**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет «Информатика и системы управления»

Кафедра «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

**Лабораторная работа № 1**

**по курсу «Моделирование»**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ БИОЛОГИЧЕСКОГО ВИДА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ

Студент: Яровикова А. С.

Группа: ИУ9-81Б

Преподаватель: Домрачева А. Б.

Москва, 2024

# **ЦЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

**Цель**

Целью данной работы является изучение и реализация модели Лотки-Вольтерры, описывающей взаимодействие популяций двух видов, для моделирования численности видов.

**Постановка задачи**

Необходимо исследовать модель взаимодействия популяции двух видов, используя модель Лотки-Вольтерры. В нашем случае рассматриваются популяции китов и выдачи квот на экспедиции с целью охоты на них. Для модели используются следующие параметры:

* = 0.075 – коэффициент рождаемости китов,
* = 0.00002 – коэффициент хищничества экспедиций с квотой,
* = 0.99998 – коэффициент смертности квот,
* = 0.0001 – коэффициент выдачи квот на экспедиции.

Коэффициент описывает прибавление рожденных китов к популяции, коэффициент – вероятность встречи китов с экспедициями с квотой на охоту на китов, коэффициент – израсходование квоты по принципу: кит пойман, следовательно квота израсходована, коэффициент – вероятность выдачи квоты на охоту на китов.

Необходимо:

1. Реализовать модель Лотки-Вольтерры при заданных коэффициентах модели и с начальными условиями , , где количество китов, количество экспедиций с квотами на охоту на китов.
2. Решить простую динамическую систему, описывающую модель, с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка и метода линеаризации и справить результаты.
3. Для каждого метода построить графики зависимости численности популяции китов и экспедиций с квотами от времени при заданных начальных условиях и коэффициентах.
4. Проанализировать полученные результаты моделирования, представленные в виде графиков, с целью выявления особенностей динамики изменения численности рассматриваемых двух видов.

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

Модель Лотки-Вольтерры описывает изменение численности популяций двух взаимодействующих видов во времени. Модель представляется простой динамической системой.

Положим, и обозначают численность популяций китов и экспедиций с квотами на охоту, соответственно. Системой обыкновенных дифференциальных уравнений модели имеет вид:

Уравнения данной системы описывают изменение численности каждой популяции с течением времени. Первое уравнение системы отражает динамику численности китов в зависимости от их рождаемости и охоты экспедиций на них. Второе уравнение показывает, как изменяется численность экспедиций с квотами на охоту, учитывая их взаимодействие с китами и соответственное окончание действие квот.

Решение данной системы позволяет смоделировать динамику изменения численности популяций китов и экспедиций с течением времени. Система решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Вторым способом решения задачи является линеаризация модели Лотки-Вольтерры. Метод линеаризации описывается следующим образом:

# **ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

Исходный код, реализующий модель Лотки-Вольтерры, представлен ниже.

Импортирование необходимых библиотек:

**from** **scipy.integrate** **import** solve\_ivp # метод Рунге-Кутты 4-го порядка

**import** **matplotlib.pyplot** **as** **plt**

**import** **numpy** **as** **np**

Инициализация коэффициентов модели:

alpha = **0.075** # коэффициент рождаемость китов (+ к популяции)

beta = **0.00002** # коэффициент вероятности встречи китов и суден с квотами на убийство кита

delta = **0.0001** # коэффициент выдачи квот

gamma = **0.99998** # смертность квот: встреча кита (он пойман) => квота израсходована

Функции для решения системы уравнений модели Лотки-Вольтерры с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка:

# dx/dt

**def** **find\_x\_deriv**(x, y):

**return** x \* (alpha - beta \* y)

# dy/dt

**def** **find\_y\_deriv**(x, y):

**return** y \* (-gamma + delta \* x)

# определение вида системы

**def** **func**(t, xy):

x\_new = find\_x\_deriv(xy[**0**], xy[**1**])

y\_new = find\_y\_deriv(xy[**0**], xy[**1**])

**return** x\_new, y\_new

# решение системы методом Рунге-Кутты 4-го порядка

**def** **find\_chisl**(x0, y0, n):

t = (**0**, n)

system0 = [x0, y0]

**return** solve\_ivp(func, t, system0)

Функции для решения системы уравнений модели Лотки-Вольтерры с помощью метода линеаризации:

**def** **find\_chisl\_linerised**(x0, y0, n):

xs = [x0]

ys = [y0]

ts = [**0**]

prev\_x = x0

prev\_y = y0

prev\_t = **0.0**

t = **0.0**

eps = **0.01**

**while** t <= n:

ts.append(t)

delta\_t = t - prev\_t

prev\_t = t

x\_val = prev\_x + prev\_x \* (alpha - beta \* prev\_y) \* delta\_t

y\_val = prev\_y + prev\_y \* (-gamma + delta \* prev\_x) \* delta\_t

xs.append(x\_val)

ys.append(y\_val)

prev\_x = x\_val

prev\_y = y\_val

t += eps

**return** xs, ys, ts

Установка начальных значений численности популяций видов (переменные x0 и y0), определение длины временного ряда, запуск программы:

**if** \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":

print(f">**\n** alpha={alpha}, beta={beta}, gamma={gamma}, delta={delta}")

x0 = **20523**

y0 = **1000**

print(f"x0={x}, y0={y}")

n = **100**

coords = find\_chisl(x0, y0, n)

# построение графика зависимости численности популяций от времени

# метод Рунге-Кутты

plt.plot(coords.t, coords.y[**0**], label="x", color='red')

plt.plot(coords.t, coords.y[**1**], label="y", color= "green")

plt.grid(**True**)

plt.legend()

plt.title("x(t) vs y(t) Runge Kutta")

plt.show()

# построение графика зависимости численности популяций от времени

# метод линеаризации

coords\_x, coords\_y, coords\_t = find\_chisl\_linerised(x, y, n)

plt.plot(coords\_t, coords\_x, label="x", color='red')

plt.plot(coords\_t, coords\_y, label="y", color= "green")

plt.grid(**True**)

plt.legend()

plt.title("x(t) vs y(t) linerised")

plt.show()

# **РЕЗУЛЬТАТЫ**

Построенные графики зависимости численности популяций китов и экспедиций с квотами на охоту от времени дают возможность наглядно проиллюстрировать результаты моделирования и представить динамику изменения популяций обоих видов во времени.

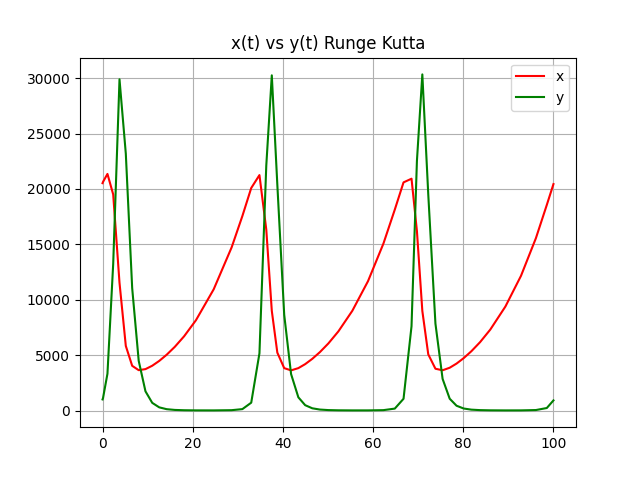


Рисунок 1. График зависимости численности китов (х) и экспедиций с квотами (у) от времени. Метод Рунге-Кутты

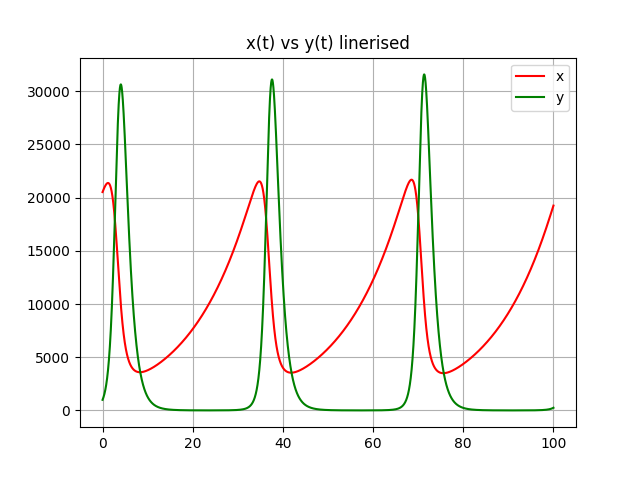


Рисунок 2. График зависимости численности китов (х) и экспедиций с квотами (у) от времени. Метод линеаризации.

# **ВЫВОДЫ**

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена и реализована модель Лотки-Вольтерры, описывающая взаимодействие популяций двух видов, для моделирования численности видов. Модель была исследована на примере взаимодействия популяции китов и экспедиций с квотами на охоту на китов.

Результаты работы позволили сделать вывод о том, что модель Лотки-Вольтерры успешно описывает динамику взаимодействия популяций двух видов, учитывая коэффициенты рождаемости и хищничества. Полученные графики зависимости численности популяций китов и экспедиций с квотами от времени подтвердили периодическое изменение численности, которое характерно для данной модели с заданными параметрами модели и начальными значениями. Однако стоит отметить, что задача является неустойчивой, поэтому корректное определение коэффициентов модели особенно важно.

Результаты двух методов приблизительно одинаковые. График, построенный по данным, полученным с помощью метода линеаризации, достаточно похож с графиком, полученным в результате использования метода Рунге-Кутты. Но можно заметить и некоторые отличия от графика метода Рунге-Кутты: кривые более плавные, а также амплитуда колебаний численности экспедиций с квотами на охоту с каждым периодом увеличивается. Такие отличия можно объяснить накоплением вычислительной погрешности в результате численного метода решения системы уравнений. Постепенное накопление погрешности может изменить динамику популяций со временем и увеличить амплитуду колебаний. Эти факторы должны быть учтены при оценке и истолковании результатов моделирования.