プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

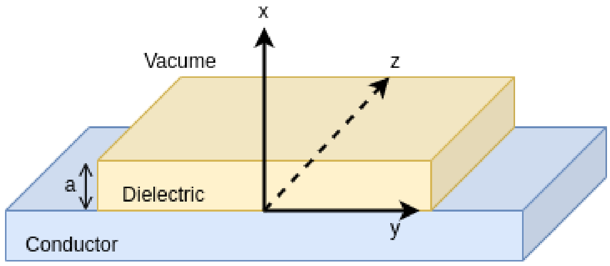

図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \tag{1}$$
$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \tag{4}$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{B} \\
\nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
-\nabla^2\mathbb{E} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E}
\end{aligned}$$
$$\nabla^2\mathbb{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} = 0 \tag{5}$$

(2) の両辺で回転を取ると

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\mathbb{B}) &= \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbb{E}\\
\nabla(\nabla\cdot\mathbb{B})-\nabla^2\mathbb{B} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{B}\\
\nabla^2\mathbb{B}-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{B} &= 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$ とすると式 (5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\mathbb{E}+\omega^2\mu\epsilon\mathbb{E} &= 0\\
\nabla^2\mathbb{B}+\omega^2\mu\epsilon\mathbb{B} &= 0
\end{aligned}
$$

TM モードより $E_z\neq 0, H_z=0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_y+\omega^2\mu\epsilon H_y=0$$

z 方向伝搬より

$$H_y\propto e^{-\gamma z}=e^{-(\alpha+j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha=0$ なので

$$H_y\propto e^{-j\beta z}$$

したがって、$\frac{\partial}{\partial z}=-j\beta$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta^2\right)H_y+\omega^2\mu\epsilon H_y=0$$

また、y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y}=0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta^2\right)H_y+\omega^2\mu\epsilon H_y=0$$

$k^2=-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon$ とおくと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)H_y=0$$

したがって、誘電体中の H_y の一般解は

$$H_y=A\sin kx+B\cos kx \qquad (A,B:const)$$

式 (1) より

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu A \sin kx + \mu B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\ 0 \\ -\mu k A \cos kx + \mu k B \sin kx \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \mu\epsilon \mathbb{E} \\
&= -j\omega\mu\epsilon \mathbb{E}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-j\omega\mu\epsilon E_x &= j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\
E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx
\end{aligned}
$$

$$
E_y = 0
$$

$$
\begin{aligned}
-j\omega\mu\epsilon E_z &= -\mu k A \cos kx + \mu k B \sin kx \\
E_z &= \frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos kx - \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx
\end{aligned}
$$

誘電体中での一般解をまとめると

$$
\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos kx - \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{cases}
\qquad
\begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= A \sin kx + B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}
$$

境界条件 $x = 0$ で $E_z = 0$ より

$$
\begin{aligned}
E_z|_{x=0} &= \frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos 0 - \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin 0 \\
&= \frac{k}{j\omega\epsilon} A = 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore A = 0
$$

よって

$$
\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{cases}
\qquad
\begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}
$$

また、真空中の場合、(5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$\nabla^2\mathbb{E}+\omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{E}=0$$
$$\nabla^2\mathbb{B}+\omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{B}=0$$

誘電体スラブ中と同様に H_y について解くと

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta^2)H_y+\omega^2\mu_0\epsilon_0H_y=0$$

ここで $k_0^2=\beta^2-\omega^2\mu_0\epsilon_0$ とすると

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-k_0^2)H_y=0$$
$$H_y=Ce^{\pm k_0(x-a)}\qquad(C:const)$$

$x\to\infty$ の境界条件を考えると

$$\lim_{x\to\infty}H_y=0$$

より

$$H_y=Ce^{-k_0(x-a)}$$

式 (1) より

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbb{B}&=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}\\0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial z}\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}\\0\\-\frac{\partial}{\partial x}\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x}-j\beta\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}\\0\\k_0\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}\end{bmatrix}\\&=-j\omega\mu_0\epsilon_0\mathbb{E}\end{aligned}$$

$$j\omega\mu_0\epsilon_0E_x=-j\beta\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}$$
$$E_x=-\frac{\beta}{\omega\epsilon_0}Ce^{-k_0(x-a)}$$

$$j\omega\mu_0\epsilon_0E_z=k_0\mu_0Ce^{-k_0(x-a)}$$
$$E_z=\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0}Ce^{-k_0(x-a)}$$

真空中の一般解をまとめると

$$\begin{cases}E_x&=-\frac{\beta}{\omega\epsilon_0}Ce^{-k_0(x-a)}\\E_y&=0\\E_z&=\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0}Ce^{-k_0(x-a)}\end{cases}\qquad\begin{cases}H_x&=0\\H_y&=Ce^{-k_0(x-a)}\\H_z&=0\end{cases}$$

$x = a$ での境界条件より、真空中と誘電体中は連続なので

$$\begin{cases} E_z|_{x=a} & = -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin ka = \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C \\ H_y|_{x=a} & = B \cos ka = C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\frac{k}{k_0} B \sin ka &= B \cos ka \\ \tan ka &= -\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{k_0}{k} \\ &= -\epsilon_r \frac{k_0}{k} \\ \tan(\sqrt{-\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon}\ a) &= -\epsilon_r \sqrt{\frac{-\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon}{\beta^2 - \omega^2\mu_0\epsilon_0}} \end{aligned}$$

$x = \beta a,\ y = \omega a/c$ と規格化すると、光速 $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ より

$$\begin{aligned} \tan(\sqrt{-\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon}\ a) &= -\epsilon_r \sqrt{\frac{-\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon}{\beta^2 - \omega^2\mu_0\epsilon_0}} \\ \tan(\sqrt{-\beta^2 a^2 + \omega^2 a^2\mu\epsilon}) &= -\epsilon_r \sqrt{\frac{-\beta^2 a^2 + \omega^2 a^2\mu\epsilon}{\beta^2 a^2 - \omega^2 a^2\mu_0\epsilon_0}} \\ \tan(\sqrt{-x^2 + \epsilon_r y^2}) &= -\epsilon_r \sqrt{\frac{-x^2 + \epsilon_r y^2}{x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

比較のため、真空のみの場合を考える

$a \to 0,\ \epsilon_r = 1$ とすると分散関係式は

$$\begin{aligned} \tan 0 &= -\sqrt{\frac{-x^2 + y^2}{x^2 - y^2}} \\ -x^2 + y^2 &= 0 \\ y^2 &= x^2 \\ y &= x \end{aligned}$$

また、誘電体のみの場合を考えると、分散関係式は

$$\begin{aligned} \tan 0 &= -\epsilon_r \sqrt{\frac{-x^2 + \epsilon_r y^2}{x^2 - y^2}} \\ -x^2 + \epsilon_r y^2 &= 0 \\ y^2 &= x^2/\epsilon_r \\ y &= x/\sqrt{\epsilon_r} \end{aligned}$$

電磁界分布を求める。単位面積あたりの伝送電力で規格化する。
誘電体中の複素 Poynting ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{B}^* \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ 0 \\ -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \cdot B \cos kx \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \cdot B \cos kx \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$
\begin{aligned}
P_e &= \left| Re \left[\mathbb{P} \right] \right| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx \right)^2} \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx
\end{aligned}
$$

真空中の複素 Poynting ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{H}^* \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \cdot C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \cdot C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$
\begin{aligned}
P_e &= \left| Re \left[\mathbb{P} \right] \right| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \right)^2} \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}
\end{aligned}
$$

単位幅あたりの有効伝送電力が 1 になるように規格化する

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty P_e\,dx &= \int_0^a P_e\,dx + \int_a^\infty P_e\,dx \\
&= \int_0^a \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx\,dx + \int_a^\infty \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}\,dx \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \int_0^a \frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \int_a^\infty e^{-2k_0(x-a)}\,dx \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left[x + \frac{1}{2k}\sin 2kx \right]_0^a + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \left[-\frac{1}{2k_0} e^{-2k_0(x-a)} \right]_a^\infty \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka \right) + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \cdot \frac{1}{2k_0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$