プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

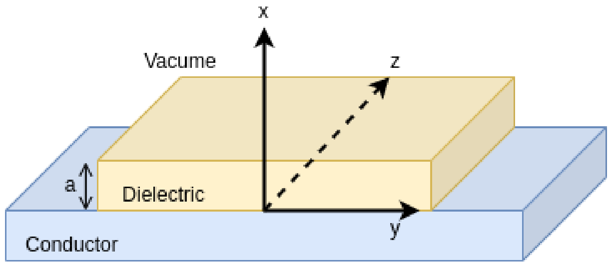

図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \tag{1}$$
$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \tag{4}$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{B} \\
\nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
-\nabla^2\mathbb{E} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E}
\end{aligned}$$
$$\nabla^2\mathbb{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} = 0 \tag{5}$$

(2) の両辺で回転を取ると

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) &= \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{E} \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbb{B}) - \nabla^2 \mathbb{B} &= -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B} \\
\nabla^2 \mathbb{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B} &= 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とすると式 (5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbb{E} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbb{E} &= 0 \\
\nabla^2 \mathbb{B} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbb{B} &= 0
\end{aligned}
$$

TM モードより $E_x = E_y = 0, H_z = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z + \omega^2 \mu\epsilon E_z = 0$$

z 方向伝搬より

$$E_z \propto e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha = 0$ なので

$$E_z \propto e^{-j\beta z}$$

したがって、$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) E_z + \omega^2 \mu\epsilon E_z = 0$$

また、y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right) E_z + \omega^2 \mu\epsilon E_z = 0$$

$k^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon$ とおくと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) E_z = 0$$

したがって、誘電体中の E_z の一般解は

$$E_z = A \sin kx + B \cos kx \qquad (A, B : const)$$

式 (1) より

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{E} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A\sin kx + B\cos kx \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(A\sin kx + B\cos kx) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(A\sin kx + B\cos kx) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -kA\cos kx + kB\sin kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \\
&= -j\omega\mathbb{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega B_y &= kA\cos kx - kB\sin kx \\
B_y &= \frac{k}{j\omega}(A\cos kx - B\sin kx) \\
H_y &= \frac{k}{j\omega\mu}(A\cos kx - B\sin kx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega B_x &= 0 \\
H_x &= 0
\end{aligned}$$

誘電体中での一般解をまとめると

$$\begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= A\sin kx + B\cos kx \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{k}{j\omega\mu}(A\cos kx - B\sin kx) \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

境界条件 $x = 0$ で $E_z = 0$ より

$$\begin{aligned}
E_z|_{x=0} &= A\sin k0 + B\cos k0 \\
&= B = 0
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= A\sin kx \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{k}{j\omega\mu}A\cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

また、真空中の場合、(5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbb{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{E} &= 0 \\
\nabla^2\mathbb{B} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{B} &= 0
\end{aligned}$$

誘電体スラブ中と同様に E_z について解くと

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2)E_z + \omega^2\mu_0\epsilon_0 E_z = 0$$

ここで $k_0^2 = \beta^2 - \omega\mu_0\epsilon_0$ とすると

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^2)E_z = 0$$

$$E_z = Ce^{\pm k_0(x-a)} \qquad (C : const)$$

$x \to \infty$ の境界条件を考えると

$$\lim_{x\to\infty} E_z = 0$$

より

$$E_z = Ce^{-k_0(x-a)}$$

式 (1) より

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{E} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Ce^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} Ce^{-k_0(x-a)} \\ -\frac{\partial}{\partial x} Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ k_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -j\omega\mathbb{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega B_x &= 0 \\
H_x &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega B_y &= k_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\
B_y &= \frac{k_0}{j\omega} Ce^{-k_0(x-a)} \\
H_y &= \frac{k_0}{j\omega\mu_0} Ce^{-k_0(x-a)}
\end{aligned}$$

真空中の一般解をまとめると

$$\begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= Ce^{-k_0(x-a)} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{k_0}{j\omega\mu_0} Ce^{-k_0(x-a)} \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

$x = a$ での境界条件より、真空中と誘電体中は連続なので

$$\begin{cases} E_z|_{x=a} &= A\sin ka = Ce^{-k_0(a-a)} \\ H_y|_{x=a} &= \frac{k}{j\omega\mu} A\cos ka = \frac{k_0}{j\omega\mu_0} Ce^{-k_0(a-a)} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
C &= A \sin ka \\
\frac{k}{j\omega\mu} A \cos ka &= \frac{k_0}{j\omega\mu_0} A \sin ka \\
\frac{\sin ka}{\cos ka} &= \frac{k}{j\omega\mu} \frac{j\omega\mu_0}{k_0} \\
\tan ka &= \frac{\mu_0}{\mu} \frac{k}{k_0}
\end{aligned}
$$

$\mu = \mu_0$ とすると

$$
\begin{aligned}
\tan ka &= \frac{k}{k_0} \\
\tan(\sqrt{-\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon}\ a) &= \sqrt{\frac{-\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon}{\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}
\end{aligned}
$$

$x = \beta a,\ y = \omega a / c$ と規格化すると、光速 $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu\epsilon}$ より

$$
\begin{aligned}
\tan(\sqrt{-\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon}\ a) &= \sqrt{\frac{-\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon}{\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}} \\
\tan(\sqrt{-\beta^2 a^2 + \omega^2 a^2 \mu\epsilon}) &= \sqrt{\frac{-\beta^2 a^2 + \omega^2 a^2 \mu\epsilon}{\beta^2 a^2 - \omega^2 a^2 \mu_0 \epsilon_0}} \\
\tan(\sqrt{-x^2 + \epsilon_r y^2}) &= \sqrt{\frac{-x^2 + \epsilon_r y^2}{x^2 - y^2}}
\end{aligned}
$$