プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

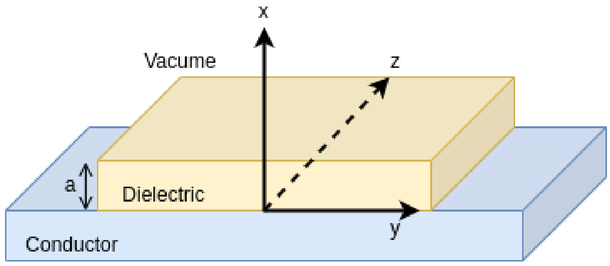

図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \tag{1}$$
$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \tag{4}$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{B} \\
\nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
-\nabla^2\mathbb{E} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E}
\end{aligned}$$
$$\nabla^2\mathbb{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} = 0 \tag{5}$$

(2) の両辺で回転を取ると

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbb{B}) &= \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbb{E}\\ \nabla(\nabla\cdot\mathbb{B})-\nabla^2\mathbb{B} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{B}\\ \nabla^2\mathbb{B}-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{B} &= 0 \qquad (6)\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$ とすると式 (5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbb{E}+\omega^2\mu\epsilon\mathbb{E} &= 0\\ \nabla^2\mathbb{B}+\omega^2\mu\epsilon\mathbb{B} &= 0\end{aligned}$$

TM モードより $E_z\neq 0, H_z=0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_y+\omega^2\mu\epsilon H_y=0$$

z 方向伝搬より

$$H_y\propto e^{-\gamma z}=e^{-(\alpha+j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha=0$ なので

$$H_y\propto e^{-j\beta z}$$

したがって、$\frac{\partial}{\partial z}=-j\beta$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta^2\right)H_y+\omega^2\mu\epsilon H_y=0$$

また、y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y}=0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta^2\right)H_y+\omega^2\mu\epsilon H_y=0$$

$k^2=-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon$ とおくと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)H_y=0$$

したがって、誘電体中の H_y の一般解は

$$H_y=A\sin kx+B\cos kx \qquad (A,B:const)$$

式 (1) より

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu A \sin kx + \mu B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\ 0 \\ \mu k A \cos kx - \mu k B \sin kx \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
&= -j\omega\mu\epsilon\mathbb{E}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-j\omega\mu\epsilon E_x &= j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\
E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx
\end{aligned}
$$

$$
E_y = 0
$$

$$
\begin{aligned}
-j\omega\mu\epsilon E_z &= -\mu k A \cos kx + \mu k B \sin kx \\
E_z &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos kx + \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx
\end{aligned}
$$

誘電体中での一般解をまとめると

$$
\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos kx + \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= A \sin kx + B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}
$$

導体中は $\mathbb{E} = \mathbb{B} = 0$ となるので、境界条件より電場 $\mathbb{E}$ の接線成分は 0 になるため

$$
\begin{aligned}
E_z|_{x=0} &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} A = 0 \\
\therefore A &= 0
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}
$$

また、真空中の場合、(5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\mathbb{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{E} &= 0 \\
\nabla^2\mathbb{B} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{B} &= 0
\end{aligned}
$$

誘電体スラブ中と同様に H_y について解くと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2\right) H_y + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H_y = 0$$

ここで $k_0^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ とすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^2\right) H_y &= 0 \\ H_y &= C e^{\pm k_0 (x-a)} \qquad (C : const) \end{aligned}$$

$x \to \infty$ の境界条件を考えると

$$\lim_{x \to \infty} H_y = 0$$

より

$$H_y = C e^{-k_0 (x-a)}$$

式 (1) より

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j\beta \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \\ 0 \\ -k_0 \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \end{bmatrix} \\ &= -j\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbb{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j\omega \mu_0 \epsilon_0 E_x &= j\beta \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \\ E_x &= \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} C e^{-k_0 (x-a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j\omega \mu_0 \epsilon_0 E_z &= k_0 \mu_0 C e^{-k_0 (x-a)} \\ E_z &= \frac{k_0}{j\omega \epsilon_0} C e^{-k_0 (x-a)} \end{aligned}$$

真空中の一般解をまとめると

$$\begin{cases} E_x &= \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} C e^{-k_0 (x-a)} \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k_0}{j\omega \epsilon_0} C e^{-k_0 (x-a)} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= C e^{-k_0 (x-a)} \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

$x = a$ での境界条件より、$\mathbb{E}$ と $\mathbb{H}$ の接線成分は連続なので

$$\begin{cases} E_z|_{x=a} &= \frac{k}{j\omega \epsilon} B \sin ka = \frac{k_0}{j\omega \epsilon_0} C \\ H_y|_{x=a} &= B \cos ka = C \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\frac{k}{k_0}B\sin ka &= B\cos ka \\
\tan ka &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{k_0}{k} \\
&= \epsilon_r\frac{k_0}{k} \\
\tan(\sqrt{-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon}\ a) &= \epsilon_r\sqrt{\frac{\beta^2-\omega^2\mu_0\epsilon_0}{-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon}}
\end{aligned}
$$

$x=\beta a,\ y=\omega a/c$ と規格化すると、光速 $\frac{1}{c}=\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ より

$$
\begin{aligned}
\tan(\sqrt{-\beta^2a^2+\omega^2a^2\mu\epsilon}) &= \epsilon_r\sqrt{\frac{\beta^2a^2-\omega^2a^2\mu_0\epsilon_0}{-\beta^2a^2+\omega^2a^2\mu\epsilon}} \\
\tan(\sqrt{-x^2+\epsilon_r y^2}) &= \epsilon_r\sqrt{\frac{x^2-y^2}{-x^2+\epsilon_r y^2}}
\end{aligned}
$$

比較のため、真空のみの場合を考える

$a\to 0,\ \epsilon_r=1$ とすると分散関係式は

$$
\begin{aligned}
\tan 0 &= \sqrt{\frac{-x^2+y^2}{x^2-y^2}} \\
x^2-y^2 &= 0 \\
y^2 &= x^2 \\
y &= x
\end{aligned}
$$

また、誘電体のみの場合を考えると、$ka=\frac{\pi}{2}$

分散関係式は

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{2} &= \epsilon_r\sqrt{\frac{x^2-y^2}{-x^2+\epsilon_r y^2}} \\
-x^2+\epsilon_r y^2 &= 0 \\
y^2 &= x^2/\epsilon_r \\
y &= x/\sqrt{\epsilon_r}
\end{aligned}
$$

電磁界分布を求める。単位面積あたりの伝送電力で規格化する。
誘電体中の複素 Poynting ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{B}^* \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ 0 \\ -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \cdot B \cos kx \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \cdot B \cos kx \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$
\begin{aligned}
P_e &= |Re\,[\mathbb{P}]\,| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx\right)^2} \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx
\end{aligned}
$$

真空中の複素 Poynting ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{H}^* \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \cdot C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \cdot C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$
\begin{aligned}
P_e &= |Re\,[\mathbb{P}]\,| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}\right)^2} \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}
\end{aligned}
$$

単位幅あたりの有効伝送電力が 1 になるように規格化する

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty P_e\,dx &= \int_0^a P_e\,dx + \int_a^\infty P_e\,dx \\
&= \int_0^a \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx\,dx + \int_a^\infty \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}\,dx \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \int_0^a \frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \int_a^\infty e^{-2k_0(x-a)}\,dx \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left[x + \frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^a + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \left[-\frac{1}{2k_0} e^{-2k_0(x-a)}\right]_a^\infty \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka\right) + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \cdot \frac{1}{2k_0} \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka\right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

誘電体-真空の境界条件より $C = B\cos ka$

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka\right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 &= 1 \\
\frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka\right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} B^2 \cos^2 ka &= 1 \\
B^2 \left[\frac{\beta}{2\omega\epsilon}\left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka\right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0}\cos^2 ka\right] &= 1 \\
B^2 \cdot \frac{\beta}{2\omega\epsilon}\left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka + \frac{\epsilon_r}{k_0}\cos^2 ka\right) &= 1 \\
B^2 &= \frac{2\omega\epsilon}{\beta}\left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka + \frac{\epsilon_r}{k_0}\cos^2 ka\right)^{-1} \\
B &= \sqrt{\frac{2\omega\epsilon}{\beta}\left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka + \frac{\epsilon_r}{k_0}\cos^2 ka\right)^{-1}}
\end{aligned}
$$