

不难进一步做些半定量的估计,很容易估算运动方向 β 附近辐射显著异于零的角间隔大小. 以 θ 表示 n 与 β 间夹角, 则

$$K = 1 - n \cdot \beta = 1 - \beta \cos \theta.$$

当 $\theta=0$, 有 $K=1-\beta=K_{\min}$, 从而辐射 $\left(\propto \frac{1}{K^5}\right)$ 达到极大. 注意现在讨论的是相对论粒子, $\beta \simeq 1$, 故

$$K_{\min} = 1 - \beta \ll 1.$$

当 θ 为异于零的小角时, $K \simeq 1 - \beta + \frac{\beta \theta^2}{2} = K_{\min} + \frac{\theta^2}{2}$. 所以, 若要求在 θ 角处辐射仍很强, 必须相应的 K 值和 $K_{\min}=1-\beta$ 为同级小量, 取 $K=2K_{\min}$, 对应的 θ 角为

$$\theta \simeq \sqrt{1 - \beta^2}.$$

读者不难得到这一关系式, 只要注意

$$K \simeq K_{\min} + \frac{\theta^2}{2} = (1 - \beta) + \frac{\theta^2}{2},$$

并代入 $K=2K_{\min}$ 即可. 可以把这一特征角 θ 标志的方向看做是还有显著辐射的方向.

习惯上, 将 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 记为 γ , 亦即洛伦兹因子, γ 的物理意义是代表粒子的能量 $E=mc^2$ 与该粒子静能 m_0c^2 之比.

$$\gamma = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.15)$$

或者说, γ 代表粒子无量纲的能量值, 此后本书中将直接称 γ 为粒子的能量. 从而

$$\theta \simeq \frac{1}{\gamma}. \quad (1.16)$$

这表明, 相对论粒子的辐射主要集中于以速度 β 为中心线, 半张角为 $\theta \simeq \frac{1}{\gamma}$ 的狭小角锥之中. 粒子“能量” γ 愈大, 则张角愈小. 当 $\theta = \frac{1}{\gamma}$ 时, 辐射已比极大方向下降了 $1/2^5$.

从(1.16)式可见, 对于能量 γ 很大的相对论电子, 辐射具有极

为尖锐的方向性. 例如, 对于一个 $v \simeq 0.9999995c$ 的极相对论电子, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 10^3$. 故由(1.16)式得, $\theta \simeq 0.001 \text{ rad} \simeq 0.057^\circ$, 即其辐射角锥仅及角秒量级.

为了定量说明相对论粒子辐射的角分布具体图形, 现在分别求出速度与加速度共线以及两者互相垂直这两个特殊情况下的角分布.

1. $\beta // \dot{\beta}$ 情况 (例如, 粒子沿静电场方向运动).

这时(1.13)式化为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{K^5} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad (1.17)$$

所以辐射不再与速度无关. 显而易见, 当 $v \ll c (\beta \rightarrow 0)$ 时, (1.17)回到偶极辐射公式(1.14). 而当 β 增加时, 偶极分布的两叶逐渐转向前方 (即 β 方向). 当 $\beta \rightarrow 1$ 时辐射集中在 $\theta \simeq 0$ 的小范围中. 图 1.3 给出 $\beta \ll 1$ 的偶极辐射图形和 $\beta \lesssim 1$ 时的角分布图形以资比较.

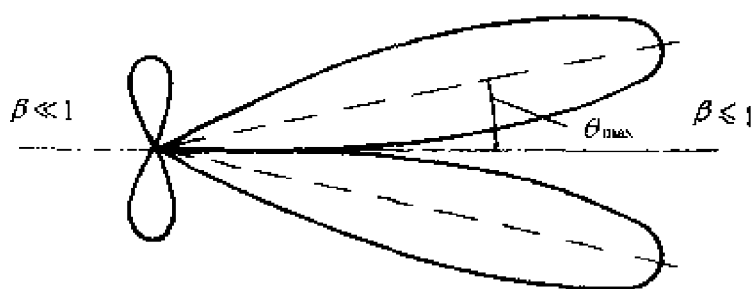


图 1.3

2. $\beta \perp \dot{\beta}$ 情况 (例如, 粒子在静磁场中运动).

利用 $\beta \perp \dot{\beta}$, (1.13)式化为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{[(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \dot{\beta}^2 - (1 - \beta^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}.$$

引出此式时,只需注意条件 $\beta \cdot \dot{\beta} = 0$ 以及矢量公式

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B).$$

若以 θ 表示 n 与 β 夹角, φ 表示 n 与 β 所成平面与 $\dot{\beta}$ 之夹角 (图 1.4), 并注意 $n \cdot \dot{\beta} = \dot{\beta} \cos \varphi \sin \theta$, 则有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{[(1 - \beta \cos \theta)^2 \dot{\beta}^2 - (1 - \beta^2) \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi]}{(1 - \beta \cos \theta)^5}.$$

或者,利用(1.15)式,有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \left[\frac{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^5} \right]. \quad (1.18)$$

(1.18)和(1.17)式有共同的基本特征,即沿粒子速度方向的辐射($\theta \simeq 0$)达到峰值,辐射是向前方的.图 1.5 表示在磁场中加速的相对论粒子($\dot{\beta} \perp \beta$)的辐射角分布.图中的螺旋线代表粒子的运动轨道,角分布曲线是在 $\varphi = 0$ (即辐射方向 n 在 $\beta, \dot{\beta}$ 所在平面内)平面上画出的.

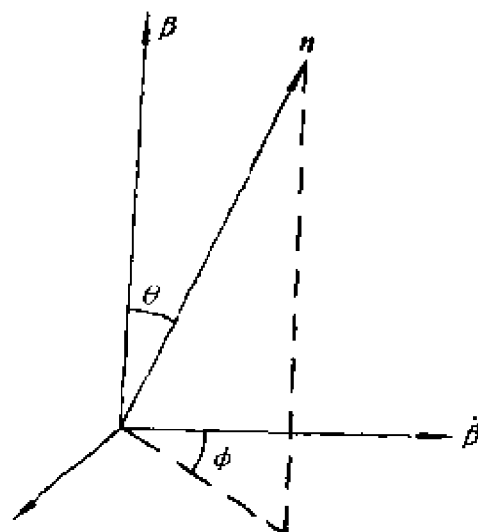


图 1.4

图 1.2 给出的非相对论粒子的角分布和图 1.3 及图 1.5 给出的相对论粒子辐射角分布有很大不同,前者有很宽角范围的辐射,而后者具有显著方向性.有时把这种方向性叫做相对论粒子辐射的集束效应.产生这种变化的物理本质是不难理解的,作为“光源”的高速粒子在其运动方向上的辐射将由于多普勒效应而显著增强,而在其它方向,特别是背着速度的方向上辐射剧减.不过,这里说的“多普勒效应”有两个含意,除了通常所指的关于频率变化的多普勒效应外,更重要的是指

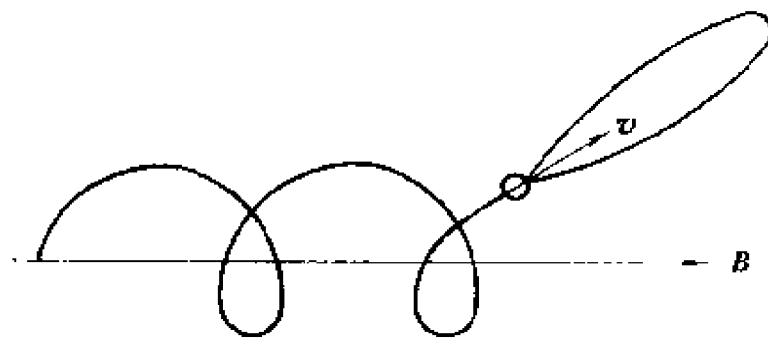


图 1.5

关于粒子有效电量变化的“多普勒效应”。

至于在一般情况下,加速度 $\dot{\beta}$ 方向任意时,可将 $\dot{\beta}$ 沿与 β 平行方向及与 β 垂直方向分解. 可以预料,辐射角分布的基本特征,即峰值功率沿速度方向这一点将不会变化.

1.3.2 辐射总功率

有了辐射的角分布公式,原则上就可由对所有方向的立体角的积分

$$P(t') = \int \frac{dP(t')}{d\Omega} d\Omega$$

定出粒子的总辐射功率. 下面仍然就相对论与非相对论两个极限情况分别讨论.

1. 对非相对论粒子.

积分(1.14)式,由于 $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$, 得到总功率为

$$\begin{aligned} P(t') &= \frac{dW}{dt'} = \int \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta 2\pi \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3} = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

式中 $\ddot{d} = q\ddot{v}$ 是粒子偶极矩对时间的二阶导数.

(1.19)式表明,非相对论粒子的总功率和粒子速度无关,只和加速度 \dot{v} 有关.

2. 对于相对论粒子.

直接积分(1.13)式求总功率 $P(t')$ 需要繁复的数学运算. 但是

利用相对论的变换理论,很容易从非相对论情况下的总功率 $P(t')$ 直接导出相对论粒子的辐射功率.

已知 $v \ll c$ 条件下导出的辐射功率公式(1.19)不能应用于 $v \simeq c$ 的相对论粒子,但是若在一个和粒子瞬时相对静止的参考系(粒子参考系 \tilde{s})来考查,则相对该参考系而言,粒子就是非相对论的,(1.19)式有效. 即在该参考系 \tilde{s} 中,粒子在 $d\tilde{t}$ 时间中辐射出去的能量为

$$d\tilde{W} = \frac{2q^2\tilde{\gamma}^2}{3c^3}\tilde{v} d\tilde{t}. \quad (1.19')$$

观察上式,可注意等式两边的 $d\tilde{W}$ 和 $d\tilde{t}$ 分别和两个相对论中熟知的四度矢量的第四个分量有关,这两个四矢是:动量四矢 $P_\mu = m_0cU_\mu = \left(p_1, p_2, p_3, \frac{iW}{c}\right)$ 及位置四矢 $X_\mu = (x_1, x_2, x_3, ict)$,所以

$$d\tilde{W} = \frac{c}{i}d\tilde{p}_4, \quad d\tilde{t} = \frac{d\tilde{X}_4}{ic}. \quad (1.20)$$

这启发我们,有可能把(1.19')式改造成四度时空中的协变方程,即当从粒子参考系回到实验室参考系时,形式不变. 由此可以在实验室系 s 中得到所求的总功率 $P = \frac{dW}{dt}$.

首先改写 $\frac{2q^2\tilde{\gamma}^2}{3c^3}\tilde{v}$ 因子,这需要知道加速度 \tilde{v} 和四度加速度矢量 $\frac{d\tilde{U}_\mu}{d\tilde{s}}$ 的关系,为此,应先求出速度 \tilde{v} 和四速度 U_μ 的关系. 由于

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

故

$$ds = \frac{cdt}{\gamma},$$

所以四速度为

$$\begin{aligned} U_\mu &= \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{icdt}{ds} \right) \\ &= \left(\frac{\gamma}{c}v_1, \frac{\gamma}{c}v_2, \frac{\gamma}{c}v_3, i\gamma \right), \end{aligned}$$