Lineare Algebra

Yannik Hörnschemeyer

October 18, 2023

1 Aussagenlogik

Definition 1.1: Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.
Beispiele:

- "8 ist eine gerae Zahl." (wahre Aussage)
- "4 ist eine Primzahl." (falsche Aussage)
- "Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge." (bei dieser Aussge ist der Wahrheitsgehalt unbekannt. Nur weil wir den Wahrheitsgehalt noch nciht kennen heißt es nicht, dass das hier keine Aussge ist.)
- "Heute ist ein schöner Tag." (keine Aussage, da der Wahrheitsgehalt von der Person abhängt, die die Aussage macht.)

Aus schon gegebenen Aussagen können wir neue Aussagen bilden.
Definition 1.2: Es seien A und B Aussagen.

A	B	¬A	A ∧ B	A ∨ B	A → B	A ↔ B
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkung:

$\neg A$ wird gesprochen 'nicht A'.
$A \wedge B$ wird gesprochen 'A und B'.
$A \vee B$ wird gesprochen 'A oder B'.
$A \to B$ wird gesprochen 'A impliziert B'.
$A \leftrightarrow B$ wird gesprochen 'A äquivalent B'.
Synonyme für $A \Rightarrow B$: Aus A folgt B, A ist hinreichend für B, B ist notwendig für A, Wenn A dann B
Synonyme für $A \Leftrightarrow B$: A ist äquivalent zu B, A ist notwendig und hinreichend für B, A genau dann wenn B

Bemerkung

Warum folgt aus einer Falschen Aussage etwas wahres?
In Beweisen müssen wir zeigen, dass etwas immer wahr ist. Beispiel wenn n gerade, dann n hoch 2 gerade. Wenn n ungerade, dann müssten wir diesen Fall im Beweis auch abdecken. Durch die Definition der Implikation können wir diesen Fall aber ignorieren, da die Aussage dann automatisch wahr ist.

Lemma 1.3:

Sei A eine Aussage. Dann ist $A \vee \neg A$ wahr.

Beweis:

Wie untersuchen die zwei Fälle für A: A ist wahr oder A ist falsch.
Wir betrachten die Wahrheitstabelle von $A \vee \neg A$

A	¬ A	A ∨ ¬ A
w	f	w
f	w	w

□

Hinweis: Ein Beweis per Wahrheitstafel ist eine valide Beweismethode.
Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist.

Bemerkung:

Das ¬ Zeichen bindet stärker als die anderen Verknüpngen. Beispiel:
$\neg A \vee B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$
Außerdem gibt es die Konvention dass das 'und' und das 'oder' stärker bindet als die Implikation.
Die Reichenfolge der Stärke der Bindung ist also: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Lemma 1.4:

Es seien A, B und C Aussagen. Dann sind die fogenden Aussagen jeweils äquivalent:

1. a $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$
2. b $A \leftrightarrow B$ und $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

3. c A und $\neg\neg A$
4. d A und $\neg A \rightarrow$ falsch
5. e $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$
6. f $A \wedge B$ und $B \wedge A$
7. g $A \vee B$ und $B \vee A$
8. h $(A \wedge B) \vee C$ und $A \wedge (B \vee C)$
9. i $(A \vee B) \vee C$ und $A \vee (B \vee C)$
10. j $A \wedge (B \vee C)$ und $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
11. k $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
12. l $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$
13. m $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$

Bemerkungen:

Wenn die Aussagen äquivalent sind? Die linke Aussage ist äquivalent $\leftrightarrow$ zur rechten Aussage und damit immer wahr. zu a: Man kann in a und b auch statt $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ auch $\vee$ und $\wedge$ nutzen.
zu d: d zeigt den Aufbau eines textitWiderspruchsbeweis. d rechtfertigt also den Widerspruchsbwesei.
zu e: e ist die *Kontraposition* von a.
zu f und g: f und g ist die *Kommutativität* von $\wedge$.
zu h und i: h und i ist die *Assoziativität* von $\wedge$ und $\vee$. Wenn ich mehrere Aussagen mit $\wedge$ oder $\vee$ verknüpfe, dann ist es egal in welcher Reihenfolge man die Klammern setzt (und ob man sie setzt).
zu j und k: j und k ist die *Distributivität* von $\wedge$ und $\vee$.
zu l und m: l und m ist die *De Morgan'sche Regel* (oder 'Gesetze').

Beweis (Aussage a):

Beweis per Wahrheitstafel.

A	B	¬ A	A → B	¬ A ∨ B
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Wenn wir die letzten beiden Spalten vergleichen sehen wir, dass die Aussagen äquivalent sind.
Damit ist die Aussage bewiesen. □

References

[1] Velleman, Daniel J., *How To Prove It: A Structured Approach*, Camebridge University Press, 2006.