プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

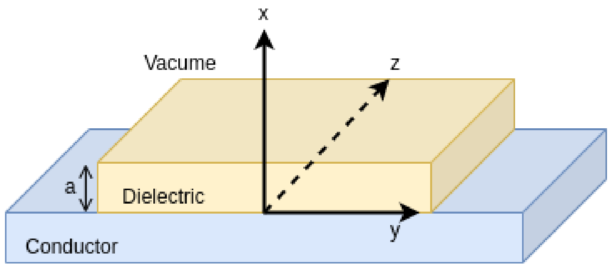

図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \tag{4}$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{B}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E}$$

$$-\nabla^2\mathbb{E} = -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E}$$

$$\nabla^2\mathbb{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} = 0 \tag{5}$$

(2) の両辺で回転を取ると

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) &= \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{E} \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbb{B}) - \nabla^2 \mathbb{B} &= -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B} \\
\nabla^2 \mathbb{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B} &= 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とすると式 (5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbb{E} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbb{E} &= 0 \\
\nabla^2 \mathbb{B} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbb{B} &= 0
\end{aligned}
$$

TM モードより $E_z \neq 0, H_z = 0$

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_y + \omega^2 \mu\epsilon H_y = 0
$$

z 方向伝搬より

$$
H_y \propto e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta) z}
$$

無損失を仮定すると $\alpha = 0$ なので

$$
H_y \propto e^{-j\beta z}
$$

したがって、$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ とすると

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) H_y + \omega^2 \mu\epsilon H_y = 0
$$

また、y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ となる。

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right) H_y + \omega^2 \mu\epsilon H_y = 0
$$

$k^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon$ とおくと

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) H_y = 0
$$

したがって、誘電体中の H_y の一般解は

$$
H_y = A \sin kx + B \cos kx \qquad (A, B : const)
$$

式 (1) より

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu A \sin kx + \mu B \cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mu A \sin kx + \mu B \cos kx) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\ 0 \\ \mu k A \cos kx - \mu k B \sin kx \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
&= -j\omega\mu\epsilon\mathbb{E}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-j\omega\mu\epsilon E_x &= j\mu\beta A \sin kx + j\mu\beta B \cos kx \\
E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx
\end{aligned}
$$

$$
E_y = 0
$$

$$
\begin{aligned}
-j\omega\mu\epsilon E_z &= -\mu k A \cos kx + \mu k B \sin kx \\
E_z &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos kx + \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx
\end{aligned}
$$

誘電体中での一般解をまとめると

$$
\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} A \sin kx - \frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} A \cos kx + \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{cases}
\qquad
\begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= A \sin kx + B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}
$$

導体中は $\mathbb{E} = \mathbb{B} = 0$ となるので、境界条件より電場 $\mathbb{E}$ の接線成分は 0 になるため

$$
\begin{aligned}
E_z|_{x=0} &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} A = 0 \\
\therefore A &= 0
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{cases} E_x &= -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B \cos kx \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin kx \end{cases}
\qquad
\begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= B \cos kx \\ H_z &= 0 \end{cases}
$$

また、真空中の場合、(5)(6) の Holmheltz 方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\mathbb{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{E} &= 0 \\
\nabla^2\mathbb{B} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbb{B} &= 0
\end{aligned}
$$

誘電体スラブ中と同様に H_y について解くと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2\right) H_y + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H_y = 0$$

ここで $k_0^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^2\right) H_y = 0$$

$$H_y = Ce^{\pm k_0(x-a)} \qquad (C : const)$$

$x \to \infty$ の境界条件を考えると

$$\lim_{x \to \infty} H_y = 0$$

より

$$H_y = Ce^{-k_0(x-a)}$$

式 (1) より

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j\beta \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ -k_0 \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
&= -j\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbb{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega \mu_0 \epsilon_0 E_x &= j\beta \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\
E_x &= \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega \mu_0 \epsilon_0 E_z &= k_0 \mu_0 Ce^{-k_0(x-a)} \\
E_z &= \frac{k_0}{j\omega \epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)}
\end{aligned}$$

真空中の一般解をまとめると

$$\begin{cases} E_x &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)} \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x &= 0 \\ H_y &= Ce^{-k_0(x-a)} \\ H_z &= 0 \end{cases}$$

$x = a$ での境界条件より、$\mathbb{E}$ と $\mathbb{H}$ の接線成分は連続なので

$$\begin{cases} E_z|_{x=a} &= -\frac{k}{j\omega\epsilon} B \sin ka = \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C \\ H_y|_{x=a} &= B \cos ka = C \end{cases}$$

$$-\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\frac{k}{k_0}B\sin ka = B\cos ka$$
$$\tan ka = -\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{k_0}{k}$$
$$= -\epsilon_r\frac{k_0}{k}$$
$$\tan(\sqrt{-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon}\ a) = -\epsilon_r\sqrt{\frac{-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon}{\beta^2-\omega^2\mu_0\epsilon_0}}$$

$x=\beta a,\ y=\omega a/c$ と規格化すると、光速 $\frac{1}{c}=\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ より

$$\tan(\sqrt{-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon}\ a) = -\epsilon_r\sqrt{\frac{-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon}{\beta^2-\omega^2\mu_0\epsilon_0}}$$
$$\tan(\sqrt{-\beta^2a^2+\omega^2a^2\mu\epsilon}) = -\epsilon_r\sqrt{\frac{-\beta^2a^2+\omega^2a^2\mu\epsilon}{\beta^2a^2-\omega^2a^2\mu_0\epsilon_0}}$$
$$\tan(\sqrt{-x^2+\epsilon_r y^2}) = -\epsilon_r\sqrt{\frac{-x^2+\epsilon_r y^2}{x^2-y^2}}$$

比較のため、真空のみの場合を考える
$a\to 0,\ \epsilon_r=1$ とすると分散関係式は

$$\tan 0 = -\sqrt{\frac{-x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$
$$-x^2+y^2=0$$
$$y^2=x^2$$
$$y=x$$

また、誘電体のみの場合を考えると、分散関係式は

$$\tan 0 = -\epsilon_r\sqrt{\frac{-x^2+\epsilon_r y^2}{x^2-y^2}}$$
$$-x^2+\epsilon_r y^2=0$$
$$y^2=x^2/\epsilon_r$$
$$y=x/\sqrt{\epsilon_r}$$

電磁界分布を求める。単位面積あたりの伝送電力で規格化する。
誘電体中の複素 Poynting ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{B}^* \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B\cos kx \\ 0 \\ -\frac{k}{j\omega\epsilon} B\sin kx \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B\cos kx \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{k}{j\omega\epsilon} B\sin kx \cdot B\cos kx \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon} B\cos kx \cdot B\cos kx \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$
\begin{aligned}
P_e &= |Re\,[\mathbb{P}]\,| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx\right)^2} \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx
\end{aligned}
$$

真空中の複素 Poynting ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{E} \times \mathbb{H}^* \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)} \cdot Ce^{-k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} Ce^{-k_0(x-a)} \cdot Ce^{-k_0(x-a)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

xy 平面での単位面積当たりの有効伝送電力 P_e は

$$
\begin{aligned}
P_e &= |Re\,[\mathbb{P}]\,| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}\right)^2} \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}
\end{aligned}
$$

単位幅あたりの有効伝送電力が 1 になるように規格化する

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty P_e\,dx &= \int_0^a P_e\,dx + \int_a^\infty P_e\,dx \\
&= \int_0^a \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \cos^2 kx\,dx + \int_a^\infty \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 e^{-2k_0(x-a)}\,dx \\
&= \frac{\beta}{\omega\epsilon} B^2 \int_0^a \frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \int_a^\infty e^{-2k_0(x-a)}\,dx \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left[x + \frac{1}{2k}\sin 2kx \right]_0^a + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \left[-\frac{1}{2k_0} e^{-2k_0(x-a)} \right]_a^\infty \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka \right) + \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} C^2 \cdot \frac{1}{2k_0} \\
&= \frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

誘電体-真空の境界条件より $C = B\cos ka$

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} C^2 &= 1 \\
\frac{\beta}{2\omega\epsilon} B^2 \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} B^2 \cos^2 ka &= 1 \\
B^2 \left[\frac{\beta}{2\omega\epsilon} \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka \right) + \frac{\beta}{2k_0\omega\epsilon_0} \cos^2 ka \right] &= 1 \\
B^2 \cdot \frac{\beta}{2\omega\epsilon} \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka + \frac{\epsilon_r}{k_0}\cos^2 ka \right) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \frac{2\omega\epsilon}{\beta} \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka + \frac{\epsilon_r}{k_0}\cos^2 ka \right)^{-1} \\
B &= \sqrt{\frac{2\omega\epsilon}{\beta} \left(a + \frac{1}{2k}\sin 2ka + \frac{\epsilon_r}{k_0}\cos^2 ka \right)^{-1}}
\end{aligned}
$$