



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА _____ «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Лабораторная работа № 7
по курсу «Численные методы линейной алгебры»
«Разложение Холецкого, LU-разложение»

Студент группы ИУ9-71Б Яровикова А. С.

Преподаватель Посевин Д. П.

Москва 2023

1 Цель работы

Реализовать два метода разложения матриц:

- Холецкого;
- LU-разложение.

2 Задание

Реализовать оба метода для матриц произвольного размера, получить матрицы разложения, проверить корректность разложения путем их перемножения. Сравнить погрешность используя матричные нормы.

3 Реализация

Исходный код программы представлен в листингах 1– 4.

Листинг 1 — Вспомогательные функции

```
1 import numpy as np
2
3 def matrix_norm(matrix):
4     sum = 0
5     for i in range(len(matrix)):
6         sum += abs(matrix[i])
7     return max(sum)
8
9 def generate_symmetrical_matrix(l, r, n):
10     a = np.random.uniform(l, r, (n, n))
11     a = np.tril(a) + np.tril(a, -1).T
12     return a
13
14 def increase_diag_elems(a, diag):
15     n = len(a)
16     for i in range(0, len(a)):
17         a[i][i] = diag * sum(abs(a[i][j]) if j != i else 0 for j in
18                               range(n))
19     return a
20
21 def calc_diagonal_dominance(a):
22     degree = max(abs(a[i][i]) - sum(abs(a[i][j]) if j != i else 0 for j in
23                                     range(len(a))) for i in range(len(a)))
24     return degree > 0
```

Листинг 2 — Разложение Холецкого

```
1 def cholesky(A):
2     #  $A = L L^T$ 
3     n = len(A)
4     L = np.zeros_like(A)
5
6     L[0][0] = np.sqrt(A[0][0])
7
8     for i in range(1, n):
9         for j in range(i):
10             s = sum(L[i][p] * L[j][p] for p in range(j))
11             L[i][j] = (A[i][j] - s) / L[j][j]
12         L[i][i] = np.sqrt(A[i][i] - sum(L[i][p]**2 for p in range(i)))
13     return np.array(L)
```

Листинг 3 — LU-разложение

```
1 def LU(A):
2     #  $A = L * U$ 
3     n = len(A)
4     L, U = np.zeros_like(A), np.zeros_like(A)
5     for i in range(n): L[i][i] = 1.0
6
7     for i in range(n):
8         for j in range(n):
9             if i <= j:
10                 s = sum(L[i][k] * U[k][j] for k in range(i))
11                 U[i][j] = A[i][j] - s
12             elif i > j:
13                 s = sum(L[i][k] * U[k][j] for k in range(j))
14                 L[i][j] = (A[i][j] - s) / U[j][j]
15     return L, U
```

Листинг 4 — Тестирование. Сравнение погрешностей, используя матричные нормы

```
1 n = 3
2 A = generate_symmetrical_matrix(10, 40, n)
3 A = increase_diag_elems(A, 3)
4 print(f'matrix A:\n{A}\n')
5 # Holetski
6 L = cholesky(A)
7 LT = L.T
8 print(f'matrix L:\n{L}\n')
9 print(f'matrix L^T:\n{LT}\n')
10 print(f'matrix L * L^T:\n{L @ LT}\n')
11 holetsky_err = matrix_norm(A - L @ L.T)
12 print('-----')
13 # LU
14 L, U = LU(A)
15 print(f'matrix L:\n{L}\n')
16 print(f'matrix U:\n{U}\n')
17 print(f'matrix L*U:\n{L @ U}\n')
18 lu_err = matrix_norm(A - L @ U)
19 print(f'Holetski decomposition error: {holetsky_err}\n')
20 print(f'LU decomposition error: {lu_err}\n')
```

4 Результаты

Результат запуска методов представлены на рисунках 1 - 3.

```

matrix A:
[[368.06858339  19.0195397  39.93385506  26.911697  36.82443603]
 [ 19.0195397  267.11273955  14.2520553  29.57501469  26.19097016]
 [ 39.93385506  14.2520553  317.11370883  29.52738117  21.99127808]
 [ 26.911697  29.57501469  29.52738117  346.42503611  29.46091918]
 [ 36.82443603  26.19097016  21.99127808  29.46091918  343.40281037]]

matrix L:
[[19.18511359  0.  0.  0.  0.  ]
 [ 0.99136967 16.31348907 0.  0.  0.  ]
 [ 2.08150214 0.74714349 17.66982836 0.  0.  ]
 [ 1.40273848 1.72767347 1.43276763 18.42334612 0.  ]
 [ 1.91942757 1.48883588 0.95550512 1.23903796 18.30447406]]

matrix L^T:
[[19.18511359  0.99136967  2.08150214  1.40273848  1.91942757]
 [ 0.  16.31348907  0.74714349  1.72767347  1.48883588]
 [ 0.  0.  17.66982836  1.43276763  0.95550512]
 [ 0.  0.  0.  18.42334612  1.23903796]
 [ 0.  0.  0.  0.  18.30447406]]

matrix L * L^T:
[[368.06858339  19.0195397  39.93385506  26.911697  36.82443603]
 [ 19.0195397  267.11273955  14.2520553  29.57501469  26.19097016]
 [ 39.93385506  14.2520553  317.11370883  29.52738117  21.99127808]
 [ 26.911697  29.57501469  29.52738117  346.42503611  29.46091918]
 [ 36.82443603  26.19097016  21.99127808  29.46091918  343.40281037]]

-----
matrix L:
[[1.  0.  0.  0.  0.  ]
 [0.0516739  1.  0.  0.  0.  ]
 [0.10849569 0.04579912 1.  0.  0.  ]
 [0.07311598 0.1059046 0.08108554 1.  0.  ]
 [0.10004776 0.0912641 0.05407552 0.06725369 1.  ]]

matrix U:
[[368.06858339  19.0195397  39.93385506  26.911697  36.82443603]
 [ 0.  266.12992573  12.18851721  28.18438231  24.28810789]
 [ 0.  0.  312.22283426  25.31675803  16.88361143]
 [ 0.  0.  0.  339.41968218  22.82722521]
 [ 0.  0.  0.  0.  335.05377078]]

matrix L*U:
[[368.06858339  19.0195397  39.93385506  26.911697  36.82443603]
 [ 19.0195397  267.11273955  14.2520553  29.57501469  26.19097016]
 [ 39.93385506  14.2520553  317.11370883  29.52738117  21.99127808]
 [ 26.911697  29.57501469  29.52738117  346.42503611  29.46091918]
 [ 36.82443603  26.19097016  21.99127808  29.46091918  343.40281037]]

Holetski decomposition error: 6.394884621840902e-14
LU decomposition error: 3.552713678800501e-15

```

Рис. 1 — Разложения и погрешности для матрицы A размером 5x5

```
0 cec. matrix L * L^T:
[[709.67260689 17.02059268 36.2948469 18.81541006 35.9751466
 20.46771618 35.33885221 22.88738159 18.8791944 30.878395 ]
 [ 17.02059268 744.46881837 28.45609861 13.0801902 31.56326116
 34.17507254 32.26736975 26.02325824 39.64304564 25.92738397]
 [ 36.2948469 28.45609861 734.83655397 36.89305826 18.908823
 20.43655268 37.12402831 11.35324873 35.73857486 19.74028664]
 [ 18.81541006 13.0801902 36.89305826 582.34931821 17.65108838
 10.26252485 31.38360752 35.75583764 12.43446823 17.84025426]
 [ 35.9751466 31.56326116 18.908823 17.65108838 539.80341071
 17.58695874 22.14181863 10.21010689 10.24570646 15.65156038]
 [ 20.46771618 34.17507254 20.43655268 10.26252485 17.58695874
 677.23133557 35.33793969 30.6299428 21.55830633 35.28876471]
 [ 35.33885221 32.26736975 37.12402831 31.38360752 22.14181863
 35.33793969 843.12451592 26.67357008 39.95152804 20.82279107]
 [ 22.88738159 26.02325824 11.35324873 35.75583764 10.21010689
 30.6299428 26.67357008 659.05990788 39.78145067 16.37183931]
 [ 18.8791944 39.64304564 35.73857486 12.43446823 10.24570646
 21.55830633 39.95152804 39.78145067 750.37603893 31.89307167]
 [ 30.878395 25.92738397 19.74028664 17.84025426 15.65156038
 35.28876471 20.82279107 16.37183931 31.89307167 643.24304104]]

-----
matrix L*U:
[[709.67260689 17.02059268 36.2948469 18.81541006 35.9751466
 20.46771618 35.33885221 22.88738159 18.8791944 30.878395 ]
 [ 17.02059268 744.46881837 28.45609861 13.0801902 31.56326116
 34.17507254 32.26736975 26.02325824 39.64304564 25.92738397]
 [ 36.2948469 28.45609861 734.83655397 36.89305826 18.908823
 20.43655268 37.12402831 11.35324873 35.73857486 19.74028664]
 [ 18.81541006 13.0801902 36.89305826 582.34931821 17.65108838
 10.26252485 31.38360752 35.75583764 12.43446823 17.84025426]
 [ 35.9751466 31.56326116 18.908823 17.65108838 539.80341071
 17.58695874 22.14181863 10.21010689 10.24570646 15.65156038]
 [ 20.46771618 34.17507254 20.43655268 10.26252485 17.58695874
 677.23133557 35.33793969 30.6299428 21.55830633 35.28876471]
 [ 35.33885221 32.26736975 37.12402831 31.38360752 22.14181863
 35.33793969 843.12451592 26.67357008 39.95152804 20.82279107]
 [ 22.88738159 26.02325824 11.35324873 35.75583764 10.21010689
 30.6299428 26.67357008 659.05990788 39.78145067 16.37183931]
 [ 18.8791944 39.64304564 35.73857486 12.43446823 10.24570646
 21.55830633 39.95152804 39.78145067 750.37603893 31.89307167]
 [ 30.878395 25.92738397 19.74028664 17.84025426 15.65156038
 35.28876471 20.82279107 16.37183931 31.89307167 643.24304104]]

Holetski decomposition error: 1.3322676295501878e-13

LU decomposition error: 8.881784197001252e-15
```

Рис. 2 — Разложения и погрешности для матрицы A размером 10x10

```

0
сек.
matrix A:
[[7677.55831828  32.48589453  20.68358659 ... 35.68070519
  33.65190498  38.28885487]
 [ 32.48589453 7204.40203714  35.57184647 ... 27.16809707
  37.90267245  32.70557266]
 [ 20.68358659  35.57184647 7242.29712432 ... 36.4250309
  14.86010826  14.42685309]
 ...
 [ 35.68070519  27.16809707  36.4250309 ... 7658.16173143
  31.80550639  21.62925587]
 [ 33.65190498  37.90267245  14.86010826 ... 31.80550639
  7455.79103027  13.16570078]
 [ 38.28885487  32.70557266  14.42685309 ... 21.62925587
  13.16570078 7650.77300268]]

matrix L * L^T:
[[7677.55831828  32.48589453  20.68358659 ... 35.68070519
  33.65190498  38.28885487]
 [ 32.48589453 7204.40203714  35.57184647 ... 27.16809707
  37.90267245  32.70557266]
 [ 20.68358659  35.57184647 7242.29712432 ... 36.4250309
  14.86010826  14.42685309]
 ...
 [ 35.68070519  27.16809707  36.4250309 ... 7658.16173143
  31.80550639  21.62925587]
 [ 33.65190498  37.90267245  14.86010826 ... 31.80550639
  7455.79103027  13.16570078]
 [ 38.28885487  32.70557266  14.42685309 ... 21.62925587
  13.16570078 7650.77300268]]

-----
matrix L*U:
[[7677.55831828  32.48589453  20.68358659 ... 35.68070519
  33.65190498  38.28885487]
 [ 32.48589453 7204.40203714  35.57184647 ... 27.16809707
  37.90267245  32.70557266]
 [ 20.68358659  35.57184647 7242.29712432 ... 36.4250309
  14.86010826  14.42685309]
 ...
 [ 35.68070519  27.16809707  36.4250309 ... 7658.16173143
  31.80550639  21.62925587]
 [ 33.65190498  37.90267245  14.86010826 ... 31.80550639
  7455.79103027  13.16570078]
 [ 38.28885487  32.70557266  14.42685309 ... 21.62925587
  13.16570078 7650.77300268]]

Holetski decomposition error: 1.9060308886764687e-12

LU decomposition error: 9.325873406851315e-13

```

Рис. 3 — Разложения и погрешности для матрицы A размером 100x100

5 Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы были реализованы методы разложения матрицы: разложение Холецкого и LU-разложение. Реализация была выполнена на языке программирования Python. Также выполнено сравнение относительных погрешностей методов с помощью согласованной матричной нормы. Результаты сравнения показали, что LU-разложение имеет меньшую погрешность метода.