

Lineare Algebra

Vorlesung WiSe 23
Prof. Dr. Alexander Engel

October 19, 2023

Mittwoch, 18.10.23 ¹

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Definition 1.1

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- "8 ist eine gerade Zahl." (wahre Aussage)
- "4 ist eine Primzahl." (falsche Aussage)
- "Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge." (bei dieser Aussage ist der Wahrheitsgehalt unbekannt. Nur weil wir den Wahrheitsgehalt noch nicht kennen heißt das nicht, dass es keine Aussage ist.)
- "Heute ist ein schöner Tag." (keine Aussage, da der Wahrheitsgehalt von der Person abhängt, die die Aussage macht.)

Aus schon gegebenen Aussagen können wir neue Aussagen bilden.

Definition 1.2

Es seien A und B Aussagen.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

¹Die Inhalte dieser Vorlesung beziehen sich ungefähr auf Seite 1 bis 3 aus Baer.

Bemerkung

1. $\neg A$ wird gesprochen 'nicht A'.
2. $A \wedge B$ wird gesprochen 'A und B'.
3. $A \vee B$ wird gesprochen 'A oder B'.
4. $A \Rightarrow B$ wird gesprochen 'A impliziert B', 'Aus A folgt B', 'A ist hinreichend für B', 'B ist notwendig für A', 'Wenn A dann B'.
5. $A \Leftrightarrow B$ wird gesprochen 'A äquivalent B', 'A ist notwendig und hinreichend für B', 'A genau dann wenn B'

Bemerkung

Warum folgt aus einer falschen Aussage etwas Wahres? ¹

In Beweisen müssen wir zeigen, dass etwas immer wahr ist. Wenn zum Beispiel n gerade ist, dann n^2 gerade. Wenn n ungerade, dann müssten wir diesen Fall im Beweis auch abdecken. Durch die Definition der Implikation können wir diesen Fall aber ignorieren, da die Aussage dann automatisch wahr ist.

Lemma 1.3

Sei A eine Aussage. Dann ist $A \vee \neg A$ wahr.

Beweis

Wir untersuchen die zwei Fälle für A : A ist wahr oder A ist falsch.

Wir betrachten die Wahrheitstabelle von $A \vee \neg A$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

□

Hinweis: Ein Beweis per Wahrheitstafel ist eine valide Beweismethode.

Hinweis: Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist.

¹Wikipedia

Bemerkung

Das \neg (*Negation*) Zeichen bindet stärker als die anderen Verknüpfungen. Beispiel:
 $\neg A \vee B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$

Außerdem gibt es die Konvention, dass das 'und' und das 'oder' stärker bindet als die Implikation.

Die Reihenfolge der Stärke der Bindung ist also: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Lemma 1.4

Es seien A , B und C Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen jeweils äquivalent:

1. $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$
2. $A \leftrightarrow B$ und $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. A und $\neg\neg A$
4. A und $\neg A \rightarrow \text{falsch}$
5. $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$
6. $A \wedge B$ (*Konjunktion*) und $B \wedge A$
7. $A \vee B$ (*Disjunktion*) und $B \vee A$
8. $(A \wedge B) \wedge C$ und $A \wedge (B \wedge C)$
9. $(A \vee B) \vee C$ und $A \vee (B \vee C)$
10. $A \wedge (B \vee C)$ und $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
11. $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
12. $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$
13. $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$

Bemerkungen

Die linke Aussage ist äquivalent \leftrightarrow zur rechten Aussage und damit immer wahr.

zu 1: Man kann in a und b auch statt \rightarrow und \leftrightarrow auch \vee und \wedge nutzen.

zu 4: Aufbau eines textitWiderspruchsbeweis. d rechtfertigt also den Widerspruchsbweisei.

zu 5: *Kontraposition* von a.

zu 6 und 7: *Kommutativität* von \wedge .

zu 8 und 9: *Assoziativität* von \wedge und \vee . Wenn ich mehrere Aussagen mit \wedge oder \vee verknüpfe, dann ist es egal in welcher Reihenfolge man die Klammern

setzt (und ob man sie setzt).

zu 10 und 11: *Distributivität* von \wedge und \vee .

zu 12 und 13: *De Morgan'sche Regel* (oder 'Gesetze').

Beweis (Aussage 1)

Beweis per Wahrheitstafel.

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Wenn wir die letzten beiden Spalten vergleichen, sehen wir, dass die Aussagen äquivalent sind.

Damit ist die Aussage bewiesen. \square

Mittwoch, 18.10.23 ²

1.2 Mengenlehre

Definition 1.5

Nach Cantor 1895: "Unter einer Menge versteht man jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* der Menge genannt werden) zu einem Ganzen." ³

Hinweis: diese Definition wäre heute nicht mehr zulässig, da sie zu ungenau ist.

Intuitiv: Eine Menge ist ein Sack, in dem Dinge sind.

Notation: $a \in M$ bedeutet, dass a ein Element von M ist. Andernfalls schreiben wir $a \notin M = \neg(a \in M)$.

Beispiele

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (*Menge der natürlichen Zahlen*)
2. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (*Menge der ganzen Zahlen*)
3. $\emptyset = \{\}$ (*leere Menge*)

²Die Inhalte dieser Vorlesung beziehen sich ungefähr auf Seite 1 bis 3 aus Baer.

³Cantor

4. $A = \{N, 1, \emptyset\}$

Hinweis: die letzte Menge hat 3 Elemente. Außerdem: nutzt man die 'Sack Analogie' wird auch klar, wieso die leere Menge ein Element einer Menge sein kann. Man stellt sich einen Sack vor, der in einem anderen Sack liegt.

Wichtig: In Beispiel A gilt: $1 \in A$ und $N \in A$. aber $2 \notin A$. Man muss klar zwischen Elementen einer Menge und Mengen unterscheiden.

Man beachte außerdem:

1. Für $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{1, 2, 3\}$ gilt $M = N$. Die Reihenfolge der Elemente ist egal.
2. Für $M := \{1, 1\}$ und $N := \{1\}$ gilt $M = N$.

Aussagen über Mengen werden oft über Quantoren ausgeführt.

Definition 1.7

Der Allquantor:

$\forall m \in M : A(m)$ bedeutet: Für alle m in M gilt $A(m)$.

Der Existenzquantor:

$\exists m \in M : A(m)$ bedeutet: Es gibt *mindestens* ein m in M mit $A(m)$.

$\exists! m \in M : A(m)$ bedeutet: Es gibt *genau ein* m in M mit $A(m)$.

Hinweis: $\exists!$ hat keine eigene Bezeichnung.

Beispiel 1.8

1. $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 25$ (wahr)
2. $\exists n! \in \mathbb{Z} : n^2 = 25$ (falsch)
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : q \leq n$ (wahr)
4. $\exists n \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{Q} : q \leq n$ (falsch)

In 3 und 4 sieht man: die Reihenfolge der Quantoren ist wichtig. Beim Vertauschen können komplett andere Aussagen entstehen.

Regel 1.9

1. $\neg(\forall m \in M : A(m))$ ist äquivalent zu $\exists m \in M : \neg A(m)$
2. $\neg(\exists m \in M : A(m))$ ist äquivalent zu $\forall m \in M : \neg A(m)$

Das heißt um eine Aussage zu negieren, muss man den Quantor wechseln und die Aussage negieren!

Definition 1.10

Es seien M und N Mengen. Dann ist $M \subset N$ (M ist Teilmenge von N) wenn folgendes gilt:

$$\begin{aligned} m \in M &\Rightarrow m \in N \\ \forall m \in M : m &\in N \end{aligned}$$

Beispiel 1.11

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Lemma 1.12

Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$.

Beweis

Wir müssen die Aussage $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ als immer wahr einsehen (Tautologie). Da $x \in \emptyset$ immer falsch ist, ist die Implikation $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ immer wahr. \square

Anmerkung

$\emptyset \in M$ gilt nicht unbedingt. Das hängt von der Menge M ab, aber die leere Menge ist immer Teilmenge von M . Hier sieht man erneut die Wichtigkeit der Unterscheidung von Mengen und Elementen.

Bemerkung 1.13

Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn folgendes gilt:

$$(M \subset N) \wedge (N \subset M)$$

Das wird sehr häufig in Beweisen benutzt um die Gleichheit von Mengen zu zeigen.

Beispiel

Die Gleichungen $x^2 = 4$ und $|x| = 2$ haben die gleiche Lösungsmenge.

Schritt 1: Sei x eine Lösung von $x^2 = 4$. Dann ist $|x| = 2$.

Schritt 2: Sei x eine Lösung von $|x| = 2$. Dann ist $x^2 = 4$.

Definition 1.14

Es seien M und N Mengen. Wir definieren die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M \cup N &\leftrightarrow x \in M \vee x \in N \text{ (Vereinigung)} \\ M \cap N &:\leftrightarrow x \in M \wedge x \in N \text{ (Durchschnitt)} \\ M \setminus N &:\leftrightarrow x \in M \wedge x \notin N \text{ (Differenz)} \end{aligned}$$

Konvention: bei Aussagen sagt man eher, dass sie äquivalent sind. \leftrightarrow kann aber durch $:=$ ersetzt werden ohne falsch zu sein.

Lemma 1.15

Es seien M und N Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M \cap (N_1 \cup N_2) &= (M \cap N_1) \cup (M \cap N_2) \\ M \cup (N_1 \cap N_2) &= (M \cup N_1) \cap (M \cup N_2) \\ M \setminus (N_1 \cup N_2) &= (M \setminus N_1) \cap (M \setminus N_2) \\ M \setminus (N_1 \cap N_2) &= (M \setminus N_1) \cup (M \setminus N_2) \end{aligned}$$

Es sind also eine Art Distributivgesetze.

Beweis

Wir beweisen nur die erste Aussage. Der Rest wird in der Übung gemacht. Es gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in M \cap (N_1 \cup N_2) &\stackrel{1.14b}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge x \in (N_1 \vee N_2) \\ &\stackrel{1.14a}{\Leftrightarrow} x \in M \wedge (x \in N_1 \vee x \in N_2) \\ &\stackrel{1.4j}{\Leftrightarrow} (x \in M \wedge x \in N_1) \vee (x \in M \wedge x \in N_2) \\ &\stackrel{1.14b}{\Leftrightarrow} (x \in M \cap N_1) \vee (x \in M \cap N_2) \\ &\stackrel{1.14a}{\Leftrightarrow} x \in (M \cap N_1) \cup x \in (M \cap N_2) \end{aligned}$$

References

- [1] Baer, Christian, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer 2018.