Probabilidade Básica

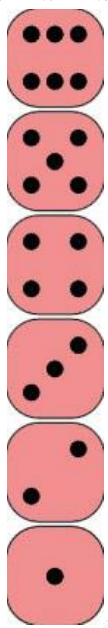
Reinaldo Madarazo - 2014

Espaço Amostral

- Em um *experimento (ou fenômeno) aleatório*, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado de **Espaço Amostral** (Ω).
- Qualquer *subconjunto* do espaço amostral é chamado de **Evento**.
- Exemplo: Lançamento de um dado e registro do resultado.
  - Conjunto de todos os resultados possíveis: {1,2,3,4,5,6}
  - Um subconjunto dele é {1,3,5}, que pode ser identificado como "ocorrer número ímpar no lançamento de um dado".
  - ***Espaço amostral:*** $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
  - ***Evento A:*** "ocorrer número ímpar no lançamento de um dado" $\rightarrow$ $A = \{1,3,5\}$

Exemplo

- No lançamento simultâneo de dois dados, um branco e um vermelho, determine o espaço amostral e os eventos:
  - A: sair o mesmo número nos dois dados
  - B: sair soma 7
  - C: sair soma maior do que 10
  - D: sair soma menor do que 5
  - E: sair soma maior do que 12
  - F: sair soma maior do que 1 e menor do que 13



(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)

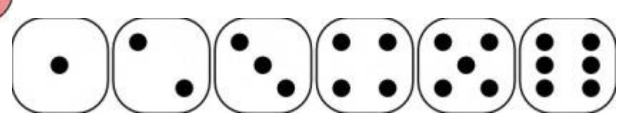
(1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5)

(1,4) (2,4) (3,4) (4,4) (5,4) (6,4)

(1,3) (2,3) (3,3) (4,3) (5,3) (6,3)

(1,2) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2)

(1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)



Exemplo

- **Espaço amostral**: Ω = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
- **Evento A**: Sair o mesmo número nos dois dados → A = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}.
- **Evento B:** Sair soma 7 → B={(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}
- **Evento C:** Sair soma maior do que 10 → C={(5,6), (6,5), (6,6)}
- **Evento D:** Sair soma menos do que 5 → D={(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)}
- **Evento E:** Sair soma maior do que 12 → E= { }
- **Evento F:** Sair soma maior do que 1 e menor do que 13 → F= Ω

Eventos

- No experimento aleatório "lançar um dado e registrar o resultado", temos:
  - Espaço amostral {1,2,3,4,5,6}
  - Evento A: "ocorrência de um número menor do que 7" A = Ω
  - Evento B: "ocorrência de um número maior do que 6" B = { }
- Dizemos que:

Quando um evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **Evento Certo**. Quando um evento é vazio, ele é chamado **Evento Impossível**.

Probabilidade

- Uma *probabilidade* é um valor numérico que representa a chance, a eventualidade ou a possibilidade de que um determinado evento venha a ocorrer, como é o caso do aumento do preço de uma determinada ação, um dia de chuva, uma unidade de produção fora de padrão de conformidade ou um resultado igual a 5 para um único lançamento de um dado.
- Em cada um desses exemplos, a probabilidade envolvida corresponde a uma *proporção ou fração* cujo valor se estende entre **0** e **1**, inclusive.
- Um ***evento impossível*** tem probabilidade igual a **0**.
- Um ***evento certo*** possui uma probabilidade igual a **1**.

Abordagens

- Existem três abordagens para o estudo da probabilidade:
  - A probabilidade clássica *a priori*.
  - A probabilidade clássica empírica.
  - A probabilidade subjetiva

Probabilidade clássica

- Em uma probabilidade clássica a priori, a probabilidade de sucesso é baseada no conhecimento prévio do processo envolvido. No caso mais simples, no qual cada um dos resultados é igualmente provável, a chance de ocorrência do evento pode ser obtida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

  - **P(A):** probabilidade de ocorrência do evento A.
  - **n(A):** número de maneiras por meio das quais o evento ocorre, ou seja, o número de elementos do evento A.
  - **n(Ω):** número total de resultados possíveis, ou seja, número de elementos do espaço amostral Ω.

- **Exemplo:** Considere um baralho que possui 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas. A probabilidade de selecionar uma carta preta corresponde a 26/52=0,50; pois o **evento A** possui 26 elementos e o **espaço amostral** possui 52 elementos.

Probabilidade clássica empírica

- Neste caso, os resultados são baseados em *dados observados*, e não no conhecimento prévio sobre um determinado processo.
- **Exemplos:** A proporção de eleitores que têm preferência por um determinado candidato político; a proporção de alunos que possuem algum tipo de emprego de meio expediente.
- Neste último exemplo, se for feito um levantamento junto aos alunos e **60%** deles declararem que possuem empregos de meio expediente, existe, então, uma probabilidade de **0,60** de que um determinado aluno tenha emprego de meio expediente.

Probabilidade Subjetiva

- Difere das outras duas abordagens pelo fato de que a probabilidade subjetiva *varia de pessoa para pessoa*.
- **Exemplo:** uma equipe responsável pelo desenvolvimento de um novo produto pode atribuir uma probabilidade de **0,60** à chance de sucesso para o produto, enquanto o presidente da empresa pode ser menos otimista e atribuir um valor de **0,30**.
- A *probabilidade subjetiva* geralmente é baseada entre a *experiência do passado*, a *opinião pessoal* e a *análise de uma determinada situação* por parte de um determinado indivíduo.
- É muito útil em situações onde não se consegue utilizar a probabilidade clássica a priori ou empírica.

Tipos de Eventos

- **Evento:** cada resultado possível de uma variável.
- **Evento simples:** descrito por uma única característica.
- **Evento combinado:** é um evento que possui duas ou mais características.
- **Complemento:** o complemento de um evento A (representado por **A'**) inclui todos os eventos que não fazem parte do evento A.

Exemplos:

- Quando se joga uma moeda,os dois resultados possíveis são Cara ou Coroa. Cada um desses resultados caracteriza um Evento Simples.
- Obter dois resultados Cara no lançamento de duas moedas caracteriza um evento combinado, uma vez que consiste em obter Cara no lançamento da primeira moeda e Cara no lançamento da segunda moeda, dois eventos simples.
- O complemento do evento obter resultado Cara no lançamento de uma moeda é obter o resultado Coroa, uma vez que se trata do único evento que não se refere a Cara.
- O complemento de se obter 5 pontos em um lançamento de um dado é não obter o resultado 5, isto é, obter 1,2,3,4 ou 6.

Exercícios

- A tabela abaixo ilustra os resultados coletados por uma empresa de produtos eletrônicos para uma amostra de 1000 domicílios, em termos de comportamento de compras de aparelhos de TV de tela plana.

	EFETIVAMENTE COMPROU		
PLANEJOU COMPRAR	**SIM**	**NÃO**	**TOTAL**
Sim	200	50	**250**
Não	100	650	**750**
Total	**300**	**700**	**1000**

- Qual é o espaço amostral? Dê exemplos de eventos simples e de eventos combinados.
- Solução: O espaço amostral consiste de 1000 domicílios. Os eventos simples são "planejou comprar", "não planejou comprar", "comprou" e "não comprou". O complemento do evento "planejou comprar" é "não planejou comprar". O evento "planejou comprar e efetivamente comprou" é um evento combinado.

Probabilidade Simples e Tabelas de Contingência

- A tabela vista no exemplo anterior é conhecida pelo nome de **Tabela de Contingência** ou de **dupla entrada** e serve para representar o espaço amostral.
- Por exemplo, **200** dos domicílios respondentes planejaram comprar um aparelho de TV de tela plana e subsequentemente de fato compraram.
- **Probabilidade Simples (ou marginal):** refere-se à probabilidade de ocorrência de um evento simples, **P(A)**.
- Como se determina a probabilidade de selecionar um domicílio que tenha planejado comprar um aparelho de televisão de tela plana?

$$P(A) = \frac{N^{o}\ de\ domicílios\ que\ planejaram\ comprar\ (n(A))}{Número\ total\ de\ domicílios\ (n(\Omega))}$$

$$Onde\ o\ evento\ A\ corresponde\ a\ \text{"}\ planejou\ comprar\text{"}$$

$$P(planejou\ comprar) = \frac{250}{1000} = 0{,}25 = 25\%$$

Exercício

- Na continuação das pesquisas da empresa de produtos eletrônicos, outras perguntas foram feitas a 300 domicílios que efetivamente compraram aparelhos de TV ser de tela de Plasma ou não e de eles também terem comprado um gravador de DVD nos últimos 12 meses.

	COMPROU GRAVADOR DE DVD		
COMPROU APARELHO DE TV DE TELA DE PLASMA	**SIM**	**NÃO**	**TOTAL**
Sim (com tela de plasma)	38	42	**80**
Não (com outro tipo de tela)	70	150	**220**
Total	**108**	**192**	**300**

- Encontre a probabilidade de que, caso um domicílio que tenha adquirido um aparelho de TV de tela plana seja aleatoriamente selecionado, o aparelho de TV adquirido seja de plasma.

$$Fazendo:$$

$$A = comprou\ TV\ plasma \qquad B = comprou\ gravador\ DVD$$

$$A' = não\ comprou\ TV\ de\ plasma \qquad B' = não\ comprou\ gravador\ DVD$$

$$P(tela\ de\ plasma) = \frac{N^o\ aparelhos\ te\ TV\ de\ plasma}{N^o\ total\ de\ aparelhos\ de\ TV} = \frac{80}{300} = 0{,}267 = 26{,}7\%$$

Probabilidade Combinada

- A probabilidade combinada refere-se à probabilidade de uma ocorrência envolvendo dois ou mais eventos.
- Exemplo: obter cara no primeiro lançamento de uma moeda e cara no segundo lançamento da moeda.
- Exercício: Utilizando a primeira tabela de contingência vista, determine a probabilidade de selecionar um domicílio que tenha planejado comprar e efetivamente tenha comprado um aparelho de TV de tela plana.

$$A = Planejou\ comprar \qquad B = Efetivamente\ comprou$$

$$P(Planejou\ comprar\ e\ Efetivamente\ comprou) = P(A\ e\ B) =$$

$$= \frac{Planejou\ comprar\ e\ efetivamente\ comprou}{Número\ total\ de\ domicílios} = \frac{200}{1000} = 0{,}20 = 20\%$$

Exercício

- Na segunda tabela de contingência apresentada, as compras foram classificadas de forma cruzada, considerando com tela de plasma e sem tela de plasma, e se o domicílio comprou ou não um gravador de DVD. Encontre a probabilidade de que um domicílio aleatoriamente selecionado que tenha comprado um aparelho de TV de tela plana tenha também comprado um TV de plasma e um gravador de DVD.

$$A = Tela\ de\ plasma \qquad B = Comprou\ gravador\ de\ DVD$$

$$P(A\ e\ B) = \frac{N^o\ de\ domicílios\ que\ compraram\ TV\ plasma\ e\ gravador\ DVD}{N^o\ total\ de\ compradores\ de\ TV\ de\ tela\ plana} =$$

$$= \frac{38}{300} = 0{,}127 = 12{,}7\%$$

Eventos

- **Eventos mutuamente excludentes**: ambos os eventos não podem ocorrer simultaneamente.
- **Exemplo:** Cara ou Coroa em um lançamento de uma moeda são eventos mutuamente excludentes. O lançamento de uma moeda não pode ser simultaneamente cara e coroa.
- **Eventos coletivamente exaustivos:** um dos eventos deve obrigatoriamente ocorrer.
- **Exemplo:** Cara ou Coroa em um lançamento de uma moeda são eventos coletivamente exaustivos, pois um deles deve obrigatoriamente ocorrer.
- **Probabilidade marginal:** consiste de um conjunto de probabilidades combinadas. Se **B** consiste de dois eventos, $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$, então **P(A)**, a probabilidade do **evento A** consiste na probabilidade combinada de ocorrer com o **evento** $\mathbf{B_1}$ e a probabilidade do **evento A** ocorrer como o **evento** $\mathbf{B_2}$.

Probabilidade Marginal

$$P(A) = P(A \text{ e } B_1) + P(A \text{ e } B_2) + \ldots + P(A \text{ e } B_i)$$

- Onde B1, B2, ..., Bi correspondem a k eventos mutuamente excludentes e coletivamente exaustivos.
- Exemplo: Calcule a probabilidade marginal de "planejou comprar" um aparelho de TV de tela plana:

$$P(\text{planejou comprar}) = P(\text{planejou comprar e comprou}) + P(\text{planejou comprar e não comprou}) =$$

$$= \frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} = \frac{250}{1000} = 0{,}25 = 25\%$$

Regra Geral da Adição

- Permite que se encontre a probabilidade do evento **"A ou B".**
- Considera a ocorrência do *evento A ou do evento B ou de ambos os eventos, A* e *B.*
- Nos problemas apresentados, o evento *"planejou comprar ou efetivamente comprou"* inclui todos os domicílios que planejaram comprar e todos os domicílios que efetivamente compraram a TV de tela plana.
- Com base na tabela apresentada, o evento *"planejou comprar e efetivamente não comprou"* faz parte do evento "planejou comprar ou efetivamente comprou". *"Não planejou comprar e efetivamente comprou"* também faz parte do evento desejado. Também está incluído o evento *"planejou comprar e efetivamente comprou".*

$$P(\text{planejou comprar ou efetivamente comprou}) =$$

$$= P(\text{planejou comprar e não comprou}) + P(\text{não planejou comprar e comprou}) +$$

$$+ P(\text{planejou comprar e comprou}) = \frac{50}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{200}{1000} = \frac{350}{1000} = 0{,}35 = 35\%$$

Regra Geral da Adição

- É mais fácil determinar P(A ou B) utilizando a Regra Geral da Adição:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

- **Exercício:** Utilizando a expressão acima, calcule a probabilidade vista no exemplo anterior, *P(planejou comprar ou efetivamente comprou)*:

$$P(\text{Planejou comprar ou efetivamente comprou}) =$$
$$= P(\text{Planejou comprar}) + P(\text{Efetivamente comprou}) - P(\text{Planejou comprar}$$
$$\text{e efetivamente comprou}) = \frac{250}{1000} + \frac{300}{1000} - \frac{200}{1000} = \frac{350}{1000} = 0{,}35 = 35\%$$

Exercício

- Na segunda tabela de contingência vista, as compras foram classificadas de forma cruzada, considerando com tela de plasma ou sem ela e o fato do domicílio ter comprado ou não um gravador de DVD. Encontra a probabilidade de que entre os domicílios que compraram um aparelho de TV de tela plana tenha sido comprado um *TV de plasma ou um gravador de DVD*.

$$P(Tela\ \ plasma\ ou\ DVD) = P(Tela\ \ plasma) + P(DVD) - P(Tela\ \ plasma\ e\ DVD) =$$

$$= \frac{80}{300} + \frac{108}{300} - \frac{38}{300} = \frac{150}{300} = 0{,}50 = 50\%$$

Probabilidade Condicional

- Refere-se à probabilidade do ***evento A***, sendo *conhecidas informações* sobre a ocorrência de um outro ***evento, B***.
- A probabilidade de **A**, sendo **B** *conhecido* pode ser obtida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A\,e\,B)}{P(B)}$$

- A probabilidade de **B**, sendo **A** *conhecido* pode ser obtida por:

$$P(B|A) = \frac{P(A\,e\,B)}{P(A)}$$

Exemplo

- Considere a primeira tabela de contingência vista, envolvendo a compra de TVs de tela plana, suponha que fosse informado de que um domicílio planejava comprar uma TV de tela plana. Qual a probabilidade de que o domicílio tenha efetivamente comprado a TV?

$$A = Planejou\ comprar \qquad B = Efetivamente\ comprou)$$

$$P(Efetivamente\ Comprou \mid Planejou\ comprar) = \frac{P(planejou\ comprar\ e\ comprou)}{P(planejou\ comprar)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\ e\ B)}{P(A)} = \frac{200/1000}{250/1000} = \frac{200}{250} = 0{,}80 = 80\%$$

Ou também pode ser obtida diretamente :

$$P(Efetivamente\ Comprou \mid Planejou\ comprar) = \frac{N^o\ Planejou\ e\ comprou}{N^o\ Planejou} =$$

$$= \frac{200}{250} = 0{,}80 = 80\%$$

Exercício

- A segunda tabela de contingência vista, é uma tabela para o cruzamento da hipótese de o domicílio ter comprado, ou não, um aparelho de televisão de tela de plasma com a hipótese de o domicílio ter comprado, ou não, um gravador de DVD. Dentre os domicílios que compraram aparelhos de TV de plasma, qual a probabilidade de que eles também tenham comprado gravadores de DVD?

$$A = Tela\ de\ Plasma \qquad\qquad B = Gravador\ DVD$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\ e\ B)}{P(A)} = \frac{38/300}{80/300} = 0{,}475 = 47{,}5\%$$

$$Ou\ de\ forma\ direta\ pela\ tabela:$$

$$P(B \mid A) = \frac{N^{o}\ pessoas\ que\ compraram\ TV\ de\ plasma\ e\ DVD}{N^{o}\ pessoas\ que\ compraram\ TV\ de\ plasma} =$$

$$= \frac{38}{80} = 0{,}475 = 47{,}5\%$$

Independência Estatística

- Quando o resultado de um evento não afeta a probabilidade de ocorrência de outro evento diz-se que os eventos são estatisticamente independentes.
- A Independência Estatística pode ser determinada por:

$$\boldsymbol{P(A|B) = P(A)\ ou}$$
$$\boldsymbol{P(B|A) = P(B)}$$

- Onde **P(A|B)** é a probabilidade condicional de A, sendo conhecido B e **P(A)** é a probabilidade margina de A.

Exercício

- Na continuação do levantamento feito junto aos 300 domicílios que efetivamente compraram aparelhos de TV de tela plana, foi perguntado aos domicílios se estavam satisfeitos com a compra. A tabela a seguir classifica, de forma cruzada, as respostas para a pergunta relacionada à satisfação e as respostas para o fato de o aparelho de TV ter sido, ou não, um aparelho de TV de tela de plasma.

	SATISFEITO COM A COMPRA?		
TIPO DE APARELHO DE TV	**SIM**	**NÃO**	**TOTAL**
Tela de plasma	64	16	**80**
Com outro tipo de tela	176	44	**220**
Total	**240**	**60**	**300**

- Determine se estar satisfeito com a compra e o tipo de aparelho de TV comprado são estatisticamente independentes.

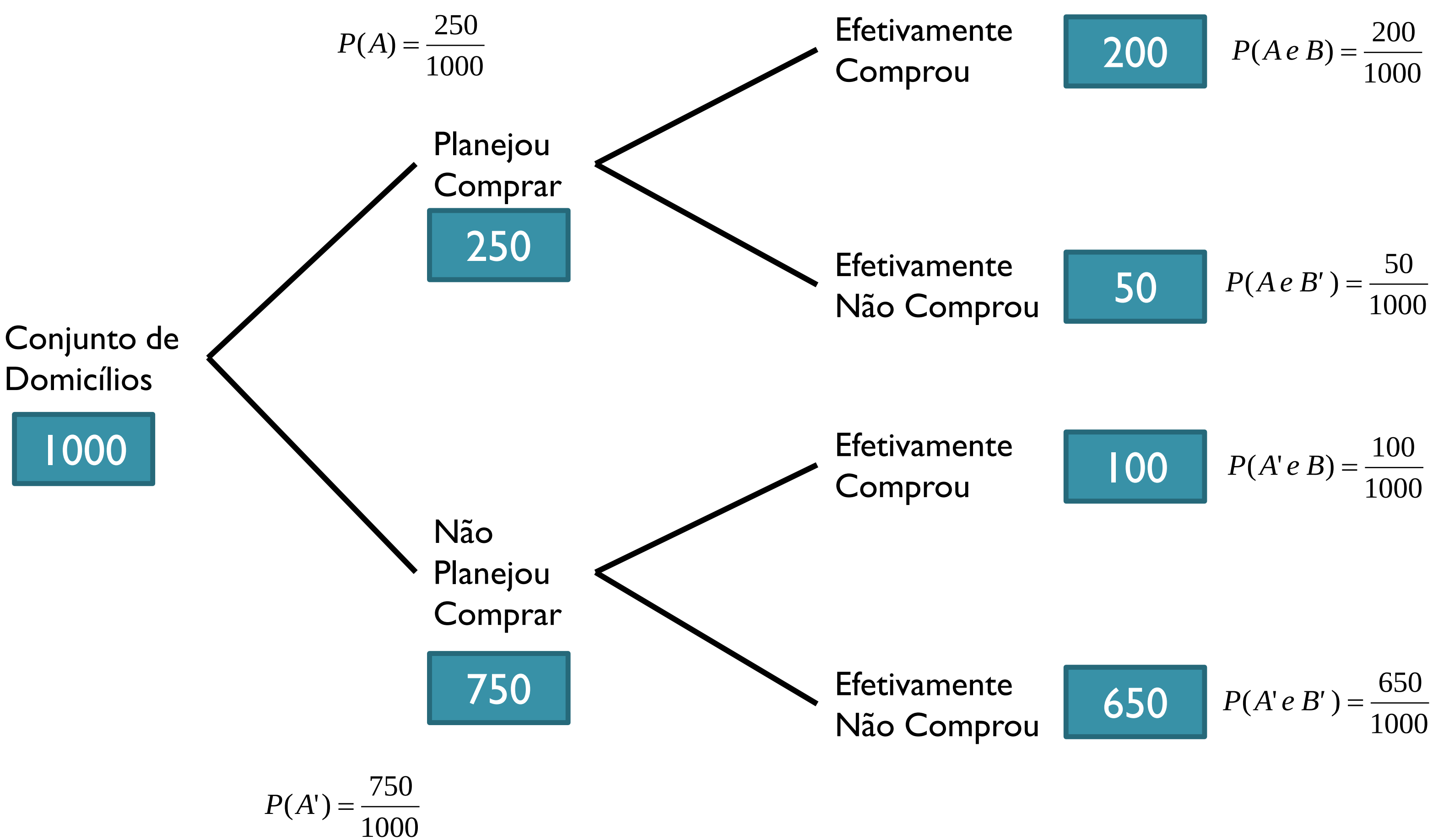
$$A = Tela\ de\ plasma \qquad B = Estar\ satisfeito$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\ e\ B)}{P(A)} = \frac{64/300}{80/300} = \frac{64}{80} = 0{,}80 = 80\%$$

$$P(B) = \frac{240}{300} = 0{,}80 = 80\%$$

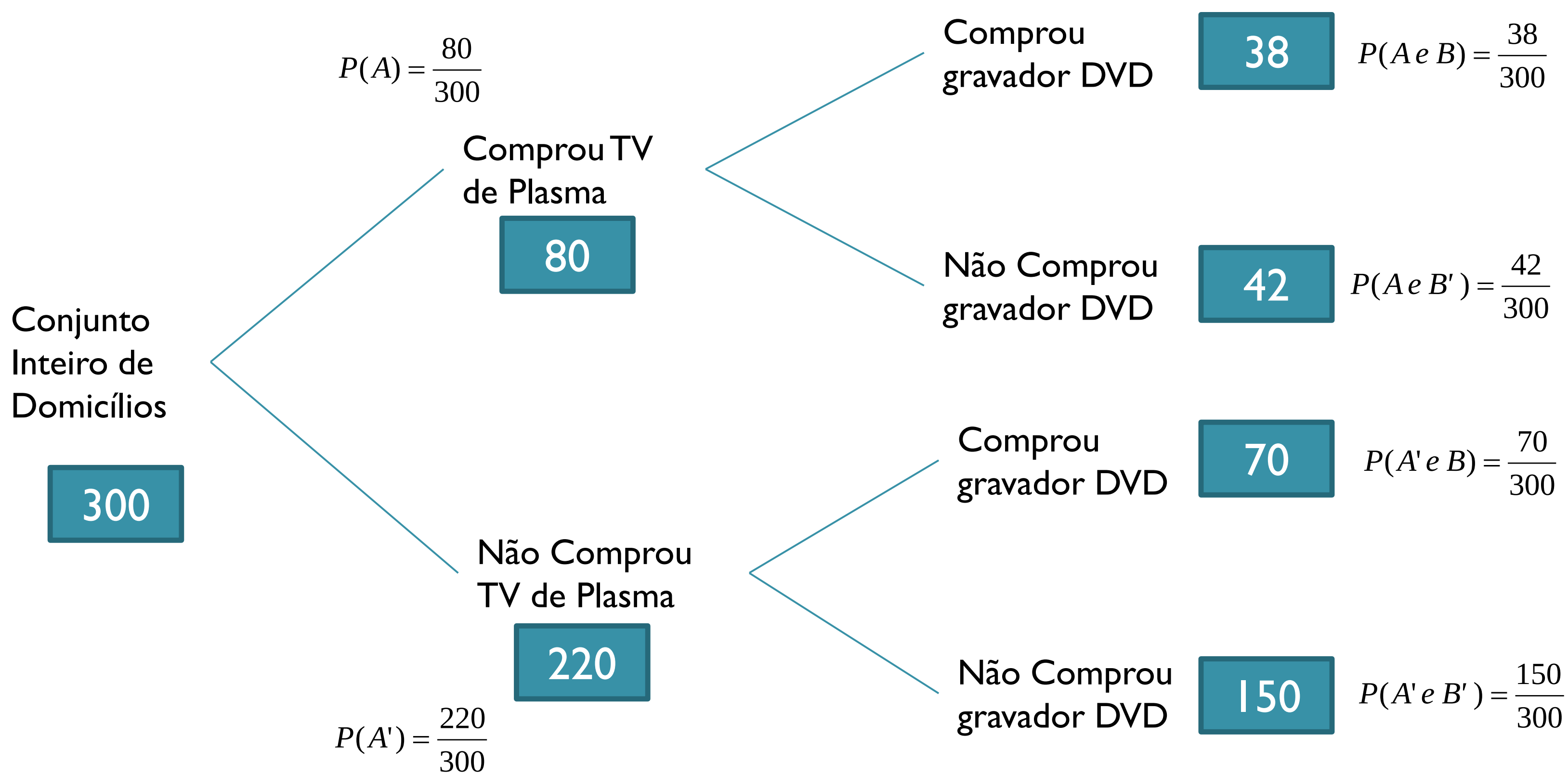
$$Como\ P(B \mid A) = P(B)\ são\ eventos\ estatisticamente\ independentes$$

Árvore de Decisão



Exercício

- Construa a árvore de decisão para encontrar a probabilidade de que um domicílio tenha comprado um gravador de DVD, sabendo-se que o domicílio comprou um aparelho de TV de Plasma.



Bibliografia

- Dante. Matemática Volume Único. Editora Ática.
- Levine, Stephen, Krehbiel, Berenson. Estatística – Teoria e Aplicações usando o Microsoft Excel em Português. Quinta Edição. Ed. LTC.