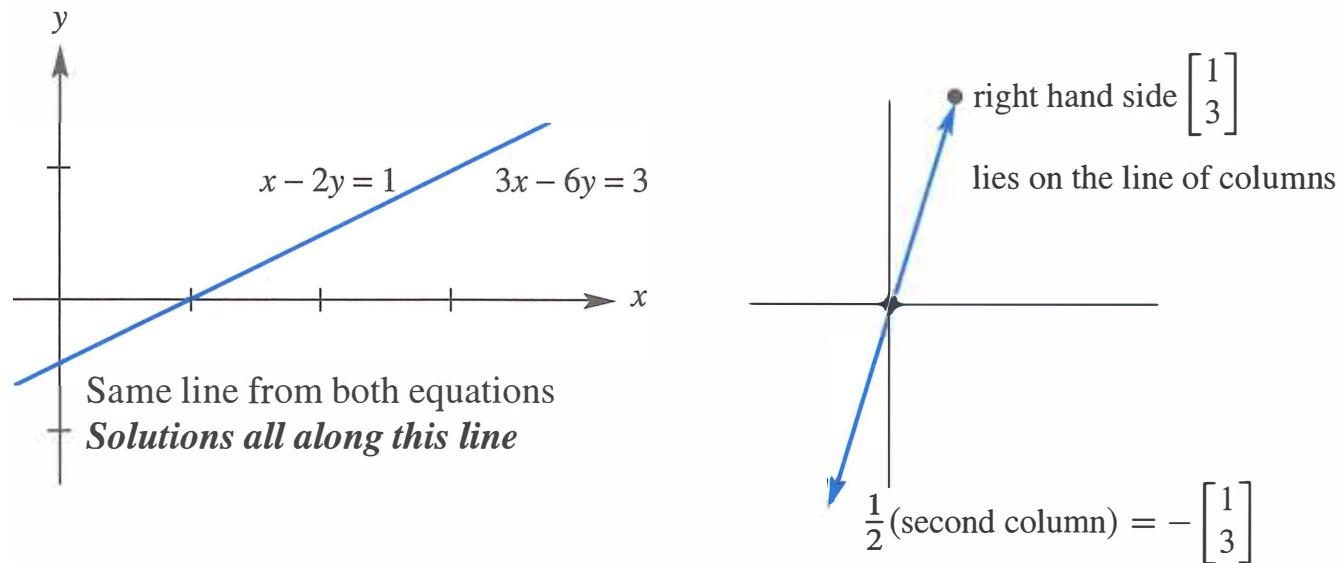


Figure 2.7: Row and column pictures for Example 2: *infinitely many solutions.*

只有一个主元 (0不是主元)

# 消元法失效

- 失效条件： $n$ 个未知数，主元数目少于 $n$ 
  - 消元法得到 $0 \neq 0$ : 没有解

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 11 \end{array}$$

Subtract 3 times  
eqn. 1 from eqn. 2

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 0y = 8. \end{array}$$

- 消元法得到 $0 = 0$ : 无穷多解

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{array}$$

Subtract 3 times  
eqn. 1 from eqn. 2

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 0y = 0. \end{array}$$

# 消元法“失效”

- 有些时候主元看上去是0，但其实交换一下方程就可以恢复
- 例：

$$0x + 2y = 4$$

$$3x - 2y = 5$$

$$3x - 2y = 5$$

$$2y = 4.$$

# 消元法

- n元线性方程组求解

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- 算法：

1. 找到第1个 $x_1$ 系数不为0的方程并移到最上面。 $x_1$ 的系数就是第一个主元
2. 从第2个到第n个方程中消去 $x_1$ （方程 $i - l_{i1} \times$ 方程1）
3. 得到第2个到第n个方程构成n-1元的线性方程组，重复步骤1。
4. 最后结果要么是一个上三角方程组，要么失效（主元数目小于未知数）
5. 上三角的情况，从最后一个方程开始解出全部未知数

- 递归。操作：对换、倍加（某一行乘系数加到另一行）

## 例：三元线性方程组

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ x + 2y + 2z & = & 9 \rightarrow . \\ x + 2y + 3z & = & 10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ y + z & = & 3 \rightarrow . \\ y + 2z & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ y + z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. A linear system ( $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ) becomes **upper triangular** ( $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ) after elimination.
2. We **subtract**  $\ell_{ij}$  times equation  $j$  from equation  $i$ , to make the  $(i, j)$  entry zero.
3. The **multiplier** is  $\ell_{ij} = \frac{\text{entry to eliminate in row } i}{\text{pivot in row } j}$ . **Pivots** can not be zero!
4. When zero is in the pivot position, **exchange rows** if there is a nonzero below it.
5. The upper triangular  $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$  is solved by **back substitution** (starting at the bottom).
6. When **breakdown** is permanent,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  has no solution or infinitely many.

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (elimination) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (transpose)

# 消元法操作

- 对换（交换两行）、倍加（某一行乘系数加到另一行）

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- 从第二行中消去未知数 $x_1$ , 主元2,  $l_{21} = 2$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

- 倍加:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

- 作用在方程左边?

# 消元矩阵

$$\bullet E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bullet E \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} x_3 \right] = E \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$$= E \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 + E \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + E \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} x_3 \text{ 为什么等号成立?}$$

$$= (E\mathbf{a}_1 \quad E\mathbf{a}_2 \quad E\mathbf{a}_3)\mathbf{x}, \mathbf{a}_i \text{ 是系数矩阵 } A \text{ 的列}$$

# 矩阵乘法

$$EAx = E(Ax) = (EA)x$$

$$EA = (E\mathbf{a}_1 \quad E\mathbf{a}_2 \quad E\mathbf{a}_3)$$

• 行观点?

$$E \begin{pmatrix} (2 & 4 & -2) \cdot (x_1 & x_2 & x_3) \\ (4 & 9 & -3) \cdot (x_1 & x_2 & x_3) \\ (-2 & -3 & 7) \cdot (x_1 & x_2 & x_3) \end{pmatrix}$$

# 消元法操作

- 对换（交换两行）、倍加（某一行乘系数加到另一行）

- 置换矩阵:  $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

- 一般的 $n \times n$ 的置换i和j行的矩阵怎么写?

# 增广矩阵 (augmented matrix)

- 方程中：置换和倍加同时作用在系数矩阵 $A$ 和 $\mathbf{b}$ 上
- 把 $A$ 和 $\mathbf{b}$ 写在一起构成增广矩阵( $A \ \mathbf{b}$ )
  - $n$ 行， $n+1$ 列的矩阵
- $E$ 和 $P$ 作用在增广矩阵上（乘法），分别作用在 $A$ ， $\mathbf{b}$ 上
  - $E(A \ \mathbf{b}) = (EA \ Eb)$
  - $P(A \ \mathbf{b}) = (PA \ Pb)$
- 矩阵乘法并不需要两个矩阵相同
  - 第一个的列数=第二个行数

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1.  $A\mathbf{x} = x_1$  times column 1 +  $\cdots$  +  $x_n$  times column  $n$ . And  $(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ .
2. Identity matrix =  $I$ , elimination matrix =  $E_{ij}$  using  $\ell_{ij}$ , exchange matrix =  $P_{ij}$ .
3. Multiplying  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  by  $E_{21}$  subtracts a multiple  $\ell_{21}$  of equation 1 from equation 2.  
The number  $-\ell_{21}$  is the (2, 1) entry of the elimination matrix  $E_{21}$ .
4. For the augmented matrix  $[ A \ b ]$ , that elimination step gives  $[ E_{21}A \ E_{21}\mathbf{b} ]$ .
5. When  $A$  multiplies any matrix  $B$ , it multiplies each column of  $B$  separately.

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (elimination) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (transpose)

# 矩阵加法和数乘

- 矩阵加法:  $m \times n$  的矩阵  $A$  和  $B$

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

- 各个分量分别相加, 只有同样大小的矩阵可以相加

- 矩阵数乘:  $(cA)_{ij} = cA_{ij}$

- 每个分量分别乘  $c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

and  $2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 运算规律

- 交换律、结合律、分配律

- 同向量的运算规律相同 (线性空间)

# 矩阵加法和数乘的性质

- 交换律:  $A + B = B + A$
- 分配律:  $c(A + B) = cB + cA$
- 结合律:  $(c + d)A = cA + dA$
- 结合律:  $A + (B + C) = (A + B) + C$

# 矩阵乘法

- $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$
- $C_{ij} = (\text{A的第i行}) \cdot (\text{B的第j列}) = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$ 
  - $AB$  相乘,  $A$ 的列数= $B$ 的行数
  - $AB$  相乘,  $A$ 的列数= $B$ 的行数
  - $AB$  相乘,  $A$ 的列数= $B$ 的行数

$$\begin{bmatrix} * & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ * & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix}$$

$A$  is 4 by 5

$B$  is 5 by 6

$AB$  is  $(4 \times 5)(5 \times 6) = 4$  by 6

# 矩阵乘法

- 例1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 矩阵乘法一般不是可交换的

- 例2: 内积

- $(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , 1x $n$ 矩阵乘 $n \times 1$ 矩阵

- 例3:  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$ ,  $n \times 1$ 矩阵乘 $1 \times n$ 矩阵

# 矩阵乘法运算性质

- 结合律

$$ABC = A(BC) = (AB)C$$

- 没有交换律

$$AB \neq BA, \text{ 对易子 (commutator) : } [A, B] = AB - BA$$

- 左分配律

$$A(B + C) = AB + AC$$

- 右分配律

$$(A + B)C = AC + BC$$

# 分块矩阵(block matrix)及其乘法

- 分块矩阵
  - $4 \times 6$  矩阵:  $2 \times 3$  矩阵, 每一个块 (block) 是一个  $2 \times 2$  矩阵

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵乘法: 每一个块当作矩阵的元素, 块之间使用矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}.$$

# 矩阵乘法的四种理解（茴字的四种写法）

芳 囧 茴 茴 南

- 第一种：定义 $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$ 
  - $AB$ 的第*i*行第*j*列 =  $A$ 的第*i*行和 $B$ 的第*j*列的内积
  - $A$ 看成 $m \times 1$ 的分块矩阵，每一行的元素是 $1 \times n$ 的矩阵（行向量）
  - $B$ 看成 $1 \times p$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $n \times 1$ 的矩阵（列向量）

$$\begin{bmatrix} * & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ * & & & & \\ * & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ b_{2j} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ b_{5j} & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ * & & & * & & \\ * & & & & * & \\ * & & & & & * \end{bmatrix}$$

$A$  is 4 by 5

$B$  is 5 by 6

$AB$  is  $(4 \times 5)(5 \times 6) = 4$  by 6

# 矩阵乘法的四种理解（茴字的四种写法）

芳 囡 茴 茼 南

- 第二种：A乘B的每一列

- B看成 $1 \times p$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $n \times 1$ 的矩阵（列向量）

$$A [ b_1 \cdots b_p ] = [ Ab_1 \cdots Ab_p ].$$

- 第三种：A的每一行乘B

- A看成 $m \times 1$ 的分块矩阵，每一行的元素是 $1 \times n$ 的矩阵（行向量）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{pmatrix}$$

# 矩阵乘法的四种理解（茴字的四种写法）

芳 囡 茴 茼 南

- 第四种：

- A看成 $1 \times n$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $m \times 1$ 的矩阵（列向量）
- B看成 $n \times 1$ 的分块矩阵，每一列的元素是 $1 \times p$ 的矩阵（行向量）

$$(\tilde{a}_1 \quad \cdots \quad \tilde{a}_n) \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \tilde{b}_i$$

- $\tilde{a}_i \tilde{b}_i$ 是一个 $m \times p$ 的矩阵（列向量 $\times$ 行向量）

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The  $(i, j)$  entry of  $AB$  is (row  $i$  of  $A$ )  $\cdot$  (column  $j$  of  $B$ ).
2. An  $m$  by  $n$  matrix times an  $n$  by  $p$  matrix uses  $mnp$  separate multiplications.
3.  $A$  times  $BC$  equals  $AB$  times  $C$  (surprisingly important).
4.  $AB$  is also the sum of these  $n$  matrices : (column  $j$  of  $A$ ) times (row  $j$  of  $B$ ).
5. Block multiplication is allowed when the block shapes match correctly.
6. Block elimination produces the *Schur complement*  $D - CA^{-1}B$ .

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (elimination) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (transpose)

# 逆矩阵 (inverse matrix)

- 方阵 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$ 满足

$$A^{-1}A = I \text{ 且 } AA^{-1} = I$$

- $I$ 是单位矩阵，非对角元0，对角元1。 $IA = AI = A$
- 逆矩阵存在的判定：
  - $n \times n$  方阵 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$  存在当且仅当有 $n$ 个主元
  - 还有更多其它的判定方法
- 左逆=右逆
  - $BA = I, AC = I \Rightarrow A = B$

# 逆矩阵 (inverse matrix)

- 如果  $A$  可逆，方程组  $Ax = b$  有唯一的解

$$b = A^{-1}x$$

- 如果存在非零向量  $x$  使得  $Ax = 0$ ，则  $A$  不可逆

- 2x2 矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵的逆（只有所有对角元都不为0时存在）

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}$$

# 逆矩阵和矩阵乘法

- 假设矩阵 $A$ 和 $B$ 都可逆
- $A + B$ 不一定可逆
- $AB$ 一定可逆:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 
  - $AB$ 顺序反过来
  - 证明: 用结合律
  - $(A_1 A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$

例：

- 消元矩阵的逆

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$FE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$E^{-1}F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

# 高斯-若当消元法 (Gauss-Jordan elimination)

- 把  $AA^{-1} = I$  看成线性方程组

$$A(x_1 \ \cdots \ x_n) = (e_1 \ \cdots \ e_n) = I$$
$$e_i = (0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0)$$

•  
↑  
第i位

- 可以用消元法解  $x_1, \dots, x_n$
- 对增广矩阵  $(K \ I) = (K \ e_1 \ \cdots \ e_n)$  做消元操作

# 高斯-若当消元法

- 例：所有主元的乘积=行列式，矩阵可逆 $\Leftrightarrow$  行列式不为0

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

# 高斯-若当消元法

- 例：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 奇异矩阵 (singular matrix) vs 可逆矩阵

- 奇异矩阵：不可逆的矩阵
- $n \times n$  方阵可逆当且仅当存在  $n$  个主元
  - 证明（参加 88 页）
- 例：
  - 上（下）三角阵的逆还是上（下）三角阵（主元/行列式=?）
  - 对角占优矩阵可逆  $|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$
  - 证明：想办法证明  $Ax = \mathbf{0}$  只有  $x = \mathbf{0}$  一组解

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The inverse matrix gives  $AA^{-1} = I$  and  $A^{-1}A = I$ .
2.  $A$  is invertible if and only if it has  $n$  pivots (row exchanges allowed).
3. *Important.* If  $Ax = \mathbf{0}$  for a nonzero vector  $x$ , then  $A$  has no inverse.
4. The inverse of  $AB$  is the reverse product  $B^{-1}A^{-1}$ . And  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ .
5. The Gauss-Jordan method solves  $AA^{-1} = I$  to find the  $n$  columns of  $A^{-1}$ .  
The augmented matrix  $[ A \ I ]$  is row-reduced to  $[ I \ A^{-1} ]$ .
6. Diagonally dominant matrices are invertible. Each  $|a_{ii}|$  dominates its row.

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (elimination) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (transpose)

# 消元法和LU分解

- 消元矩阵和其逆：单个消元矩阵和逆矩阵都是下三角的

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 消元法：将矩阵变换为上三角，消元过程可以用矩阵乘法实现

$$E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

# LU分解

- 假如一个矩阵在消元过程中没有对换操作

$$E_{n,n-1} \cdots E_{ij} \cdots E_{21} A = U$$

- $E_{n,n-1} \cdots E_{ij} \cdots E_{21}$  代表一系列消元矩阵的乘积

- 左右两边左乘  $E_{n,n-1} \cdots E_{ij} \cdots E_{21}$  的逆

$$A = E_{21}^{-1} \cdots E_{ij}^{-1} \cdots E_{n,n-1}^{-1} U$$

- 每一个  $E_{ij}^{-1}$  都是下三角的，所以  $L = E_{21}^{-1} \cdots E_{ij}^{-1} \cdots E_{n,n-1}^{-1}$  下三角的

$$A = LU$$

# LU分解

- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = LU.$$

# LDU分解

- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = LU.$$

- U的对角元不为一，可以继续分解  $U = D\tilde{U}$ ,  $A = LD\tilde{U}$

Split  $U$  into

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \cdot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. Gaussian elimination (with no row exchanges) factors  $A$  into  $L$  times  $U$ .
2. The lower triangular  $L$  contains the numbers  $\ell_{ij}$  that multiply pivot rows, going from  $A$  to  $U$ . The product  $LU$  adds those rows back to recover  $A$ .
3. On the right side we solve  $L\mathbf{c} = \mathbf{b}$  (forward) and  $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$  (backward).
4. **Factor** : There are  $\frac{1}{3}(n^3 - n)$  multiplications and subtractions on the left side.
5. **Solve** : There are  $n^2$  multiplications and subtractions on the right side.
6. For a band matrix, change  $\frac{1}{3} n^3$  to  $n w^2$  and change  $n^2$  to  $2wn$ .

# 内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法 (elimination) 解线性方程
- 消元法和矩阵
- 矩阵的运算
- 矩阵的逆 (inverse)
- 消元法和LU分解
- 矩阵的转置 (**transpose**)

# 矩阵的转置 (transpose)

- 转置  $A^T$
- 定义:  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ 
  - $m \times n$  的矩阵转置后是  $n \times m$  的矩阵
- 性质:
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 例:  $A = LDU$ , 则  $A^T = U^T D^T L^T$ ,  $D = D^T$

# 转置、内积和外积

- $x, y$  是  $n$  维列向量， $x^T y$  和  $xy^T$  的区别？
  - $x^T y$  是一个数（内积）
  - $y^T x$  是一个  $n \times n$  矩阵（外积）
- 量子力学： $\langle x | y \rangle, |x\rangle\langle y|$
- 推广
  - $(Ax)^T y = x^T (A^T y)$

# 对称矩阵

- 定义:  $S^T = S$ ,  $s_{ij} = s_{ji}$
- 例: 对角矩阵总是对称矩阵
- 例: 对称乘积
  - $AA^T$
  - $A^TA$
  - $x^T A^T A x$

# 置换矩阵

- 定义：每一行和每一列只有一个1，剩余元素为0的矩阵
- 性质： $P^T = P^{-1}$
- $n \times n$  的置换矩阵有  $n!$  个

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{32}P_{21} = \begin{bmatrix} & 1 \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

$$P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{21}P_{32} = \begin{bmatrix} & 1 \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

# 小结

## ■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The transpose puts the rows of  $A$  into the columns of  $A^T$ . Then  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ .
2. The transpose of  $AB$  is  $B^T A^T$ . The transpose of  $A^{-1}$  is the inverse of  $A^T$ .
3. The dot product is  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ . Then  $(A\mathbf{x})^T \mathbf{y}$  equals the dot product  $\mathbf{x}^T (A^T \mathbf{y})$ .
4. When  $S$  is symmetric ( $S^T = S$ ), its  $LDU$  factorization is symmetric:  $S = LDL^T$ .
5. A permutation matrix  $P$  has a 1 in each row and column, and  $P^T = P^{-1}$ .
6. There are  $n!$  permutation matrices of size  $n$ . *Half even, half odd.*
7. If  $A$  is invertible then a permutation  $P$  will reorder its rows for  $PA = LU$ .

# 本章重点：矩阵乘法

- $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$
- $C_{ij} = (\text{A的第i行}) \cdot (\text{B的第j列}) = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$
- 性质
  - 结合律:  $ABC = A(BC) = (AB)C$
  - 没有交换律:  $AB \neq BA$
  - 左分配律:  $A(B + C) = AB + AC$
  - 右分配律:  $(A + B)C = AC + BC$
- 逆矩阵: 定义、判定、高斯-若当消元法求逆矩阵