プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

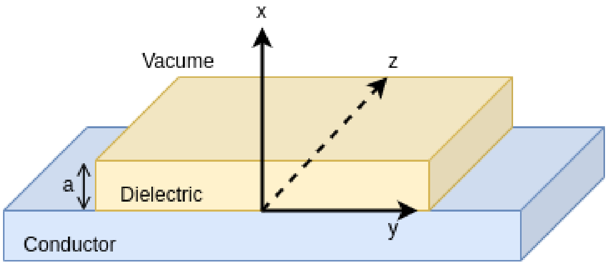

図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \tag{1}$$
$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \tag{3}$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{B} \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
-\nabla^2\mathbb{E} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} \\
\nabla^2\mathbb{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} &= 0 \qquad \cdots Holmheltz\ eq
\end{aligned}$$

$\mathbb{E} \propto e^{j\omega t}$ より、$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とおくと Holmheltz 方程式は

$$\nabla^2\mathbb{E} + \omega^2\mu\epsilon\mathbb{E} = 0$$

$\mathbb{E}$ の z 成分について

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z + \omega^2\mu\epsilon E_z = 0$$

z 方向伝搬より

$$E_z \propto e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha = 0$ なので

$$E_z \propto e^{-j\beta z}$$

したがって、$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ とすると、Holmheltz 方程式は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon\right) E_z = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) E_z = 0 \qquad \because\ k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2\end{aligned}$$

また、y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_c^2\right) E_z = 0$$

したがって、

$$E_z = A \sin k_c x + B \cos k_c x \qquad (A, B : const)$$

境界条件 $x = 0$ で $E_z = 0$ より

$$\begin{aligned} E_z|_{x=0} &= A \sin k_c 0 + B \cos k_c 0 \\ &= B \\ &= 0 \\ E_z &= A \sin k_c x \end{aligned}$$

また真空中の場合、電場の z 成分についての Holmheltz 方程式は以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right) E_z + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_z = 0$$

誘電体スラブ中と同様に $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ とすると

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2\right) E_z = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2\right) E_z = 0 \qquad \because\ k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2\end{aligned}$$

真空中の E_z の一般解は、$k_0^2 > 0$ の場合、

$$\begin{aligned} E_z &= C e^{jk_0 x} \\ &= C \cos k_0 x + jC \sin k_0 x \end{aligned}$$

$k_0^2 < 0$ の場合、$k_0^2 = -k_0'^2 = -\omega^2\mu_0\epsilon_0 + \beta^2$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2\right) E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0'^2\right) E_z = 0$$
$$E_z = C' e^{-k_0' x}$$

ここで、$x \to \infty$ の境界条件を考えると

$$\lim_{x\to\infty} E_z = 0$$

となるため、一般解は

$$E_z = C' e^{-k_0' x} \qquad (k_0'^2 = -\omega^2\mu_0\epsilon_0 + \beta^2 > 0)$$

$x = a$ での境界条件より、真空中の電場と誘電体中の電場は連続なので、

$$A \sin k_c a = C' e^{-k_0 a}$$
$$A \sin(\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} a) = C' e^{-\sqrt{-\omega^2\mu_0\epsilon_0+\beta^2} a}$$
$$\sin k_c a = \frac{C'}{A} e^{-k_0 a}$$
$$k_c a = \sin^{-1}\left(\frac{C'}{A} e^{-k_0 a}\right)$$
$$k_c = \frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{C'}{A} e^{-k_0 a}\right)$$
$$\omega^2\mu\epsilon - \beta^2 = \left[\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(C_0 e^{-k_0 a}\right)\right]^2 \qquad \because\ C_0 = \frac{C'}{A}$$