

Université Paris VIII
Vincennes – Saint-Denis
2, rue de la liberté, 93200 Saint-Denis

Pavages symétriques à base de dominos

Mémoire présenté pour l'obtention
du D.E.A. Intelligence Artificielle
et Optimisation Combinatoire

Travail réalisé par Youssef NACIRI

Sous la direction de Pierre Audibert

Octobre 2006

Résumé

Ce mémoire traite de pavages définis sur un maillage carré. En particulier, de pavages à base de dominos. Une première étude théorique sera faite de ces pavages dans le but de les résumer en les groupant par classes d'équivalence. Un parallèle avec la théorie des graphes permettra d'énoncer des formules de comptage des pavages sur une forme crénelée, pour approfondir ensuite sur les seuls pavages admettant une symétrie interne. Enfin, un algorithme efficace permettant leur énumération y est présenté – le Dancing Links – ainsi que des optimisations complémentaires.

Remerciements

Au long de cette année, mes yeux se sont ouverts sur le domaine de la recherche, ses méthodes et sur les formalismes du raisonnement grâce à MM. Sion Elbaz, Harald Wertz et Patrick Greussay, desquels je serais toujours reconnaissant.

Le bref enseignement que j'ai reçu de M. Hugues Bersini n'en a pas été moins riche. De cet échange, j'ai pu tirer de nouvelles perspectives, notamment en programmation objet avec le langage Java qui m'ont servi au développement de mes applications.

Je voudrais remercier mon cousin, Nourdine Rifaai, pour m'avoir gracieusement prêté ses bras et son esprit alors que je me trouvais submergé.

Mon camarade Merzouk Menhour a été pour moi une locomotive. Le voir s'atteler sans relâche à l'amélioration de son travail a fait de moi son émule et j'espère avoir obtenu sa reconnaissance, la mienne lui étant pleinement accordée.

Enfin, ce mémoire n'aurait pu aboutir sans l'accompagnement régulier et sans failles de mon directeur de recherche, M. Pierre Audibert, dont je salue la patience avec laquelle il m'a dirigé, supporté et encouragé.

Table des matières

Introduction	5
État de l'art	6
Présentation	7
1 Les symétries du carré et la formule de Burnside	10
1.1 Classes d'équivalences : la formule de Burnside	10
1.1.1 Classes d'équivalence des pavages du carré 4 x 4	11
1.1.2 Classes d'équivalence des pavages du carré 6 x 6	16
Conclusions	19
2 Graphes et calcul théorique du nombre de pavages	20
2.1 Graphe dual	20
2.2 Couplage parfait	20
2.3 Application de l'isomorphisme aux pavages du carré	22
2.3.1 Pavages invariants à une rotation de 180°	22
2.3.2 Pavages invariants à une rotation de 90°	24
2.4 Méthodes théoriques de calcul du nombre de pavages	27
2.4.1 Déterminant	27
2.4.2 Permanent	32
Conclusions	34
3 Pavages d'un carré invariants par symétrie	35
3.1 Pavages du carré invariants par les rotations à 90°	35
3.1.1 Carré de côté 4	37
3.1.2 Carré de côté 8	38
3.1.3 Application au carré de côté 12	40
3.1.4 Contraintes liées aux pavages de C_4	40
3.2 Pavages de l'échiquier écorné	41
3.3 Pavages du carré à trou central invariants à la rotation à 90° .	43
3.3.1 Contrainte du trou central	43
3.3.2 Carré 3 x 3	43

3.3.3	Carré 5 x 5	44
3.3.4	Carré 7 x 7	45
3.4	Pavages du diamant aztèque invariants à une rotation de 90° .	46
3.4.1	Diamant aztèque d'ordre 3	47
3.4.2	Diamant aztèque d'ordre 4	47
	Conclusions	48
4	Le « Dancing Links » (DLX)	49
4.1	Encodage particulier des contraintes	49
4.1.1	Planificateur de tâches	49
4.1.2	Encodage des contraintes	50
4.2	Implémentation	52
4.2.1	Algorithme primaire	52
4.2.2	Exécution	53
4.3	Application aux polyominos	55
4.3.1	Méthode	55
4.3.2	Exemple : pavage du rectangle 4 x 3	56
4.4	Les liens dansants	58
4.4.1	L'idée	58
4.4.2	La technique de Donald Knuth	59
4.4.3	Avantages et inconvénients	60
	Conclusions	62
5	Structures de données et optimisations	63
5.1	Représentations des pavages	63
5.2	Optimisations	65
	Conclusions	71
	Conclusion	72
	Table des figures	77
	Liste des tableaux	78
	Annexes	79

Introduction

Les problèmes de combinatoire traitent souvent de vastes ensembles. Il arrive régulièrement au chercheur d'être dépassé par la multitude de résultats, bien que parfois les règles qui régissent son problème sont en réalité très simples. C'est souvent le cas dans le domaine des pavages. Il apparaît des formes récurrentes lors de leur étude et il est alors justifié de vouloir réduire ces pavages – souvent très nombreux – à quelques représentants. Plus que de chercher les représentants d'un ensemble de pavages, nous nous intéresserons à la recherche de pavages particuliers, des pavages qui comprennent une certaine régularité.

La difficulté de ce thème réside dans le jugement qui doit être porté sur ces pavages. Comment pouvons-nous qualifier d'original un pavage plutôt qu'un autre, et ce de manière algorithmique ? Un problème aussi simple intuitivement est on ne peut plus ardu pour un ordinateur. L'idée que j'ai choisi de retenir est celle de l'harmonie des pavages auto-symétriques. L'oeil différencie très rapidement un motif répété d'un autre, plus aléatoire. Nous chercherons d'abord des moyens efficaces de détecter les 8 symétries du carré, puis de dénombrer les pavages auto-symétriques basées sur des carrés et sur des diamants aztèques de taille variable.

En premier lieu, nous verrons les différentes symétries du carré ainsi que la formule de Burnside dans le cadre du regroupement par classes des pavages similaires entre eux. Ensuite, nous ferons le parallèle entre les pavages et la théorie des graphes, permettant d'introduire deux méthodes théoriques pour le calcul du nombre de pavages basées sur un calcul de déterminant. Elles auront pour objet le graphe dual de l'échiquier à paver. Au chapitre suivant, nous confronterons les résultats théoriques obtenus grâce à ces formules avec des résultats expérimentaux afin de les valider. Nous effectuerons aussi une étude des contraintes liées à la symétrie interne des pavages. Enfin, les deux derniers chapitres de ce mémoire exposeront un algorithme adapté aux pavages sur un maillage carré – le Dancing Links, de Donald E. Knuth [7] – et des optimisations que j'y ai apporté pour accélérer l'obtention de résultats sur des problèmes plus spécifiques.

État de l'art

Les pavages font partie d'une classe de problèmes particuliers : les problèmes de couverture exacte ou de remplissage (*exact-cover problems*). Cette généralisation a permis de concevoir des outils de recherche automatique pouvant s'adapter à plusieurs formes de ces problèmes. Il peut s'agir de problèmes de coloration de cartes, de gestion de planning, etc. Le pavage consiste chaque fois à combler un plan à l'aide de formes élémentaires. Ce vaste sujet fait l'objet d'études permanentes et une très faible partie de ces problèmes ont été traités d'un point de vue combinatoire.

Les pavages les plus souvent rencontrés en combinatoire sont basés sur des maillages. Triangulaire, carré ou hexagonal, le maillage donne une certaine structure qui permet d'y trouver plus facilement une régularité, une récurrence et d'aboutir à une formule théorique permettant de les compter, voire de les énumérer.

Sur un maillage carré, les formes servant au pavage sont appelées polyominos et elles sont toutes composées de carrés. En fonction de leur nombre on les appelle dominos (2 carrés), triominos (3 carrés), tetrominos, pentominos, etc. De nombreux problèmes de pavage par des dominos ont été résolus. On cherche en général à savoir si le pavage est possible, de combien de manières on peut le faire, puis on étend à des problèmes plus complexes pour aboutir à une formule s'appliquant sur toute une classe de pavages.

Les premières recherches en combinatoire sur ce type de pavages sont marquées par les travaux de Kasteleyn [5] et ceux de Temperley et Fisher [9]. Ces travaux apportent une formule déterminant de façon exacte le nombre de pavages d'un rectangle par des dominos en fonction de sa taille. Cette formule prend la matrice d'adjacence K du graphe dual au damier, où les « 1 » correspondant aux arêtes verticales sont remplacées par l'imaginaire pur i . Le déterminant de cette matrice d'adjacence modifiée est alors donné par la formule suivante :

$$\det K = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n 2 \cos \frac{\pi j}{m+1} + 2i \cos \frac{\pi k}{n+1}$$

Le nombre de pavages N du rectangle est alors donné par la racine carrée de la valeur absolue de ce déterminant :

$$N = \sqrt{|\det K|}$$

Cette formule permet de s'abstenir du classique calcul de déterminant et représente donc un gain de temps conséquent. Un exemple est présenté dans

la partie 2.4. Nous présenterons quelques éléments de démonstration de cette formule. L'avantage d'une telle formule réside dans le problème rencontré le plus souvent dans ces recherches : l'explosion combinatoire. Une formule permet de s'abstenir des résultats expérimentaux qui sont parfois difficilement exploitables car le nombre de solution a tendance à augmenter exponentiellement avec la largeur du problème et le temps de calcul pour les obtenir augmente de la même façon. James Propp [13] montre une autre formule qui fonctionne pour les diamants aztèques de longueur paire. Propp [12] a de plus montré que l'on peut compter les pavages ayant des dimensions négatives.

Les différents aspects des pavages par des dominos, ou dimères, sont repris par R. Kenyon dans [6]. On trouvera une introduction courte dans un autre article vulgarisateur de Kenyon et Okounkov [14]. J. Propp résume dans son article [11] plusieurs problèmes de pavages résolus, dont des pavages à trous et des pavages sur un maillage triangulaire ou hexagonal. Par ailleurs, on cherche à déterminer le nombre de polyominos existants, ou à pouvoir les énumérer, y compris lorsqu'ils sont grands comme l'a fait M. Bousquet-Mélou [2] à travers une analogie avec des animaux. Enfin, citons un travail, dû à Kenyon et Sheffield [15], dont le mérite est de partir de solutions de pavages à base de dimères pour trouver la solution à d'autres problème plus généraux.

Présentation

Ce travail constitue un approfondissement de mon thème de maîtrise : les pavages à base de polyominos. Ce dernier consistait en l'étude de cas particuliers des pavages de rectangles en utilisant par exemple des dominos, des équerres, des « L » (cf. figure 1), etc. L'aboutissement de ce travail fut une méthode générale pour obtenir des fonctions génératrices pour ce type de pavage, ainsi qu'un programme (cf. figure 2) d'énumération des pavages d'une forme quelconque par tout type de polyomino.

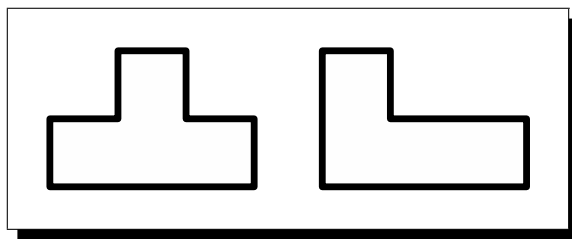


FIG. 1 – Tetraminos « T » et « L »

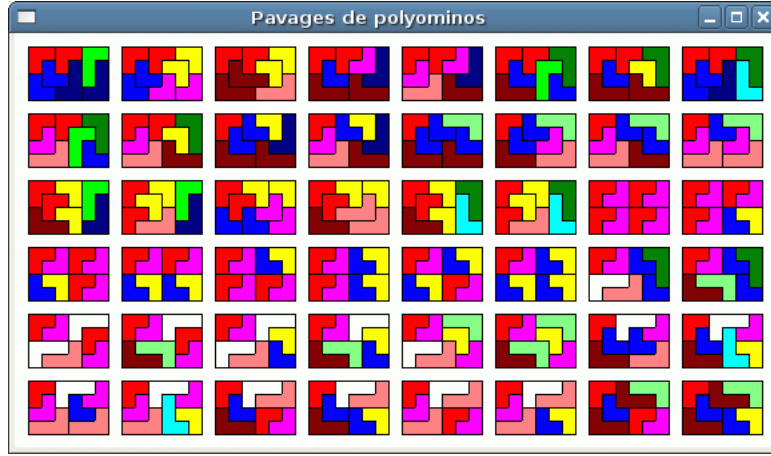


FIG. 2 – Aperçu du programme de recherche de pavages

Rappelons quelques résultats de ce mémoire. Le nombre de pavages par des dominos d'un rectangle $2 \times n$ est égal au terme $(n + 1)$ de la suite de Fibonacci dont la formule générale est :

$$F(n) = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\sqrt{5}}$$

$$\text{où } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Il y est aussi présenté la formule génératrice permettant d'obtenir le nombre de pavages à base de dominos et d'équerres d'un rectangle $2 \times n$:

$$g(x) = \frac{1 - x}{1 - 2x - x^3}$$

Puis la fonction génératrice correspondant aux mots de pavage des rectangles $3 \times n$ à base d'équerres et de tetramino « L ».

$$g(x) = \frac{1 - 2x + x^2 - 2x^5 - 4x^6 - 2x^8}{1 - 2x - x^2 + 4x^3 - 2x^4 - 10x^5 - 20x^6 - 12x^7 - 6x^8 - 8x^9 - 2x^{10}}$$

Une fonction génératrice permettant de différencier les deux types de polyominos est également présentée pour le même problème :

$$g(x; y) = \frac{1 - 2x - x^2 - 2xy^3 - 2y^6 - 4x^2y^3}{1 - 2x - x^2 - 20x^2y^3 - 10xy^3 - 6y^6 - 12x^3y^3 - 8xy^6 + 4x^3 - 2x^2y^6 - 2x^4}$$

Enfin, j'y montre comment le traitement de problèmes plus gros peut-être possible grâce à certaines simplifications pour obtenir la fonction génératrice des pavages du rectangle $4 \times n$ par des équerres :

$$g(x) = \frac{1 - 6x^{12}}{1 - 10x^{12} + 22x^{24} + 4x^{36}}$$

Et la fonction génératrice des pavages du même rectangle par des tetramino « T » (cf. figure 1) :

$$g(x) = \frac{1 - x^4}{1 - 3x^4}$$

L'apport de la symétrie à ce sujet permet d'une part de réduire la taille du problème à traiter par l'ajout de ces contraintes. Un sujet aussi vaste peut plus facilement être traité si on le scinde en thèmes plus précis. D'un autre point de vue, plus artistique, la symétrie rapproche de l'idée naturelle de la symétrie, l'idée d'équilibre qui revient régulièrement dans l'histoire des arts ornementaux. Nous chercherons à extraire ainsi des pavages plus harmonieux, mieux équilibrés, mieux balancés.

Nous étudierons d'abord des éléments théoriques permettant de résoudre le problème de l'énumération des pavages, que nous adapterons pour compter uniquement les pavages auto-symétriques.

Nous présenterons ensuite l'algorithme Dancing Links, plus rapide que d'autres que le backtracking utilisé dans cette précédente maîtrise. Nous verrons son utilisation et détaillerons son fonctionnement et ses atouts. Il nous permettra de confirmer les résultats théoriques obtenus et d'en fournir en plus.

Enfin, nous évoquerons quelques uns des programmes réalisés pour étayer ce mémoire d'expérimentations utilisant cet algorithme et quelques optimisations qui y ont été apportées.

Chapitre 1

Les symétries du carré et la formule de Burnside

Le principal problème apparaissant lors de l'énumération de pavages sur un treillis est leur multitude. Il est difficile d'étudier des objets aussi nombreux. Or, on remarque lors de l'étude de pavages qu'il existe une certaine similitude entre eux. Ce fait donne une véritable impression de redondance et c'est là l'intérêt de notre étude.

Afin de la faciliter, faisons le choix de réduire cette multitude de pavages à ceux qui sont fondamentalement différents entre eux. La notion de similarité, d'équivalence que nous utiliserons sera la symétrie. Ainsi, nous chercherons à résumer à un seul sujet les pavages équivalents entre eux par symétrie (groupe diédral) ou par rotation (groupe cyclique). Cela aura pour effet de regrouper en classes les pavages équivalents (*i.e.* qui découlent du même pavage par une transformation).

Nous allons aborder dans ce chapitre une méthode de calcul du nombre de classes d'équivalences pour un problème de pavage donné. Puisque tous les objets d'une classe d'équivalence reviennent au même, on pourra alors représenter l'ensemble des solutions à un problème de pavage par un nombre réduit de ces solutions. L'étude en sera facilitée.

1.1 Classes d'équivalences : la formule de Burnside

La formule de Burnside donne le nombre de ces classes d'équivalences, également appelées orbites. Soit un ensemble d'éléments et un groupe de transformations G . Afin d'utiliser cette formule, on doit être en mesure de donner le nombre d'éléments invariants à chaque transformation g de l'en-

semble G , soit le cardinal de l'ensemble S_g . La formule est la suivante :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S_g|$$

Chaque classe d'équivalence regroupe des pavages équivalents entre eux ; on dit qu'ils sont équivalents lorsqu'un seul élément de la classe peut générer tous les autres si on lui applique les transformations du groupe G . On peut donc définir un ensemble de pavages avec seulement un représentant par classe connaissant le groupe des transformations. Ainsi le nombre de classes que donne la formule de Burnside représente aussi le nombre de pavages suffisant à retrouver l'ensemble des pavages : nous les appellerons pavages originaux.

1.1.1 Classes d'équivalence des pavages du carré 4 x 4

Prenons l'ensemble des pavages du carré de côté 4 par des dominos, qui sont au nombre de 36 (cf. figure 1.1) pour montrer l'utilisation de la formule de Burnside.

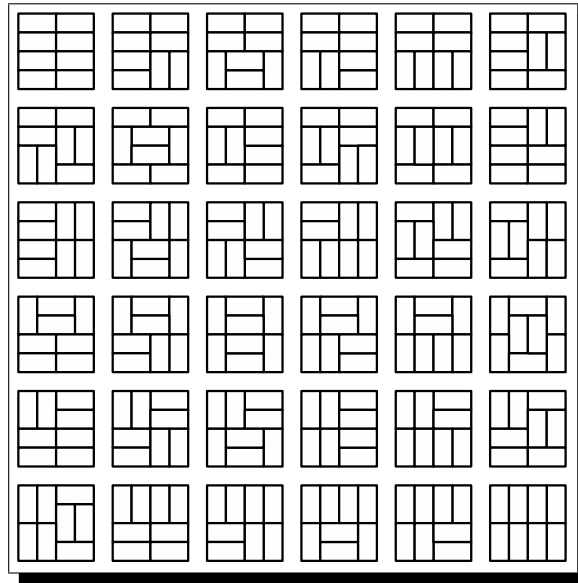


FIG. 1.1 – Les 36 pavages du carré de côté 4 par des dominos

Nous devons avant tout définir le groupe des transformations permettant de définir l'équivalence entre deux pavages. Chacune de ces transformations

changera un de ces pavages en un autre, l'échelle étant conservée. Parmi ces isométries, nous devons donc prendre celle qui ne changent pas le carré. Or, ces similitudes sont connues et au nombre de 8 ; il s'agit des 8 symétries du carré.

Ces transformations sont l'identité, les rotations à 90, 180 et 270 degrés, les symétries verticale, horizontale et les symétries suivant les 2 diagonales. Nous avons en tout 8 isométries que nous noterons respectivement $\{Id, R_1, R_2, R_3, V, H, D_1, D_2\}$. Pour une présentation plus générale de la notion de symétrie, le lecteur est invité à lire l'excellent ouvrage de H. Weyl [19] sur le sujet. La figure 1.2 donne un ensemble de pavages équivalents par ces transformations.

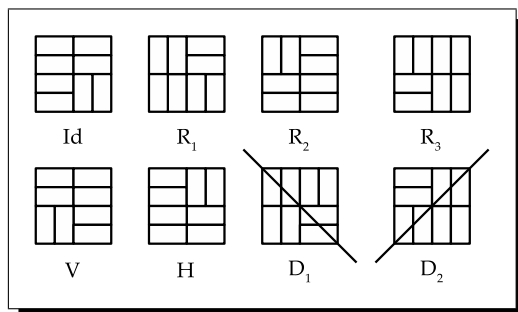


FIG. 1.2 – Pavages équivalents entre eux aux symétries du carré près

Il s'agit maintenant de trouver toutes les classes d'équivalences de l'ensemble des 36 pavages du carré de côté 4. Nous arriverons ainsi à partitionner cet ensemble en orbites qui formeront une partition comme le montre la figure 1.3.

Cette partition sépare en 9 parties l'ensemble des pavages, qui est aussi le nombre de pavages originaux, comme nous avons choisi de les nommer auparavant. Nous allons maintenant voir comment la formule de Burnside permet de déterminer le nombre de ces classes.

Notons S_g l'ensemble des pavages invariants par la transformation g de l'ensemble G . Comme aucun pavage ne subit de variation quand on lui applique l'identité, tous les pavages sont invariants à l'identité. L'ensemble S_{Id} est égal à l'ensemble de tous les pavages. Leur cardinal est donc le même.

Les transformations D_1 et D_2 transforment les dominos horizontaux du pavage en dominos verticaux et vice-versa. Ainsi, il est impossible qu'un pavage à base de dominos soit invariant à ces symétries. D'où :

$$|S_{D_1}| = |S_{D_2}| = 0$$

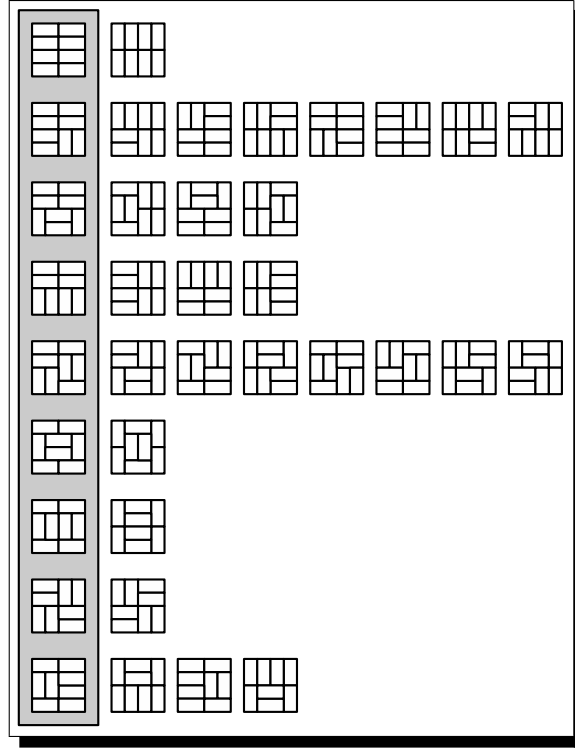


FIG. 1.3 – Pavages originaux du carré 4 x 4 et leur classe d'équivalence

Un groupe évident est celui des pavages invariants à une rotation d'un quart de tour. La seule possibilité est alors de découper le carré 4 x 4 en quatre carrés 2 x 2 symétriques les uns par rapport aux autres. Il suffit de paver un seul de ces carrés et de déduire les autres par symétrie, ce qui génère 2 pavages. Il en va de même pour la rotation de trois quarts de tour qui est un quart de tour en sens inverse. Ainsi nous avons :

$$|S_{R_1}| = |S_{R_3}| = 2$$

Maintenant voyons les pavages invariants à un demi-tour. Nous nous inspirons de la méthode employée dans un problème d'un cours de combinatoire de Michael Lang [8]. Ces pavages entrent dans 2 catégories : ceux qui se divisent en 2 rectangles 2 x 4 symétriques et les autres. Les premiers sont au nombre de 5 soit le nombre des pavages du rectangle 2 x 4, l'autre moitié étant déduite par symétrie. Les autres pavages ont obligatoirement au moins un domino entre ces 2 rectangles. La figure 1.4 représente toutes les possibilités de découper un de ces pavages. Chacun de ces 3 derniers découpages ne

correspond qu'à un seul pavage. Au total il existe 8 pavages soit :

$$|S_{R_2}| = 8$$

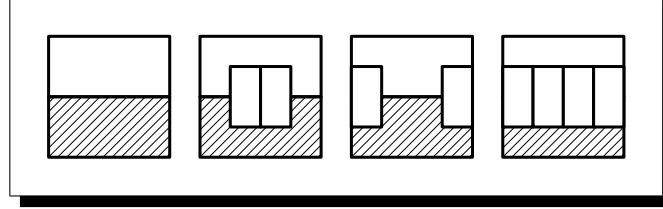


FIG. 1.4 – Découpage des pavages du carré 4 x 4 invariants à une rotation d'un demi-tour

Enfin il reste à étudier l'invariance de ces pavages à la réflexion par rapport l'axe horizontal et à l'axe vertical. Ces deux cas étant identiques, nous n'allons traiter que la réflexion horizontale. De la même manière, ces pavages se divisent en 2 catégories : ceux qui se découpent en 2 rectangles 2 x 4 symétriques et les autres. Les premiers sont encore au nombre de 5. Les autres peuvent être découpés selon une des formes représentées dans la figure 1.5. Les second et cinquième découpages de la figure admettent 2 pavages, les autres n'en ont qu'un seul. Au total il existe donc 12 pavages invariants à la symétrie d'axe horizontal ou vertical soit :

$$|S_H| = |S_V| = 8$$

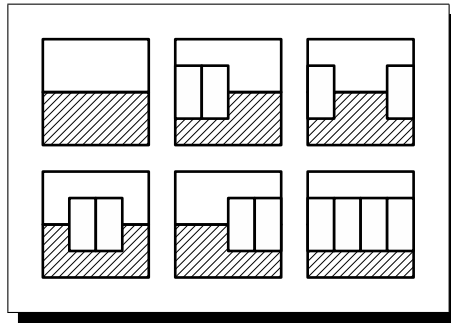


FIG. 1.5 – Découpage des pavages du carré 4 x 4 invariants à une réflexion horizontale

On peut vérifier ces résultats classant à la main chaque pavage. La figure 1.6 représente les ensemble de pavages invariants à chaque transformation de

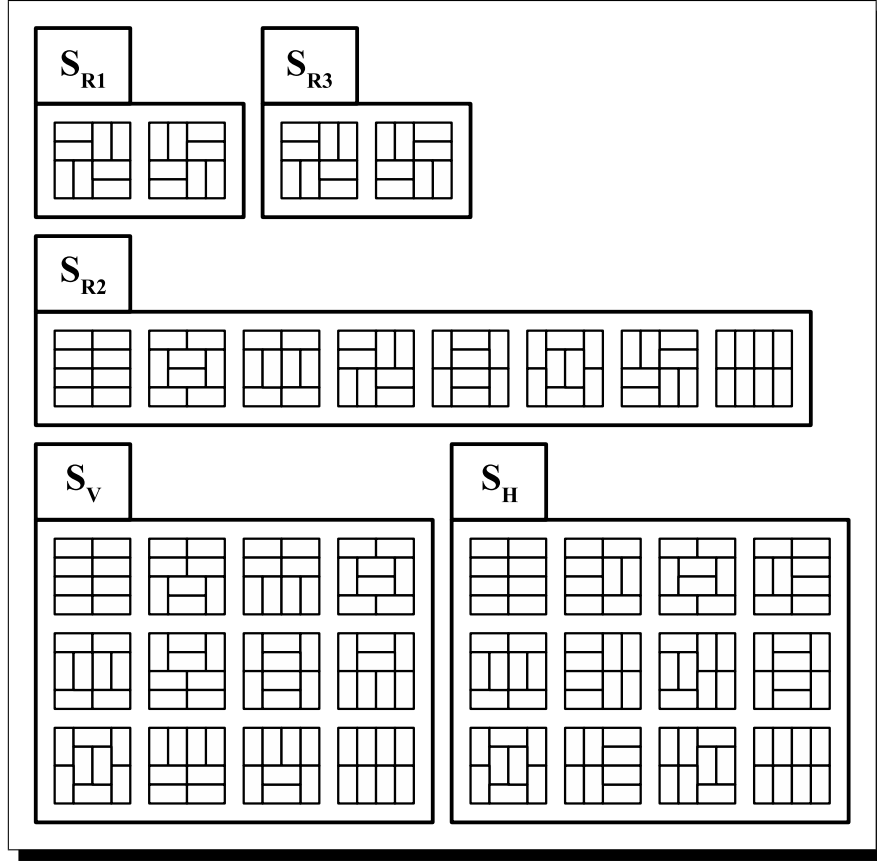


FIG. 1.6 – Ensembles d'invariance des pavages du carré 4 x 4 aux symétries du carré

G . Le groupe S_{Id} n'y est pas représenté puisqu'il s'agit de tous les pavages (cf. figure 1.1). Quand aux groupes S_{D_1} et S_{D_2} comme nous l'avons vu ils sont vides car aucun pavage à base de dominos n'est invariant à ces deux isométries. Les cardinaux des ensembles cités sont :

$$|S_{Id}| = 36, |S_{R_1}| = |S_{R_3}| = 2, |S_{R_2}| = 8, |S_V| = |S_H| = 12, |S_{D_1}| = |S_{D_2}| = 0$$

La formule de Burnside donne le nombre de classes d'équivalence à partir du cardinal de ces ensembles :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S_g| = \frac{1}{8} (36 + 2 + 8 + 2 + 12 + 12) = 9$$

1.1.2 Classes d'équivalence des pavages du carré 6 x 6

Prenons un autre exemple afin de mieux illustrer l'utilisation de la formule de Burnside : le carré de côté 6. Nous allons utiliser la formule pour trouver le nombre de classes d'équivalences qui seront obtenues.

Les carrés de côté non divisible par 4 ne peuvent être pavés de manière invariante à une rotation d'un quart de tour. La démonstration de cette propriété est donnée dans le chapitre suivant, aussi nous ne donnerons pas plus de détails ici. De plus, aucun pavage par des dominos ne peut être invariant aux symétries suivant les diagonales du carré. Nous avons donc :

$$|S_{R_1}| = |S_{R_3}| = |S_{D_1}| = |S_{D_2}| = 0$$

De plus, les pavages du carré 6 x 6 sont au nombre de 6728. C'est le cardinal de S_{Id} . Étudions maintenant les rotations restantes, à commencer par la rotation d'un demi-tour.

Les pavages du carré 6 x 6 invariants à un demi-tour peuvent être classés en 2 groupes : ceux qui sont constitués de 2 rectangles 3 x 6 symétriques l'un par rapport à l'autre et les autres qui ont un domino à cheval entre les 2 moitiés du carré.

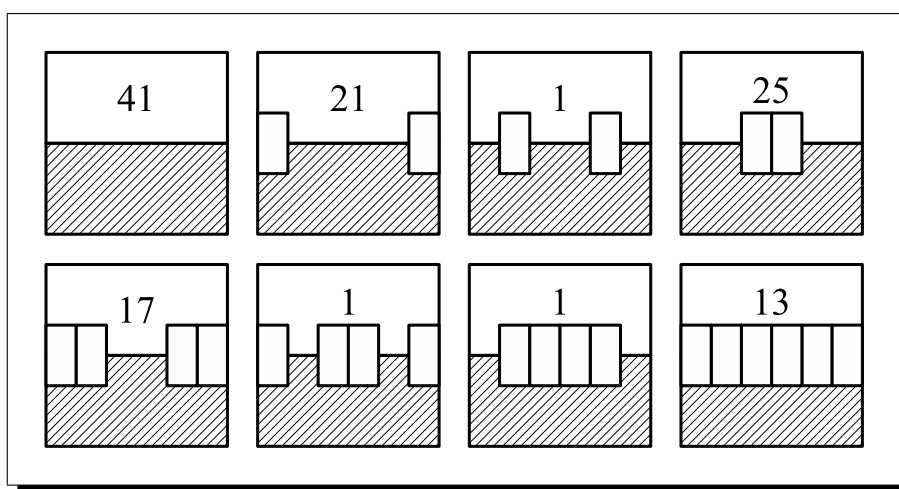


FIG. 1.7 – Découpages auxquels se conforment les pavages du carré 6 x 6 invariants à une rotation d'un demi-tour

Les premiers sont au même nombre que les pavages du rectangle 3 x 6, soit 41 pavages. Les autres suivent obligatoirement un des découpages présentés sur la figure 1.7 avec le cardinal correspondant à chaque ensemble. Pour obtenir le nombre de pavages du carré 6 x 6 qui sont invariants à une

rotation d'un demi-tour, il suffit de compter les pavages de chaque découpage individuellement comme nous l'avons fait pour le premier correspondant au rectangle 3 x 6.

Une fois énumérées les possibilités d'avoir des dominos entre les deux moitiés du carré, on compte le nombre de pavages de la surface libre d'une des moitiés et l'autre est déduite par symétrie. On voit sur la figure 1.8 quelques uns de ces pavages ainsi que le découpage auquel ils se conforment. On dénombre 79 pavages invariants à un demi-tour mais qui ne se décomposent pas en deux rectangles 3 x 6. Donc, il existe au total 120 pavages du carré 6 x 6 invariants à une rotation à 180° : $|S_{R_2}| = 120$.

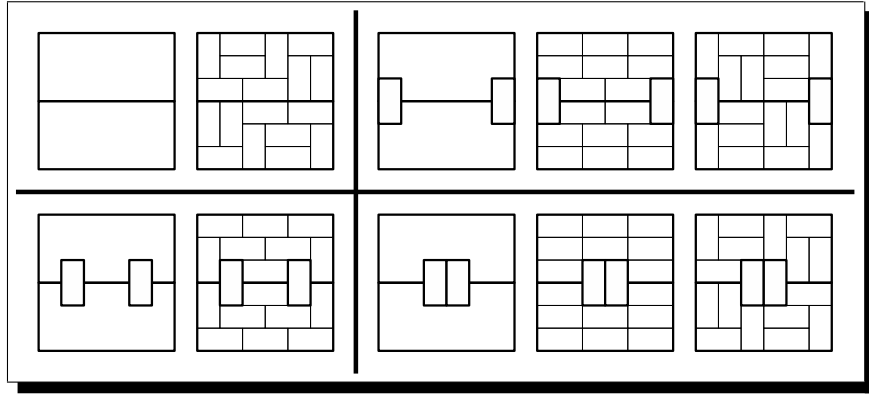


FIG. 1.8 – Exemple de pavages se conformant aux découpages de la figure 1.7

Enfin il reste à compter les pavages invariants à une réflexion horizontale qui sont au même nombre que ceux invariants à une réflexion verticale. La méthode est la même, les découpages sont au nombre de 17 et sont représentés sur la figure 1.9. Par exemple, il existe 41 pavages du carré 6 x 6 admettant cette symétrie qui se décomposent en deux rectangles 3 x 6 dont l'un est le reflet de l'autre. Le nombre de pavages est chaque fois reporté sur le découpage correspondant dans cette figure. Au total, on trouve 272 pavages du carré 6 x 6 invariants à la réflexion d'axe horizontal : $|S_H| = |S_V| = 272$.

Le nombre de classes d'équivalences des pavages du carré 6 x 6 par des dominos est égal à :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S_g| = \frac{1}{8} (6728 + 120 + 2 \cdot 272) = 924$$

Ce calcul nous informe qu'il y a 924 pavages originaux parmi les 6728 pavages du carré 6 x 6.

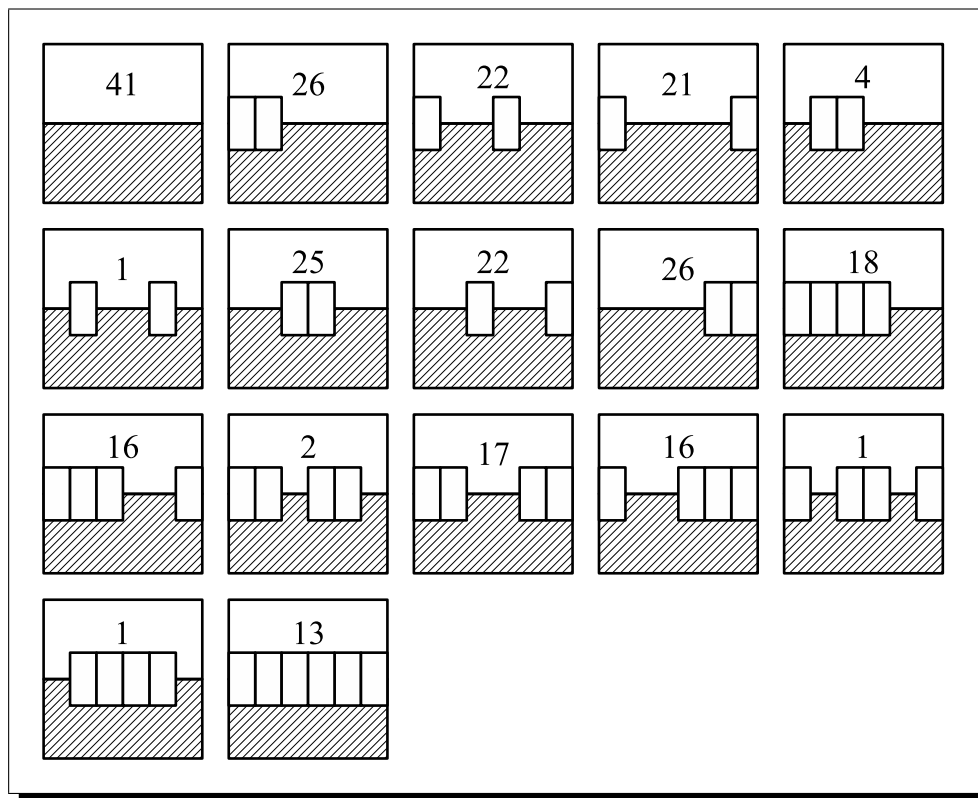


FIG. 1.9 – Découpages suivis par les pavages du carré 6 x 6 invariants à une réflexion horizontale

Conclusions

La formule de Burnside permet de savoir combien de classes d'équivalences il existe pour un problème de pavage donné. Ce nombre représente aussi les pavages originaux, donc intéressants. La plupart du temps, il n'existe aucun pavage qui soit invariant à plusieurs des symétries du carré, ce qui rend plus simple l'application de cette formule. Pour les autres, il faut encore trouver les divers découpages et rechercher leurs pavages de manière classique. Dans le chapitre suivant nous allons présenter des outils permettant de calculer théoriquement le nombre de pavages d'une forme particulière afin de s'abstenir de cette recherche.

Chapitre 2

Graphes et calcul théorique du nombre de pavages

Il est possible d'établir un parallèle entre les pavages de l'échiquier et les graphes. Cette nouvelle vue nous permet de disposer d'outils supplémentaire dans l'étude théorique de ces pavages. Dans ce chapitre, nous verrons comment s'effectue ce passage aux graphes et comment se traduit la symétrie dans le graphe. Enfin, nous présenterons par l'exemple deux méthodes – ainsi que des éléments de démonstration – de calcul théorique du nombre de pavages d'une forme quelconque, basée sur un maillage carré.

2.1 Graphe dual

Sur un échiquier on peut définir une notion de voisinage, ou connexité, telle que deux cases adjacentes horizontalement ou verticalement soient dites voisines l'une de l'autre. Le graphe dual de l'échiquier (fig. 2.1) représente cette connexité, en remplaçant chaque partie de l'échiquier – chaque case – par un sommet et leur relation de connexité par une arête joignant les sommets correspondant aux cases voisines.

Cet isomorphisme permet de pouvoir utiliser les nombreux outils de la théorie des graphes dans les problèmes de pavage sur un maillage carré. Dans le cas où seuls des dominos sont utilisés, on peut restreindre ce thème aux couplages parfaits de graphes bipartis.

2.2 Couplage parfait

On appelle graphe biparti un graphe dont les sommets peuvent être classés dans deux groupes de telle sorte qu'aucune arête ne relie deux éléments d'un

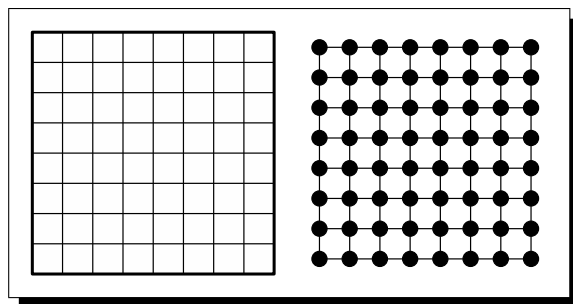


FIG. 2.1 – L'échiquier et son graphe dual

même groupe ensemble. Cette sorte de graphes est issue des problèmes de coloration dont le but était de colorer chaque sommet avec un certain nombre de couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même.

Prenons un échiquier dont nous considérerons chaque case comme un sommet. Nous pouvons construire un graphe biparti sur ces sommets. Remarquons d'abord qu'aucune case d'un échiquier n'a la même couleur qu'une de ses quatre voisines comme l'illustre la figure 2.2.

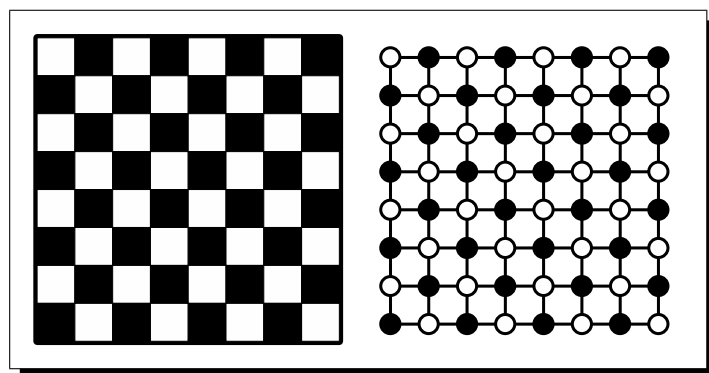


FIG. 2.2 – Coloration illustrant les deux parties de l'échiquier

En transformant cette relation de connexité en arêtes, il nous suffit de relier chaque sommet à ses quatre voisins. Ainsi nous pouvons étiqueter les sommets selon la couleur des cases qui leur correspondent et vérifier qu'ils sont séparés en deux groupes distincts : les sommets blancs et les sommets noirs. Aucune arête ne relie deux sommets blancs ou deux sommets noirs : ce graphe est biparti et c'est le dual de l'échiquier.

Quel que soit le domino que l'on place sur l'échiquier, il occupera forcément une case blanche et une case noire. L'action de paver avec des domi-

nos revient à partitionner l'échiquier en un ensemble de couples d'une case blanche et d'une case noire si l'on suit la même coloration.

Transposé au graphe dual, le pavage peut être représenté par un ensemble d'arêtes couvrant tous les sommets du graphe une seule fois. Chaque arête relie une case blanche à une case noire et représente un domino. Cet ensemble d'arêtes est un couplage parfait. Un exemple de couplage parfait est donné dans la figure 2.3.

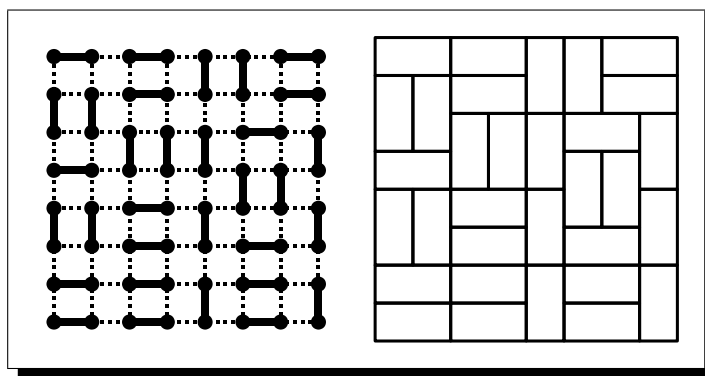


FIG. 2.3 – Exemple de couplage parfait et pavage associé

2.3 Application de l'isomorphisme aux pavages du carré

Nous pouvons maintenant aborder une autre manière de voir les pavages. Ce nouveau point de vue va nous permettre de simplifier les contraintes liées à la symétrie et les découpages n'émergeront que plus simplement.

Rappelons que tout pavage sur un maillage carré par des dominos peut être ramené à un problème de recherche des couplages parfaits sur un graphe biparti. Grâce à cet analogie, nous allons pouvoir déterminer par calcul le nombre de pavages à base de dominos en effectuant un calcul de déterminant comme nous le verrons par la suite.

2.3.1 Pavages invariants à une rotation de 180°

En cherchant à obtenir le nombre de classes d'équivalences d'un ensemble de pavages, nous avons été amenés à chercher les pavages invariants à une transformation donnée. Nous avons remarqué que les pavages suivaient pour

la plupart une décomposition simple, en deux ou en quatre pour les principales transformations. Cependant il a fallu ensuite trouver toutes les configurations de dominos qui n'admettaient pas cette décomposition. Considérer l'échiquier comme un graphe va nous permettre de simplifier ce problème.

Voyons l'exemple des pavages du carré 6 x 6 avec des dominos qui sont invariants à une symétrie de rotation à 180°. La figure 2.4 montre le découpage le plus simple – en deux moitiés symétriques – des pavages invariants à cette transformation.

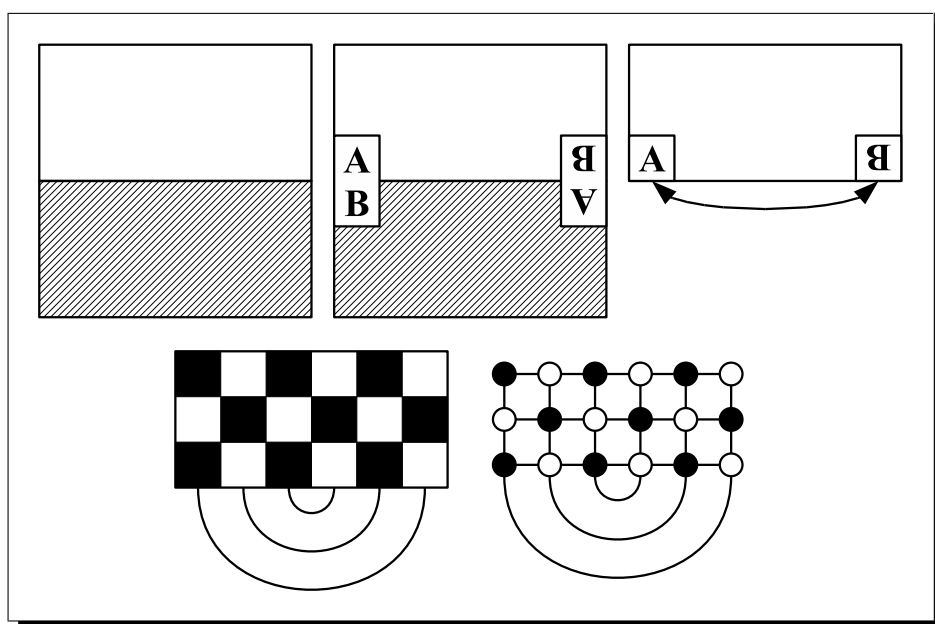


FIG. 2.4 – Simplification du découpage utilisant le graphe dual de l'échiquier

Ensuite, si l'on place un domino **AB** à cheval entre ces deux moitiés on obtient un nouveau découpage. Nous sommes obligés, en plaçant le domino **AB**, de placer son symétrique. L'idée est de considérer ces deux dominos comme un seul dans lequel ils seraient confondus. Cela nous permet de ne plus avoir à travailler qu'avec la moitié du damier. On peut remarquer que ce lien qu'apporte la symétrie se généralise pour toutes les cases du bord découpé. On peut donc lier ces cases deux à deux comme le montre le quatrième dessin de la figure 2.4. Enfin, en reprenant le graphe dual de l'échiquier, on peut constater comme il est aisé de le séparer en deux moitiés et d'ajouter ces arêtes au bord. Dans la matrice d'adjacence de ce graphe, ces arêtes spéciales ne sont plus que des coefficients, donc les méthodes classiques liées aux graphes s'adaptent parfaitement à ce problème.

2.3.2 Pavages invariants à une rotation de 90°

Dans le cas de la symétrie de rotation à 90° , ce graphe devient encore plus petit par rapport au graphe initial. Soient, par exemple, les pavages du carré 8×8 invariants à cette symétrie. Parmi ces pavages nous pourrions en trouver qui se décomposent en quatre quarts. En plaçant un domino et ses symétriques en travers de la décomposition en quarts – comme le montre la figure 2.5 – on voit que les cases qui sont liées sont beaucoup plus proches que pour la rotation à 180° . On voit également que le graphe se minimise encore plus puisqu'il est divisé en quatre.

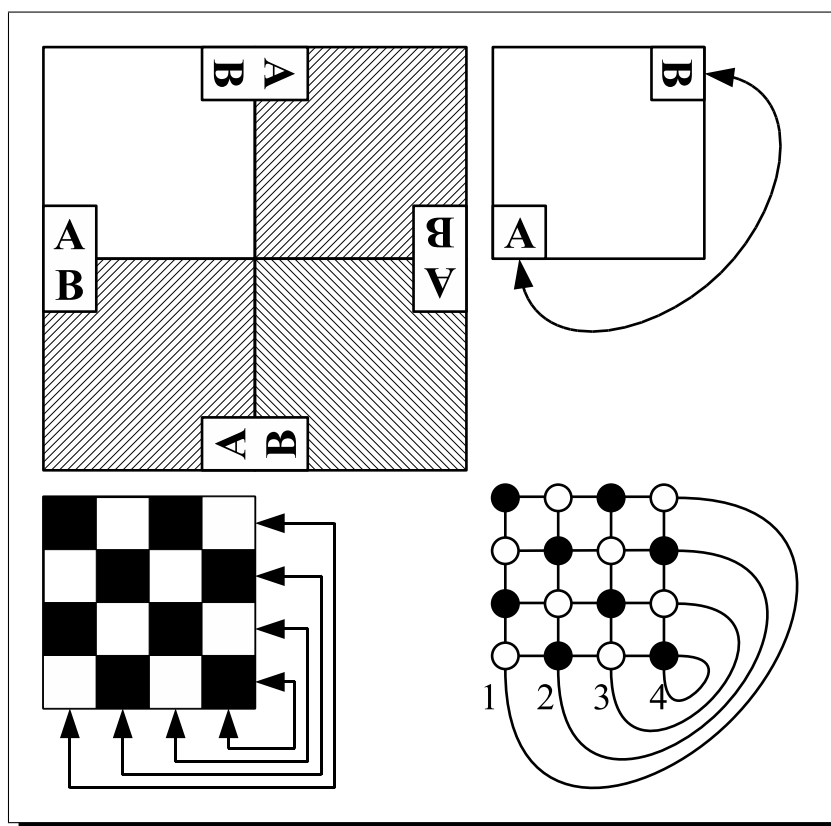


FIG. 2.5 – Graphe dual du damier symétrique

L'apport de la symétrie simplifie le problème. Ces arêtes montrent comment plusieurs cases de l'échiquier peuvent être liées entre elles. Elles rendent visibles les contraintes liées à la symétrie ce qui facilite l'énumération des découpages.

Il faut faire attention à ne pas prendre ces arêtes pour des parties du graphe. Elles ne nous serviront qu'à trouver plus facilement les découpages

des pavages invariants à une transformation donnée. Le graphe incluant ces arêtes n'est pas toujours un graphe biparti, il est alors hors de question de chercher des couplages et donc d'utiliser les outils mathématiques associés aux problèmes de couplage.

Nous allons maintenant voir que toutes ces arêtes ne sont pas forcément utiles. Numérotions de 1 à 4 les arêtes ajoutées dans le graphe, à partir de l'arête reliant les coins vers l'arête la plus au centre.

Il est clairement visible que l'on ne peut pas mettre de dominos au centre car alors ils se confondraient. Cela reviendrait à prendre dans le graphe l'arête numérotée 4 qui lie un sommet avec lui-même.

De même, l'arête 3 peut être éliminée de manière évidente. Si on incluait l'arête 3 dans l'ensemble d'arêtes, on ne pourrait alors pas remplir le sommet central sans utiliser l'arête 4. Prendre l'arête 3 mène forcément à une contradiction.

Il ne reste que les arêtes 1 et 2 et une contrainte supplémentaire que nous n'avons pas évoqué. Le graphe est maintenant composé du quart du graphe original, ainsi que des arêtes 1 et 2. Pour obtenir les découpages des pavages invariants à un quart de tour, nous devons énumérer les combinaisons possibles de ces deux arêtes.

D'abord, si nous ne prenons ni l'arête 1, ni la 2, on revient au découpage initial : en quatre carrés de longueur 4. Si maintenant nous décidions de ne prendre qu'une seule d'entre elles, l'arête 1 ou l'arête 2, on voit que le graphe restant n'aurait plus autant de sommets blanc que de sommets noirs. Il n'y a plus de bijection entre les cases blanches et les cases noires. Par conséquent le couplage devient impossible. Nous devons donc prendre conjointement les arêtes 1 et 2. De manière générale, nous verrons qu'il faudra veiller à garder dans ces combinaisons l'égalité de cases blanches et noires. La figure 2.6 illustre la procédure que nous venons d'évoquer.

Nous allons maintenant discuter des éléments de théorie des graphes qui vont nous permettre de calculer le nombre de pavages à partir du graphe dual.

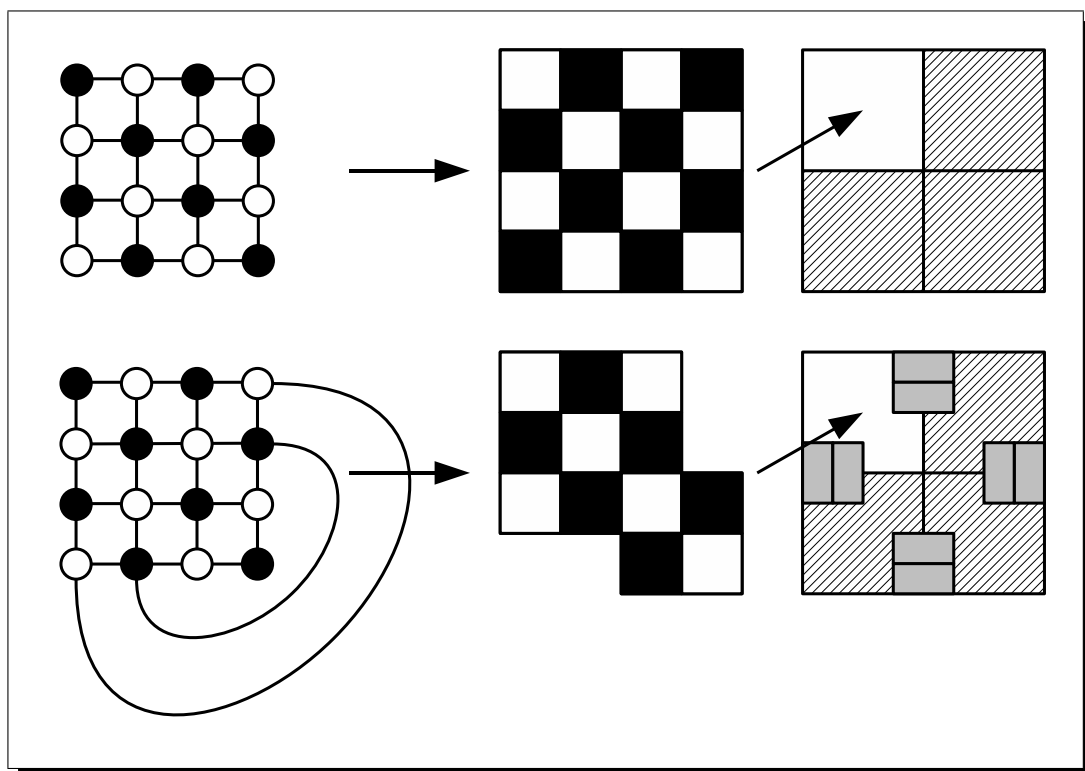


FIG. 2.6 – Découpages du carré 8 x 8

2.4 Méthodes théoriques de calcul du nombre de pavages

2.4.1 Déterminant

La première méthode de dénombrement de pavages par des dominos utilise le calcul du déterminant d'une matrice particulière. Rappelons d'abord que la matrice d'adjacence d'un graphe est carrée, de dimensions égales au nombre de sommets du graphes ou de cases de l'échiquier et dont les éléments a_{ij} sont nuls sauf si les cases i et j sont voisines.

La matrice dont nous devons calculer le déterminant se déduit de cette matrice d'adjacence, à la différence que des 1 représenteront les arêtes horizontales (ou dominos horizontaux) et l'imaginaire pur i les arêtes verticales (ou dominos verticaux). Ainsi nous ferons la différence entre les dominos verticaux et les dominos horizontaux comme l'illustre R. Kenyon dans son article [6].

Prenons l'exemple d'un échiquier de longueur 4 avec un coin en moins comme représenté sur la figure 2.7 pour montrer la méthode du déterminant.

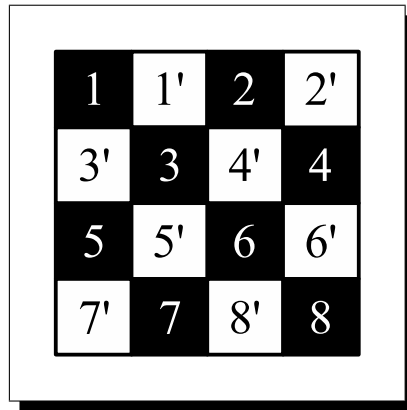


FIG. 2.7 – Échiquier 4 x 4

Dans la matrice d'adjacence, à chaque sommet du graphe, ou de case de l'échiquier correspond une ligne et une colonne de la matrice. Peu importe l'ordre dans lequel les sommets sont associés aux couples ligne-colonne. Dans la matrice d'adjacence suivante, les lignes (resp. colonnes) sont associées dans l'ordre aux cases 1, 2, ..., 7, 8, 1', 2', ..., 7', 8'. La numérotation en N, N' va donc nous servir à arranger la matrice d'adjacence de sorte à simplifier le calcul du déterminant qui prend alors la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$$

Grâce au choix de cet ordre, la matrice d'adjacence peut se décomposer en quatre matrices de dimensions égales. Rappelons que le graphe dual de l'échiquier est biparti et que chacune de ses arêtes relie une case blanche à une case noire. Ainsi toutes les arêtes relient toujours un sommet numéroté M à un autre numéroté N' . C'est pourquoi deux de ces sous-matrices sont nulles.

Les autres parties sont symétriques l'une à l'autre car elles traduisent les liaisons dans un sens et dans l'autre de deux sommets : on retrouve les arêtes en double. Le calcul du déterminant de cette matrice d'adjacence est ramené au calcul de la seule matrice A détaillée ci-dessous pour notre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le développement de ce déterminant sous Mathematica donne :

$$\det A = 1 - 9i^2 + 16i^4 - 9i^6 + i^8$$

Cela signifie qu'il existe 9 pavages de cette forme avec 2 dominos verticaux (les autres étant horizontaux), 16 pavages ayant 4 dominos verticaux, ... Au total, on dénombre 36 pavages de l'échiquier écorné de longueur quatre. Le nombre de pavages est égal au module du déterminant de cette matrice.

Cette méthode peut fonctionner pour de nombreux autres problèmes. Cependant, le calcul du déterminant de A devient vite fastidieux lorsque les dimensions augmentent. Il n'existe pas de formule générale pour cela. On préfère alors utiliser la matrice d'adjacence M du réseau carré dans le rectangle, ou plutôt la matrice M avec les arêtes verticales pondérées par i . On sait en effet qu'un tel réseau est la somme de deux graphes segments. On trouvera un exemple de raisonnement sur un graphe somme dans l'article de Sellers [16].

On profite du fait que l'on connaît les valeurs propres de la matrice du graphe segment de n sommets notée λ :

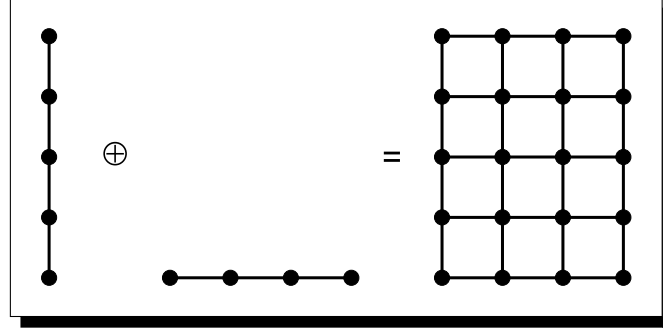


FIG. 2.8 – Exemple de graphe somme de deux graphes segments

$$\lambda = 2 \cos \frac{q \cdot \pi}{n+1}$$

Et l'on utilise le fait que le graphe somme a pour valeurs propres la somme de chaque valeur propre du graphe segment avec chaque valeur propre de l'autre segment, soit :

$$\lambda_{jk} = 2 \cos \frac{j\pi}{m+1} + 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}$$

Pour avoir le déterminant de M, il suffit de diagonaliser la matrice. Le déterminant est alors le produit des valeurs propres λ_{jk} (j allant de 1 à m, k de 1 à n). D'où la formule :

$$\det M = \prod_{j,k} \lambda_{jk}$$

Nous venons de retrouver la formule trouvée de Kasteleyn qui donne dans son article [5] la preuve qu'elle est utilisable pour compter les pavages par des dominos d'un rectangle de taille M x N quelconque. Elle reste néanmoins plus puissante car elle fonctionne pour d'autres problèmes plus exotiques, comme le pavage de l'échiquier 5 x 5 auquel on retire un coin (cf. figure 2.9).

La matrice d'adjacence associée à l'échiquier écorné de longueur 5 est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le développement du déterminant de M est $9i^2 - 48i^4 + 78i^6 - 48i^8 + 9i^{10}$. Le nombre de pavages de l'échiquier écorné étant le module de ce déterminant, on trouve 192 pavages.

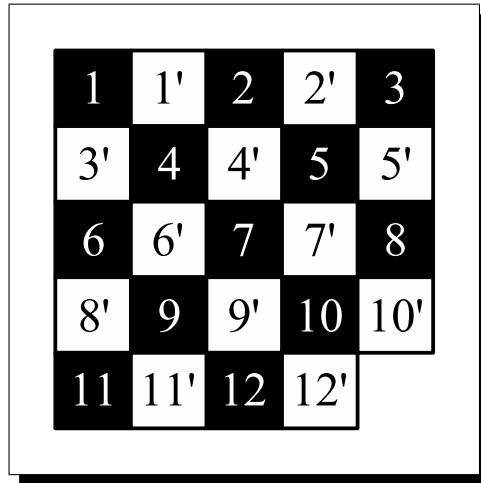


FIG. 2.9 – Numérotation des cases de l'échiquier écorné de longueur 5

Nous ne détaillerons pas le calcul du déterminant de la matrice d'adjacence associée à l'échiquier écorné de longueur 7, mais donnerons seulement le développement de cette matrice :

$$-64i^3 + 960i^5 - 5536i^7 + 16288i^9 - 27328i^{11} + 27328i^{13} - 16288i^{15} + 5536i^{17} - 960i^{19} + 64i^{21}$$

Développement dont le module nous donne le nombre total de pavage qui est de 100352.

Voyons un exemple pour lequel la formule de déterminant montre une défaillance : le carré de longueur trois dont on retire la case centrale. Une numérotation possible des cases est donnée dans la figure 2.10.

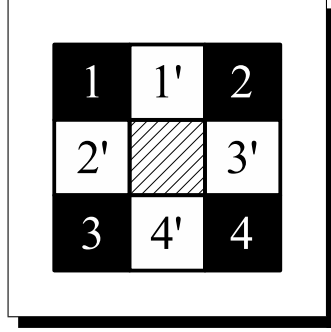


FIG. 2.10 – Numérotation des cases de l'échiquier sans centre de longueur 3

Sa matrice d'adjacence où les arêtes verticales sont notées i est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

Développons le calcul de son déterminant :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{vmatrix} \\ \det A &= \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix} \\ \det A &= i \begin{vmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

D'où $\det A = i^2 - i^2 = 0$. On voit que le changement de signe du calcul du déterminant peut parfois provoquer l'annulation de termes et fausser le calcul. C'est pourquoi nous allons présenter un outil plus fastidieux mais néanmoins plus fiable, le permanent.

2.4.2 Permanent

La seconde méthode, dite du permanent, permet de s'affranchir de l'utilisation des nombres complexes. De plus, il n'y a pas d'alternance de signe dans le calcul du permanent, contrairement à celui du déterminant. Comme auparavant, nous noterons les cases N ou N', selon qu'elles soient blanches ou noires. Prenons cette fois l'exemple de la forme représentée figure 2.11.

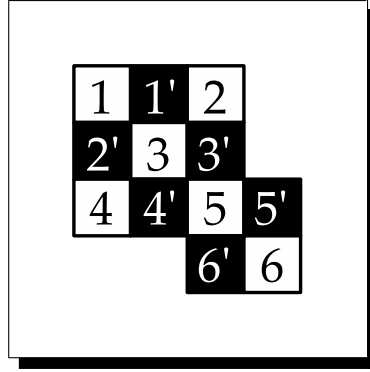


FIG. 2.11 – Numérotation biparti des cases

Nous utilisons le même ordre pour la numérotation des cases et l'organisation des lignes et des colonnes. Ainsi la matrice est encore à moitié nulle et le calcul du permanent revient – comme pour le déterminant – au calcul sur la sous-matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le permanent de la matrice représente tous les couplages possibles. Il est calculable par la formule suivante :

$$per(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

En décortiquant la formule, on se rend compte qu'il s'agit de trouver toutes les combinaisons de 1 de la matrice de façon à ce qu'il n'y en ait qu'un par ligne et par colonne et que chaque ligne et colonne en comprenne un.

En effet, pour chaque combinaison de n éléments de la matrice répartis dans des lignes et colonnes différentes, si leur produit est égal à 1, alors il existe un pavage correspondant et il est compté dans la somme. Par exemple, la combinaison suivante traduira le pavage de la figure 2.12.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

En l'occurrence, le permanent de cette forme nous indique qu'elle peut-être pavée de 8 façons.

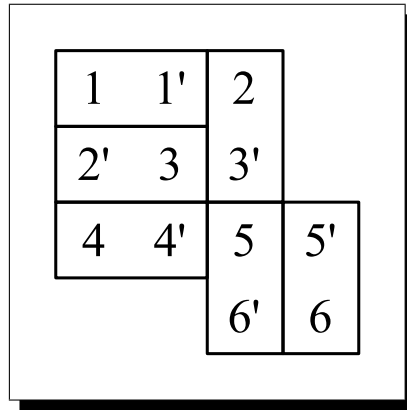


FIG. 2.12 – Exemple de pavage correspondant à une combinaison symétrique d'une matrice donnée

Pour approfondir sur le calcul théorique du nombre de pavages de rectangles par des dimères, le lecteur pourra se porter vers une partie du livre de J. K. Percus [10] qui traite de 4 méthodes différentes.

Conclusions

L'utilisation du graphe dual de l'échiquier nous a permis de simplifier la vue du problème des pavages invariants à une symétrie. Cette nouvelle vision a simplifié la recherche de leurs découpages. En effet, il est devenu possible de l'automatiser. Enfin, la matrice d'adjacence issue de la numérotation biparti des cases a rendu le calcul des pavages de ces découpages immédiat grâce aux formules citées. Et bien que le permanent nécessite une recherche exhaustive, il complète la formule du déterminant qui n'a été prouvée que pour les rectangles. Dans le chapitre suivant nous allons voir au travers d'exemples les contraintes qu'impliquent les symétries sur divers types de pavages.

Chapitre 3

Pavages d'un carré invariants par symétrie

L'apport de la symétrie impose certaines règles dans la construction des pavages. Une fois ces contraintes énumérées dans le cas de la symétrie de rotation à 90 degrés, nous en verrons trois applications assez variées. Nous aborderons à travers ces exemples des cas qu'il n'est pas possible de traiter de manière automatique, ni aussi simplement que nous l'avons fait dans le chapitre précédent pour les pavages carrés.

3.1 Pavages du carré invariants par les rotations à 90°

Le carré admet 8 symétries : 4 symétries de rotation et 4 symétries d'axe. C'est-à-dire qu'il est invariant selon ces 8 transformations. Ce sont, rappelons-le, l'identité, les symétries de rotation à 90, 180 et 270 degrés, les symétries d'axe vertical et d'axe horizontal et les deux symétries diagonales.

Certains pavages du carré admettent certaines de ces symétries. Ils y sont alors invariants. Cette caractéristique de pouvoir être tourné, retourné, réfléchi sans pour autant changer donne souvent un aspect agréable au pavage.

En effet, la symétrie provoque une répétition dans le dessin du pavage et on y retrouve un motif. C'est pourquoi il est intéressant d'étudier ces symétries. Nous ne nous attacherons qu'à la symétrie de rotation à 90°, les autres ayant été évoquées dans le chapitre consacré à la formule de Burnside.

Les objets invariants à cette transformation forment ce qu'on appelle le groupe cyclique C_4 . Ce groupe contiendra donc exclusivement des pavages qui présentent une telle symétrie interne.

Si nous essayons de paver le carré en respectant cette symétrie, il nous faudra chaque fois placer quatre dominos de façon symétrique. Au final, le pavage sera composé d'un nombre de dominos multiple de 4, ce qui impose au carré d'avoir un nombre de cases multiple de 8. Par extension, les seuls carrés pouvant être remplis par des dominos doivent avoir un côté dont la longueur est multiple de 4.

Cela peut-être prouvé simplement, pour un carré de côté c et de surface S , la condition est la suivante :

$$S = c^2 = 8k \text{ et } k \in \mathbb{N}$$

Le développement du nombre c^2 doit donc contenir $8 = 2^3$. Or, un carré se décompose uniquement en termes de degrés pairs. Par exemple :

$$(a^2b^3c)^2 = a^4b^6c^2$$

Ainsi, le développement de c^2 comprendra au moins le terme de degré pair immédiatement supérieur à 2^3 soit :

$$S = c^2 = 2^4p \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } c = 4n \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Ainsi, les carrés de côté 4, 8, 12 par exemple peuvent être remplis de cette manière. Quelque soit le carré, il sera possible de le paver de façon à ce qu'il puisse être découpé en quatre, ce qui permet de trouver une partie évidente des pavages.

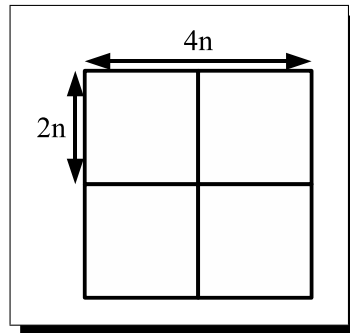


FIG. 3.1 – Décomposition du carré en quarts

Comme l'illustre la figure 3.1, les carrés que nous pourrions paver de façon à conserver une symétrie à 90 degrés auront une longueur multiple de 4. Il est donc toujours possible de les décomposer en carrés de côté multiple de 2,

qui ont un nombre pair de cases et peuvent donc être pavés en utilisant des dominos.

Il est possible de ramener les pavages invariants sous l'effet du groupe C_4 à des problèmes de pavage simples. Comme nous l'avons dit, les carrés que nous pouvons paver peuvent être découpés en quatre carrés de côté pair. Nous pouvons alors remplir le premier carré et déduire les trois autres par symétrie.

Ensuite nous chercherons tous les pavages qui n'entrent pas dans ce découpage, c'est-à-dire tous les pavages pour lesquels il existe un domino qui soit sur deux de ces carrés à la fois. Voyons en quelques exemples comment cette opération est possible.

3.1.1 Carré de côté 4

Comme nous venons de le voir, on peut trouver des pavages du carré 4×4 qui appartiennent au groupe C_4 . La solution évidente est de le couper en quatre parties égales et symétriques : des carrés 2×2 . Ainsi, comme le montre la figure 3.2, il suffit de paver le premier de ces carrés et de déduire les autres par symétrie. Nous avons trouvé 2 façons de le paver.

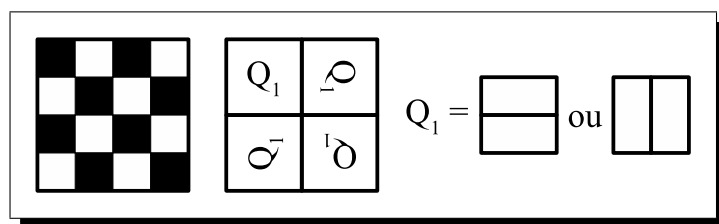


FIG. 3.2 – Découpage du carré 4×4 en carrés 2×2

Le jeu consiste désormais à trouver tous les pavages qui n'entrent pas dans cette classe, à condition qu'il en existe. Il suffit pour cela de placer un domino qui soit à cheval sur deux de ces carrés. Montrons que cela est impossible dans le cas du carré 4×4 .

La figure 3.3 montre que les deux façons de passer outre le premier découpage sont impossibles, l'une car elle bloque alors des carrés unitaires aux coins et l'autre par l'impossibilité de placer les 3 symétriques du domino qui se confondraient.

Le seul découpage valide étant celui en carrés 2×2 , le nombre de pavages symétriques du carré 4×4 est égal au nombre de pavages du carré 2×2 , soit 2.

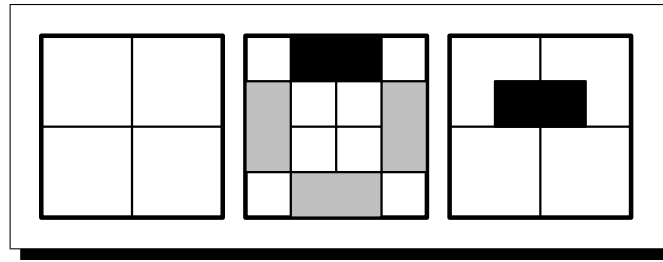


FIG. 3.3 – Découpage du carré 4 x 4 et violations du découpage

3.1.2 Carré de côté 8

Partons du découpage en quarts, comme nous l'avons fait auparavant. Ce groupe contient 36 pavages qui correspondent aux pavages du carré 4 x 4. Cependant ce groupe ne permet pas d'obtenir tous les pavages du carré 8 x 8. Dans ce cas il existe des pavages pour lesquels un domino est placé entre deux quarts.

Centrons-nous sur le premier quart et étudions les différentes manières de placer un domino de façon à déborder du carré. On peut le mettre horizontalement sur le côté droit de la première à la quatrième ligne. Symétriquement, un domino vertical sera placé sur le côté inférieur du carré de la première à la quatrième colonne. On peut également procéder à des combinaisons de ces dominos.

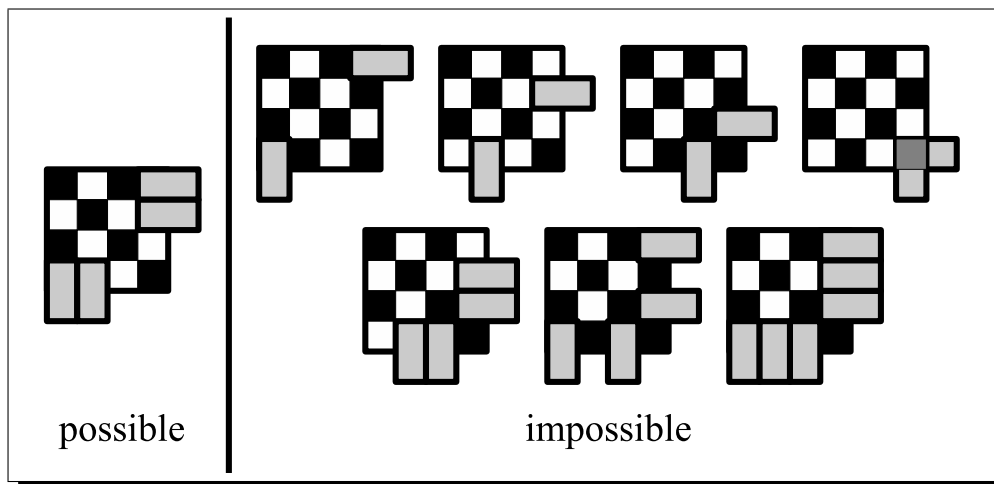


FIG. 3.4 – Chevauchements du découpage du carré 8 x 8

La figure 3.4 montre les différentes façons de placer des dominos en travers

du découpage, qu'elles soient possibles (à gauche) ou impossibles (à droite). Voyons pourquoi les 7 situations de droites sont impossibles.

Dans la première ligne, chaque domino occupe soit une case blanche, soit une case noire. Quand à son symétrique, il occupe une case de la même couleur. Le fait de placer un domino et son symétrique retirent du carré 2 cases de même couleur. Le nombre de cases noires n'étant plus égal au nombre de cases blanches, le restant du carré 4×4 est impossible à paver. Cela vaut aussi pour les deux derniers cas de la seconde ligne, où le fait de ne prendre que des cases blanches pour l'un, et de placer un nombre impair de dominos pour l'autre invalide l'équité des cases blanches et noires. Notons le cas particulier du domino qui, placé au centre, se confond avec son symétrique.

De manière générale, les dominos doivent être placés par paire à cheval sur deux quarts du damier et répartis également entre cases blanches et cases noires, car dès que l'on en place un, on doit obligatoirement rééquilibrer avec un autre domino sur une case de la couleur opposée.

Il ne reste plus qu'à aborder le premier cas impossible de la seconde ligne. On voit que ces dominos entourent le centre du carré. Or, on ne peut pas placer de domino au centre comme nous l'avons vu, car il se confondrait avec ses symétriques. Il est donc impossible de passer à travers du découpage à cet endroit. Cela implique que le centre du carré 8×8 suivra toujours le découpage et donne les 2 seules configurations du centre représentées dans la figure 3.5.

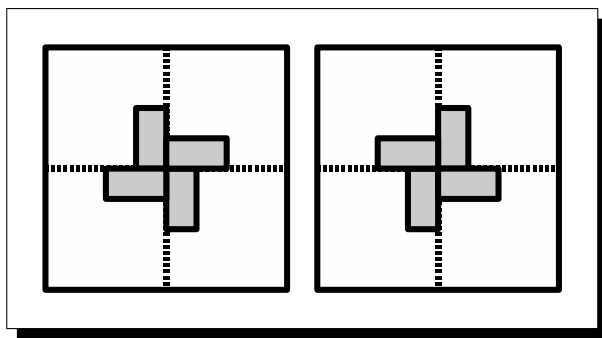


FIG. 3.5 – Seules configurations centrales possibles

En pavant le seul découpage possible, on trouve qu'il existe 8 pavages qui ne se découpent pas en quatre carrés symétriques, donc il y a en tout 44 pavages du carré de longueur 8 qui sont invariants à une symétrie de rotation à 90° .

3.1.3 Application au carré de côté 12

Le carré 12 x 12 peut être pavé car il répond à la première condition énoncée (12 est multiple de 4). De même, il peut être découpé en carrés de côté 6. Le nombre de pavage par des dominos du carré 6 x 6 est de 6728 ce qui constitue une borne inférieure au nombre de pavages symétriques du carré 12 x 12.

Étudions maintenant les pavages qui n'entrent pas dans ce découpage. La figure 3.6 montre les différents découpages possibles. Chaque fois les dominos sont placés par deux en gardant égaux les nombres de cases blanches et de cases noires. Ainsi, les pavages qui ne peuvent être coupés en quarts ont des dominos placés de la même manière que sur un des 5 découpages.

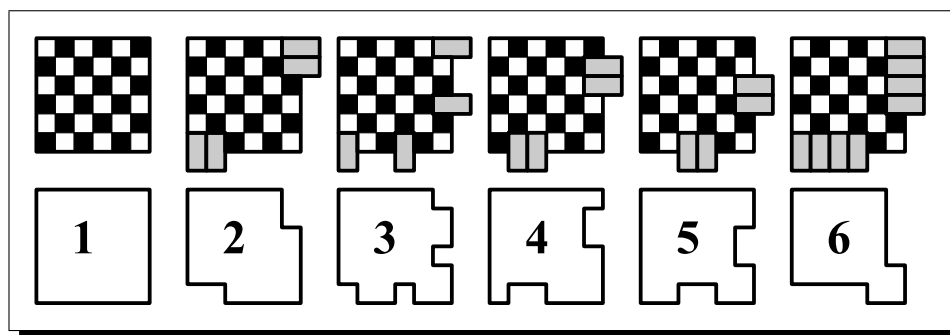


FIG. 3.6 – Découpages du carré 12 x 12

Au final, pour obtenir le nombre de pavages du carré 12 x 12 appartenant à C_4 , il suffit de chercher le nombre de pavages par des dominos de chacune des formes 1 à 6. Le tableau 3.1 donne la solution pour chaque forme. Le nombre total de pavages est de 10392.

Forme à paver	1	2	3	4	5	6	Total
Nombre de pavages	6728	1632	448	192	1008	384	10392

TAB. 3.1 – Nombre de pavages de chaque découpage du carré 12 x 12

3.1.4 Contraintes liées au pavages de C_4

Au long de cette étude, nous avons découvert quelques contraintes sur les pavages du carré appartenant à C_4 :

1. Le côté du carré doit être multiple de 4. Cela implique que le carré peut être découpé en quarts de côtés pairs qui peuvent être pavés par des dominos.
2. Les pavages du carré se décomposent en 2 catégories : les pavages qui peuvent être coupés en 4 carrés égaux et ceux qui ne peuvent pas l'être. On connaît le nombre d'éléments du premier groupe, ce qui permet d'avoir une estimation inférieure – un minorant – du nombre de pavages du groupe C_4 .
3. Les pavages qui passent à travers le découpage ont un nombre pair de dominos à cheval. Ces dominos sont également répartis entre cases blanches et cases noires. Les dominos du centre doivent toujours n'appartenir qu'à un seul des quarts du carré.

Le tableau 3.2 résume le nombre de pavages du carré en fonction de sa taille.

taille	4	8	12	16
nombre	2	44	10 392	25 501 968

TAB. 3.2 – Nombre de pavages symétriques du carré

Notons que la décomposition du carré 16 x 16 a fourni 19 découpages a priori possibles – comprenant le carré 8 x 8 – mais que l'un d'entre eux est impossible à paver par des dominos. Ce découpage est présenté dans la figure 3.7. Comme nous pouvons le voir, le développement de ce pavage à partir du découpage mène obligatoirement à bloquer une case, représentée dans cet exemple par un cercle noir.

L'étude que nous venons de mener a fait apparaître des formes crénelées, lorsqu'il y avait empiètement de dominos sur le carré. À défaut de les étudier toutes, nous allons en voir une, qui intervient souvent, et particulièrement simple, celle de l'échiquier écorné (le carré amputé d'un coin).

3.2 Pavages de l'échiquier écorné

Une forme particulière est apparue auparavant, lorsque nous avons procédé aux découpages des carrés. Il s'agit de celle où l'on a placé tous les dominos qu'il est possible de mettre en travers du découpage. On voit alors qu'un carré est isolé vers le centre comme le montre la figure 3.8.

Ce carré ne peut être pavé que de 2 façons. Il reste alors à trouver le nombre de pavages de la forme restante. Cette forme est un carré de côté

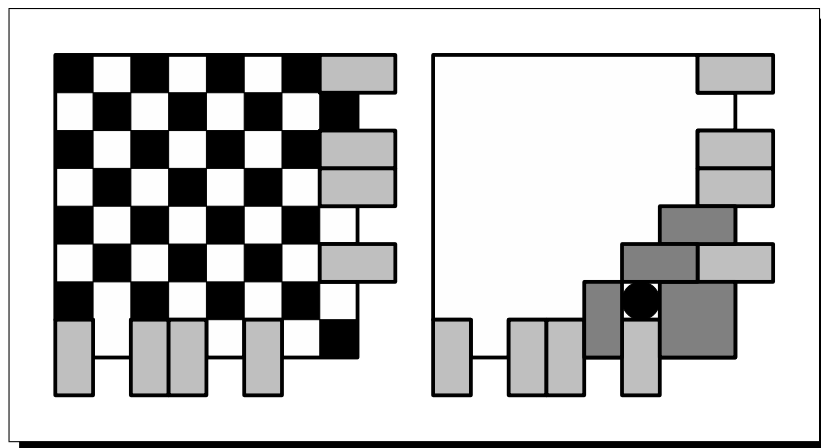


FIG. 3.7 – Découpage impossible du carré 16 x 16

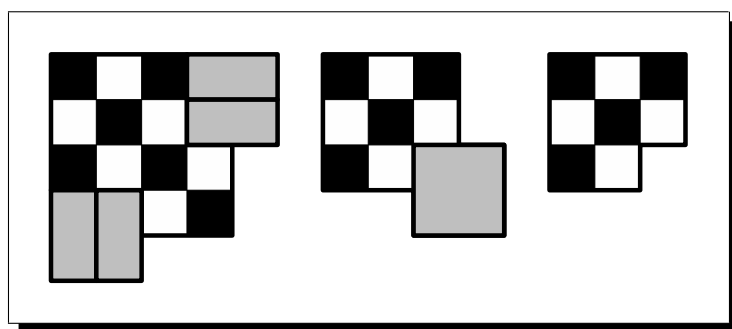


FIG. 3.8 – Formation de l'échiquier écorné

impair à laquelle on a retiré un coin. Nous l'appelons échiquier écorné. Le tableau 3.3 donne le nombre de pavages de l'échiquier écorné pour plusieurs tailles, nombre obtenu de manière expérimentale.

Taille	3	5	7	9
Nombre de pavages	4	192	100 352	557 568 000

TAB. 3.3 – Nombre de pavages de l'échiquier écorné

Nous avons vérifié auparavant l'application de la formule du déterminant aux échiquiers écornés de longueur 5 et 7. On voit que la complexité du problème augmente considérablement. On ne peut ici pas tirer un résultat général de l'étude de ces pavages.

3.3 Pavages du carré à trou central invariants à la rotation à 90°

Le carré de côté impair contient un nombre de cases impair. De ce fait il est impossible de le remplir uniquement de dominos, qui en nombre fini couvriraient un nombre pair de cases. Ainsi, pour rétablir la parité nécessaire pour que ces pavages soient possibles, nous prendrons des carrés sans centre. Étant donné la complexité du problème, nous ne traiterons dans ce cas que de la symétrie de rotation à 90° .

3.3.1 Contrainte du trou central

Afin de paver des carrés de côté impair, il suffit de retirer la case centrale. Ce choix porte sur cette case parce qu'il s'agit de la seule qui soit confondue avec ses symétriques, donc impossible à paver. De plus, en colorant chaque case en noir ou blanc pour que chaque case noire n'ait que des voisines blanches et inversement, on comptera une case en plus d'une couleur par rapport à l'autre. Si par exemple les 4 coins sont noirs, la case centrale également sera noire et il y aura 1 case noire de plus que le nombre de cases blanches. Ainsi, le choix de la case centrale permet de rétablir cette équité nécessaire au pavage par des dominos.

Les pavages à trous ont déjà fait l'objet d'études diverse, citons pour exemple le travail de J. Bao [1] sur les pavages à trous et celui de R. Tauraso [17] sur les pavages des carrés à fenêtre (carrés dont on soustrait un autre carré).

Les pavages admettant une symétrie à 90° doivent contenir un nombre de cases multiple de 8. En effet, chaque fois qu'un domino est placé, 3 autres suivent par symétrie. Montrons donc que tout pavage carré sans centre de côté impair et strictement supérieur à 1 possède un nombre de cases multiple de 8.

L'aire des carrés de côté $2p + 1$ étant $4p^2 + 4p + 1$, on revient à $4(p^2 + p)$ en retirant la case centrale, qui peut aussi s'écrire $4p(p + 1)$. Lorsque p est impair, $p + 1$ sera pair, et inversement. Donc le produit $p(p + 1)$ sera toujours pair. Ainsi, on voit que la surface du carré est un multiple de 8 pour tout $p > 1$ strictement.

3.3.2 Carré 3 x 3

Les pavages du carré de côté 3 sont évidents et au nombre de 2. Ils sont représentés dans la figure 3.9. On remarquera en général qu'il est possible

de retrouver un carré de côté impair à l'intérieur d'un autre plus grand en remplissant les cases du périmètre, dans un sens ou dans l'autre.

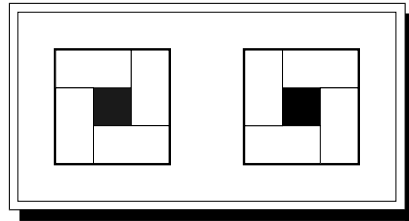


FIG. 3.9 – Pavages du carré 3 x 3

3.3.3 Carré 5 x 5

Commençons par faire apparaître le carré 3 x 3 à l'intérieur du carré 5 x 5. Pour ce faire, il suffit de remplir les bords du carré comme nous l'avons vu précédemment, ce qui peut être fait de 2 manières. Le tour du carré peut se faire dans le sens horaire ou l'inverse comme le montre la figure 3.10.

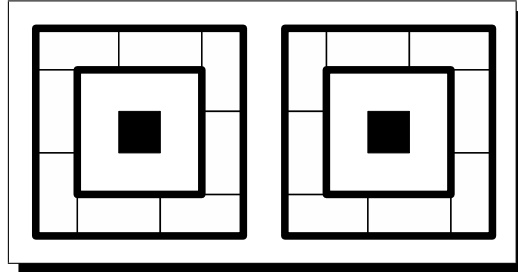


FIG. 3.10 – Passage du carré 5 x 5 au carré 3 x 3

Ensuite, on voit qu'il n'existe qu'une seule autre façon de passer outre ce découpage qui consiste à placer un domino joignant le centre au bord du carré, et séparer ainsi le carré 5 x 5 en carrés 2 x 2.

Le premier découpage comprend les 2 façons de faire le tour du périmètre que multiplient les 2 pavages du carré 3 x 3, soit 4 pavages du carré 5 x 5. Dans le second découpage présenté figure 3.11, les quatre carrés 2 x 2 sont dépendant les uns des autres par symétrie. Ainsi il n'y a que 2 possibilité de les remplir. En tout nous trouvons 6 pavages de ce carré. Tentons de voir si un schéma se répète avec l'étude du cas supérieur.

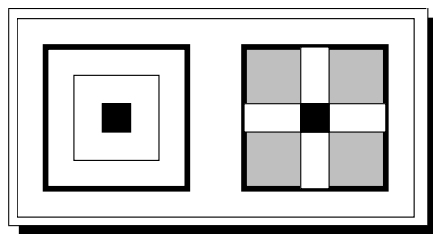


FIG. 3.11 – Découpages du carré 5 x 5

3.3.4 Carré 7 x 7

La figure 3.12 suivante présente les six découpages du carré 7 x 7 que nous allons commenter dans l'ordre.

Nous pouvons tout d'abord faire apparaître le carré 5 x 5 à l'intérieur de celui-ci en le cerclant de dominos dans l'un des 2 sens de rotation possibles. Cette classe va contenir deux fois plus de pavages que le carré de côté 5, soit 12 cas. Seulement, notre première décomposition ne comprend pas tous les pavages. Comme auparavant, il existe des pavages ayant un domino à cheval entre ces zones délimitées. Ils sont de deux ordres : les uns contiennent le carré 3 x 3, les autres non.

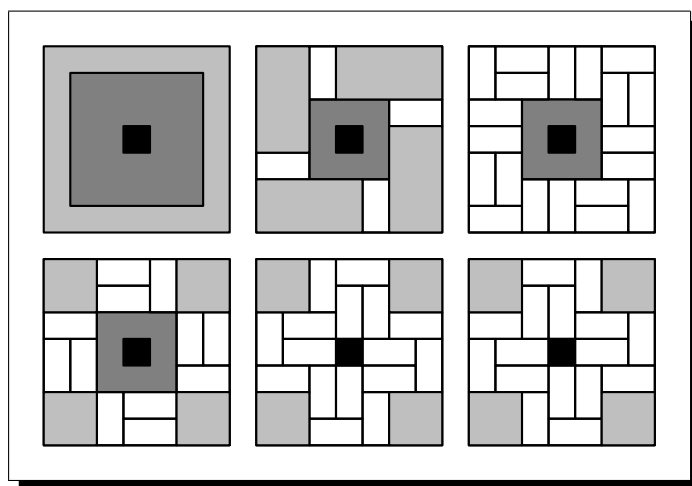


FIG. 3.12 – Découpages du carré 7 x 7

Les pavages qui ne contiennent pas le carré 5 x 5 mais qui contiennent le carré 3 x 3 sont de trois ordres. En effet, les trois dessins suivant de la figure 3.12 montrent les 3 seules classes de pavages comprenant le carré 3 x 3. Le

premier groupe contient 2 fois plus de pavages que le rectangle 2×4 soit 10. Le second n'en comprend que 2 et le troisième 4. Au total on compte 16 pavages du carré 7×7 invariants à une rotation d'un quart de cercle qui contiennent les pavages homologues du carré 3×3 .

Enfin, les pavages restants ne contiennent ni le carré 5×5 , ni le carré 3×3 . Il n'existe qu'une seule façon d'empêcher un pavage de contenir le carré 3×3 au centre qui consiste à le paver en étoile ; c'est-à-dire que des dominos sont placés de chaque côté de la case centrale et orientés vers l'extérieur du carré. Ces dominos sont donc placés à cheval entre le carré 3×3 central et le carré 5×5 central. À partir de ces dominos, on développe en ajoutant un domino à côté et à cheval entre le carré 5×5 et le 7×7 , domino qui peut-être placé de part et d'autre, soit 2 possibilités. Pour chacune il reste à paver un carré 2×2 , donc ces deux derniers groupes contiennent ensemble 4 pavages.

Voici un résumé du nombre de pavages du carré à trou central en fonction de leur longueur.

taille	3	5	7
nombre	2	6	32

TAB. 3.4 – Nombre de pavages symétriques du carré sans centre

3.4 Pavages du diamant aztèque invariants à une rotation de 90°

Comme nous l'avons vu, tout pavage invariant à une rotation de 90° possède un nombre de cases multiples de 8. Le diamant aztèque d'ordre n contient $2n(n+1)$ cases, où l'ordre représente sa demi-longueur. Les seuls diamants aztèques qu'il est possible de paver sont ceux pour lesquels n ou $n+1$ est multiple de 4 ; donc ceux dont l'ordre ou son successeur est multiple de 4. Par exemple, on peut paver les diamants aztèques d'ordre 3, 4, 7, 8 mais pas ceux d'ordre 1, 2, 5, 6.

Nous débuterons généralement par le remplissage des bords. En effet, les extrémités du diamant aztèque ne peuvent être remplies que par un seul domino et non deux. Prenons l'extrémité haute du diamant aztèque, d'un ordre quelconque : y placer un domino vertical impliquerait qu'il soit entouré de part et d'autre par 2 dominos verticaux, qui seraient alors eux-mêmes prolongés par des dominos verticaux jusqu'à atteindre les extrémités gauche et droite. Cela ne respectant pas la symétrie, il ne reste plus qu'à remplir les extrémités avec un seul domino.

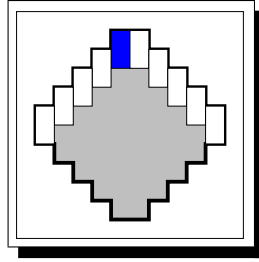


FIG. 3.13 – Développement à partir du bord du diamant aztèque

3.4.1 Diamant aztèque d'ordre 3

En considérant les bords déjà remplis, ce problème est ramené au pavage du carré 4 x 4 que nous avons vu précédemment.

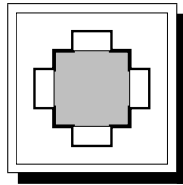


FIG. 3.14 – Diamant aztèque d'ordre 3

3.4.2 Diamant aztèque d'ordre 4

De nouveau, nous commencerons par remplir les bords. Nous pouvons procéder de manière quasi-systématique en remplissant la première case de la seconde ligne. La remplir avec un domino vertical, puis placer les symétriques de ce domino impose un remplissage unique. On peut en obtenir un autre par symétrie d'axe vertical.

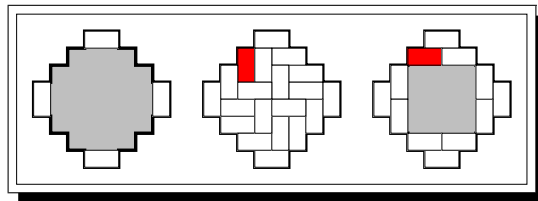


FIG. 3.15 – Diamant aztèque d'ordre 4

La seule autre possibilité consiste à y placer un domino horizontal. Pour éviter de retomber sur un symétrique du pavage précédent, il est obligatoire de placer un second domino horizontal à la suite du premier. Ainsi on se ramène à nouveau au pavage du carré 4 x 4.

On remarque ici encore que le centre des pavages admettant une symétrie de rotation à 90° suit toujours le même schéma, représenté dans la figure 3.5. Voici un résumé du nombre de pavages du diamant aztèque en fonction de leur ordre.

ordre	3	4
nombre	2	4

TAB. 3.5 – Nombre de pavages symétriques du diamant aztèque

Des études portant sur le pavage de formes irrégulières ont déjà été faites, citons notamment le papier de Helfgott et Gessel [4].

Conclusions

Malgré le fait que la recherche de découpages soit presque procédurale, elle change à chaque nouveau problème. Il est possible de la rendre telle pour un ensemble de problèmes, mais les contraintes changeant on pourra à ce moment trouver un problème qui ne serait pas traité correctement. Il faudrait donc trouver les contraintes avant tout. Les découpages ne suffisent pas toujours, prenons l'exemple du carré de longueur 16. Nous l'avons vu, un des découpages plausibles n'aboutissait à aucun pavages. On peut très bien imaginer que sur des problèmes plus grands le nombre de découpages invalides deviennent trop important par rapport à leur utilité. En attendant une étude sur ces contraintes nous allons voir dans le prochain chapitre un algorithme particulièrement adapté aux problèmes de pavages : le Dancing Links.

Chapitre 4

Le « Dancing Links » (DLX)

La nature des problèmes de pavages, qui font partie des problèmes de couverture exacte, permet de définir un encodage particulier des contraintes. Sans entrer dans les détails, il s'agira de savoir si l'on peut caser la solution ou pas, à la façon d'un gabarit ou d'un calibre. Cet encodage va permettre de réduire l'utilisation mémoire. Associé à une structure de données spéciale utilisant des listes doublement chaînées, il devient alors possible d'effectuer une recherche exhaustive mais optimisée et ce, tout en gardant constante l'utilisation de la mémoire. Il s'agit de l'algorithme de Donald E. Knuth : le Dancing Links.

4.1 Encodage particulier des contraintes

Prenons un exemple de problème de couverture exacte, afin d'illustrer la manière dont leurs contraintes peuvent être modélisées. Un problème de remplissage typique est le problème du planificateur de tâches.

4.1.1 Planificateur de tâches

Soit le problème suivant. Un séminaire de deux journées est organisé, pendant lequel quatre groupes d'intervenants exposeront durant une demi-journée chacun. Les disponibilités des intervenants A, B, C et D sont disposées d'après le tableau 4.1.

Nous avons quatre demi-journées à affecter à chacun des quatre intervenants et ils doivent intervenir une et une seule fois. C'est ce qu'on appelle un « exact-cover problem ».

Ce qui apparaît logique au premier abord, c'est que la matinée du second jour sera forcément attribuée à l'intervenant C. Une fois cette affectation

	Jour 1	Jour 2
Matin	A, B	C
Après-midi	A, B, D	C, D

TAB. 4.1 – Exemple de contraintes de disponibilité

effectuée, D reste le seul disponible pour remplir l'après-midi du même jour. Il ne reste plus qu'à choisir comment partager les 2 demi-journées restantes entre les personnes A et B : d'après le tableau il reste alors 2 possibilités.

Notons respectivement J_{11} , J_{12} , J_{21} et J_{22} , la matinée du jour 1, son après-midi, la matinée du jour 2 et enfin l'après-midi du jour 2. Les affectations peuvent être notées par le quadruplet $(J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22})$.

Les deux solutions précédemment citées seraient alors notées (A, B, C, D) et (B, A, C, D).

4.1.2 Encodage des contraintes

Restons sur le même exemple, nous avons un quadruplet $(J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22})$ et quatre valeurs possibles $\{A, B, C, D\}$. Chaque variable du quadruplet ne peut pas forcément recevoir chacune des quatre valeurs. Dans notre cas, les contraintes possibles sont les suivantes :

- le matin du jour 1 interviendra la personne A
- le matin du jour 1 interviendra la personne B
- l'après-midi du jour 1 interviendra la personne A
- l'après-midi du jour 1 interviendra la personne B
- l'après-midi du jour 1 interviendra la personne D
- le matin du jour 2 interviendra la personne C
- l'après-midi du jour 2 interviendra la personne C
- l'après-midi du jour 2 interviendra la personne D

Résoudre le problème équivaut à choisir un ensemble de ces contraintes de telle sorte que chaque demi-journée soit remplie et que chaque intervenant ait sa demi-journée.

Nous pouvons encoder les contraintes précédemment citées dans une matrice à coefficient binaires, en associant chaque fois un but à remplir au moyen de le remplir. Dans cette matrice, chaque ligne représentera la combinaison des contraintes J_{11} , J_{12} , J_{21} , J_{22} , A, B, C et enfin D.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, la quatrième ligne $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ contient deux « 1 », le premier signifiant que l'après-midi du jour 1 est remplie et la seconde que l'intervenant B a son intervention de prévue. Combinés sur la même ligne, cela donne la contrainte : « l'intervenant B exposera l'après-midi du jour 1 ».

Avec ce codage, il devient aisé d'éviter les contradictions : affecter deux fois le matin du premier jour reviendrait à sélectionner deux « 1 » sur la première colonne. Inversement, si la colonne B ne contient pas de « 1 », alors il n'y a plus de contrainte permettant de satisfaire B, ou bien il est impossible de réserver une période à B.

Chaque colonne représente une contrainte et une solution est un ensemble de ces lignes qui permettent d'avoir un « 1 » et un seul dans chacune des colonnes.

4.2 Implémentation

4.2.1 Algorithme primaire

L'algorithme de réduction des contraintes est le suivant :

Algorithme 1 : Réduction du système de contraintes

Données : matrice de contraintes M

```
1 début
2   si  $M$  est vide alors
3     | Afficher la solution et sortir;
4   fin
5    $T \leftarrow M$ ;
6   On fait le choix d'une colonne  $j$ ;
7   pour chaque  $i$  tel que  $m_{ij} = 1$  faire
8     | Ajouter la ligne  $i$  à la solution;
9     pour chaque  $p \neq i$  faire
10    | si  $\exists n$  tel que  $m_{pn} = 1$  et  $m_{in} = 1$  alors
11    | | Enlever la ligne  $p$  de la matrice  $M$ ;
12    | fin
13    fin
14    pour chaque  $q$  tel que  $m_{iq} = 1$  faire
15    | Enlever la colonne  $q$  de la matrice  $M$ ;
16    fin
17    Enlever la ligne  $i$  de la matrice  $M$ ;
18    Rappeler la procédure avec la matrice réduite  $M$ ;
19     $M \leftarrow T$ ;
20    Retirer la ligne  $i$  de la solution;
21  fin
22 fin
```

On remarque qu'il n'y a pas de détail sur la façon de choisir la colonne. Ce choix doit simplement être déterministe et passer par toutes les colonnes possibles si l'on veut conserver la fiabilité du DLX. Aussi, il est permis par exemple de choisir les colonnes en fonction du nombre de « 1 » qu'elles contiennent. En les prenant par ordre croissant, cela revient à résoudre d'abord les contraintes pour lesquelles il existe le moins de choix, ce qui a pour effet de minimiser le facteur de branchement.

4.2.2 Exécution

Prenons un exemple de matrice de contraintes pour voir comment s'effectue la recherche dans le cas où les colonnes (contraintes) sont satisfaites dans l'ordre des indices croissants.

Départ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une fois la première colonne choisie (cf. ligne 6 de l'algorithme), on recherche toutes les lignes, ou choix, pouvant satisfaire cette contrainte (cf. algorithme 1, ligne 7), donc celles qui ont un « 1 » dans cette colonne, pour les essayer tour à tour. En l'occurrence les deux premières lignes de la matrice répondent à ce critère. Dans le même ordre que le programme, choisissons d'abord la première ligne.

La phase suivante (cf. lignes 9 à 13 de l'algorithme) supprime toutes les lignes ayant une contrainte en commun avec la ligne 1 de M que nous avons choisi. Cela revient à supprimer les contradictions éventuelles. La matrice devient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les lignes 2 et 3 ont été supprimées, car elles portaient respectivement sur la matinée du jour 1 (colonne 1) et sur l'affectation de A (colonne 5).

Après avoir supprimé les lignes pouvant contredire celle que nous avons choisi, on peut dire que l'on a satisfait les contraintes J_{11} et A . On peut donc éliminer ces colonnes de la matrice afin de la simplifier (lignes 14 à 16). La ligne 1 ne compte alors que des coefficients nuls, ce qui revient à dire que ses contraintes sont satisfaites. Nous pouvons donc la retirer par la même occasion (ligne 17) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La procédure se rappelle alors récursivement (ligne 18) sur cette matrice représentant le problème réduit. Lorsqu'on arrive à retirer toutes les colonnes de la matrice, c'est qu'une solution a été découverte. Autrement, une contrainte ne peut plus être satisfaite donc on revient en arrière et on continue la recherche en prenant satisfaisant les contraintes précédentes d'une autre manière (*i.e.* en prenant une autre ligne de la matrice).

La sauvegarde initiale de la matrice à la ligne 5 de l'algorithme nous permet d'annuler toutes les opérations effectuées dessus. Il ne faut pas oublier de retirer la ligne ajoutée dans la solution. On remarque qu'il s'agit là d'un algorithme de résolution de contraintes dit fiable et complet. Fiable puisqu'il trouvera toutes les solutions au problème et complet car il pourra toujours répondre par oui ou non à la question de l'existence d'une solution.

En résumé, voici la recherche qui aura été effectuée. En gras figurent la ligne choisie et les colonnes – ou contraintes – satisfaites :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fixe J_{11} et A , il reste à choisir (J_{12} , J_{21} , J_{22} , B , C , D)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend J_{12} et B , il reste (J_{21} , J_{22} , C , D)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

En fixant J_{21} et C , il ne reste plus qu'une seule ligne, qui heureusement couvre les colonnes (contraintes) restantes.

$$(1 \ 1)$$

Au final, les lignes qui ont servi au crible qui ont été stockées au fur et à mesure de la recherche (ligne 7) sont :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Soit la solution (A, B, C, D).

Le DLX peut potentiellement résoudre tout type de problème de couverture exacte. Le tout est de réussir à traduire le problème. On citera un exemple annexe qui a déjà été résolu par le même procédé par Alfred Wassermann [18] : la couverture du diamant aztèque par des tetrasticks.

4.3 Application aux polyominos

4.3.1 Méthode

Comme nous l'avons vu, nous allons devoir chaque fois traduire le problème à résoudre en une matrice de 0 et de 1. Ainsi, il faudra traduire chacune de ces contraintes.

Dans la modélisation d'un pavage de polyominos, la contrainte est la nécessité de remplir chaque case. On attribuera donc une colonne à chaque case, colonne spécifiant la contrainte de remplissage de la case correspondante. Chaque case devra être remplie et ne pourra l'être qu'une seule fois. Lorsqu'il s'agira d'un damier à trous (ex : le diamant aztèque), les cases en moins n'auront donc pas de colonne associées, considérées comme déjà pleines.

Si l'on veut utiliser chaque type de pavé une et une seule fois, il suffit d'ajouter une colonne par pavé. Ainsi, on devra utiliser chaque pavé une fois et une seule. Chaque ligne contiendra donc les cases remplies du pavage et le type de polyomino qui les couvre. C'est le cas, par exemple, du problème de pavage par des pentominos de l'échiquier dont on retire le carré de longueur 2 central.

Pour générer ces contraintes, il faudra donc prendre chaque polyomino, un à un, générer ses symétriques et rechercher toutes les façons possibles de le placer dans la forme à paver vide.

4.3.2 Exemple : pavage du rectangle 4 x 3

Prenons l'exemple du remplissage d'un rectangle 4 x 3 par des dominos et des équerres. Les manières de placer le domino et l'équerre dans le rectangle 4 x 3 sont données par les figures 4.1 et 4.2.

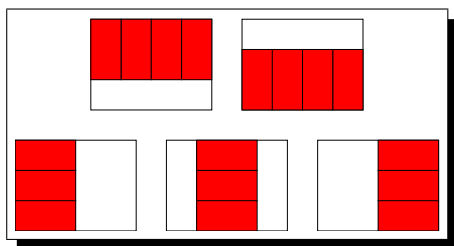


FIG. 4.1 – 17 manières de placer un domino dans le rectangle 4 x 3

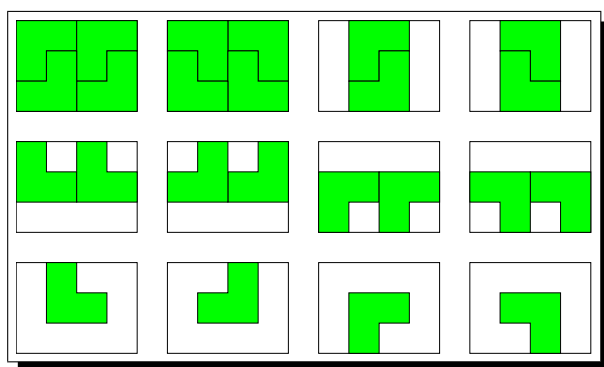


FIG. 4.2 – 24 façons de placer une équerre dans le rectangle 4 x 3

Nous aurons donc 41 contraintes différentes correspondant chacune à une façon de placer le domino ou l'équerre dans ce rectangle. En numérotant les cases du damier 4x3, dans l'ordre de haut en bas et de gauche à droite, on obtient la matrice des contraintes dans laquelle chaque colonne correspond à une des cases de la figure 4.3.

Si l'on désire en plus que chaque polyomino soit utilisé une fois et une seule, il suffit d'ajouter une colonne de contrainte pour ce polyomino. Nous allons traiter le cas simple où les polyominos peuvent se répéter, donc nous n'aurons que 12 colonnes. La matrice des contraintes est représentée séparément dans les matrices suivantes.

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12

FIG. 4.3 – Correspondance des colonnes et des cases du rectangle

Position des dominos verticaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Position des dominos horizontaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Position des équerres dans les quatre sens :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Les liens dansants

Tout l'intérêt de l'algorithme repose sur une structure de donnée spéciale. Cette structure de données apporte un lot d'outils de manipulation des données qui permet l'optimisation de la recherche de solutions.

4.4.1 L'idée

La traduction d'un problème peut rapidement faire grossir cette matrice. Par exemple, pour la recherche des pavages par des pentominos de l'échiquier 8 x 8 auquel on a retiré le carré 2 x 2 central, la matrice nécessaire comprend

1568 lignes pour 72 colonnes (dans le cas où chaque pentomino n'est utilisé une et une seule fois). Ce qui donne 112896 bits à stocker. Pour des raisons pratiques d'accès, ces bits sont stockés individuellement dans au moins un octet chacun, ce qui pousse l'occupation mémoire à quelques 882 kilo-octets.

Knuth fait justement preuve d'astuce dans la structure de données qu'il utilise. Il fait la remarque que pour la plupart des problèmes de ce type, la matrice contient essentiellement des 1. Le premier exemple présenté dans ce document – la gestion de planning – en contenait 12%. Le pavage du damier 4×3 a 21% de 1. Quand au pavage de l'échiquier par des pentominos, il possède une matrice pleine de 1 à 8% à peine.

Il suffirait donc de stocker uniquement ces 1 comme étant les données du problème. Dans le dancing links, les lignes et colonnes de la matrice sont des listes doublement chaînées dont les maillons contiennent les fameux 1, voire d'autres informations jugées utiles au problème. Ainsi, on accède en une seule indirection à une donnée significative à partir de son prédécesseur, ou de son successeur, que ce soit sur la ligne ou la colonne.

De même, chaque colonne est liée à la suivante, ce qui permet d'éliminer une colonne de la matrice en modifiant seulement les liens de son prédécesseur et de son successeur qui y font référence.

4.4.2 La technique de Donald Knuth

Knuth apporte d'emblée dans son article [7] une remarque sur une technique utilisant les listes doublement chaînées : on peut réinsérer un élément retiré d'une liste, et ce à son emplacement d'origine. Pour le supprimer, il suffit de modifier les références que lui font son prédécesseur et son successeur comme l'illustre la figure 4.4.

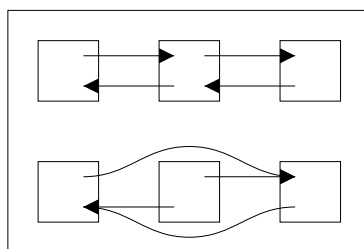


FIG. 4.4 – Retrait d'un élément d'une liste doublement chaînée

On y remarque qu'un élément, même supprimé, garde en mémoire un lien vers son prédécesseur et vers son successeur. Il peut de cette manière modifier les modifier pour qu'il apparaisse de nouveau entre eux. Notons

$L[x]$ l'élément à gauche de x , et $R[x]$ l'élément à sa droite. Les opérations de retrait et d'insertion de x dans une liste s'écrivent alors ainsi :

Suppression : $R[L[x]] \leftarrow R[x], L[R[x]] \leftarrow L[x]$

Insertion : $R[L[x]] \leftarrow x, L[R[x]] \leftarrow x$

En listes doublement chaînées, la matrice du problème de gestion de planning prend alors la forme de la figure 4.5.

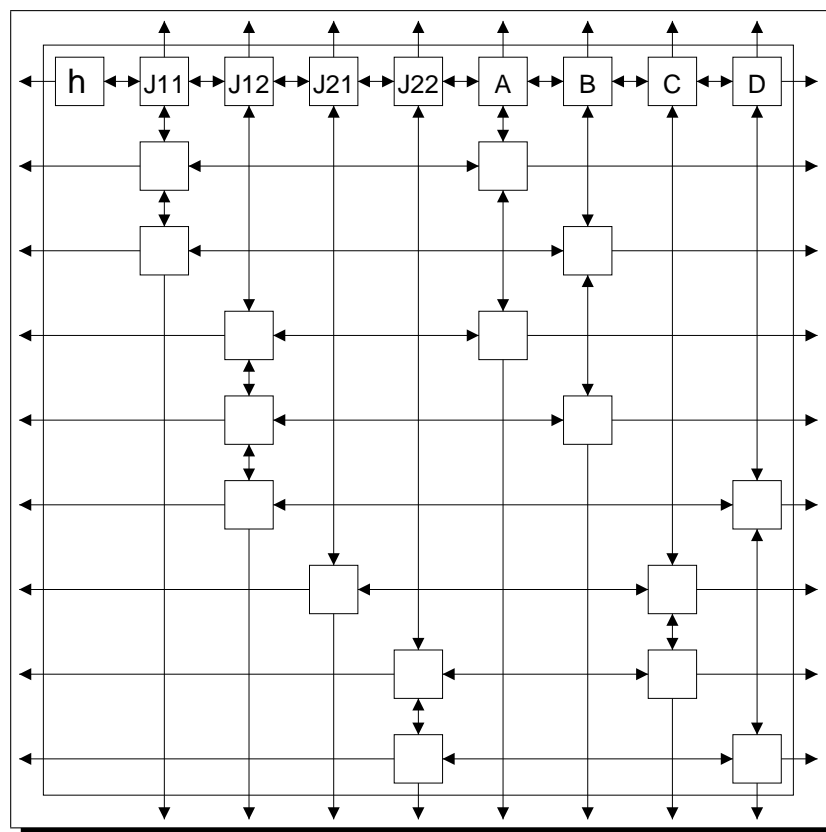


FIG. 4.5 – Contraintes sous forme de listes circulaires doublement chaînées

Le lecteur notera l'apparition d'un maillon au début de la liste des colonnes ; ce maillon est un en-tête général qui permet de travailler sur la matrice, même une fois vide.

4.4.3 Avantages et inconvénients

Précédemment, nous avons montré que le Dancing Links était aussi fiable qu'un algorithme de backtracking classique. La simplicité du backtracking

joue également en sa faveur, car aucun encodage particulier des contraintes n'est imposé contrairement au DLX.

En termes d'utilisation mémoire, un backtracking gardera l'affectation de chaque variable. Le DLX quand à lui garde toute la matrice de contraintes, qui bien qu'optimisée pour ne stocker que les données utiles reste plus importante. Cette différence d'occupation mémoire augmente au fur et à mesure de la récursion.

Il reste néanmoins des libertés que le DLX permet au programmeur. D'une part, l'heuristique de choix des colonnes n'est pas définie. On peut donc accélérer l'algorithme en fonction du problème. D'autre part, il n'est pas obligatoire d'effectuer à chaque fois la matrice des contraintes. Il suffit de conserver les lignes et colonnes que l'on retire de la matrice, pour les réinsérer dans l'ordre inverse. C'est là l'atout des « liens dansant » qui permettent de traiter un tel problème avec une occupation mémoire constante.

Enfin, le DLX peut justifier son prétraitement qui peut être facilement automatisé. Il affiche des performances nettement supérieures à celles du backtracking. Le tableau 4.2¹ montre nettement le gain que le DLX apporte en termes de parcours.

Pour ces tests, les colonnes dans le DLX étaient choisies par nombre de « 1 » croissant. Les performances de cet algorithme sont toujours supérieures à celles du backtracking sur les problèmes de pavages, apportant un gain allant de 36% à 87% selon le problème. Le choix de les comparer sur le nombre de noeuds parcourus permet de s'affranchir de la subjectivité apportée par l'architecture de la machine servant aux tests et le langage de programmation utilisé.

Forme à remplir	Polyominos utilisés	Solutions	Noeuds parcourus		Gain
			Backtracking	DancingLinks	
Carré 6 x 6	domino	6728	40383	25695	36,37%
Carré 8 x 8	domino	12988816	92384941	50102176	45,77%
Rectangle 6 x 4	domino et équerre	15171	496017	61070	87,69%
DA(4)	domino	1024	12830	4405	65,67%
DA(5)	domino	32768	602542	144697	75,99%
DA(5)	équerre	16856	978990	130458	86,67%
Carré 5 x 5	domino et équerre	8972	243787	35633	85,38%
Carré 7 x 7	domino	75272	502818	293362	41,66%

TAB. 4.2 – Comparaison du dancing links au backtracking

Ces résultats peuvent-être interprétés de plusieurs façons. D'abord on peut dire que les problèmes apportant plus de contraintes rendent le DLX

¹La notation DA(k) – introduite ici par commodité – symbolise le diamant aztèque d'ordre k. Rappelons que l'ordre du diamant aztèque est sa demi-longueur.

plus efficace, notamment par son jeu d'élagage et la possibilité sans beaucoup modifier le programme de minimiser le facteur de branchement. Il est donc avantageux si l'on est pas limité en mémoire – ce qui est le cas de la plupart des architectures actuelles – d'avoir recours à un tel algorithme pour les problèmes de couverture exacte.

Les expérimentations ont été effectuées sur un ordinateur équipé d'un processeur Intel Centrino 1.80GHz et d'1Go de RAM, sous Windows XP Professionnel. Les résultats ont tous été délivrés instantanément sauf pour le carré 8×8 où le backtracing programmé en C est égalé par le DLX programmé en Java pour un temps d'exécution d'environ 30 secondes. Un programme Java est pourtant réputé pour s'exécuter au moins 10 fois plus lentement que le même programme C compilé lorsqu'il ne s'agit pas que de calcul numérique.

Conclusions

Là où précédemment la théorie ne pouvait nous fournir une formule ou procédure générale pour compter les pavages, nous avons eu recours à l'outil informatique. En utilisant le Dancing Links, nous avons pu vérifier les résultats fournis dans les chapitres précédents et en obtenir en plus. Cela a permis également d'en tirer une représentation graphique. Il n'existe cependant pas de solution algorithmique miracle pour résoudre les problèmes d'explosion combinatoire, il y aura donc un moment où l'algorithme et la machine l'exécutant atteindront leur limite. Ayant été confronté à un tel problème dans le cadre de la recherche automatisée des classes d'équivalences, nous allons présenter quelques optimisations et astuces ayant permis une nette accélération de cette recherche.

Chapitre 5

Structures de données et optimisations

Dans ce chapitre nous allons traiter de choix stratégiques pour quelques problèmes précis s'étant présenté durant la recherche de résultats pour cette étude. Ces choix ont permis l'accélération de la recherche de pavages, de leurs classes d'équivalences et ainsi permis de valider plus rapidement les résultats obtenus théoriquement.

5.1 Représentations des pavages

La représentation des pavages a du être scindée en plusieurs éléments. Ce système est similaire à celui utilisé dans ma maîtrise, aussi j'en reprendrais les grandes lignes.

Il a d'abord fallu représenter la forme à remplir. Ces formes étant basées sur un maillage et toutes inscrites dans un rectangle de dimensions finies. Il suffisait donc d'utiliser une matrice à deux dimensions. Cette matrice est à coefficients binaires selon que la case soit pleine ou non. On peut par exemple utiliser le nombre 0 pour représenter une case vide et le 1 pour représenter une case pleine. Ainsi, le diamant aztèque d'ordre 3 serait modélisé par la matrice 6 x 6 suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette notation facile à manipuler permet la sauvegarde dans des fichiers de formes couramment employées comme le diamant aztèque ou l'échiquier sans son centre. Il est d'ailleurs aisé de générer ces formes en partant d'un damier rectangulaire vide et en remplissant les cases à ôter.

Quand aux polyominos utilisés pour paver cette forme, ils sont considérés comme une suite de coordonnées des carrés les composant, coordonnées relatives à la case située la plus au nord-ouest de la figure. Cette case est prise comme référence afin de faciliter la génération des contraintes pour le Dancing Links car j'ai choisi d'effectuer le parcours du damier dans le sens de lecture français.

De la même manière, on peut les stocker dans des fichiers, en identifiant par un numéro unique chacun d'entre eux. Les symétriques d'un polyomino sont aussi générés au moment du chargement. Par exemple, l'encodage suivant correspondra au polyomino dessiné dans la figure 5.1 :

id=0 (0, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2)

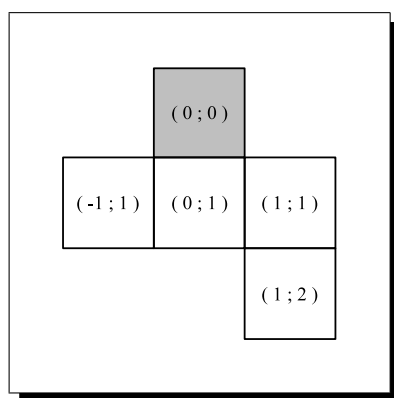


FIG. 5.1 – Exemple d'encodage d'un pentomino

Une chose remarquable est que l'ordre d'écriture des coordonnées n'importe pas, pourvu que l'abscisse de chaque bloc soit toujours suivie de son ordonnée. Cela revient à dire que les écritures suivantes représentent toujours le même pentomino :

id=0 (0, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2)
id=0 (-1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 2)
id=0 (1, 2, -1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)

Cependant, il y a une utilité à maintenir un certain ordre dans cette écriture, notamment pour différencier les polyominos de leurs symétriques. Le fait d'ordonner ces coordonnées permet de comparer plus rapidement 2 polyominos et savoir s'ils sont identiques ou non. Pour générer les symétriques d'un polyomino, il faudra recalculer les coordonnées pour chaque symétrie, effectuer une translation de ces coordonnées vers la nouvelle référence (bloc nord-ouest), puis trier les coordonnées de ces blocs. Si le polyomino est invariant suivant cette symétrie, le symétrique aura les mêmes coordonnées que la forme d'origine. Sinon il sera ajouté à la liste des symétriques de ce polyomino.

Il est simple avec cet encodage de créer la matrice des contraintes à fournir au Dancing Links. Ce thème a été abordé dans le chapitre consacré à cet algorithme mais reprenons-en les grandes lignes.

Chaque case vide doit être remplie, ce qui implique autant de contraintes que de cases vides. La matrice du DLX prévoit une colonne par contrainte. Les lignes de cette matrice sont pleines de zéro, excepté dans les colonnes qu'elles satisfont ; c'est-à-dire les colonnes qui correspondent aux cases remplies par cette ligne. Chaque ligne correspondra à une façon de placer un polyomino sur le damier, couvrant alors un nombre de cases égal au nombre de blocs de ce polyomino.

5.2 Optimisations

Pour résoudre le problème de redondance dans les pavages dont nous avons traité dans le chapitre 1 sur la formule de Burnside, nous avons suggéré la possibilité de les grouper en classes d'équivalence. Je vais maintenant introduire une troisième manière de représenter les pavages qui m'a été utile pour ce problème précis, mais qu'il est possible de généraliser.

Le premier souci à résoudre fut de pouvoir comparer 2 pavages sans avoir pourtant une connaissance des formes utilisées, que ce soit le damier ou les polyominos en question. Il est en effet impossible de différencier deux pavages en les comparant case par case. Il faudrait pour cela différencier les cases et donc attribuer une étiquette à chaque polyomino posé dans la forme. Or, ces étiquettes peuvent différer d'un pavage à un autre même si un polyomino s'y retrouve au même endroit.

Chaque pavage étant basé sur un maillage carré, j'ai choisi de prendre en compte les arêtes du pavage comme base de ce code plutôt que les cases. Il s'agit encore une fois d'une notation binaire, mais ici chaque 0 équivaut à l'absence d'une arête quand un 1 marque le dessin de cette arête. Cela permet de comparer le tracé du pavage et donc de tester la ressemblance visuelle.

Notons qu'une arête est présente à la rencontre de deux polyominos différents ; si deux blocs voisins n'appartiennent pas au même polyomino alors une arête les sépare. Pour les blocs des bords, l'arête extérieure est toujours présente, par conséquent il n'est pas utile de les inclure dans cette représentation.

Lorsque la forme à paver est basée sur un rectangle de taille $P \times Q$, il y aura au maximum $(P - 1)Q + P(Q - 1)$ éléments binaires à stocker. La numérotation des arêtes peut suivre le schéma donné dans la figure 5.2. Sur cette figure, l'image de gauche donne les indices correspondants aux arêtes verticales immédiatement à leur droite, et celle de droite donne les indices des lignes horizontales qu'ils surplombent. Voyons comment obtenir cette représentation.

0	1	2		12	15	18	21
3	4	5		13	16	19	22
6	7	8		14	17	20	23
9	10	11					

FIG. 5.2 – Exemple : numérotation des arêtes du carré 4 x 4

Remarquons avant tout qu'elle découle d'un pavage complet. Les pavages générés par le DLX sont équivalents à un n -uplet, n étant le nombre de cases du damier. Chaque nombre de ce n -uplet correspond à une case et il est égal au numéro du polyomino qui occupe cette case. Ainsi, on sait si deux cases appartiennent au même polyomino ou pas : reste à déterminer si ces cases sont voisines et partagent une arête.

À cette étape, nous voyons qu'il est nécessaire de construire une matrice d'adjacence du damier, qui sera donc carrée et au plus de taille MN . Elle peut d'ailleurs être précalculée et réutilisée car le damier qui doit être rempli ne changera pas du long de la recherche des pavages. Une astuce utile dans cet encodage est de remplacer les 1 de la matrice d'adjacence – qui n'apportent d'autre information que celle de l'existence d'une arête – par l'indice de l'arête. Cela permettra d'éviter une indirection supplémentaire pour obtenir l'indice de l'arête.

Enfin, on part d'un n-uplet composé uniquement de 1, qui correspond à une grille ou aussi un pavage à base de carrés unitaires, puis pour chaque polyomino placé, on remplace les 1 par des 0 pour chaque arête le traversant.

Illustrons ce dernier code à l'aide d'un exemple sur ce carré 4 x 4. Soit le pavage de la figure 5.3. Nous avons besoin d'un 24-uplet pour coder l'état des arêtes du pavage. Initialement, le 24-uplet ne compte que des 1. En plaçant un domino au milieu du carré, comme sur le premier dessin de la figure 5.3, nous avons en quelque sorte court-circuité l'arête 7. Le 24-uplet sera modifié en conséquence en mettant un 0 à l'indice 7.

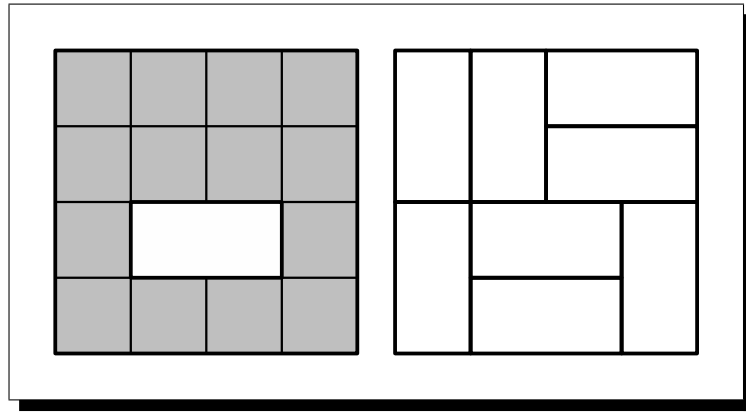


FIG. 5.3 – Exemple d'un pavage du carré 4 x 4

Il manque au pavage du second dessin de la figure 5.3 les arêtes verticales 2, 5, 7 et 10 ainsi que les arêtes horizontales 12, 14, 15 et 23. Il sera traduit dans le 24-uplet suivant :

$$(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$$

Venons-en à la génération des classes d'équivalence. Grâce à cette notation, on peut appliquer une transformation à un pavage de façon très simple. En effet, chaque symétrie fait correspondre les arêtes avec d'autres en une bijection : chacune de ces transformations est une permutation sur le n-uplet. Voici les permutations correspondant aux symétries du carré sur le 24-uplet du carré 4 x 4 :

$$Id = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23)$$

$$R_1 = (21\ 22\ 23\ 18\ 19\ 20\ 15\ 16\ 17\ 12\ 13\ 14\ 2\ 1\ 0\ 5\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 11\ 10\ 9)$$

$$R_2 = (11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 23\ 22\ 21\ 20\ 19\ 18\ 17\ 16\ 15\ 14\ 13\ 12)$$

$$R_3 = (14\ 13\ 12\ 17\ 16\ 15\ 20\ 19\ 18\ 23\ 22\ 21\ 9\ 10\ 11\ 6\ 7\ 8\ 3\ 4\ 5\ 0\ 1\ 2)$$

$$V = (2\ 1\ 0\ 5\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 11\ 10\ 9\ 21\ 22\ 23\ 18\ 19\ 20\ 15\ 16\ 17\ 12\ 13\ 14)$$

$$H = (9\ 10\ 11\ 6\ 7\ 8\ 3\ 4\ 5\ 0\ 1\ 2\ 14\ 13\ 12\ 17\ 16\ 15\ 20\ 19\ 18\ 23\ 22\ 21)$$

$$D_1 = (12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$$

$$D_2 = (23\ 22\ 21\ 20\ 19\ 18\ 17\ 16\ 15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0)$$

Par cette notation on voit qu'un pavage est invariant à une symétrie car la permutation associée fait toujours correspondre les 0 avec des 0 et les 1 avec des 1. L'algorithme de classement des pavages équivalents en groupes en découle simplement : chaque fois qu'un pavage est trouvé par le DLX, on vérifie s'il est nouveau. Si c'est le cas, on génère par ces permutations ses symétriques en supprimant les doublons. On relance alors la recherche.

Chaque nouveau pavage entraînera la création d'une classe d'équivalence. La procédure de vérification de l'originalité de chaque pavage trouvé va augmentant avec le nombre de solutions découvertes car le nombre de comparaisons à faire augmente sans cesse.

Mais notre encodage représente un autre avantage qui va permettre d'accélérer cette procédure. Le n-uplet est à valeurs binaires. On peut donc créer un arbre binaire de recherche, dont chaque niveau sera un indice du n-uplet et aura 2 branches selon qu'il soit à 0 ou 1. La vérification de chaque pavage est alors aussi longue que le parcours de ce pavage, c'est-à-dire en temps constant proportionnel à n . Dans le cas où le pavage est nouveau, la recherche dans cet arbre est incomplète : il ne reste qu'à ajouter les branches manquantes pour le mettre à jour.

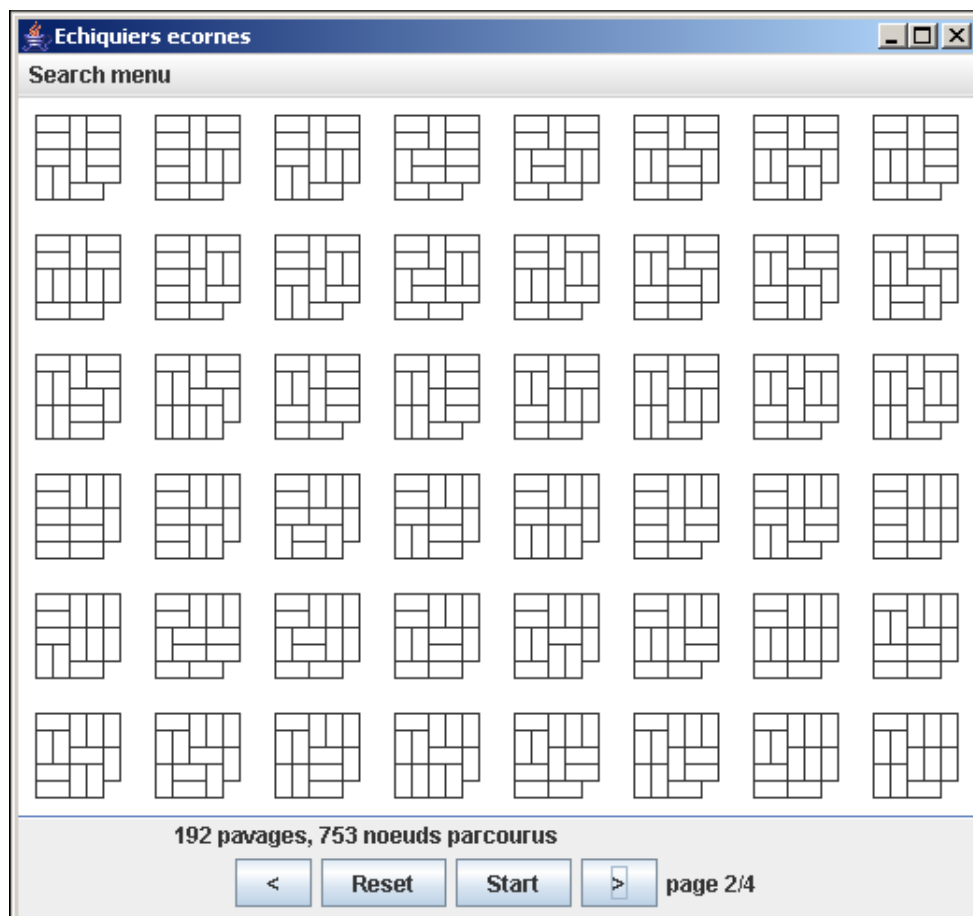


FIG. 5.4 – Aperçu du programme de recherche de pavages pour l'échiquier écorné 5 x 5

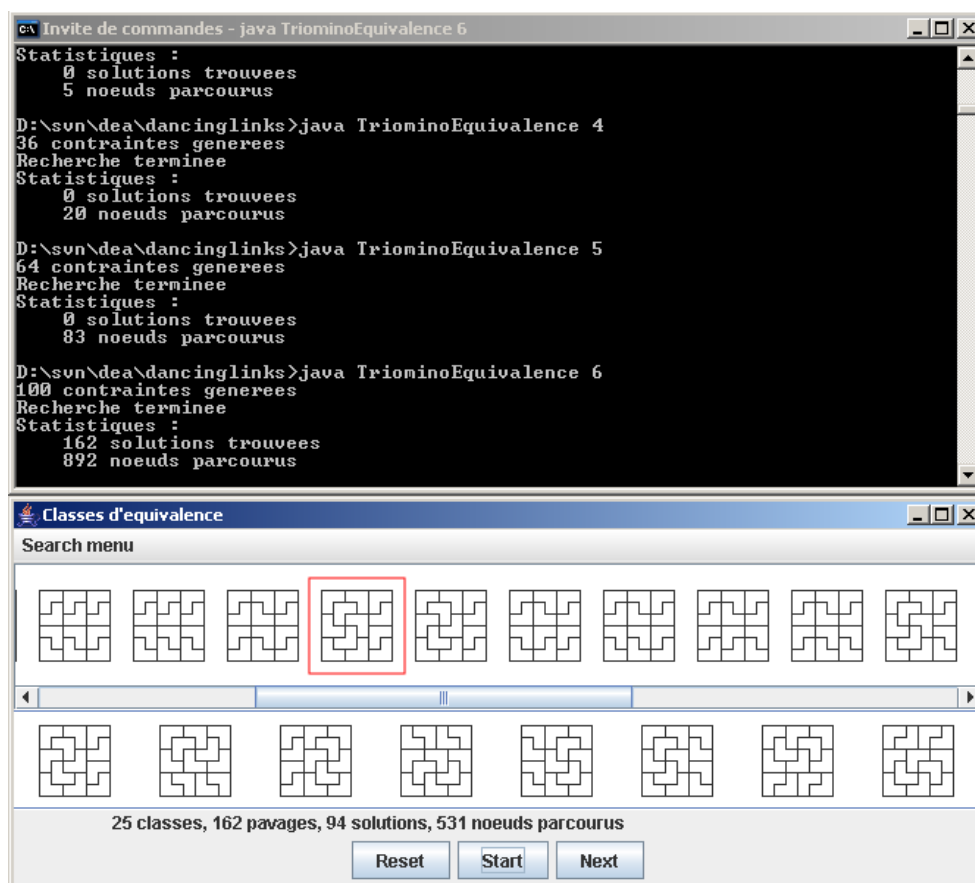


FIG. 5.5 – Aperçu du programme de recherche de pavages à base d'équerres pour le carré 6 x 6

Conclusions

Les structures de données présentées ici avaient d'abord pour vocation de permettre d'utiliser un même programme pour énumérer des pavages de toutes formes. C'est un choix pratique, qui doit permettre à terme d'éviter des manipulations répétées de modification et compilation du même programme pour l'adapter à tel ou tel autre problème. Mis à part le gain de temps en pratique, il reste le gain de temps à l'exécution pour le programme générant les classes d'équivalences. Pour cela nous avons fait un choix qui restreint les classes de pavages utilisables au carré. Nous avons encodé par des ensemble d'arêtes les pavages, méthode inadaptée au diamant aztèque qui pourtant compte les mêmes symétries que le carré. Mais il reste utilisable sur des pavages avec de nombreuses formes comme les triominos, tetraminos, etc.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons remarqué que la formule théorique de dénombrement des pavages par des dominos d'un rectangle, énoncée par Kasteleyn, pouvait être appliquée à des formes plus crénelées. Associée à la formule du permanent, nous avons constitué une base théorique fiable. Ajoutons à cela la méthode de calcul du nombre de pavages qui admettent une symétrie. Cette méthode systématique de découpages est quasi algorithmique. Enfin, nous avons travaillé à l'élaboration d'un algorithme optimisé pour la recherche de pavages et de classes d'équivalences, utilisant le Dancing Links.

Cependant, cet algorithme nécessitait un encodage préalable du problème. L'encodage que nous avons choisi était particulièrement bien adaptée aux problèmes rectangulaires. Cette spécialisation de l'algorithme le rend plus performant mais moins adaptatif. En effet, ces optimisations, de par l'encodage utilisé (en arêtes) n'a pas pu être utilisé pour des problèmes tels que le diamant aztèque. De même, il est arrivé que l'encodage des contraintes utilisé ici pose problème lors de la recherche des pavages auto-symétriques. Le souci rencontré relève de l'exploitation des solutions renvoyées par le Dancing Links. Il arrive parfois d'avoir deux lignes de contraintes, c.-à-d. deux ensembles de dominos qui bien que différents remplissent exactement les mêmes cases : c'est le cas du carré sans centre de longueur 3. Il est alors impossible de savoir dans le paquet de dominos de quelle manière ils sont placés.

Nous concluerons donc sur la nécessité de trouver un encodage qui puisse être adapté à toute forme de pavage ainsi qu'à tout type de polyominos et qui permette l'exploitation aisée des solutions renvoyées par le Dancing Links. Son adaptation à l'énumération des pavages auto-symétriques serait un apport non négligeable. La méthode d'énumération des découpages que nous avons vu peut être systématisée. Cela pourrait faire l'objet d'une étude particulière, comme une autre voie d'arriver à une énumération directe, voire même plus rapide des pavages auto-symétriques. Enfin, il pourrait être intéressant d'élargir ce genre d'étude à des structures plus complexes, ou pourquoi pas simplement ajouter une dimension au problème. Le lecteur curieux de voir une étude combinatoire de pavages non définis sur une grille pourra

par exemple consulter la thèse de F. Chavanon [3]. Quand au Dancing Links, l'algorithme ne changeant pas, ils ne s'agirait que de trouver l'encodage adéquat des contraintes du problème.

Bibliographie

- [1] Joshua Bao. On the number of domino tilings of the rectangular grid, the holey square and related problems. Technical report, Research Science Institute, novembre 1997.
- [2] Mireille Bousquet-Mélou. Animals, domino tilings, functional equations. In *Algorithms Seminar*, 2001-2002.
- [3] Frédéric Chavanon. *Aspect combinatoire des pavages*. PhD thesis, ENS Lyon, 2004.
- [4] Ira M. Gessel Harald A. Helfgott. Enumeration of tilings of diamonds and hexagons with defects. *The Electronic Journal of Combinatorics* 6, 1999.
- [5] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice. *Physica* 27, 1961.
- [6] Richard Kenyon. An introduction to the dimer model. arXiv :math.CO/0310326 v1, octobre 2003.
- [7] Donald E. Knuth. Dancing links. arXiv :cs.DS/0011047 v1, novembre 2000.
- [8] Michael Lang. Mth 301 – combinatorics – spring 2006, problem 23. <http://hilltop.bradley.edu/mlang/>.
- [9] H. Temperley M. Fisher. The dimer problem in statistical mechanics - an exact result. *Phil Mag.* 6, pages 1061–1063, 1961.
- [10] J. K. Percus. *Applied Mathematical Sciences 4 - Combinatorial Methods*, chapter II, C : Two Dimensionnal Lattices. Springer, 1971.
- [11] James Propp. Enumeration of matchings : Problems and progress. In *New Perspectives in Geometric Combinatorics, MSRI Publications vol. 38*. MSRI, 1999.
- [12] James Propp. A reciprocity theorem for domino tilings. *The Electronic Journal of Combinatorics* 8, 2001.
- [13] James Propp. Lambda-determinants and domino-tilings. arXiv :math.CO/0406301 v1, juin 2004.

- [14] Andrei Okounkov Richard Kenyon. What is... a dimer? *Notices of the AMS, Volume 52, Number 3*, mars 2005.
- [15] Scott Sheffield Richard Kenyon. Dimers, tilings and trees. arXiv :math.CO/0310195 v1, octobre 2003.
- [16] James A. Sellers. Domino tilings and products of fibonacci and pell numbers. *Journal of Integer Sequences, Vol. 5*, 2002.
- [17] Roberto Tauraso. A new domino tiling sequence. *Journal of Integer Sequences*, avril 2004.
- [18] Alfred Wassermann. Covering the aztec diamond with one-sided tetras-ticks. [http ://did.mat.uni-bayreuth.de/wassermann/](http://did.mat.uni-bayreuth.de/wassermann/).
- [19] Hermann Weyl. *Symétrie et mathématique moderne*. Flammarion, 1964. traduit de l'original SYMMETRY, Princeton University Press, 1952.

Table des figures

1	Tetraminos « T » et « L »	7
2	Aperçu du programme de recherche de pavages	8
1.1	Les 36 pavages du carré de côté 4 par des dominos	11
1.2	Pavages équivalents entre eux aux symétries du carré près . . .	12
1.3	Pavages originaux du carré 4 x 4 et leur classe d'équivalence .	13
1.4	Découpage des pavages du carré 4 x 4 invariants à une rotation d'un demi-tour	14
1.5	Découpage des pavages du carré 4 x 4 invariants à une réflexion horizontale	14
1.6	Ensembles d'invariance des pavages du carré 4 x 4 aux symé- tries du carré	15
1.7	Découpages auxquels se conforment les pavages du carré 6 x 6 invariants à une rotation d'un demi-tour	16
1.8	Exemple de pavages se conformant aux découpages de la figure 1.7	17
1.9	Découpages suivis par les pavages du carré 6 x 6 invariants à une réflexion horizontale	18
2.1	L'échiquier et son graphe dual	21
2.2	Coloration illustrant les deux parties de l'échiquier	21
2.3	Exemple de couplage parfait et pavage associé	22
2.4	Simplification du découpage utilisant le graphe dual de l'échi- quier	23
2.5	Graphe dual du damier symétrique	24
2.6	Découpages du carré 8 x 8	26
2.7	Échiquier 4 x 4	27
2.8	Exemple de graphe somme de deux graphes segments	29
2.9	Numérotation des cases de l'échiquier écorné de longueur 5 . .	30
2.10	Numérotation des cases de l'échiquier sans centre de longueur 3	31
2.11	Numérotation biparti des cases	32

2.12	Exemple de pavage correspondant à une combinaison symétrique d'une matrice donnée	33
3.1	Décomposition du carré en quarts	36
3.2	Découpage du carré 4 x 4 en carrés 2 x 2	37
3.3	Découpage du carré 4 x 4 et violations du découpage	38
3.4	Chevauchements du découpage du carré 8 x 8	38
3.5	Seules configurations centrales possibles	39
3.6	Découpages du carré 12 x 12	40
3.7	Découpage impossible du carré 16 x 16	42
3.8	Formation de l'échiquier écorné	42
3.9	Pavages du carré 3 x 3	44
3.10	Passage du carré 5 x 5 au carré 3 x 3	44
3.11	Découpages du carré 5 x 5	45
3.12	Découpages du carré 7 x 7	45
3.13	Développement à partir du bord du diamant aztèque	47
3.14	Diamant aztèque d'ordre 3	47
3.15	Diamant aztèque d'ordre 4	47
4.1	17 manières de placer un domino dans le rectangle 4 x 3	56
4.2	24 façons de placer une équerre dans le rectangle 4 x 3	56
4.3	Correspondance des colonnes et des cases du rectangle	57
4.4	Retrait d'un élément d'une liste doublement chaînée	59
4.5	Contraintes sous forme de listes circulaires doublement chaînées	60
5.1	Exemple d'encodage d'un pentomino	64
5.2	Exemple : numérotation des arêtes du carré 4 x 4	66
5.3	Exemple d'un pavage du carré 4 x 4	67
5.4	Aperçu du programme de recherche de pavages pour l'échiquier écorné 5 x 5	69
5.5	Aperçu du programme de recherche de pavages à base d'équerres pour le carré 6 x 6	70

Liste des tableaux

3.1	Nombre de pavages de chaque découpage du carré 12 x 12 . .	40
3.2	Nombre de pavages symétriques du carré	41
3.3	Nombre de pavages de l'échiquier écorné	42
3.4	Nombre de pavages symétriques du carré sans centre	46
3.5	Nombre de pavages symétriques du diamant aztèque	48
4.1	Exemple de contraintes de disponibilité	50
4.2	Comparaison du dancing links au backtracking	61

Annexes

Implémentation en Java du Dancing Links

Documentation de la librairie dlx

Code source de la librairie dlx

Classes utilitaires

Arbre binaire de recherche : `BinaryTree.java`

Encodage des contraintes pour le DLX : `PCE.java`

Représentation squelettique des pavages : librairie `tilings`