

プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r 、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

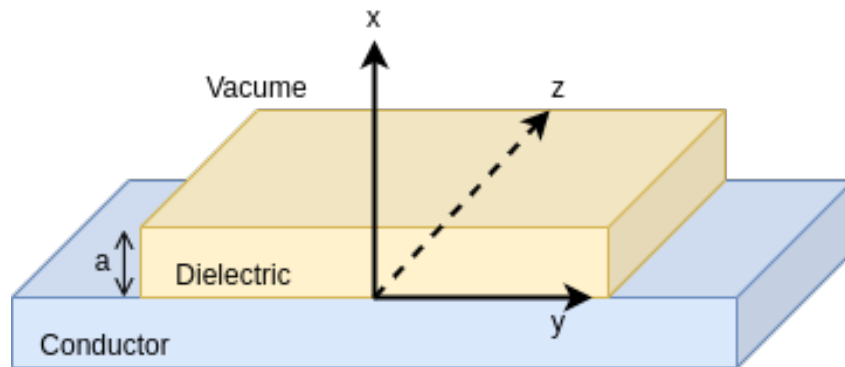


図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (3)$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{B} \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2 \mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \\ -\nabla^2 \mathbb{E} &= -\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} \\ \nabla^2 \mathbb{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} &= 0 \quad \dots \text{Holmheltz eq} \end{aligned}$$

$\mathbb{E} \propto e^{j\omega t}$ より、 $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とおくと Holmheltz 方程式は

$$\nabla^2 \mathbb{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbb{E} = 0$$

E の z 成分について

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z + \omega^2 \mu \epsilon E_z = 0$$

z 方向伝搬より

$$E_z \propto e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha = 0$ なので

$$E_z \propto e^{-j\beta z}$$

したがって、 $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ とすると、Holmheltz 方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon \right) E_z &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z &= 0 \quad \because k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \end{aligned}$$

また、スラブなので $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_c^2 \right) E_z = 0$$

したがって、

$$E_z = A \sin k_c x + B \cos k_c x \quad (A, B : \text{const})$$

境界条件 $x = 0$ で $E_z = 0$ より

$$\begin{aligned} E_z|_{x=0} &= A \sin k_c 0 + B \cos k_c 0 \\ &= B \\ &= 0 \\ E_z &= A \sin k_c x \end{aligned}$$

また、真空中の場合、電場の z 成分は

$$\begin{aligned} E_{0z} &= A' \sin k_{0c} x + B' \cos k_{0c} x \quad (A', B' : \text{const}) \\ &= C \sin(k_{0c} x + \phi) \quad (C, \phi : \text{const}) \end{aligned}$$

$$k_{0c}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2$$

境界条件 $x = a$ で $E_z = E_{0z}$ となるので

$$\begin{aligned} E_z|_{x=a} &= E_{0z}|_{x=a} \\ A \sin k_c a &= C \sin(k_{0c} a + \phi) \end{aligned}$$