



**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования «Московский  
государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э.  
Баумана)**

---

**Факультет «Информатика и системы управления»**

**Кафедра «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»**

**Лабораторная работа № 1**

**по курсу «Моделирование»**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ БИОЛОГИЧЕСКОГО ВИДА НА  
ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ**

Студент: Яровикова А. С.

Группа: ИУ9-81Б

Преподаватель: Домрачева А. Б.

Москва, 2024

## ЦЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### Цель

Целью данной работы является изучение и реализация модели Лотки-Вольтерры, описывающей взаимодействие популяций двух видов, для моделирования численности видов.

### Постановка задачи

Необходимо исследовать модель взаимодействия популяции двух видов, используя модель Лотки-Вольтерры. В нашем случае рассматриваются популяции китов и выдачи квот на экспедиции с целью охоты на них. Для модели используются следующие параметры:

- $\alpha = 0.075$  – коэффициент рождаемости китов,
- $\beta = 0.00002$  – коэффициент хищничества экспедиций с квотой,
- $\gamma = 0.99998$  – коэффициент смертности квот,
- $\delta = 0.0001$  – коэффициент выдачи квот на экспедиции.

Коэффициент  $\alpha$  описывает прибавление рожденных китов к популяции, коэффициент  $\beta$  – вероятность встречи китов с экспедициями с квотой на охоту на китов, коэффициент  $\gamma$  – израсходование квоты по принципу: кит пойман, следовательно квота израсходована, коэффициент  $\delta$  – вероятность выдачи квоты на охоту на китов.

Необходимо:

1. Реализовать модель Лотки-Вольтерры при заданных коэффициентах модели и с начальными условиями  $x(0) = 20523$ ,  $y(0) = 1000$ , где  $x$  – количество китов,  $y$  – количество экспедиций с квотами на охоту на китов.
2. Решить простую динамическую систему, описывающую модель, с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка и метода линеаризации и сравнить результаты.

3. Для каждого метода построить графики зависимости численности популяции китов и экспедиций с квотами от времени при заданных начальных условиях и коэффициентах.
4. Проанализировать полученные результаты моделирования, представленные в виде графиков, с целью выявления особенностей динамики изменения численности рассматриваемых двух видов.

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Модель Лотки-Вольтерры описывает изменение численности популяций двух взаимодействующих видов во времени. Модель представляется простой динамической системой.

Положим,  $x(t)$  и  $y(t)$  обозначают численность популяций китов и экспедиций с квотами на охоту, соответственно. Системой обыкновенных дифференциальных уравнений модели имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(-\gamma + \delta x(t)) \end{cases}, \quad x(t) > 0, y(t) \geq 0.$$

Уравнения данной системы описывают изменение численности каждой популяции с течением времени. Первое уравнение системы отражает динамику численности китов в зависимости от их рождаемости и охоты экспедиций на них. Второе уравнение показывает, как изменяется численность экспедиций с квотами на охоту, учитывая их взаимодействие с китами и соответственное окончание действие квот.

Решение данной системы позволяет смоделировать динамику изменения численности популяций китов и экспедиций с течением времени. Система решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Вторым способом решения задачи является линеаризация модели Лотки-Вольтерры. Метод линеаризации описывается следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow x(t_i) = x_i, i = \overline{1, n} \\ y(t) \rightarrow y(t_i) = y_i, i = \overline{1, n} \end{cases}, \quad x(t) > 0, y(t) \geq 0,$$

$$\text{где } x_{i+1} = x_i + x_i(\alpha - \beta y_i)\delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + y_i(-\gamma + \delta x_i)\delta t$$

$$\delta t = t_{i+1} - t_i \sim 1$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Исходный код, реализующий модель Лотки-Вольтерры, представлен ниже.

Импортирование необходимых библиотек:

```
from scipy.integrate import solve_ivp # метод Рунге-Кутты 4-го порядка
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Инициализация коэффициентов модели:

```
alpha = 0.075 # коэффициент рождаемость китов (+ к популяции)
beta = 0.00002 # коэффициент вероятности встречи китов и суден с квотами на
убийство кита
delta = 0.0001 # коэффициент выдачи квот
gamma = 0.99998 # смертность квот: встреча кита (он пойман) => квота
израсходована
```

Функции для решения системы уравнений модели Лотки-Вольтерры с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка:

```
# dx/dt
def find_x_deriv(x, y):
    return x * (alpha - beta * y)

# dy/dt
def find_y_deriv(x, y):
    return y * (-gamma + delta * x)

# определение вида системы
def func(t, xy):
    x_new = find_x_deriv(xy[0], xy[1])
    y_new = find_y_deriv(xy[0], xy[1])
    return x_new, y_new

# решение системы методом Рунге-Кутты 4-го порядка
def find_chisl(x0, y0, n):
    t = (0, n)
    system0 = [x0, y0]
    return solve_ivp(func, t, system0)
```

Функции для решения системы уравнений модели Лотки-Вольтерры с помощью метода линеаризации:

```
def find_chisl_linerised(x0, y0, n):
    xs = [x0]
    ys = [y0]
    ts = [0]
    prev_x = x0
    prev_y = y0
    prev_t = 0.0
    t = 0.0
    eps = 0.01

    while t <= n:
        ts.append(t)
        delta_t = t - prev_t
        prev_t = t

        x_val = prev_x + prev_x * (alpha - beta * prev_y) * delta_t
        y_val = prev_y + prev_y * (-gamma + delta * prev_x) * delta_t
        xs.append(x_val)
        ys.append(y_val)

        prev_x = x_val
        prev_y = y_val

        t += eps
    return xs, ys, ts
```

Установка начальных значений численности популяций видов (переменные x0 и y0), определение длины временного ряда, запуск программы:

```
if __name__ == "__main__":
    print(f">\n alpha={alpha}, beta={beta}, gamma={gamma}, delta={delta}")
    x0 = 20523
    y0 = 1000
    print(f"x0={x}, y0={y}")
    n = 100
    coords = find_chisl(x0, y0, n)
    # построение графика зависимости численности популяций от времени
    # метод Рунге-Кутты
    plt.plot(coords.t, coords.y[0], label="x", color='red')
    plt.plot(coords.t, coords.y[1], label="y", color= "green")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.title("x(t) vs y(t) Runge Kutta")
    plt.show()

    # построение графика зависимости численности популяций от времени
    # метод линеаризации
    coords_x, coords_y, coords_t = find_chisl_linerised(x, y, n)
    plt.plot(coords_t, coords_x, label="x", color='red')
    plt.plot(coords_t, coords_y, label="y", color= "green")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.title("x(t) vs y(t) linerised")
    plt.show()
```

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Построенные графики зависимости численности популяций китов и экспедиций с квотами на охоту от времени дают возможность наглядно проиллюстрировать результаты моделирования и представить динамику изменения популяций обоих видов во времени.

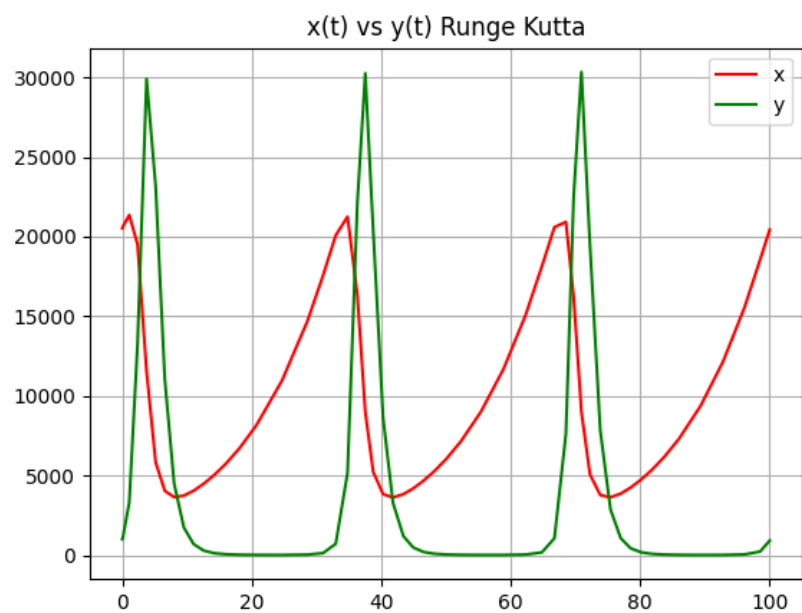


Рисунок 1. График зависимости численности китов ( $x$ ) и экспедиций с квотами ( $y$ ) от времени. Метод Рунге-Кутты

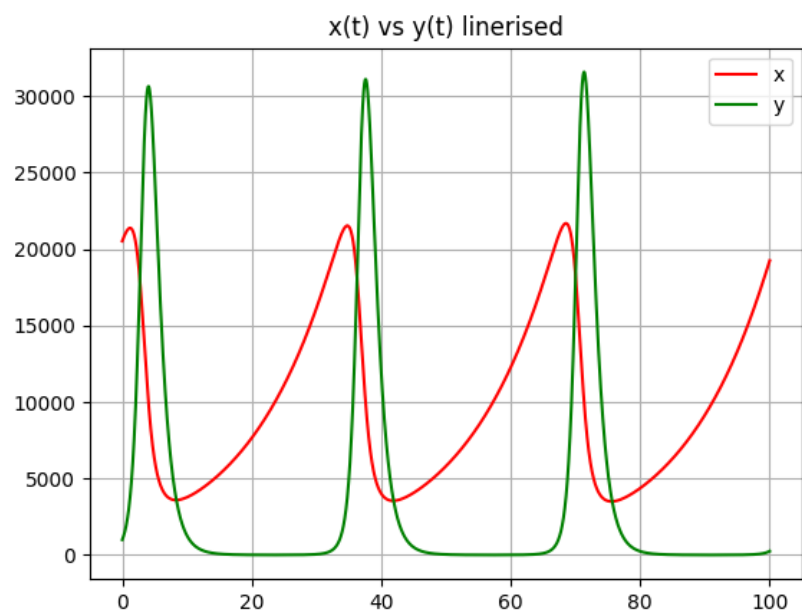


Рисунок 2. График зависимости численности китов ( $x$ ) и экспедиций с квотами ( $y$ ) от времени. Метод линеаризации.

## ВЫВОДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена и реализована модель Лотки-Вольтерры, описывающая взаимодействие популяций двух видов, для моделирования численности видов. Модель была исследована на примере взаимодействия популяции китов и экспедиций с квотами на охоту на китов.

Результаты работы позволили сделать вывод о том, что модель Лотки-Вольтерры успешно описывает динамику взаимодействия популяций двух видов, учитывая коэффициенты рождаемости и хищничества. Полученные графики зависимости численности популяций китов и экспедиций с квотами от времени подтвердили периодическое изменение численности, которое характерно для данной модели с заданными параметрами модели и начальными значениями. Однако стоит отметить, что задача является неустойчивой, поэтому корректное определение коэффициентов модели особенно важно.

Результаты двух методов приблизительно одинаковые. График, построенный по данным, полученным с помощью метода линеаризации, достаточно похож с графиком, полученным в результате использования метода Рунге-Кутты. Но можно заметить и некоторые отличия от графика метода Рунге-Кутты: кривые более плавные, а также амплитуда колебаний численности экспедиций с квотами на охоту с каждым периодом увеличивается. Такие отличия можно объяснить накоплением вычислительной погрешности в результате численного метода решения системы уравнений. Постепенное накопление погрешности может изменить динамику популяций со временем и увеличить амплитуду колебаний. Эти факторы должны быть учтены при оценке и истолковании результатов моделирования.