

プログラム演習 課題 3

比誘電率 ϵ_r 、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

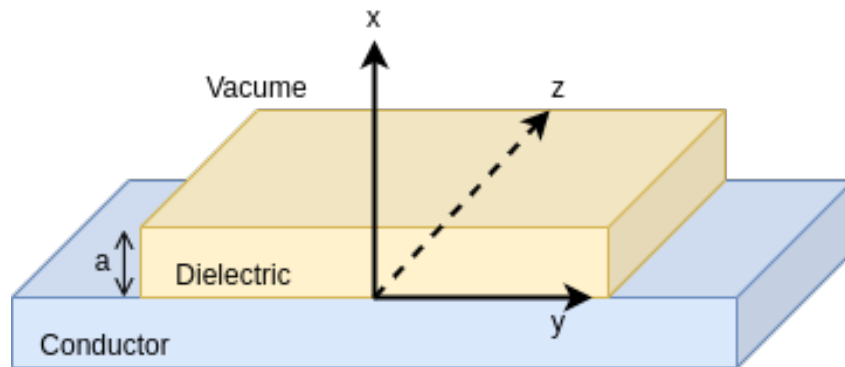


図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (3)$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{B} \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2 \mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \mu \epsilon \mathbb{E} \\ -\nabla^2 \mathbb{E} &= -\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} \\ \nabla^2 \mathbb{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} &= 0 \quad \dots \text{Holmheltz eq} \end{aligned}$$

$\mathbb{E} \propto e^{j\omega t}$ より、 $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とおくと Holmheltz 方程式は

$$\nabla^2 \mathbb{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbb{E} = 0$$

E の z 成分について

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z + \omega^2 \mu \epsilon E_z = 0$$

z 方向伝搬より

$$E_z \propto e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha = 0$ なので

$$E_z \propto e^{-j\beta z}$$

したがって、 $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ とすると、Holmheltz 方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon \right) E_z &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z &= 0 \quad \because k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \end{aligned}$$

また、 y 方向に無限なスラブと仮定すると $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_c^2 \right) E_z = 0$$

したがって、

$$E_z = A \sin k_c x + B \cos k_c x \quad (A, B : \text{const})$$

境界条件 $x = 0$ で $E_z = 0$ より

$$\begin{aligned} E_z|_{x=0} &= A \sin k_c 0 + B \cos k_c 0 \\ &= B \\ &= 0 \\ E_z &= A \sin k_c x \end{aligned}$$

また真空中の場合、電場の z 成分についての Holmheltz 方程式は以下になる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) E_z + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_z = 0$$

誘電体スラブ中と同様に $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2 \right) E_z &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \right) E_z &= 0 \quad \because k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2 \end{aligned}$$

$k_0^2 > 0$ の場合、

$$\begin{aligned} E_z &= C e^{j k_0 x} \\ &= C \cos k_0 x + j C \sin k_0 x \end{aligned}$$

$k_0^2 < 0$ の場合、 $k_0^2 = -k_0'^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + \beta^2$ とすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \right) E_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0'^2 \right) E_z = 0 \\ E_z &= C' e^{-k_0' x} \end{aligned}$$

$x = a$ での境界条件より、真空中の電場と誘電体中の電場は連続なので、 $k_0^2 < 0$ のとき

$$\begin{aligned} A \sin k_c a &= C' e^{-k_0 a} \\ \sin k_c a &= \frac{C'}{A} e^{-k_0 a} \\ k_c a &= \sin^{-1} \left(\frac{C'}{A} e^{-k_0 a} \right) \\ k_c &= \frac{1}{a} \sin^{-1} \left(\frac{C'}{A} e^{-k_0 a} \right) \\ \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 &= \left[\frac{1}{a} \sin^{-1} (C_0 e^{-k_0 a}) \right]^2 \quad \because C_0 = \frac{C'}{A} \end{aligned}$$

$k_0^2 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} E_z &= C e^{j k_0 x} \\ &= C \cos k_0 x + j C \sin k_0 x \end{aligned}$$

$$A \sin k_c a = C \cos k_0 a + j C \sin k_0 a$$

$$A \sin k_c a = C \cos k_0 a$$

$$C \sin k_0 a = 0$$

$$A \sin(\omega^2 \mu \epsilon a - \beta^2 a) = C \cos(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a - \beta^2 a)$$

$$A \sin(\omega^2 \mu \epsilon a) \cos(\beta^2 a) - A \sin(\beta^2 a) \cos(\omega^2 \mu \epsilon a) = C \cos(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a) \cos(\beta^2 a) + C \sin(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a) \sin(\beta^2 a)$$

$$\cos(\beta^2 a) [A \sin(\omega^2 \mu \epsilon a) - C \cos(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)] = \sin(\beta^2 a) [A \cos(\omega^2 \mu \epsilon a) + C \sin(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)]$$

$$\frac{\sin(\beta^2 a)}{\cos(\beta^2 a)} = \frac{A \sin(\omega^2 \mu \epsilon a) - C \cos(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)}{A \cos(\omega^2 \mu \epsilon a) + C \sin(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)}$$

$$\tan \beta^2 a = \frac{A \sin(\omega^2 \mu \epsilon a) - C \cos(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)}{A \cos(\omega^2 \mu \epsilon a) + C \sin(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)}$$

$$\beta^2 a = \tan^{-1} \left[\frac{A \sin(\omega^2 \mu \epsilon a) - C \cos(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)}{A \cos(\omega^2 \mu \epsilon a) + C \sin(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a)} \right]$$