

شما شنگول گرگ‌زاده اصل و Δ شما در این آزمون اصلی چهارشنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!**مسئله‌ی یک: شنگول با صدای بلند می‌خواند «حالا یارم بیا!»! ۳۰ نمره**

شنگول در باب دوستی و مرام بین اعداد تعاریف جالبی دارد! در نظر او زوج مرتب $\langle a, b \rangle$ یک «زوج مرتب k -یار» است، اگر a و b دقیقاً k تا مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند. برای مثال زوج مرتب $\langle ۳, ۹ \rangle$ ، زوج مرتب $\langle ۱۰, ۱۴ \rangle$ و زوج مرتب $\langle ۹, ۳ \rangle$ سه سری زوج مرتب ۲-یار هستند. شنگول می‌گوید یک زوج مرتب $\langle a, b \rangle$ از X کمتر است اگر هم $a < X$ و هم $b < X$ باشد.

۱- الف (۵ نمره): اگر شنگول تعداد زوج مرتب‌های ۱-یار کوچک‌تر از Δ را A بنامد، باقی‌مانده‌ی تقسیم A^4 بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

۱- ب (۱۰ نمره): اگر شنگول تعداد زوج مرتب‌های ۴۸-یار کوچک‌تر از Δ را B بنامد، باقی‌مانده‌ی تقسیم B^B بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

۱- ج (۱۵ نمره): شنگول مقدار ۱۲۲۹۹۳۹۰ را M می‌نامد. باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد زوج مرتب‌های ۴۸-یار کوچک‌تر از M بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: شنگول در شبه کد عجیب! ۴۰ نمره

شنگول در لپ‌تاپ آیدین تکه کد زیر را پیدا کرده‌است.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int a[] = {972, -1, 273, -1, 932, 911, -1, 233};
int b[] = { -1, 942, 135, -1, 371, -1, 311, -1};
const int k = 2;
int main() {
    int c = 777;
    for (int i=1; i<=k; i++)
        c = (c * a[i-1] + i) % b[i-1];
    if (c == 777)
        cout << "hey!" << endl;
    return 0;
}
```

او می‌خواهد طوری مقادیر ۱- را در سطرهای سوم و چهارم (تعریف آرایه‌های a و b) با اعداد سه رقمی (بزرگتر از ۹۹ و کوچکتر از ۱۰۰۰) جایگزین کند که در سطر یازدهم (سطر `cout`) رشته‌ی `hey!` چاپ شود.

۲- الف (۸ نمره): اگر تعداد راه‌هایی که با مقداردهی تمامی ۱-های موجود، خروجی مطلوب چاپ می‌شود را A بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۲ نمره): فرض کنید سطر پنجم برابر باشد با `int k = 4`؛ یعنی مقدار k به جای ۲ برابر با ۴ نوشته شده باشد. در این صورت اگر تعداد راه‌هایی که با مقداردهی کلیه‌ی ۱-های موجود، خروجی مطلوب چاپ می‌شود را B بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم B بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

۲- ج (۲۰ نمره): فرض کنید سطر پنجم برابر باشد با `int k = 8`؛ یعنی مقدار k به جای ۲ برابر با ۸ نوشته شده باشد. در این صورت اگر تعداد راه‌هایی که با مقداردهی کلیه‌ی ۱-های موجود، خروجی مطلوب چاپ می‌شود را C بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم C بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

مسئله‌ی سه: شنگول ، بلوک‌ها و مهندسی معماری! ۳۰ نمره

شنگول رشته‌ی S^x (S به توان x) را برابر رشته‌ی حاصل از x بار پشت سر هم قرار دادن متوالی S تعریف می‌کند. برای مثال $(abc)^3 = abcabcabc$.

شنگول دوست دارد در آینده اگر در زمینه‌ی برنامه‌نویسی به جایی نرسید، مهندس معمار بشود! از همین رو، او یک عدد را «بلوکی» می‌نامد اگر نمایش مبنای دوی آن را بتوان به حداقل یک حالت به صورت B^k نوشت که B یک رشته‌ی باینری معتبر (چپ‌ترین بیتش یک است) بوده و $k \geq 2$ باشد. برای مثال عدد ۱۷۰ که نمایش مبنای دوی آن ۱۰۱۰۱۰۱۰ است یک عدد بلوکی است چون این رشته را می‌توان به صورت $(10)^4$ نوشت. اما اعداد ۱۳ و ۴۴ بلوکی نیستند. در نهایت کار و به‌عنوان آخرین تعریف، شنگول مجموعه‌ی P_n را برابر مجموعه‌ی تمام اعداد بلوکی کوچکتر از 2^n می‌گیرد. برای مثال $P_4 = \{3, 7, 10, 15\}$ است.

۳-الف (۵ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم حاصل ضرب تمام اعضای P_8 بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

۳-ب (۱۰ نمره): اگر تعداد اعضای P_{24} را Q بگیریم؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم Q^Δ بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

۳-ج (۱۵ نمره): اگر تعداد اعضای P_{48} را R بگیریم؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم R^Δ بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

«پاینده و جاوید باشی شنگول جان!»