プログラム演習 課題3

比誘電率 ϵ_r、厚さ a の誘電体スラブに沿って z 方向伝搬する TM モードの分散関係式を求める。

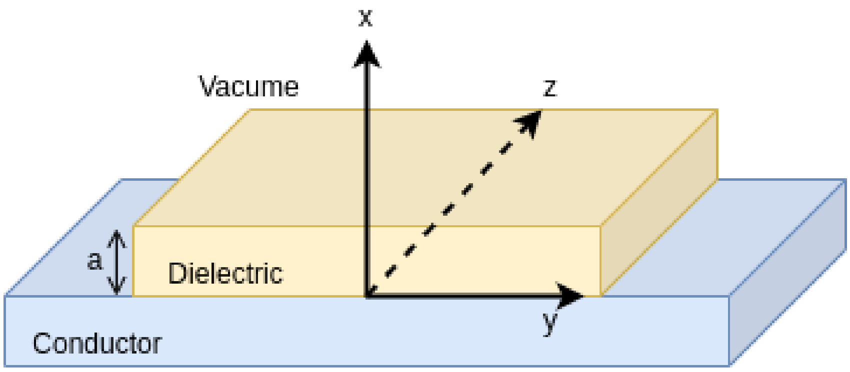

図 1

$\rho = 0$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \tag{3}$$

となる。

(1) の両辺の回転をとる

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{B} \\
\nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\mu\epsilon\mathbb{E} \\
-\nabla^2\mathbb{E} &= -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} \\
\nabla^2\mathbb{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} &= 0 \qquad \cdots Holmheltz\ eq
\end{aligned}$$

$\mathbb{E} \propto e^{j\omega t}$ より、$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ とおくと Holmheltz 方程式は

$$\nabla^2\mathbb{E} + \omega^2\mu\epsilon\mathbb{E} = 0$$

$\mathbb{E}$ の z 成分について

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z+\omega^2\mu\epsilon E_z=0$$

z 方向伝搬より

$$E_z \propto e^{-\gamma z}=e^{-(\alpha+j\beta)z}$$

無損失を仮定すると $\alpha=0$ なので

$$E_z \propto e^{-j\beta z}$$

したがって、$\frac{\partial}{\partial z}=-j\beta$ とすると、Holmheltz 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta^2+\omega^2\mu\epsilon\right)E_z=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)E_z=0 \qquad \because\ k_c^2=\omega^2\mu\epsilon-\beta^2$$

また、y 方向に無限なスラブとすると $\frac{\partial}{\partial y}=0$ となる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_c^2\right)E_z=0$$

したがって、

$$E_z=A\sin k_c x+B\cos k_c x \qquad (A,B:const)$$

境界条件 $x=0$ で $E_z=0$ より

$$\begin{aligned}E_z|_{x=0}&=A\sin k_c 0+B\cos k_c 0\\&=B\\&=0\\E_z&=A\sin k_c x\end{aligned}$$

また真空中の場合、電場の z 成分についての Holmheltz 方程式は以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z+\omega^2\mu_0\epsilon_0 E_z=0$$

誘電体スラブ中と同様に $\frac{\partial}{\partial y}=0$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z+k_0^2E_z=0 \qquad \because\ k_0^2=\omega^2\mu_0\epsilon_0$$

変数分離法より $E_z = X(x)Z(z)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
Z\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_0^2 XZ = 0 \\
\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_0^2 = 0 \\
\begin{cases} \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 &= 0 \\ \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 &= 0 \end{cases} \qquad (k_0^2 = k_x^2 + k_z^2) \\
\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{cases} \\
\begin{cases} X &= C\sin k_x x \\ Z &= De^{-jk_z z} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore E_z &= C\sin k_x x \cdot De^{-jk_z z} \\
&= C' e^{-jk_z z} \sin k_x x \qquad (C' = C\cdot D : const)
\end{aligned}
$$