

プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r 、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

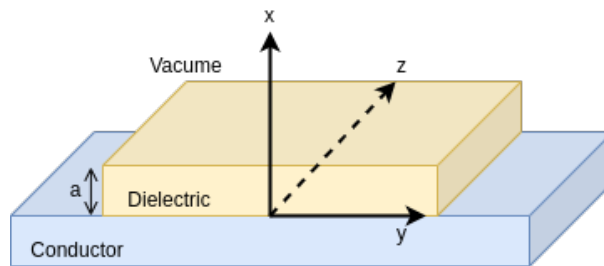


図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (4)$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{B} \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2 \mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \\ &\quad - \nabla^2 \mathbb{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} \\ \nabla^2 \mathbb{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(2) の両辺で回転を取ると

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) &= \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{E} \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbb{B}) - \nabla^2 \mathbb{B} &= -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B} \\ \nabla^2 \mathbb{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B} &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とすると式 (5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbb{E} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbb{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbb{B} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbb{B} &= 0\end{aligned}$$

TM モードより $E_z \neq 0, H_z = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_y + \omega^2 \mu\epsilon H_y = 0$$

z 方向伝搬より

$$H_y \propto e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha = 0$ なので

$$H_y \propto e^{-j\beta z}$$

したがって、 $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) H_y + \omega^2 \mu\epsilon H_y = 0$$

また、y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right) H_y + \omega^2 \mu\epsilon H_y = 0$$

$k^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon$ とおくと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) H_y = 0$$

したがって、誘電体中の H_y の一般解は

$$H_y = A \sin kx + B \cos kx \quad (A, B : \text{const})$$

式 (1) より

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu A \sin kx + \mu B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\ 0 \\ -\mu k A \cos kx + \mu k B \sin kx \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \\
&= -j\omega \mu \epsilon \mathbb{E}
\end{aligned}$$

$$-j\omega \mu \epsilon E_x = j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx$$

$$E_x = -\frac{\beta}{\omega \epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega \epsilon} B \cos kx$$

$$E_y = 0$$

$$-j\omega \mu \epsilon E_z = -\mu k A \cos kx + \mu k B \sin kx$$

$$E_z = \frac{k}{j\omega \epsilon} A \cos kx - \frac{k}{j\omega \epsilon} B \sin kx$$

誘電体中での一般解をまとめると

$$\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega \epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega \epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k}{j\omega \epsilon} A \cos kx - \frac{k}{j\omega \epsilon} B \sin kx \end{cases} \quad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= A \sin kx + B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

境界条件 $x = 0$ で $E_z = 0$ より

$$\begin{aligned}
E_z|_{x=0} &= \frac{k}{j\omega \epsilon} A \cos 0 - \frac{k}{j\omega \epsilon} B \sin 0 \\
&= \frac{k}{j\omega \epsilon} A = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore A = 0$$

よって

$$\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega \epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= -\frac{k}{j\omega \epsilon} B \sin kx \end{cases} \quad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

また、真空中の場合、(5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$\nabla^2 \mathbb{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbb{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbb{B} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbb{B} = 0$$

誘電体スラブ中と同様に H_y について解くと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right) H_y + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H_y = 0$$

ここで $k_0^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^2 \right) H_y = 0$$

$$H_y = C e^{\pm k_0(x-a)} \quad (C : \text{const})$$

$x \rightarrow \infty$ の境界条件を考えると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_y = 0$$

より

$$H_y = C e^{-k_0(x-a)}$$

式 (1) より

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \mu_0 C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \mu_0 C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j\beta \mu_0 C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ -k_0 \mu_0 C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\ &= -j\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbb{E} \end{aligned}$$

$$j\omega \mu_0 \epsilon_0 E_x = j\beta \mu_0 C e^{-k_0(x-a)}$$

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)}$$

$$j\omega \mu_0 \epsilon_0 E_z = k_0 \mu_0 C e^{-k_0(x-a)}$$

$$E_z = \frac{k_0}{j\omega \epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)}$$

真空中の一般解をまとめると

$$\begin{cases} E_x &= \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k_0}{j\omega \epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \end{cases} \quad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= C e^{-k_0(x-a)} \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

$x = a$ での境界条件より、真空中と誘電体中は連続なので

$$\begin{cases} E_x|_{x=a} &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos ka = -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C \\ E_z|_{x=a} &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin ka = \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C \\ H_y|_{x=a} &= B \cos ka = C \end{cases}$$

$$-\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{k}{k_0} B \sin ka = B \cos ka$$

$$\begin{aligned} \tan ka &= -\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{k_0}{k} \\ &= -\epsilon_r \frac{k_0}{k} \end{aligned}$$

$$\tan(\sqrt{-\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon} a) = -\epsilon_r \sqrt{\frac{-\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon}{\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}$$

$x = \beta a$, $y = \omega a/c$ と規格化すると、光速 $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ より

$$\tan(\sqrt{-\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon} a) = -\epsilon_r \sqrt{\frac{-\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon}{\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\tan(\sqrt{-\beta^2 a^2 + \omega^2 a^2 \mu \epsilon}) = -\epsilon_r \sqrt{\frac{-\beta^2 a^2 + \omega^2 a^2 \mu \epsilon}{\beta^2 a^2 - \omega^2 a^2 \mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\tan(\sqrt{-x^2 + \epsilon_r y^2}) = -\epsilon_r \sqrt{\frac{-x^2 + \epsilon_r y^2}{x^2 - y^2}}$$

比較のため、真空のみの場合を考える

$a \rightarrow 0$, $\epsilon_r = 1$ とすると分散関係式は

$$\tan 0 = -\sqrt{\frac{-x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$$

$$-x^2 + y^2 = 0$$

$$y^2 = x^2$$

$$y = x$$

また、誘電体のみの場合を考えると、分散関係式は

$$\tan 0 = -\epsilon_r \sqrt{\frac{-x^2 + \epsilon_r y^2}{x^2 - y^2}}$$

$$-x^2 + \epsilon_r y^2 = 0$$

$$y^2 = x^2 / \epsilon_r$$

$$y = x / \sqrt{\epsilon_r}$$

電磁界分布を求める。単位面積あたりの伝送電力で規格化する。

誘電体中の複素 Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{B}^* \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ 0 \\ -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \cdot B \cos kx \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \cdot B \cos kx \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$\begin{aligned}
 P_e &= |Re[\mathbb{P}]| \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx\right)^2} \\
 &= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx
 \end{aligned}$$

真空中の複素 Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{H}^* \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \cdot C e^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C e^{-k_0(x-a)} \cdot C e^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$\begin{aligned}
 P_e &= |Re[\mathbb{P}]| \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}\right)^2} \\
 &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}
 \end{aligned}$$

単位幅あたりの有効伝送電力が 1 になるように規格化する

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty P_e dx &= \int_0^a P_e dx + \int_a^\infty P_e dx \\
 &= \int_0^a \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx dx + \int_a^\infty \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} dx \\
 &= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \int_0^a \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \int_a^\infty e^{-2k_0(x-a)} dx \\
 &= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left[x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_0^a + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \left[-\frac{1}{2k_0} e^{-2k_0(x-a)} \right]_a^\infty \\
 &= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k} \sin 2ka \right) + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \cdot \frac{1}{2k_0} \\
 &= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k} \sin 2ka \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

誘電体-真空の境界条件より

$$\begin{cases} B \cos ka &= \epsilon_r C \\ \frac{k}{\epsilon} B \sin ka &= \frac{k_0}{\epsilon_0} C \\ B \cos ka &= C \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sin ka &= \frac{k_0}{k} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{C}{B} \\
&= \epsilon_r \frac{k_0}{k} \frac{C}{B} \\
\cos ka &= \frac{C}{B} \\
\sin 2ka &= 2 \sin ka \cos ka \\
&= 2\epsilon_r \frac{k_0}{k} \frac{C^2}{B^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k} \sin 2ka \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 &= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k} 2\epsilon_r \frac{k_0}{k} \frac{C^2}{B^2} \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 \\
&= \frac{\beta a}{2\omega\epsilon} B^2 + \frac{\beta}{2\omega\epsilon} \frac{\epsilon_r k_0}{k^2} C^2 + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 \\
&= \frac{\beta a}{2\omega\epsilon} B^2 + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} \left(\frac{k_0^2}{k^2} + 1 \right) C^2 \\
&= \frac{\beta a}{2\omega\epsilon} B^2 + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} \left(\frac{k_0^2}{k^2} + 1 \right) B^2 \cos^2 ka \\
&= \frac{\beta a}{2\omega\epsilon} B^2 + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} \left(\frac{k_0^2}{k^2} + 1 \right) B^2 \cos^2 ka \\
&= \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} B^2 \left[\frac{k_0 a}{\epsilon_r} + \left(\frac{k_0^2}{k^2} + 1 \right) \cos^2 ka \right] \\
&= 1 \\
B^2 &= \frac{2k_0\omega\epsilon_0}{\beta} \left[\frac{k_0 a}{\epsilon_r} + \left(\frac{k_0^2}{k^2} + 1 \right) \cos^2 ka \right]^{-1}
\end{aligned}$$