ANÁLISE COMBINATÓRIA

Reinaldo Madarazo - 2014

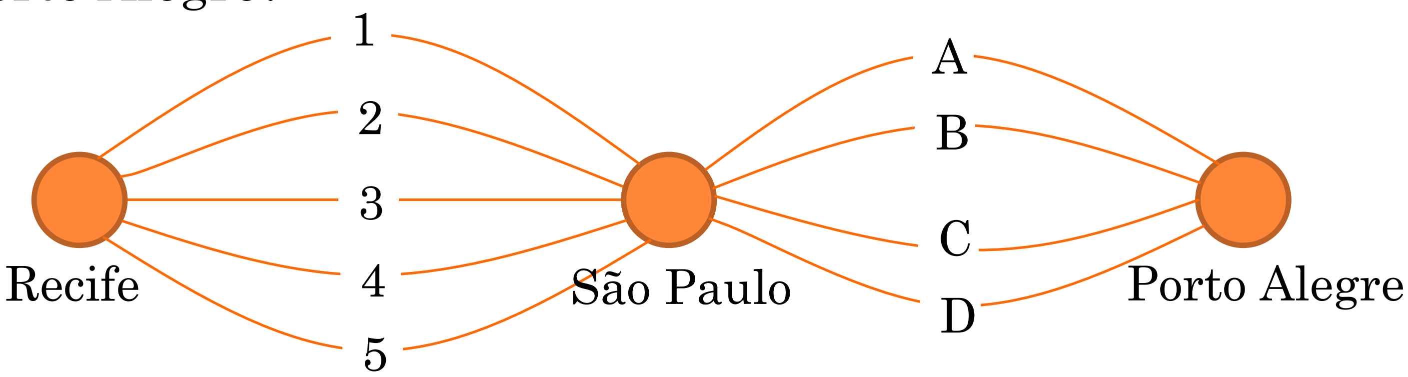
ANÁLISE COMBINATÓRIA

- Usando as 26 letras e 10 algarismos conhecidos, quantas placas diferentes de automóvel podem ser feitas de moda que, em cada uma, existam três letras não repetidas seguidas de quatro algarismos repetidos ou não?

- Esse tipo de problema envolve o cálculo de número de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um ou mais conjuntos, submetidos a certas condições.

Princípio da Multiplicação ou Princípio Fundamental da Contagem

- Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?



Total de possibilidades: 5 opções x 4 opções = 20 opções:
1A-1B-1C-1D-2A-2B-2C-2D-3A-3B-3C-3D-4A-4B-4C-4D-5A-5B-5C-5D
Existem então 20 maneiras de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo.

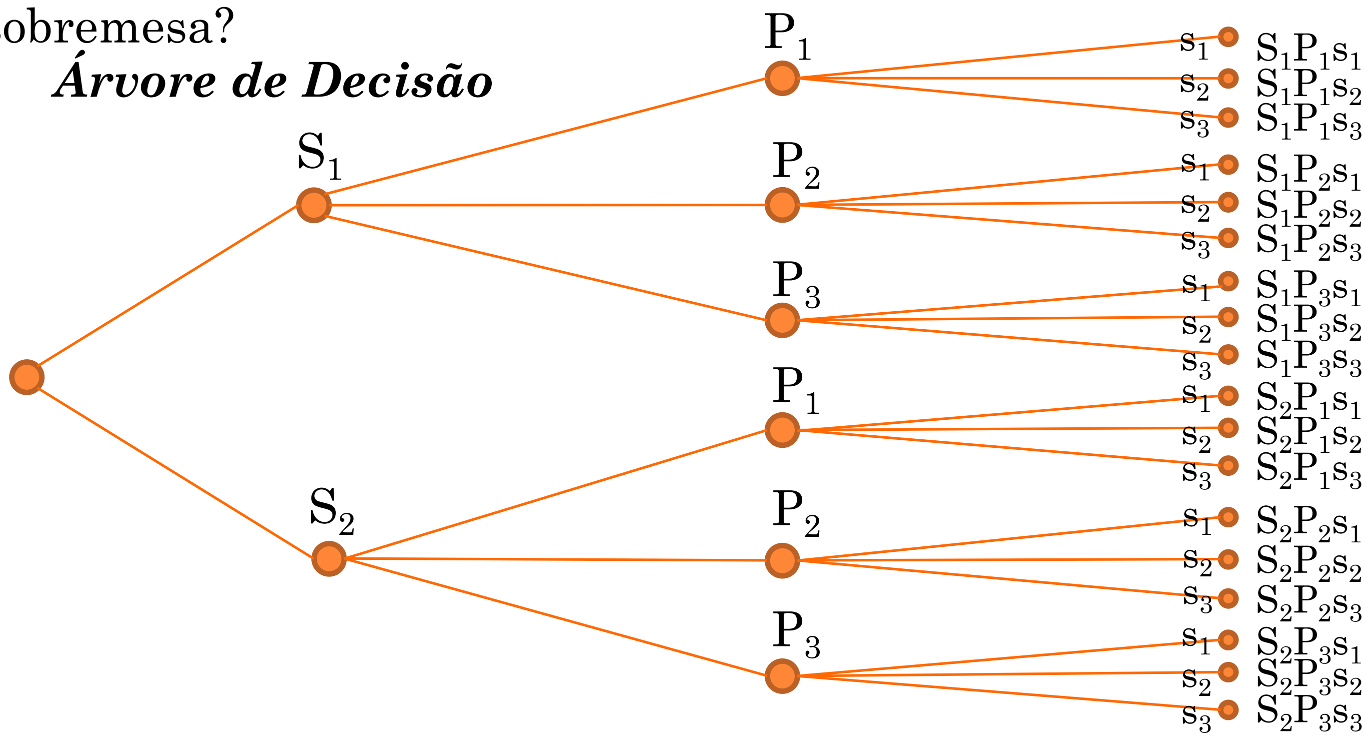
Princípio da Multiplicação ou Princípio Fundamental da Contagem

- Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é **m** e para cada possibilidade da primeira etapa o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto **mn**.
- Esse produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

EXERCÍCIO

- Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos de fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

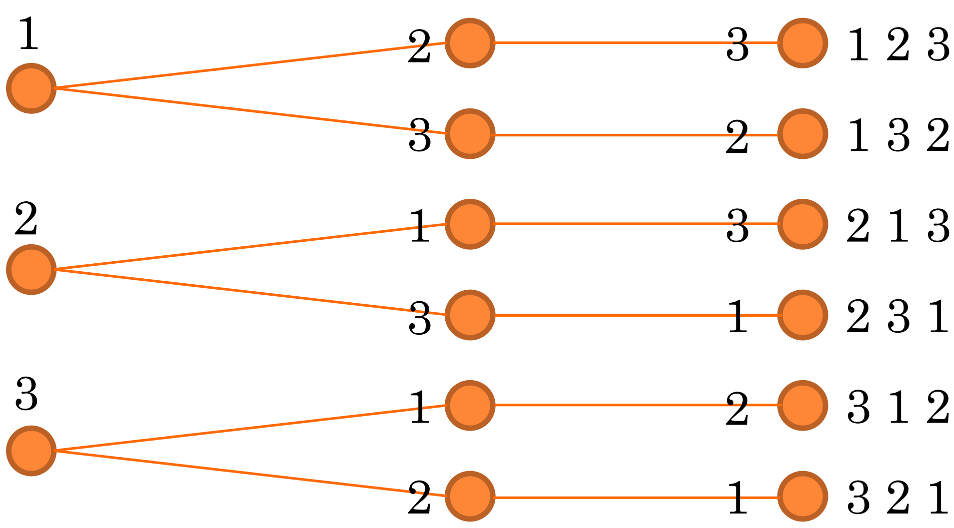
Árvore de Decisão



Número de possibilidades = 2x3x3=18

Permutação Simples

- Permutar é o mesmo que trocar.
- Devemos associar a permutação à noção de misturar.
- Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1,2 e 3?



Pelo princípio fundamental da contagem temos 3x2x1=6 possibilidades.
Observe que a ordem dos algarismos é muito importante.

Permutações Simples

- De modo geral, se temos **n** elementos distintos, quantas filas podemos formar? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de n maneiras. Agora de quantas maneiras podemos escolher o segundo elemento da fila? De **n-1** maneiras. Prosseguindo desta forma e usando o princípio multiplicativo, o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com esses n elementos é dado por:

$$n(n-1)(n-2)x...x3x2x1$$

- Esses agrupamentos ordenados recebem o nome de *permutações simples* (sem repetição) e indicamos por P_n: $P_n=n(n-1)(n-2)x...x3x2x1$

Fatorial

- O valor $\boldsymbol{P_n}$ também é chamado de ***Fatorial*** do número natural **n** e indica-se por **n!**:

  $$\mathbf{n!=n(n-1)(n-2)x...x3x2x1} \text{ para } n \geq 1.$$

- Obs:
  - (a) 0!=1
  - (b) n! = n(n-1)!
- Exemplo:
  - P_5=5.4.3.2.1=120 e 5!=5.4.3.2.1
  - P_4=4!=4.3.2.1=24
  - P_2=2!=2.1=2

Exercícios

- Quantos são os anagramas da palavra:
- (a) PERDÃO.
- (b) PERDÃO que iniciam com P e terminam por O.
- (c) PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntos e nessa ordem (ÃO).
- (d) PERDÃO em que o P e o O aparecem nos extremos.
- Solução:
- (a) Basta calcular $P_6=6!=6.5.4.3.2.1=720$
- (b) Anagramas iniciados por P e terminando por O: P_ _ _ _ O
  - Devemos permutar 4 letras não fixas: P4=4!=4.3.2.1=24.
  - Portanto, há 24 anagramas da palavra PERDÃO iniciando com P e terminando com O.

Exercícios

- (c) Anagramas da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas (ÃO) é como se a expressão ÃO fosse uma única letra: Assim, devemos calcular a permutação das 5 "letras" que formam a palavra PERDÃO:
  $P5=5!=5.4.3.2.1=120$.
- (d) P e O nos extremos: podemos ter P_ _ _ _ O e
  O _ _ _ _ P.
  Temos então que calcular $2xP4=2x4!=2x24=48$ anagramas.

Exercícios

- Simplifique as expressões

$$(a)\frac{20!}{18!} \qquad (b)\frac{48!+49!}{50!} \qquad (c)\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$(a)\frac{20!}{18!}=\frac{20.19.18!}{18!}=20.19=380$$

$$(b)\frac{48!+49!}{50!}=\frac{48!+49.48!}{50.49.48!}=\frac{48!(1+49)}{50.49.48!}=\frac{50}{50.49}=\frac{1}{49}$$

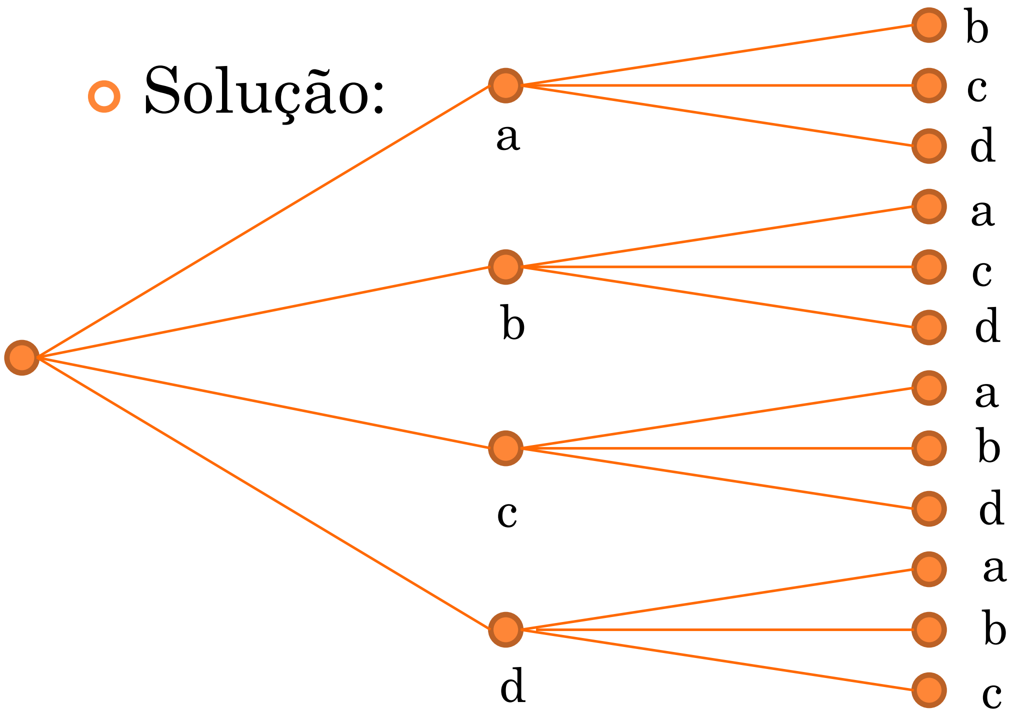
$$(c)\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{n!}{(n+1)n!}=\frac{1}{(n+1)}$$

Arranjos Simples

- Na *Permutação Simples* de **n** elementos, temos qualquer agrupamento ordenado desses **n** elementos.
- Agora desejamos agrupamentos ordenados de ***1*** elemento, ***2*** elementos, ***3*** elementos, ... , de ***p*** elementos, com $p \leq n$ elementos.
- Consideremos as letras ***a***,***b***,***c*** e ***d***. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas é possível formar com elas?

Arranjos Simples

- Solução:



1^a posição:
4 possibilidades

2^a posição:
3 possibilidades

Na primeira posição temos 4 possibilidades e na segunda posição, 3 possibilidades.
Pelo principio fundamental da contagem, há, no total, 4x3=12 possibilidades, que são: *ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.*
Esse agrupamento é chamado de ***arranjos simples***.
Arranjamos 4 elementos de 2 em 2 e o número desses arranjos foi 12.
Escrevemos:

$$A_{4,2}=4.3=12$$

Arranjos Simples

- É possível se mostrar, usando o princípio fundamental da contagem, que podemos calcular o número total desses agrupamentos no caso geral de ***n*** elementos arranjados ***p*** a ***p***, com ***n* ≥ *p***:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Exemplos: $A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040$

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Exercícios

- (a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?
- (b) Quantas “palavras” de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?
- (c) Quantas dessas “palavras” começam com “E”?
- (d) Quantas terminam com “TA”?
- (e) Quantas contém a letra “M”?
- (f) Quantas não contém a letra “M”?

Exercícios

$(a) P_8 = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$

(b) Temos 8 possibilidades para a 1ª letra, 7 para a 2ª, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos $8.7.6.5 = 1680$ palavras.

$$A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!} = 8.7.6.5 = 1680$$

(c) *Fi*xando "E" como a 1ª letra, temos que arranjar as 3 letras das 7 que sobraram: $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 7.6.5 = 210$

(d) *Fixando* "TA" como 3ª e 4ª letras: _ _ TA, temos que arranjar as duas iniciais das 6 que sobram: $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6.5.4!}{4!} = 6.5 = 30$

(e) Colocando o M como primeira letra: M _ _ _, temos que arranjar 7 letras nas 3 posições restantes: $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 7.6.5 = 210$

Como podemos colocar o M de quatro maneiras diferentes:

M _ _ _, _ M _ _, _ _ M _, _ _ _ M

Assim, temos $4x210 = 840$ "palavras"

(f) Retirando a letra M, passamos a ter 7 letras e como os anagramas devem conter 4 letras, temos $A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 7.6.5.4 = 840$ "palavras"

Obs.: Como podemos ter 1680 "palavras" de 4 letras e dessas 840 contém a letra "M", as que não contém "M" são $1680 - 840 = 840$.

Combinação Simples

- *Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo* formam uma equipe. *Dois deles* precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?
- Representemos a Ane por **A**; Elisa, **E**; Rosana, **R**; Felipe, **F** e Gustavo, **G**. Precisamos determinar todos os subconjuntos de *2 elementos* do conjunto de *5 elementos {A,E,R,F e G}*.
- A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos *não importa*, pois **Ane-Elisa**, por exemplo, é a mesma dupla que **Elisa-Ane**.

Combinação Simples

- Os subconjuntos de 2 elementos são:
- {A,E},{A,R},{A,F},{A,G}
- {E,R},{E,F},{E,G}
- {R,F},{R,G}
- {F,G}
- A esses subconjuntos chamamos de combinações simples de 5 elementos tomados 2 a 2 e escrevemos $C_{5,2}$.
- Como o número total de combinações é 10, podemos escrever: $C_{5,2}=10$

Combinação Simples

- O número de combinações simples pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$Indica - se\ C_{n,p}\ ou\ C_n^p\ ou \binom{n}{p}$$

- Como são subconjuntos, a ordem dos elementos não importa.

Propriedade

$$C_{3,2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{3!}{2!(1!)}=\frac{3!}{1!(2!)}=\frac{3!}{1!(3-1)!}=C_{3,1}$$

$$C_{3,2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{3.2!}{2!1!}=3 \quad e \quad C_{3,1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{3.2!}{1!2!}=3$$

$$C_{5,3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!(2!)}=\frac{5!}{2!(3!)}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=C_{5,2}$$

- Assim, $C_{3,2}=C_{3,1}$ e $C_{5,3}=C_{5,2}$

2+1=3 **3+2=5**

- De forma geral: $C_{n,p}=C_{n,n-p}$

Exercícios

- (1) Calcular: $(a)\ C_{6,3}$ $\quad (b) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$$

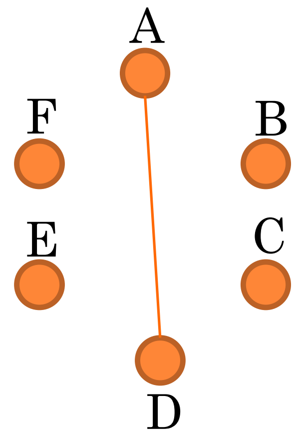
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2!2!} = \frac{4.3}{2.1} = \frac{12}{2} = 6$$

- (2) Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão em linha reta.
  - (a) Quantos segmentos de reta podemos traçar ligando-os 2 a 2?
  - (b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 deles como vértices?

Exercícios

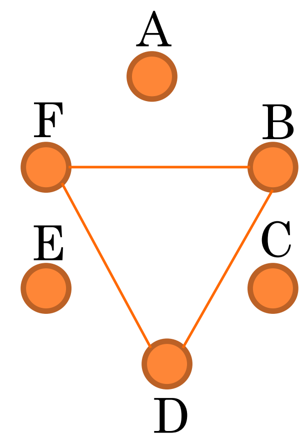
- (a) Cada segmento tem 2 extremos e, por exemplo, o segmento AD é igual ao segmento DA. O número de segmentos é dado por:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.4!}{2!4!} = \frac{30}{2} = 15$$



- Assim, podemos ter 15 segmentos de retas.
- (b) Como cada triângulo fica determinado por 3 pontos não colineares, temos, independente da ordem deles:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{120}{3.2} = 20$$



- Portanto, podemos formar 20 triângulos.

Exercícios

- O conselho desportivo de uma escola é formada por 2 professores e 3 alunos. Candidataram-se 5 professores e 30 alunos. De quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser eleito?
- Se escolhermos os professores de x maneiras e os alunos de y maneiras, pelo principio fundamental da contagem escolheremos os professores e alunos de x.y maneiras.

$$Professores\,(x):$$

$$C_{5,2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5.4.3!}{2!3!}=\frac{5.4}{2}=10$$

$$Alunos\,(y):$$

$$C_{30,3}=\frac{30!}{3!(30-3)!}=\frac{30.29.28.27!}{3!27!}=\frac{30.29.28}{3.2}=4060$$

$$Número\ total\ de\ conselhos=10.4060=40600$$

Binômio de Newton

- Toda potência da forma $(x+y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é conhecido como Binômio de Newton.
  - $(5x - 7)^0 = 1$
  - $(2x + y)^1 = 2x + y$
  - $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
  - $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- Observe:

$$(1^o\ )(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$$

$$(2^o\ )(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 =$$

$$= \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(3^o\ )(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1y^4 =$$

$$= \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

Fórmula do Binômio de newton

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \ldots + \binom{n}{n} y^n x^0$$

- Observe que os expoentes de x começam em n e decrescem de 1 em 1 até 0, enquanto os expoentes de y começam em 0 e crescem de 1 em 1 até n. Dados os números naturais n e p, com $n \geq p$, o número $\binom{n}{p}$ é chamado de número binomial n sobre p:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercício

- Obtenha o desenvolvimento de ***(x + a)*^{5}**:

$$(x+a)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4a + \binom{5}{2}x^3a^2 + \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}x^1a^4 + \binom{5}{5}a^5 =$$

$$= 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$$

$$Portanto: (x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Triângulo de Pascal

- Os coeficientes dos desenvolvimentos de:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

- Podem ser colocados na seguinte forma triangular:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Triângulo de Pascal

- De modo geral:

$$(x+y)^0 : \binom{0}{0}$$

$$(x+y)^1 : \binom{1}{0} \binom{1}{1}$$

$$(x+y)^2 : \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$$

$$(x+y)^3 : \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$$

$$(x+y)^4 : \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$$

...

$$(x+y)^n : \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \cdots \binom{n}{n}$$

Propriedade do Triângulo de Pascal

$$(x+y)^0 : \quad \binom{0}{0} \qquad\qquad\qquad\qquad = 1$$

$$(x+y)^1 : \quad \binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \qquad\qquad\qquad = 1 \quad 1$$

$$(x+y)^2 : \quad \binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \qquad\qquad = 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(x+y)^3 : \quad \binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3} = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

Bibliografia

- Dante, Luis Roberto. Matemática Volume Único: Editora Ática. 1ª Ed.- 2009.