

بسم الله الرحمن الرحيم

# **BWC** Round #8

## آزمون آمادگی مرحله ۳ المپیاد کامپیوتر ایران

### دست اندرکاران آزمون

علیرضا توفیقی محمدی

حمیدرضا هدایتی

احسان کفشدار گوهرشادی

محمد مهدی جهان آرا

محمد مهدی شجاعی فر

علیرضا دادگرنیا

### مدت آزمون

۳ ساعت

استفاده از منابع اینترنتی در هنگام آزمون مجاز نمی باشد.

دعای خیر را برای سازندگان آزمون فراموش نکنید.

اگر نمره‌ی دو نفر یکسان شد، کسی که «مجموع زمان ارسال هایش + ۲۰ × ارسال های غلط» کمتر بود رتبه‌ی بهتر کسب می کند.

رده بندی در حین مسابقه در دسترس است.

با نام خدا و یاد او و دعا برای تعجیل در ظهور امام زمان (عج) آزمون را شروع فرمایید.

## شپش‌ها و ابرشپش

مردم شهر شپش‌ها، علاقه‌ی شدیدی به اعداد اول دارند، آنان یک عدد را ابرشپش نامیده اگر بتوان آنرا به صورت مبنای اول نوشت.

نوشتن عدد  $n$  در مبنای اول به این صورت است که  $n$  را به صورت  $n = d_1 \times p_1 + d_2 \times p_2 + \dots + d_k \times p_k$  نمایش داد که در آن  $k \in \mathbb{N}$  و  $d_i \in W$  و  $d_i < p_i$  است و  $p_i$ ،  $i$  امین عدد اول است و همچنین  $d_k \neq 0$ . شپش‌ها به این عمل نمایش عدد  $n$  در مبنای اول می‌گویند.

همچنین عدد شپشی یک عدد را تعداد حالت‌های متمایز نوشتن آن در مبنای اول گویند. (دو راه متمایز است اگر  $k$  آن دو فرق داشته باشد یا  $i$  ای وجود داشته باشد که  $d_i$  در این دو نمایش متمایز باشند).

شپشک که از اهالی این شهر هست، به دنبال عضویت در شورای شهر شپش‌هاست، اما عضویت به این سادگی نیست و هرکدام از اعضای شورای شهر باید افتخاری را کسب کرده باشند!

**(الف)** شپشک برای کسب افتخار تصمیم گرفته تا مجموع اعداد ابرشپش یک تا  $10^{14}$  را حساب کرده و برنده‌ی جایزه شود.

اگر این مقدار برابر با  $A$  بود، شما باید مقدار باقی‌مانده‌ی تقسیم  $A$  بر  $\Delta$  را به عنوان خروجی چاپ کنید. (۵ امتیاز)

**(ب)** متأسفانه بعد از اینکه شپشک با کلی تلاش و کوشش و زحمت سوال قبل را حل کرد! فهمید که این سوال قبلاً توسط خارخارک، رقیب دیرینه‌ی او، حل شده است!

حال تصمیم گرفته تا مجموع عدد شپشی اعداد ۱ تا  $10^4$  را حساب کند. اگر این مقدار  $B$  بود، شما باید باقی‌مانده‌ی تقسیم  $B$  بر  $\Delta$  را به عنوان پاسخ این مسئله بدهید. (۶ امتیاز)

شپشک پس از حل کردن قسمت دوم، عضو موقت شورای شهر شپش‌ها شد! حال به او ماموریت مهمی داده شده!

همان طور که مشخص است، یک عدد ابرشپش را گاهی می‌توان به چند صورت در مبنای اول نوشت. آنها از بین تمام روش‌های نوشتن یک عدد در مبنای شپشی، حالتی را بهینه می‌دانند که طول عدد نوشته شده کمینه باشد، یعنی تعداد  $i$  هایی که  $d_i \neq 0$  است در آن کمینه باشد. اگر برای عدد ابرشپش  $i$  ،  $f(i)$  را برابر با کمترین طول برای نوشتن آن در مبنای اول تعریف می‌کنیم. همچنین اگر  $i$  ابرشپش نباشد،  $f(i)=0$  است.

ج) حال باقی‌مانده‌ی تقسیم  $\sum_{i=1}^{10^6} f(i)$  را بر  $\Delta$  محاسبه کنید. (۸ امتیاز)

د) ساده بود؟ پس باقی‌مانده‌ی تقسیم  $\sum_{i=1}^{10^{11}} f(i)$  را بر  $\Delta$  محاسبه کنید. (۱۶ امتیاز)

## بازی شپشی

شپشک و خارخارک تصمیم گرفتند تا بایکدیگر بازی ای کنند، این بازی به صورت نوبتی به شرح زیر اجرا می شود:

در ابتدا دو کیسه وجود دارد که در اولی  $n$  دانه یاقوت و در دومی  $m$  دانه یاقوت قرار دارد.

در هر مرحله، فردی که نوبت اوست، یکی از دو کیسه و عدد طبیعی  $l$  که  $l > 1$  است را انتخاب کرده و اگر در کیسه ی انتخاب شده  $x$  دانه یاقوت بود، تعدادی از یاقوت های آن کیسه را دور انداخته تا تعداد یاقوت ها برابر با  $\left\lfloor \frac{x}{l} \right\rfloor$  شود.

در هر مرحله تعدادی از یاقوت ها دور انداخته می شود، در نتیجه پس از تعدادی مرحله، هر دو کیسه خالی می شود و یکی از دو نفر در نوبتش نمی تواند یاقوتی بردارد و بازنده ی بازی می شود.

خارخارک شروع کننده ی بازی است.

$f(a)$  را برابر با تعداد حالت های اولیه از بازی که  $1 \leq n, m \leq a$  و شپشک حتماً می تواند برنده ی بازی شود تعریف می کنیم.

الف) باقی مانده ی تقسیم  $f(10^6)$  را بر  $\Delta$  محاسبه کنید. (۷ امتیاز)

ب) باقی مانده ی تقسیم  $f(10^{17})$  را بر  $\Delta$  محاسبه کنید. (۸ امتیاز)

ج) باقی مانده ی تقسیم  $f(10^{100})^{f(10^{100})}$  را بر  $3 \times \Delta$  محاسبه کنید. (۱۴ نمره)

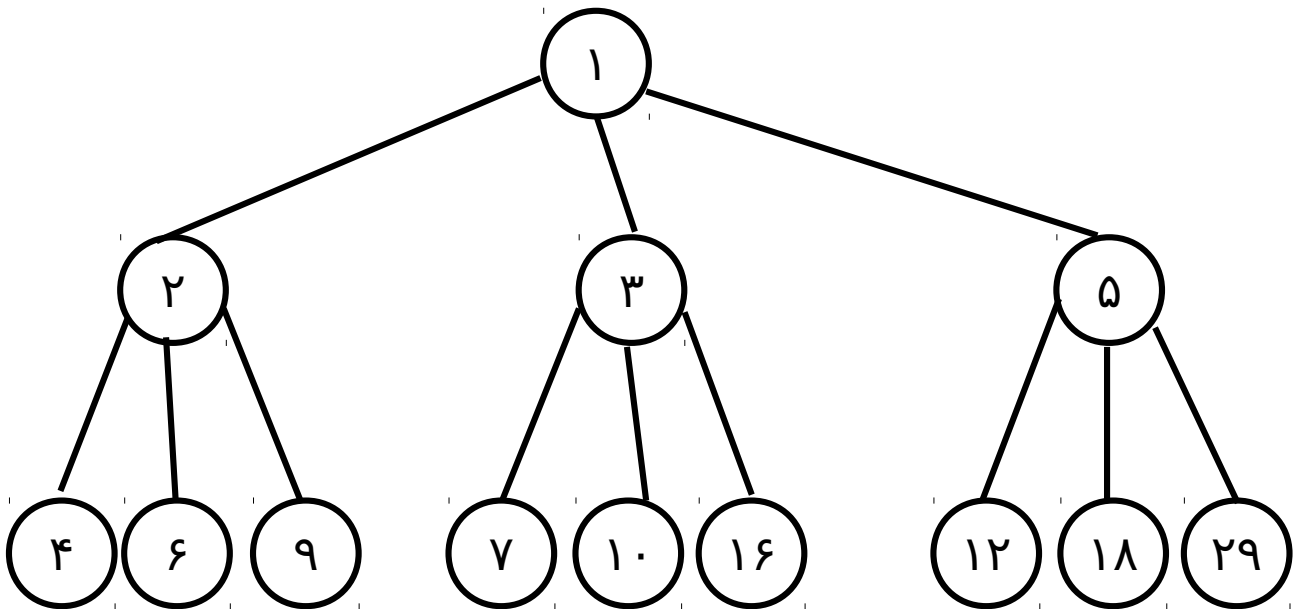
## شجره نامهی شپش‌ها

دادگر، بزرگ شپش‌ها و اولین شپش خلق‌شده در کتیبه‌ای درباره‌ی شپش‌ها چنین نوشته است:

هرشپش دقیقاً ۳ فرزند به دنیا می‌آورد. این شپش ۳ سال عمر می‌کند، شپش اول را در ۱ سالگی، شپش دوم را در ۲ سالگی و شپش سوم را در لحظه‌ی مرگش می‌زاید. بچه‌های این شپش نیز ۳ سال عمر کرده و سپس دارفانی را وداع می‌گویند!

هر شپش یک شماره‌ی منحصر به فرد شپشی (شمش) دارد. شمش دادگر برابر با ۱ است. برای هر شپش تازه متولد شده‌ای، کوچکترین عدد طبیعی که قبلاً به عنوان شمش شپش دیگری استفاده نشده، شمش او می‌شود.

همچنین اگر دو شپش همزمان دنیا بیایند، آنکه شمش پدرش کمتر است، زودتر شمش‌دهی می‌شود.



۳ عمق نخست شجره‌نامهی شپش‌ها

اگر لحظه‌ی تولد دادگر را مبدأ تاریخ در نظر بگیریم، باقی‌مانده‌ی تقسیم پاسخ پرسش‌های زیر بر  $\Delta$  را محاسبه نمایید.

(الف) چند شپش در لحظه‌ی تحویل سال  $1395 \times 2016$  به دنیا آمدند؟ (۴ امتیاز)

(ب) مجموع شماره اجداد شپش با شمش  $10^{16}$  (شامل خودش) چند است؟ (۸ امتیاز)

ج) اگر شمش پدری نسبت به هر ۳ فرزندش اول باشد. آن پدر را پدر نمونه گوییم! (یعنی اگر شمش پدر A و شمش ۳ فرزند به ترتیب B و C و D باشد،  $(A,B)=1, (A,C)=1, (A,D)=1$  که منظور از  $(x,y)$  مقدار ب.م.م  $x,y$  است.) مجموع شمش پدرهای نمونه‌ی با شمش کمتر از  $10^6$  بیابید. (۸ امتیاز)

د) شپش‌هایی که عمق آن‌ها در شجره نامه بیشتر از ۱۹ است را دهه شصتی می‌نامند! جمع شمش شپش‌های غیر دهه شصتی متولد (مستقیم یا غیر مستقیم) از دادگر (شامل خودش) چند است؟ (عمق دادگر یک است.) (۸ امتیاز)

هـ) شپش‌هایی که عمق آن‌ها در شجره نامه بیشتر از ۱۰۰۰ است را دهه هفتادی می‌نامند! جمع شمش شپش‌های غیر دهه هفتادی متولد (مستقیم یا غیر مستقیم) از دادگر (شامل خودش) چند است؟ (عمق دادگر یک است.) (۸ امتیاز)

موفق باشید...

التماس دعا...