

三体问题的一种初等解

杨洁¹ 姜付锦² 邱为钢¹

(1. 湖州师范学院理学院, 浙江湖州 313000;

2. 武汉市黄陂区第一中学, 湖北武汉 430300)

摘要: 质量不同的3个质点, 只在相互之间的万有引力作用下, 可以选取合适的初始条件, 使得运动过程中, 3个质点始终保持在旋转变正三角形3个顶点上. 数值计算验证了理论预言, 并给出这种三体运动周期解轨迹图形.

关键词: 三体问题; 正三角形; 周期解

中图分类号: O 311.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2017) 11-0070-03

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.2017.11.016

3个质点, 只在万有引力相互作用下的运动问题, 就是三体问题. 由于三体运动方程的非线性, 使得运动轨迹非常强烈依赖于初值, 初值哪怕改变微乎其微, 运动也会从周期性转化为混沌. 从教学研究意义上讲, 我们希望得到一些初等的特殊解, 即轨道可以用初等函数表示出来, 这样可以直观理解三体运动. 历史上最简单的三体问题周期解, 是圆轨道解, 即3个质量相等的天体(视为质点), 绕着质心作匀速圆周运动. 任意时刻, 这3个天体在一个正三角形的3个顶点上. 反过来说, 这种三体运动的初始条件, 非常严格, 必须取特定的初始角速度, 才能维持这种周期运动. 对于这种简单模型, 有两类推广. 第一类推广是3个天体质量不再相等, 是否也能绕质心作周期运动? 这时, 角速度取何值? 这类的推广曾作为中学生物理竞赛题和高考试题^[1]; 第二类推广是3个天体质量依旧相等, 初始角速度相等, 但任意取值, 这时三体作什么运动? 文献[2]发现, 此时3个天体不再在同一个圆周上运动, 而是绕着质心分别作圆锥曲线运动. 3个圆锥曲线形状相同, 但取向不一样. 任意时刻, 3个天体还在一个正三角形的顶点上, 此正三角形以质心为转动中心, 旋转变化. 本文则考虑以上两类推广的综合, 即3个质量不同的天体, 如何取初始值, 使得3个天体运动时在一个正三角形的顶点上.

设3个天体质量分别为 m_1 、 m_2 、 m_3 . 取一个坐标系, 原点待定. 在这个坐标系中, 3个天体的位移矢量分别是 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{r}_3 . 为简单起见, 假定3个天体始终在一个平面内运动, 运动方程为:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} + \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (3)$$

根据文献[1]对质点的详细受力分析和计算可知, 以上3个方程能化为表达式简单、易求的必要条件是

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| = L(t) \quad (4)$$

式(4)意味着任意时刻三体在一个正三角形3个顶点上, 但大小随时间变化. 定义质心位置矢量 \mathbf{r}_c 为

$$(m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{r}_c = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 \quad (5)$$

以式(1)化简为例, 把式(4)、(5)代入式(1), 得到

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{G}{L^3} (m_1 + m_2 + m_3) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) \quad (6)$$

因为三体系统没有外力, 质心作匀速直线运动, 其位置矢量很容易写出:

$$\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}_c(0) + \mathbf{v}_c t \quad (7)$$

于是式(6)可以写为

$$\frac{d^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c)}{dt^2} = -\frac{G}{L^3} (m_1 + m_2 + m_3) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) \quad (8)$$

收稿日期: 2017-01-31; 修回日期: 2017-03-22

基金项目: 高等学校力学课程教学研究项目(JZW-15-LX-15); 湖州师范学院教改项目(JGB16022); 国家自然科学基金(11475062)资助

作者简介: 杨洁(1997—), 女, 浙江湖州人, 湖州师范学院理学院2015级本科生

任意时刻三体在一个正三角形 3 个顶点上的一个必要条件是质心到 3 个质点的距离与正三角形的边长同步变化,且这个比例与初始值一致:

$$\frac{|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_c(t)|}{L(t)} = \frac{|\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_c(0)|}{L(0)} = k_i \quad (9)$$

式(9)意味着质心与 3 个质点组成的 3 个小三角形始终相似,各边的夹角始终不变.经过共形变换,即尺度大小变换和旋转操作,可以使得各边的交角不变.这也意味着正三角形以质心为中心旋转的同时在缩小或放大.这时式(8)化为

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)}{dt^2} = -Gk_i^3(m_1 + m_2 + m_3) \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c|^3} \quad (10)$$

式(10)就是质心参考系中的单体运动方程.与式(4)和式(9)相兼容的初始条件是 3 个天体处于一个正三角形的 3 个顶点上,初始速度为

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_c + \frac{\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_c(0)}{L(0)} v + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_c(0)) \quad (11)$$

即相对质心速度由两部分组成,第一部分是径向速度,与起始距离成正比;第二部分是垂直于矢径的速度,具有共同的角速度.对于式(10)来说,相当于一个质点在质量为 $m = m_1 + m_2 + m_3$ 天体引力作用下的运动,其等效引力常量为 G' , $G' = Gk_i^3$.起始条件是径向速度大小为 $k_i v$,角速度大小为 ω .设这个质点具有单位质量,由理论力学知识可知,守恒量有两个,一个是能量,在极坐标系中的表示为

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{G'm}{\rho} = \frac{1}{2} (k_i^2 v^2 + k_i^2 L_0^2 \omega^2) - \frac{G'm}{k_i L_0} \quad (12)$$

另一个是角动量,为 $\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = k_i^2 L_0^2 \omega$ (13)

当能量小于零时,相对质心天体 1 的轨迹是椭圆,其半长轴和半短轴分别为

$$a_1 = k_1 \frac{Gm}{2GmL_0^{-1} - (v^2 + \omega^2 L_0^2)} \quad (14)$$

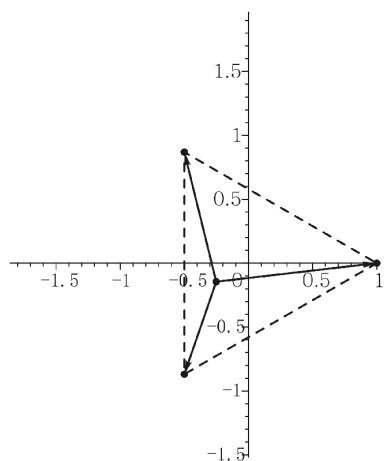
$$b_1 = k_1 \frac{L_0^2 \omega}{\sqrt{2GmL_0^{-1} - (v^2 + \omega^2 L_0^2)}} \quad (15)$$

其周期为

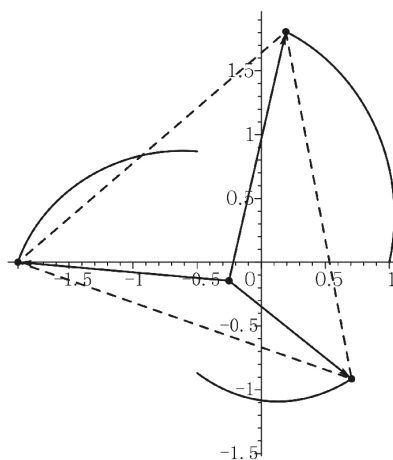
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{G'm}} = 2\pi Gm \sqrt{\frac{1}{(2GmL_0^{-1} - (v^2 + \omega^2 L_0^2))^3}} \quad (16)$$

式(14)和式(15)意味着 3 个椭圆是相似的,相似比是 $k_1 : k_2 : k_3$.式(16)表示 3 个椭圆轨道的周期一

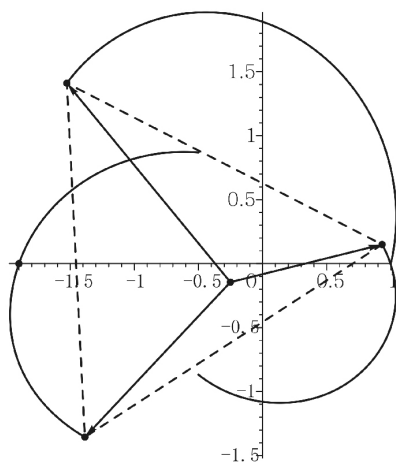
样.这也说明 3 个天体在旋转缩小(放大)的正三角形的 3 个顶点上.数值计算式(1)、式(2)、式(3),需要把它们写成直角坐标分量形式,共 9 个方程,且量纲归一化.举一个例子来说明:选三体质量分别是 1、2、3,以 m_0 为单位.起始位置分别是: $\mathbf{r}_1(0) = (1, 0)$, $\mathbf{r}_2(0) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $\mathbf{r}_3(0) = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$,



(a) $t=0$



(b) $t=1.8923$



(c) $t=4.2051$

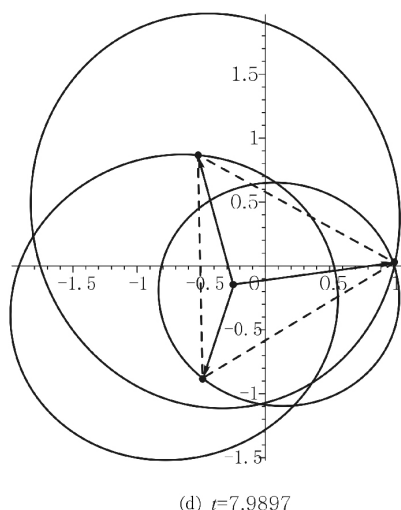


图 1 一个周期内三体不同时刻的位置和轨道

以 l_0 为单位, 那么时间以 $t_0 = \sqrt{l_0^3/Gm_0}$ 为单位. 质心速度为零, 起始速度参数是 $v = 0.4$, 以 l_0/t_0 为单位; $\omega = 1.1$, 以 $1/t_0$ 为单位. 我们采用数学软件 Maple 作数值计算和画图, 好处是得到的图可以在文件内直接打开显示, 并可以用动画 GIF 格式保存. 不同时刻的轨道形状如图 1 所示.

由图 1 可以看出, 起始时刻三体在一个正三角形的顶点上. 取式 (11) 形式的起始速度及数

值计算式 (1)、(2)、(3), 得到的结论是: 质心位置不变, 三体始终在一个正三角形上. 这个正三角形以质心为相似中心, 旋转缩小 (放大). 数值计算结论与式 (4) 和式 (9) 一致. 三体问题与两体问题的一个显著区别是轨道的稳定性, 数值计算发现, 初始条件只要偏离式 (11) 一点点, 3 个天体就不在一个正三角形的顶点上了, 不再具有周期性, 呈现混沌性. 同时, 数值计算也发现, 在某个时刻, 给与三体任意 1 个质点一个细微的扰动 (位置或者速度), 三体的轨道也完全脱离原来的正三角形形状, 散开并呈现混沌性.

本文推广了文献 [1]、[2] 的结论, 给出了最一般情况下的三体运动椭圆轨道解. 这种轨道有以下特点: 一是相对质心, 三体始终在 1 个转动变化的正三角形顶点上, 三体轨迹是 3 个相似的椭圆; 二是起始时刻相对质心, 有共同的角速度, 径向速度大小正比于各点到质心的距离.

参考文献:

- [1] 汪飞, 黄晶. 基于质心参考系下质量不等的三星特殊运动的研究[J]. 物理教师, 2015, 36(9): 89-91.
- [2] 姜付锦. 三体问题一类特解的初探[J]. 物理通报, 2015(2): 43-45.

An elemental solution of three-body problem

YANG Jie¹ JIANG Fu-jin², QIU Wei-gang¹

(1. School of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, China;

2. Huangpi No 1 High School, Wuhan, Hubei 430300, China)

Abstract: Three different body, which attracts each other only by gravitation, can travel along vertexes of an rotating equilateral triangle with changing length under special initial velocity condition. Numerical solution confirms this conclusion and gives these periodical trajectories.

Key words: three body problem; equilateral triangle; periodical solution

(上接 17 页)

Abstract: Considering the secondary neighbor interactions between the atoms in a diatomic linear chain with on-site potential, the lattice vibration equation of the diatomic chain with an impurity is solved, and the basic feature of the effect of on-site potential and the secondary neighbor interaction on the symmetric local vibration are discussed.

Key words: impurity; secondary neighbor interactions; on-site potential; local vibration

大学物理

<http://dxwl.bnu.edu.cn>