

شما حنا دختری در مزرعه و Δ شما در این آزمون اصلی شنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله اول: فوتبال! ۳۰ نمره

آیا می‌دونید تیم فوتبال ایران چطور تونسست کره جنوبی رو در زمین این کشور شکست بده و به جام جهانی صعود کنه؟ کارلوس کی‌روش (سرمری تیم) شب قبل از مسابقه، به وسیله دو تابع f و g شیوه بازی کره جنوبی رو آنالیز کرده بود!!! این توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0 \\ 2f(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor), & y > 0, y = 2k \\ 3f(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor), & y > 0, y = 2k + 1 \end{cases}$$

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(i, j)$$

الف) اگر مقدار $g(\Delta + 3)$ را M_1 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_1 بر Δ چند است؟ (۷ نمره) پاسخ شما:

ب) اگر مقدار $g(\Delta^2 + 3)$ را M_2 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_2 بر Δ چند است؟ (۱۰ نمره) پاسخ شما:

پ) اگر مقدار $g(2^{10000})$ را M_3 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_3 بر Δ چند است؟ (۱۳ نمره) پاسخ شما:

مسئله دوم: والیبال! ۳۰ نمره

فرض کنید یک جدول با تعدادی عدد پر شده باشد. جمع اعداد سطر i ام آن را a_i و جمع اعداد ستون i ام آن را b_i می‌نامیم. دنباله کلیدی یک جدول $n \times m$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n]$$

الف) بعد از بازی خوب ایران مقابل صربستان علی‌کچولو تمامی حالات پر کردن یک جدول 4×4 با ۰ و ۱ را به همراه دنباله کلیدی هر کدام روی کاغذ نوشته است. اگر تعداد دنباله‌های متمایز تولید شده برابر M_1 باشد باقیمانده‌ی M_1^4 (عدد M_1 به توان ۴) بر Δ چند است؟ (۷ نمره)

پاسخ شما:

ب) سپس علی تصمیم گرفت یک جدول 7×7 را با ۰ و ۱ پر کند حال او می‌خواهد بداند در چند جدول تمامی اعداد دنباله کلیدی برابر ۳ هستند. اگر این مقدار برابر M_2 باشد، باقیمانده‌ی عدد M_2 بر Δ چند است؟ (۱۰ نمره)

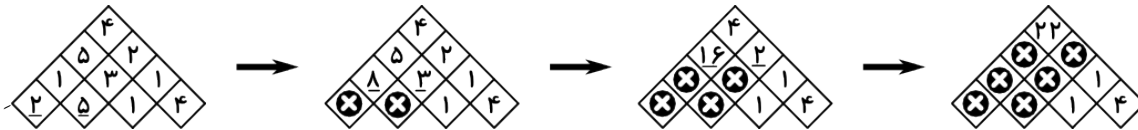
پاسخ شما:

پ) فرض کنید تمامی حالات پر کردن جدول 5×5 با ۰ و ۱ و ۲ که حداقل یک عدد ۲ در جدول آمده باشد را بنویسیم و دنباله‌ی کلیدی هر کدام از آنها را نیز محاسبه کنیم. اگر تعداد دنباله‌های متمایز تولید شده برابر M_3 باشد، باقیمانده‌ی عدد M_3 بر Δ چقدر است؟ (۱۳ نمره)

پاسخ شما:

مسئله سوم: چرخونک! **۴۰ نمره**

علی کوچولو به تازگی یاد گرفته است خانه های زیر قطر اصلی یک جدول $n \times n$ را حذف کند و آن را ۴۵ درجه ساعتگرد بچرخاند. او به این شکل چرخونک تدبیر میگوید. ابتدا او در هر خانه ی چرخونک یک عدد می نویسد. سپس او در هر مرحله دو خانه که یک راس مشترک دارند و در یک ردیف افقی هستند را انتخاب میکند و مجموع آنها را به خانه ی بالایشان اضافه می کند. سپس روی آن دو خانه یک ضربدر میکشد تا دیگر نتواند از آنها استفاده کند و مقدارشان را تغییر دهد. حال علی می خواهد بداند در نهایت بیشترین مقداری که خانه ی بالایی چرخونک تدبیر می تواند داشته باشد چیست؟ برای مثال به شکل زیر که یک چرخونک تدبیر 4×4 می باشد، توجه کنید.



الف) علی کوچولو چرخونک تدبیر یک جدول 7×7 را کشیده است و به سطر اول آن از پایین به ترتیب از سمت چپ نام های ۱ تا ۷، به سطر دوم به ترتیب از سمت چپ نام های ۸ تا ۱۳، و به خانه ی بالایی آن نام ۲۸ را داده است. مقدار خانه i ام را با $q(i)$ نشان می دهیم و این مقدار از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$q(1) = 10\% \Delta$$

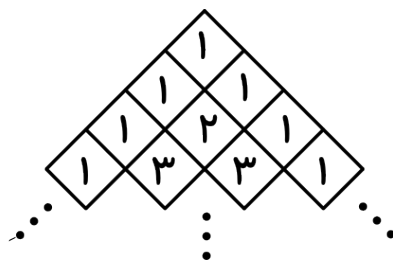
$$q(n) = (q(\lfloor n/2 \rfloor) + q(n-1) + 1) \cdot 100\%$$

که علامت Δ نشان دهنده باقی مانده می باشد. به علی بگویید بیشترین مقداری که می تواند در نهایت به خانه ی بالا برساند چند است؟ اگر پاسخ این سوال برابر با M_1 باشد، شما باید باقی مانده M_1 بر Δ را به عنوان پاسخ اعلام کنید. (۸ نمره)

پاسخ شما:

ب) فرض کنید چرخونک تدبیر یک جدول 5000×5000 باشد و مقدار خانه های آن مانند مثلث خیام-پاسکال پر شده باشد (در مثلث خیام-پاسکال اگر یک خانه همسایه ی بالا چپ و بالا راست داشته باشد مقدارش برابر با جمع آنهاست و در غیر این صورت مقدارش برابر با یک می باشد). فرض کنید بیشترین مقداری که می تواند به خانه ی بالا برساند برابر M_2 باشد، باقیمانده ی M_2 بر Δ را حساب کنید.؟ (۱۲ نمره)

پاسخ شما:



پ) چرخونک تدبیر یک جدول 5000×5000 که خانه های آن مانند قسمت الف شماره گذاری شده اند، یعنی خانه های ردیف پایین از ۱ تا ۵۰۰۰، و خانه ی بالایی $\binom{5001}{2}$ نام گذاری شده است را در نظر بگیرید که مقدار خانه ای با نام i برابر $q(i)$ است. فرض کنید بیشترین مقداری که می توان به خانه ی بالا رساند برابر M_3 باشد باقیمانده ی M_3 بر Δ را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

پاسخ شما: