

آزمون‌های انتخابی برای دوره‌ی تابستانی بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون اصلی دوم (بازگشت آیدین - آیدین و تمساح‌ها) - دومین روز تابستان سال ۱۳۹۰

نام و نام خانوادگی: مدّت: ۱۸۰ دقیقه

شما دانش آموز شماره‌ی ۵۳ هستید. کد Δ ی شما برابر ۲۸۸۱۳ است.

دیروز دیدیم که آیدین پشت رودخانه گیر افتاده بود و می‌خواست با یک چوب بامبوئی از رودخانه عبور کند. متأسفانه وقتی آیدین چوب را در رودخانه قرار داد و پرید، چوب روی هوا شکست و آیدین به داخل رودخانه افتاد!

مسئله‌ی اول: شوت-یه-ضرب تمساحی ۱۵ نمره

به محض این که آیدین در رودخانه افتاد، ۸۱ تمساح سر از آب بیرون آوردند! این ۸۱ تمساح در ۹ سطر و در هر سطر ۹ تمساح قرار گرفته بودند (یک جدول 9×9). در ابتدای کار تمساحی که در سطر اول و ستون اول قرار گرفته بود با پوزه‌اش آیدین را بالا نگه داشت و همه بقیه خندیدند! آن‌ها خوش حال بودند که امروز ناهار غذای چرب و چیلی‌ای دارند. در راستای شادی بخشیدن مضاعف به این ضیافت، تمساح‌ها تصمیم گرفتند بازی «شوت-یه-ضرب تمساحی» را با استفاده از آیدین (به جای توپ!) بازی کنند.

در این بازی در هر لحظه توپ (در اینجا آیدین) روی پوزه‌ی یکی از تمساح‌ها است و او باید پس از دریافت آیدین، بر حسب تعداد دفعاتی که تا پیش از این آیدین را گرفته بود، او را به یکی از ۴ تمساح مجاورش در جهت‌های اصلی بدهد. فرض می‌کنیم سطر بالای سطر یکم، سطر نهم است. همین طور ستون‌های ۱ و ۹ هم به هم متصلند.

به بیان دقیق‌تر اگر تمساح i تا پیش از لحظه‌ی دریافت آیدین (بدون احتساب همان دفعه) H_i بار او را گرفته باشد و باقی‌مانده‌ی H_i در تقسیم بر ۴ برابر با r باشد، در این صورت او باید آیدین را ...

- به تمساح بالایی‌اش بدهد، اگر r برابر با صفر باشد. (اگر در سطر اول بود به سطر آخر می‌رود.)
 - به تمساح سمت راستی‌اش بدهد، اگر r برابر با یک باشد. (اگر در ستون آخر بود به ستون اول می‌رود.)
 - به تمساح پایینی‌اش بدهد، اگر r برابر با دو باشد. (اگر در سطر آخر بود به سطر اول می‌رود.)
 - به تمساح سمت چپی‌اش بدهد، اگر r برابر با سه باشد. (اگر در ستون اول بود به ستون آخر می‌رود.)
- برای مثال در لحظه شماره ۱ آیدین روی تمساح (۱, ۱) است. سپس به‌خانه‌ی (۱, ۹) (سطر ۹، ستون ۱) می‌رود. سپس در لحظه سوم به خانه‌ی (۱, ۸) رفته و ...

می‌دانیم تمساح‌ها این بازی را برای Δ لحظه انجام می‌دهند. در پایان بازی میزان شادی هر تمساح شماره i (یعنی H_i) برابر با تعداد دفعاتی هست که آیدین را شوت زده^۱. آیدین می‌داند که تمساح‌ها خلق و خوی بسیار اجتماعی‌ای دارند، و از این رو شادی‌هایشان را در هم ضرب می‌کنند! برای همین او دوست دارد بداند حاصل ضرب میزان شادی این ۸۱ تمساح پس از Δ گام (که آن را $M = \prod_{i=1}^{81} H_i$ می‌نامیم) چند است؟ شما باقی‌مانده‌ی تقسیم M بر Δ را حساب کرده و بنویسید:

جواب:

مسئله‌ی دوم: اتل مثل تمساح‌ها! ۱۵ نمره

پس از آن که آیدین ۲۸۸۱۳ بار روی پوزه‌های تمساح‌ها قرار گرفت و کلی دفعه هم شوتیده شد، حسابی سرگیجه داشت. تمساح‌ها هم برای افزایش دوبل-مضاعف شادی‌شان او را به خشکی بردند و دورش جمع شدند و همه می‌رقصیدند و می‌خواندند:

«... می‌زنم رو پوزه‌م هوا می‌ره! نمی‌دونی تا کجا می‌ره... من این آیدین رو نداشتم؛ مشقاً خوب ...»

^۱ از این رو مجموع میزان شادی همه برابر با $1 - \Delta$ است. چرا که نفر آخری که آیدین بهش می‌رسد، او را نمی‌شوتد و لذتی نمی‌برد!

آیدین که کمی به هوش آمده بود، برگشت به تمساح‌های آوازه‌خون با فریاد گفت: «نکنین بابا! قباحه داره! آخه من بدبخت خودم یه زمانی المپیادی بودم. حالا فوقش یه امتحان برنامه‌نویسی خراب کردم، آدم که نکشتم که!...». تمساح‌ها با این که نمی‌دانستند المپیاد دقیقاً چیست ولی منقلب شدند و دست از طرب برداشتند. رئیس تمساح‌ها (که رستم نام داشت) رو به آیدین کرد و گفت «خب پس خودت یه کاری کن بهمون خوش بگذره».

آیدین فکری کرد و گفت: «خب همه بیاین دور یه دایره جمع بشین تا بازی اتل متل توتوله رو بازی کنیم. این بازی در اصل بین آدم‌هایی که دو پا دارند انجام می‌شه و هر کس تهش یه پاش رو حداکثر در هر گام ورمی چینه؛ ولی چون پاهای شما خیلی ظریف هست، کل هیکل هر کدوم‌تون رو یه پا در نظر می‌گیریم! خلاصه کنم، من از یکی‌تون شروع می‌کنم و با شروع از عدد ۱ روی اون بنده خدا تا ۲۳ می‌شمارم. شماره ۲۳ رو روی هر کسی گفتم، اون باید بره بیرون و بازی بین بقیه ادامه پیدا می‌کنه. نفر بعد از نفری که رفته بیرون می‌شه ۱ و من دوباره تا ۲۳ به‌صورت گرد می‌شمارم. بالطبع وقتی دور دایره هم هستید، تمساح بعدی تمساح ۸۱ ام می‌شه تمساح اول. آخر کار هم آخرین تمساحی که باقی می‌مونه برنده خواهد بود».

حرف‌های آیدین که تموم شد، رستم خان کمی از بقیه دور شد و صدا زد «آیدین جان، یه لحظه شما تشریف بیاار!». آیدین از جمع دور شد و کنار رستم رفت. رستم گفت «ببین عزیز جان، من جلوی این بچه مچه‌ها آبرو دارم! یه کاری کن آخرش من برنده بشم. دمت گرم! من هم بعداً هوات رو خواهم داشت». آیدین با خودش فکری کرد و پرسید «آقا رستم شما جایگاه اولیه‌ت چندمین نفر دور دایره هست؟» رستم گفت «بنده نفر ۵۳ دور دایره هستم».^۲ به آیدین کمک کنید و بگویید برای این که آیدین کاری کند تا در پایان آقا رستم (که در جای شماره ۵۳ ایستاده) برنده بشود باید خواندن شعر را از کدام شماره (بین ۱ تا ۸۱) شروع کند؟ اگر باید از شماره S شروع کند، باقی‌مانده‌ی $S^{۱۳۹۰}$ به‌توان (S) بر Δ را به‌عنوان جواب این سؤال بنویسید:

جواب:

مسئله‌ی سوم: مجلس سنای تمساح‌ها ۲۲ نمره

آیدین کاری کرد که رستم برنده بشود و رستم خان هم با افتخار جلوی بقیه دستهایش رو بالا برد و این پیروزی رو به همه تمساح‌های لوطی‌منش و جوانمرد، تقدیم کرد و یه دور هم بعدش دور بقیه تمساح‌ها «دور افتخار» زد! بعد که سرش خلوت شد، پیش آیدین اومد و گفت «ببین مهندس جان، شو ما^۳ که کارتون خیلی درسته، بیا یه مردونگی کن یه مشکل دیگه از ما رو هم حل کن». آیدین که چاره‌ی دیگری نداشت، گفت: «جانم، بگو گلم».

رستم گفت «ببین ما زیر آب جمعاً ۱۳۹۰ تا تمساح هستیم. هر تمساح یه شماره شناسایی منحصر‌بفرد داره که بین ۱ تا ۱۳۹۰ هست. این تمساح‌های ما یه عادت بدی که دارن اینه که اگه دوتا شون با شماره A و B بین شون این رابطه برقرار باشه که $A = B \times 2^K$ (برای یک K صحیح و ناصفر دلخواه)، در اون صورت حتماً اینا با هم دعوا می‌کنن! مثلاً همین پیروز تمساح ۱۷ زد نصف پوزه‌ی تمساح ۶۸ رو با لگد صاف کرد؛ یا هفته پیش تمساح شماره ۱۱۰ دم تمساح شماره‌ی ۴۴۰ رو، وقتی یارو خواب بود، به لنگر یه قایق موتوری بست!

از اون‌ور هم، حساب کن که ما می‌خوایم یه مجلس سنای تمساح‌ها تشکیل بدیم که توش تعداد زیادی از تمساح‌ها رو بیاریم. اما خب می‌خوایم که اولاً هیچ دو تمساحی از تمساح‌های مجلس مون با هم دعوا نداشته باشند، ثانیاً تعداد تمساح‌های مجلس بیشینه باشه».

آیدین گفت «دست گل‌تون درد نکنه!». رستم گفت «حالا اینش رو یه جوری حل کردیم. نکته مهم اینه که می‌خوایم بدونیم ما به چند روش می‌تونیم زیرمجموعه‌ی بشینه‌ی مجلسی از اینا رو انتخاب کنیم؟ قضیه هم اینه که می‌خوایم هر ماه مجلس رو عوض کنیم و می‌خوایم ببینیم تا چند ماه می‌تونیم نوآوری و خلاقیت داشته باشیم و ترکیب غیرتکراری بدیم؟»

به آیدین کمک کنید تا این بار هم به رستم کمک کند. اگر M تعداد زیرمجموعه‌های تمساح‌ها باشد که دو شرط مجلسی (دعوا نداشتن هیچ دوتایی شون و بیشینه بودن) را ارضا می‌کند، باقی‌مانده‌ی تقسیم M بر Δ چند است؟

جواب:

^۲ آیدین اینجا احساس هم‌ذات‌پنداری با رستم می‌کند. چرا که پادش می‌یاد شماره ID خودش هم در یک امتحانی یک زمانی برابر با ۵۳ بوده!

^۳ تلفظ دیگر «شما»

مسئله‌ی چهارم: اعداد دُم-تمساحی ۲۳ نمره

پس از آن که آیدین به رستم در انتخاب تمساح‌های مجلسی هم کمک کرد، رستم بالاخره تصمیم گرفت به وعده‌اش وفا کند و آیدین را آزاد کند. برای همین به آیدین گفت «دنبالم بیا تا از راه میون بر بریم بیرون از جنگل». کمی که جلوتر رفتند، رستم که دلش نمی‌خواست لقمه‌ی لذیذ ضیافتش را از دست بدهد رو به او کرد و پرسید: «اصلاً تو با این هیكلت، می‌دونی تعداد عوامل اول یه عدد، چه قدر با خود اون عدد می‌تونه رابطه نزدیکی داشته باشه؟» آیدین پاسخ داد «نه! منظورت چیه؟» رستم گفت «مثلاً عدد ۱۲ دو عامل اول و رقم یکانش هم دو هست، چه قدر با مزه، نه؟» آیدین با سر تأیید کرد. رستم گفت «تازه ۱۱ هم یه عامل اول داره و یکانش ۱ هست! همین‌طور ۱۰۱. و مثلاً ۱۳۵۱۳۵ هم ۵ تا عامل اول داره و رقم یکانش ۵ هست، ... به این اعداد که تعداد عوامل اولشون دقیقاً برابر با یکانشون هست من می‌گم اعداد تمساحی! خودت ببین چه دم (یکان) بامزه‌ای دارن!» آیدین که حوصله‌ش سررفته بود گفت «بی خیال بابا؟!». رستم گفت «بی خیال سالاد درست نمی‌شه، گیج! یالله همین الان زود، تند، سریع بگو ببینم حاصل جمع همه‌ی اعداد تمساحی بزرگتر از یک و کوچکتر از صد میلیون، چند می‌شه؟»

این بار هم نوبت شماست! اگر جواب سؤال رستم از آیدین را T بنامیم، باقی‌مانده تقسیم T بر Δ چند است؟

جواب:

مسئله‌ی پنجم: DNA من و پس بدین! ۲۵ نمره

آیدین باز هم جواب درست داد! رستم که به تنگ آمده بود با خودش گفت «این بچه حکماً نابغه‌ست. حالا المپادی نبوده که نبوده، مهم اینه که این همه بلده مسئله حل کنه. غلط نکنم باید DNA این رو استخراج کنیم و ببینیم چی داره که این بچه این قدر باهوشه.» با همین ذهنیت ناگهان یک گونی از جیبش در آورد و روی آیدین کشید و آیدین را روی کولش انداخت و به آزمایشگاه تحقیقاتی برد.

رستم آیدین به آزمایشگاه رفت و گونی حاوی آیدین را به انبار برد و در گوشه‌ای او را رها کرد. بعد از خروج رستم از انبار، آیدین با دندان‌های تیزش^۴ گونی را شکافت. و به جستجو در انبار پرداخت.

انبار از ۳۶ اتاقک مربع شکل به صورت شکل سمت چپ تشکیل شده بود. در تقاطع راهروها، یعنی ۲۵ تا چهارراه موجود در شکل هم تعدادی جنازه افتاده بود که معلوم بود این وسط‌ها (در چهارراهی‌ها) موجودات را می‌بندند و DNA شان را تا قطره آخر از وجودشان می‌کشند بیرون.

		T			
A					C
	G				
			G		

آیدین می‌داند که DNA از چهار پروتئین با حروف اختصاری A و C و T و G تشکیل شده است و برای ساخت مجدد آن به این ۴ عنصر نیاز است. از همین رو، تصمیم می‌گیرد در هر کدام از ۳۶ اتاق یکی از این پروتئین‌ها را قرار دهد تا در صورتی که DNAش را کشیدند، بتوانند همانجا سر چهارراه، از هر یک از ۴ اتاق یکی از پروتئین‌ها را برداشته و به هم بچسباند و خودش را احیا کند. به بیان دیگر، او می‌خواهد در هر یک از ۳۶ خانه‌ی جدول روبه‌رو حروف A یا C یا T یا G را طوری بنویسد که در هر مربع 2×2 هر ۴ حرف آمده باشند.

خوشبختانه یا متأسفانه در ۵ تا از اتاقک‌های این انبار پروتئین‌هایی از قبل قرار گرفته‌اند. در این شرایط آیدین می‌خواهد بداند به چند روش می‌تواند در ۳۱ خانه‌ی باقی‌مانده، پروتئین‌هایی قرار بدهد تا شرط خواسته شده ارضا بشود. اگر تعداد روش‌های انجام این کار C باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم C بر Δ^2 (دل‌تا به توان ۲) چند است؟

جواب:

«مواظب DNA خودتان باشید!»

پایان.