Compte rendu de TP
INTRODUCTION AUX VARIABLES ALEATOIRES

Fleytoux Yoann , Aurélien Bernier Levalois

7 octobre 2016

Table des matières

1 Présentation du TP

L'objectif de cette manipulation de Travaux Pratiques est d'illustrer sous MATLAB les notions théoriques vues en cours sur les variables aléatoires.

2 Variables aléatoires monodimensionnelles

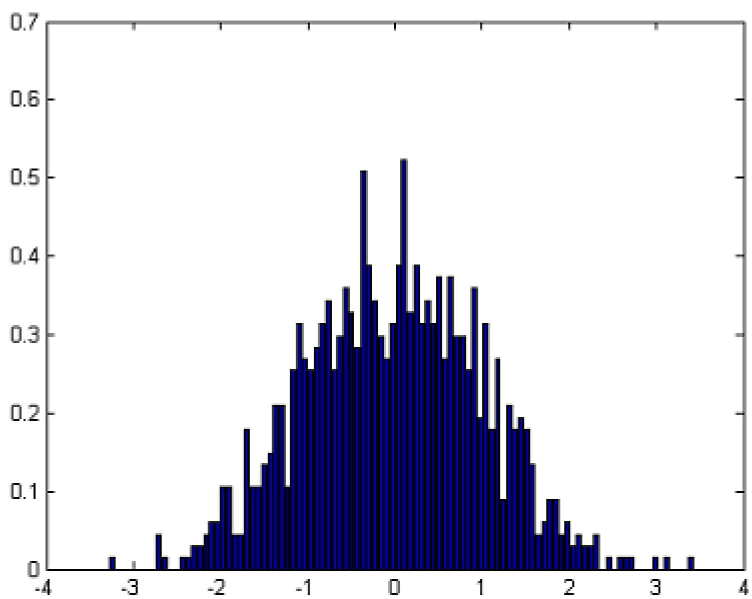
On se propose de simuler des variables aléatoires Gaussiennes et de visualiser la répartition de leurs échantillons. Pour cela on utilise la fonction randn.

1. Simuler N =1000 réalisations d'une variable aléatoire Gaussienne scalaire X de moyenne nulle et de variance unité, et placer le résultat dans un vecteur X.Afficher l'histogramme de ces réalisations. Décrire l'histogramme. Augmenter le nombre de réalisations et commenter.

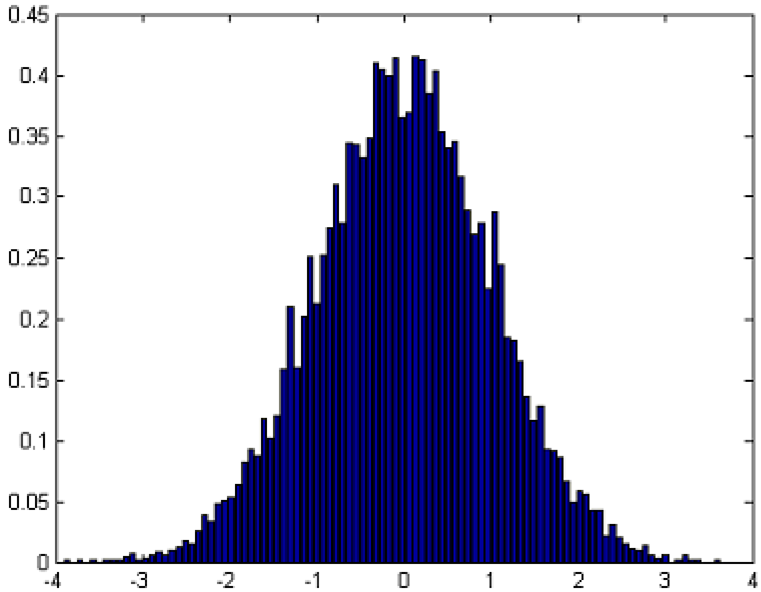
Réponse :

```
N = 1000;
X = randn([1, N]);
[counts, centers] = hist(X,100);
bar(centers, counts/N/(centers(2)-centers(1)));
%Les valeurs sont comprises entre -4 et 4, plutot centrees vers 0 mais les resultats ne sont pas distribues uniformement

N = 100000;
X = randn([N, 1]);
[counts, centers] = hist(X,100);
figure
bar(centers, counts/N/(centers(2)-centers(1)));
%Avec un plus grand nombre de realisations, les valeurs sont egalement comprises entre -4 et 4 mais convergent plus vers 0, on observe mieux la cloche caracteristique d'une distribution gaussienne
```

Histogramme pour 1000 réalisations



Histogramme pour 10000 réalisations



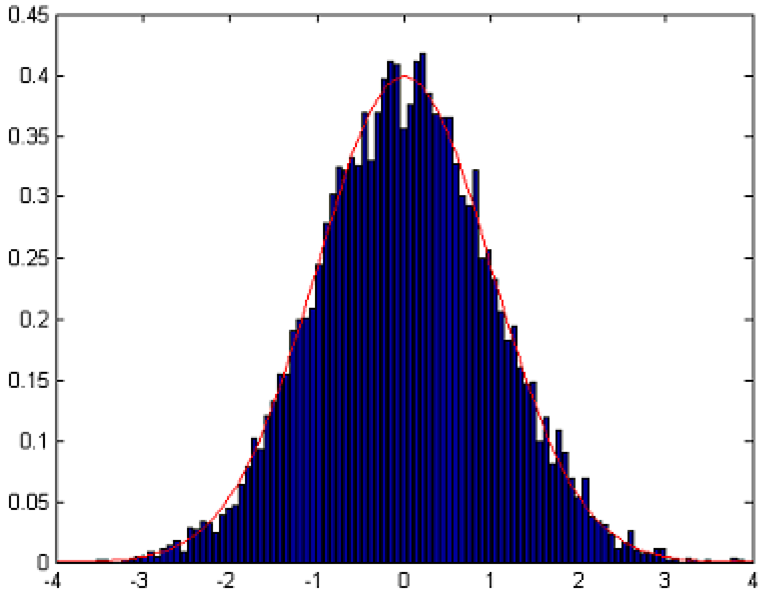
2. Afin de vérifier l'adéquation de la loi théorique, tracer sur la même figure avec une couleur différente la densité de probabilité théorique, dont la forme est :

$p_x(x) = G(x; m_x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/(2\sigma^2)}(1)$ Choisir des valeurs de x allant de min(x) à max(x) avec un pas de 0.1

Réponse :

```
sigma = 1;%variance (= ecart-type)
meanx = 0;
rangex = (min(X):0.1:max(X));
px = (1/(sqrt(2*pi)*sigma))*exp(-(rangex-meanx).*(rangex-meanx)/(2*sigma*sigma));
hold on
plot(rangex, px, 'r')
hold off
```

Histogramme pour 10000 réalisations avec densité de probabilité théorique



Soit la variable aléatoire Gaussienne scalaire Y définie par $Y = 10 + \sqrt{2}X$

3. Établir la moyenne m_y et la variance σ_y^2 de Y. En déduire une manière de générer des réalisations de la loi $G(y; m_y, \sigma_y^2)$ au moyen de la commande randn.

Réponse : $E(y) = E(10 + \sqrt{2}x) = 10 + \sqrt{2}m_x$ Or on sait que $m_x = 0$ donc $E(y) = 10$

$var(y) = \sigma^2$
$= E[(y - m_y)^2]$
$= E[(10 + \sqrt{2}x - m_y)^2]$
$= E[(10 + \sqrt{2}x - (10 + \sqrt{2}m_x))^2]$
$= E[(\sqrt{2}x - \sqrt{2}m_x)^2]$
$= E[(\sqrt{2}(x - m_x))^2]$
$= E[2(x - m_x)^2]$
$= E[2\sigma_x]$
$= 2$

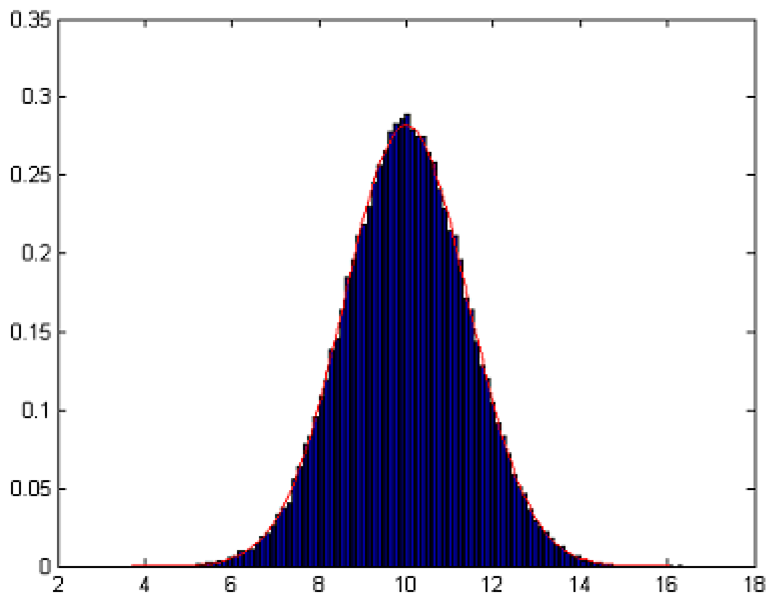
```
Y = 10 + sqrt(2)*X;
%mean_Y=mean2(Y)
%variance = var(Y)
mean_Y = 10;
variance = 2;
sigma = sqrt(variance)
gy = mean_Y + sigma*randn([N, 1]);
```

4. Répéter les questions 1 et 2 pour Y. Peut-on retrouver les moments de Y à partir de son histogramme ?

Réponse :

```
figure
[counts , centers] = hist(gy ,100);
bar(centers , counts/N/(centers(2)-centers(1)));
rangey = (min(Y):0.1:max(Y));
py = (1/(sqrt(2*pi)*sigma))*exp(-(rangey-mean_Y).*(rangey-mean_Y)/(2*sigma*sigma));
hold on
plot(rangey , py , 'r')
```

Histogramme et densité de probabilité théorique pour Y



Non, on ne peut retrouver ces moments à partir de l'histogramme, on ne pourra en donner que des estimations car on n'a un nombre d'expérience fini.

3 Variables aléatoires bi-dimensionnelles

On considère des variables aléatoires $X_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix}, i = 1, 2, ...,$à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Leurs réalisations, générées sous MATLAB, sont stcokées dans des matrices X1,X2,... dont chaque colonne correspond à un tir aléatoire.

5. Simuler des réalisations de deux variables aléatoires $x_{1,1}$, $x_{1,2}$ indépendantes, Gaussiennes de moyenne nulle et variance unitaire, et les placer dans une matrice X1.

Réponse :

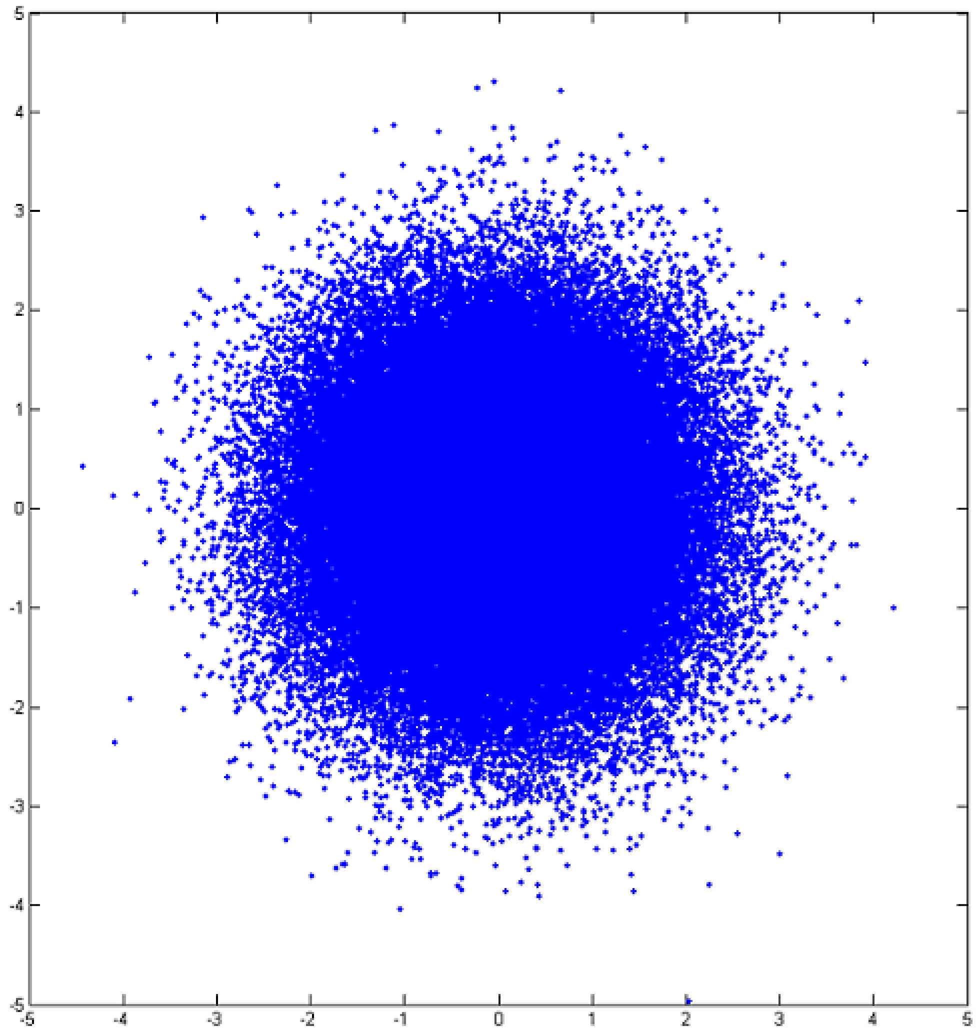
```
N = 100000;
x11 = randn([1, N]);
x12 = randn([1, N]);
X1 = [x11; x12];
%Deux variables aleatoires x11 et x12
```

6. Afficher le nuage des points 2D obtenus. Commenter.

Réponse :

```
plot(X1(1,:),X1(2,:), '.b');
%On voit que le nuage de points est centre sur 0 en
   abscisses et en ordonnees.
```

Nuage de points de x11 et x12



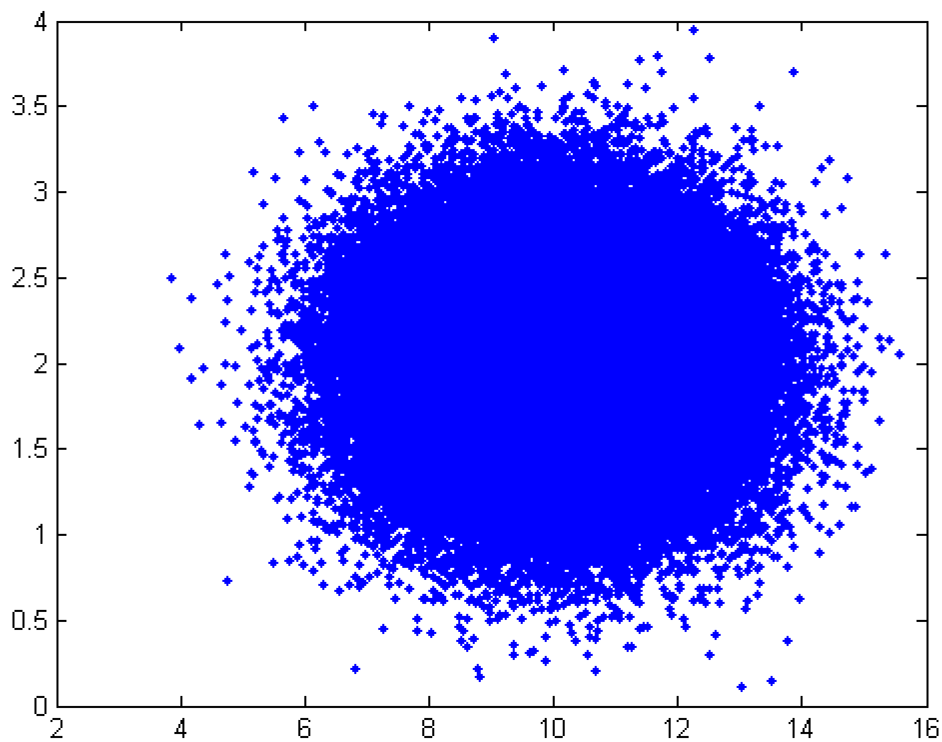
7. Répéter la même opération pour deux variables aléatoires$x_{2,1}$, $x_{2,2}$ indépendantes, où$x_{2,1}$ (resp. $x_2, 2$) suit une loi Gaussienne de moyenne 10 et de variance 2 (resp. de moyenne 2 et de variance 0.2) Les réalisations seront placées dans une matrice X2. Commenter.

Réponse :

```
var21 = 2;
var22 = 0.2;
```

```
x21 = 10 + sqrt(var21)*randn([1, N]);
x22 = 2 + sqrt(var22)*randn([1, N]);
X2 = [x21; x22];
figure;
plot(X2(1,:),X2(2,:), '.b');
%Ici, le nuage de points est centre sur 10 en abscisses et
    2 en ordonnees,
%ce qui est coherent avec les moyennes donnees, on voit
    egalement que X21 est plus " disperse ", ce qui est
    coherent avec les variances donnees.
```

Nuage de points X21 X22



8. Former la matrice X3 définie par les deux variables aléatoires $x_{3,1} = x_{1,1}$; $x_{3,2} = x_{1,2} + ax_{1,1}$; (2) où a admet successivement les valeurs 1 et 5.

Réponse :

```
x31 = x11;
x321 = x12 + 1*x11;
```

```
x325 = x12 + 5*x11;
X31 = [x31; x321];
X35 = [x31; x325];
```

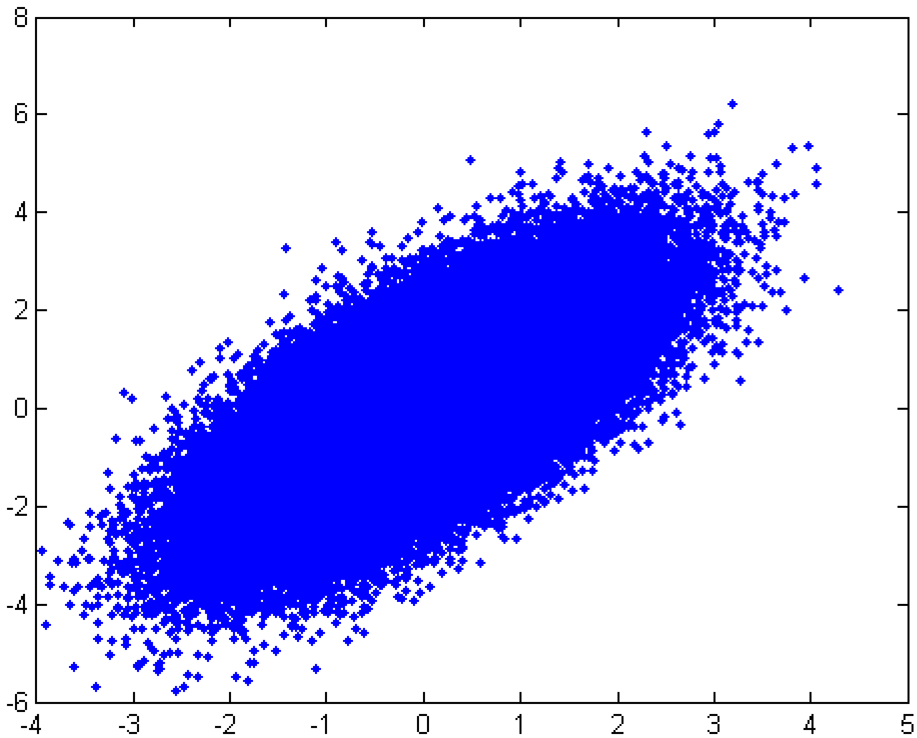
9. Afficher le nuage de points correspondant à X3. Le comparer à celui correspondant à X1. Commenter relativement à l'indépendance des variables aléatoires entrant en jeu.

Réponse :

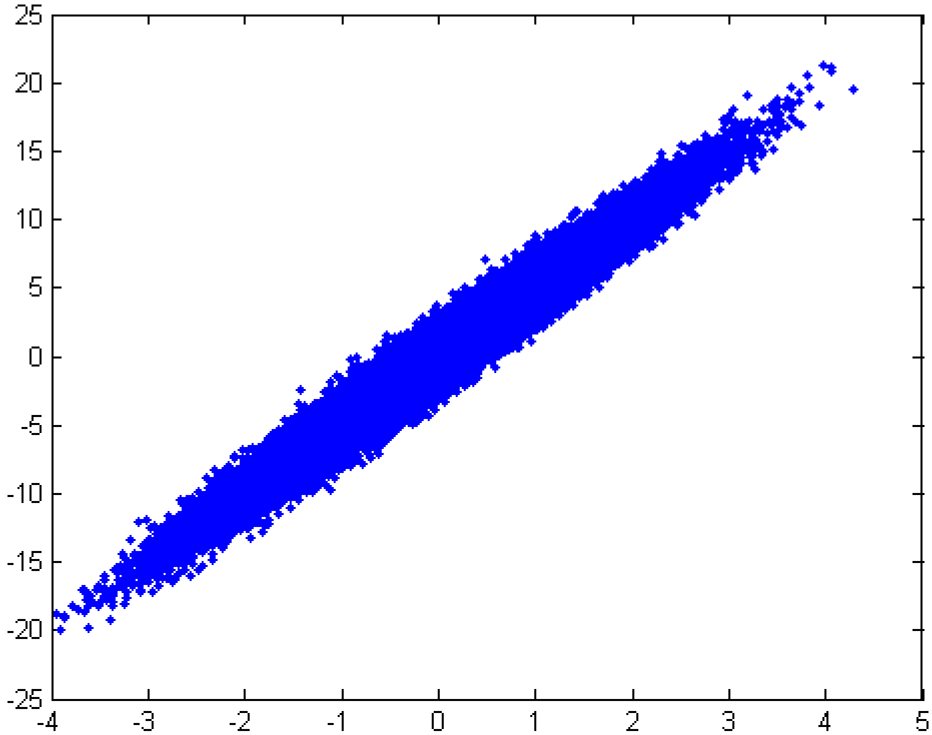
```
figure;
plot(X31(1,:),X31(2,:), '.b');
figure;
plot(X35(1,:),X35(2,:), '.b');
```

Pour X1 : variables aléatoires non corrélées et paramètres identiques : on btient un cercle

Nuage de points pour X3 avec a = 1



Nuage de points pour X3 avec a = 5



Pour X31 : variables aléatoires corrélées avec un rapport a=1 : la corrélation est assez forte (voir l'ellipse de confiance). Pour X35 : variables aléatoires corrélées avec un rapport a=5 : la corrélation est encore plus forte et on observe des ellipses de confiance qui se tassent pour former une droite.

10. Établir l'expression théorique des moments de $X_3 = \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \end{pmatrix}$. Les comparer avec leurs estimés empiriques établis par MATLAB au moyen des fonctions mean, cov, etc.

Réponse : $m_{3,1}$
$m_{3,2} = m_{2,1} + am_{1,1}$

4 Somme de variables aléatoires

On considère K variables aléatoires scalaires $x_k k - 1, ..., K$, indépendantes, Gaussiennes centrées de variance unité. K pourra prendre diverses valeurs, e.g, K=3, K=6,etc.

11. Simuler 10000 réalisations de ces K variables. Soit la variable aléatoire $y = \sum_{k-1}^{K} x_k$

Réponse :

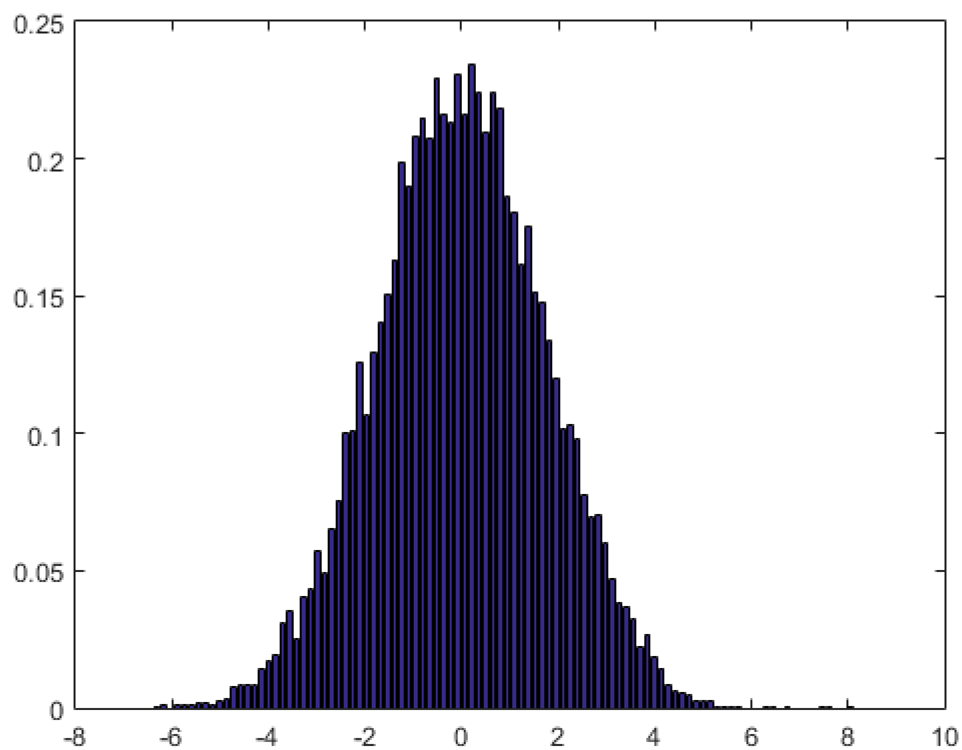
```
N = 10000;
K3 = 3;
X3 = randn([K3, N]);
Y3 = sum(X3);
```

12. Tracer l'histogramme des réalisations de y (K=3).

Réponse :

```
Y3 = sum(X3);

[counts, centers] = hist(Y3,100);
bar(centers, counts/N/(centers(2)-centers(1)));
```

Histogramme des réalisations de y (K=3)

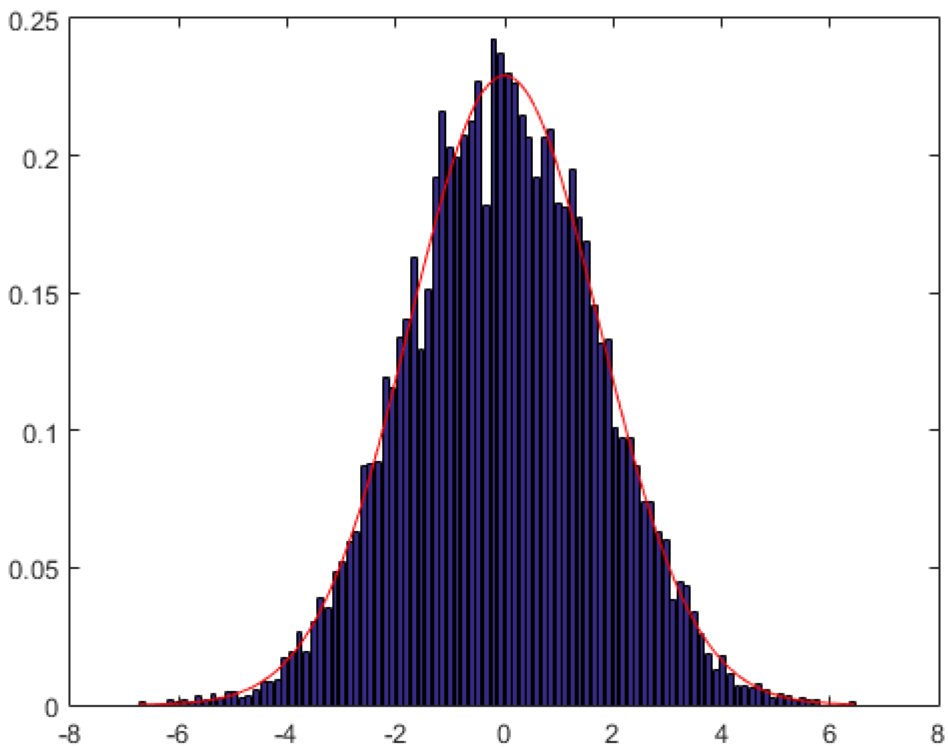


13. Quelle loi suit la variable y (type, moyenne, variance) ? Superposer la densité de probabilité de y avec son approximation empirique.

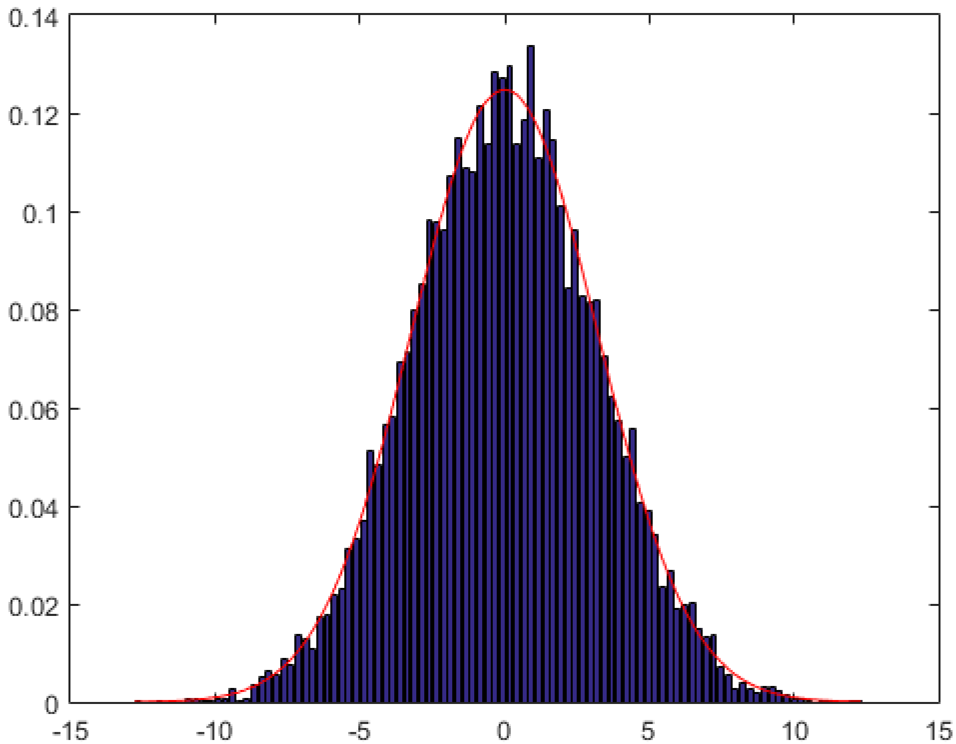
Réponse :

```
sigma = sqrt(((1/N)*sum(Y3*Y3')))
meanx3 = 0;
rangey3 = (min(Y3):0.1:max(Y3));
py3 = (1/(sqrt(2*pi)*sigma))*exp(-(rangey3-meanx3).*(
   rangey3-meanx3)/(2*sigma*sigma));
hold on;
plot(rangey3, py3, 'r')
```

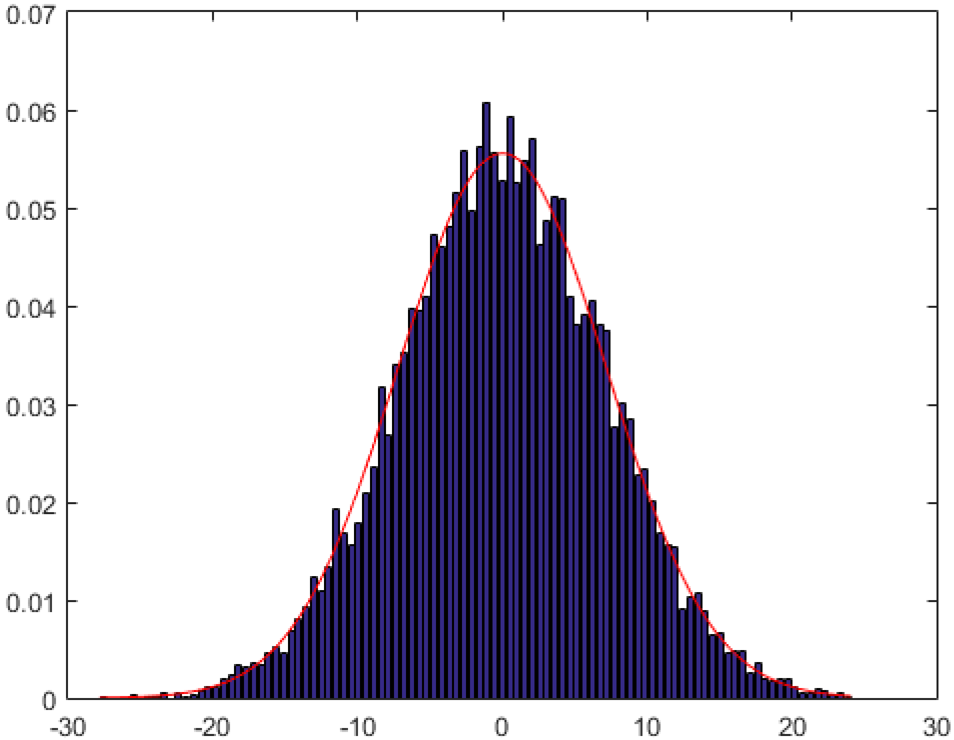
Densité de probabilité de y avec son approximation empirique (k=3)



Densité de probabilité de y avec son approximation empirique (k=10)



Densité de probabilité de y avec son approximation empirique (k=50)



On observe que c'est une loi gaussienne. Sa moyenne sera la somme des moyennes des K variables aléatoires et sa variance, la somme des variances des k variables aléatoires (car les K variables sont indépendantes).

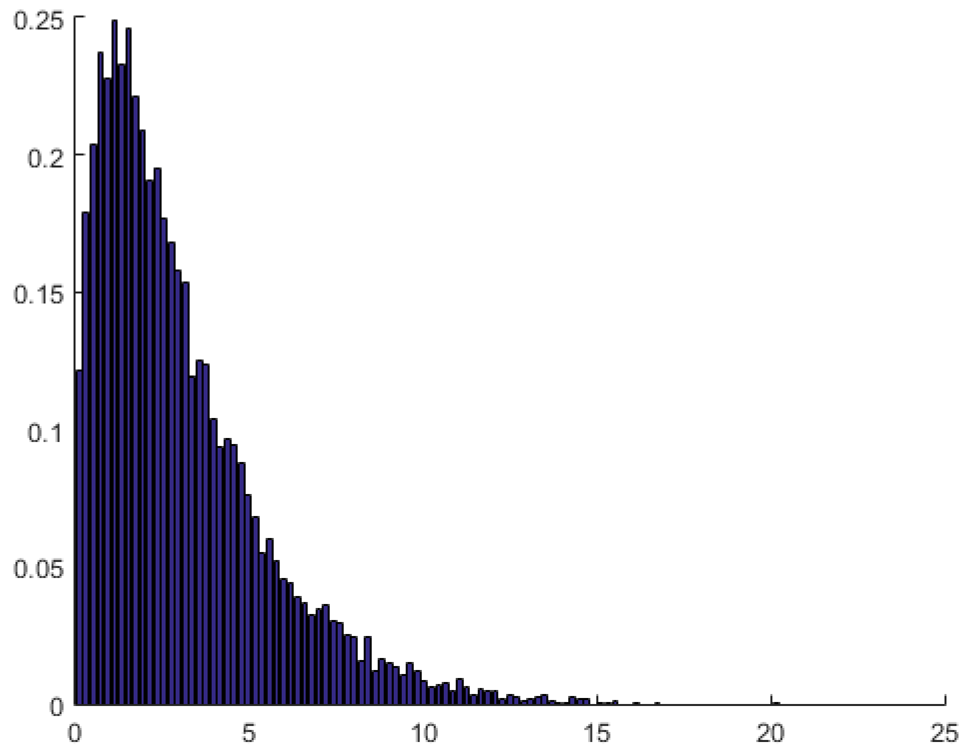
Soit la variable aléatoire $z = \sum_{k-1}^{K} x_k^2$. La fonction suivante correspond à la densité de probabilité d'une loi χ^2 à K degrés de liberté : $p_z(z) = \chi_K^2(z) = \dfrac{z^{(K/2)-1} e^{-z/2}}{2^{K/2}\Gamma(K/2)}$ où Γ désigne la fonction Gamma.

14. Tracer les histogrammes des réalisations de z pour diverses valeurs de K.

Réponse :

```
X_chi2=X3.*X3;
z=sum(X_chi2);
[counts, centers] = hist(z,100);
bar(centers, counts/N/(centers(2)-centers(1)));
```

Histogrammes des réalisations de z pour K=3

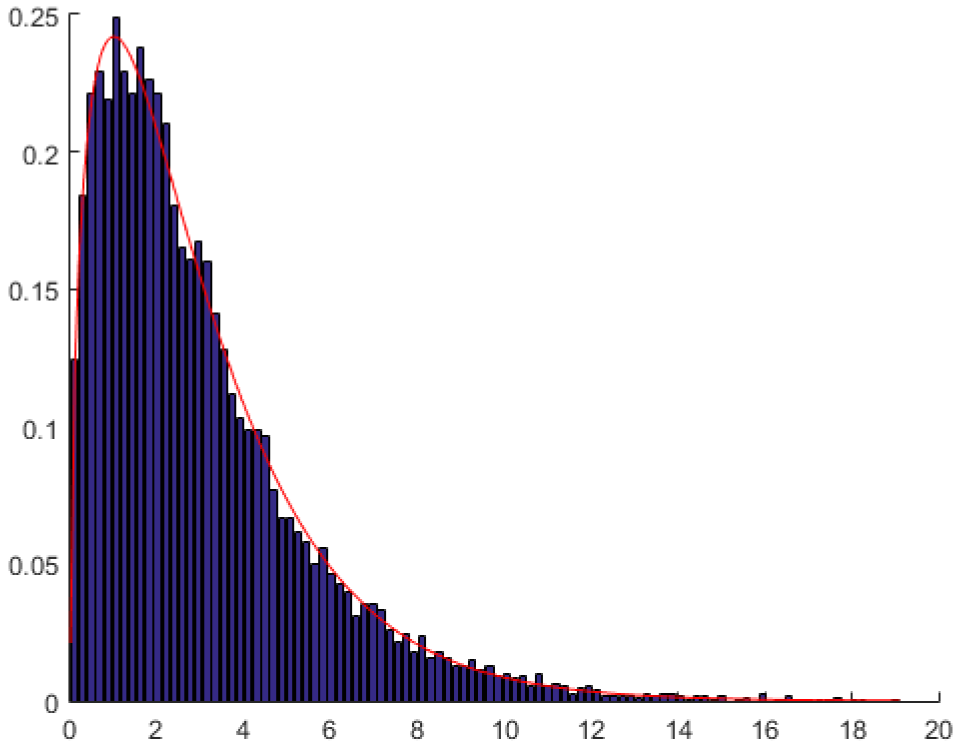


15. Superposer la densité de probabilité de z avec son approximation empirique. Commenter.

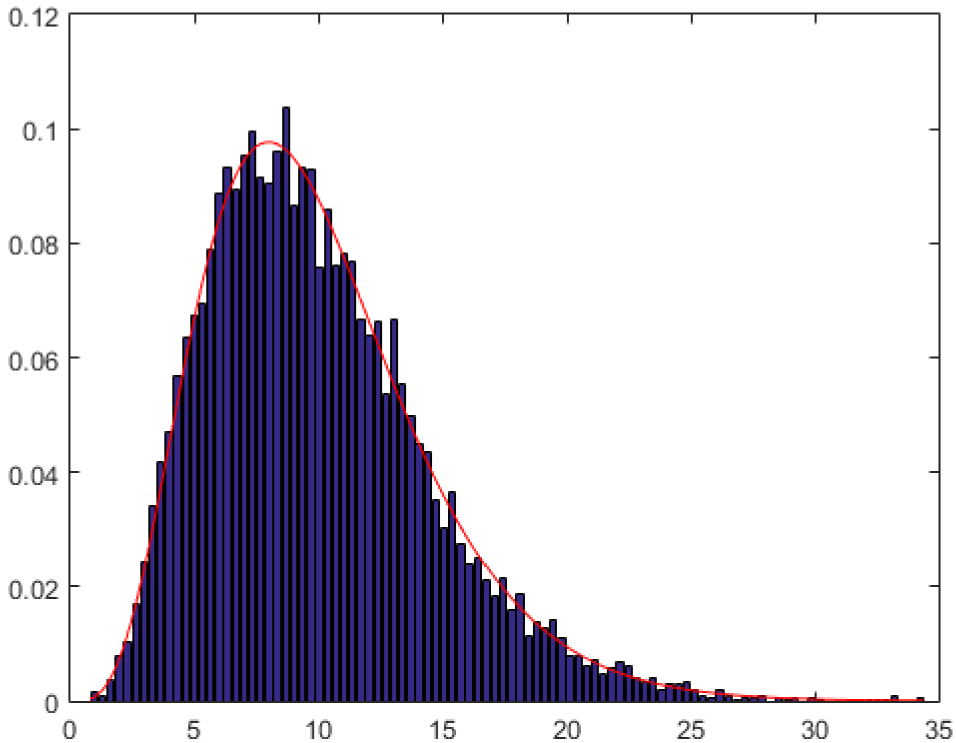
Réponse :

```
hold on
range_z=(min(z):0.1:max(z));
pz=(range_z.^((K3/2)-1).*exp(-range_z/2))/(2^(K3/2)*gamma(
   K3/2));
plot(range_z,pz,'r');
```

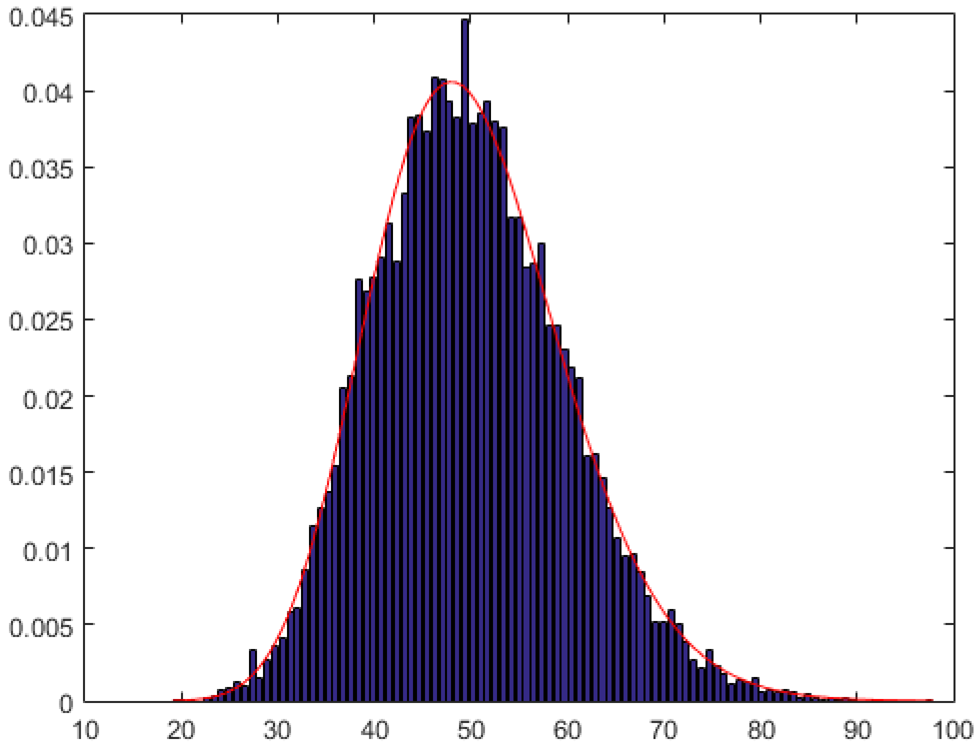
Superposition de la densité de probabilité de z avec son approximation empirique (K=3)



Superposition de la densité de probabilité de z avec son approximation empirique (K=10)



Superposition de la densité de probabilité de z avec son approximation empirique (K=50)



16. Établir la moyenne et la variance de z en fonction de K.

Réponse :

$E(z) = E(\sum_{k=1}^{K} E(X_k^2)) = \sum_{k=1}^{K} E[X_k - (m_{xk})^2] = \sum_{k=1}^{K} \sigma_{Xk} = K$

$car \sigma_{Xk} = 1$

$\sigma_z^2 = E_z[(z - m_z)^2] = E_z[(\sum_{k=1}^{K} X_k^2 - K)^2]$

$= E_z[(\sum_{k=1}^{K}(X_k^2) - K)^2]$

$= E_z[((\sum_{k=1}^{K}(X_k^2))^2 - 2\sum_{k=1}^{K}(X_k^2)K + K^2]$

$= K^2 - 2K^2 + K^2 = 0$

$car E(\sum_{k=1}^{K} E(X_k^2)) = K$

```
var_z=var(z)
mean_z=mean(z)
```

Avec K=3

$var_z = 6.0247$

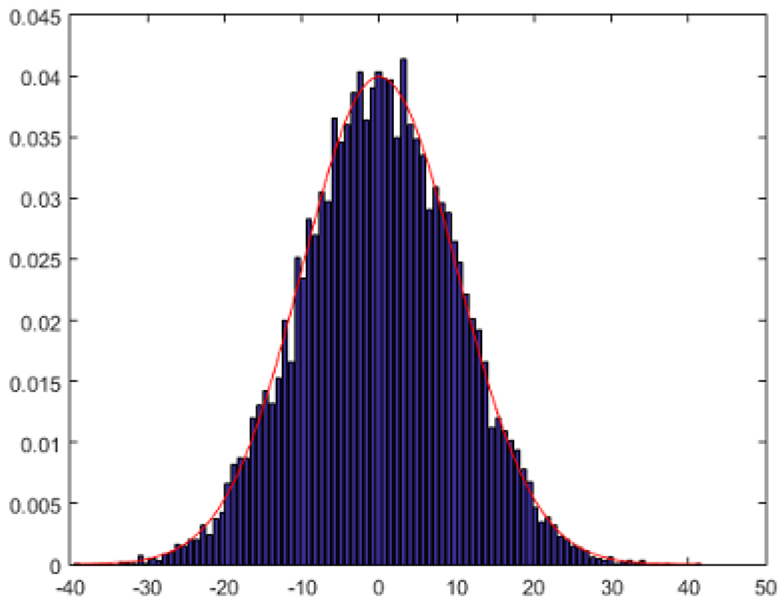
$mean_z = 3.0079$

17. Renouveler ces calculs pour K = 100. Quel type de loi obtient-on ? Quels sont ses moments ? Établir un lien avec le théorème central limite.

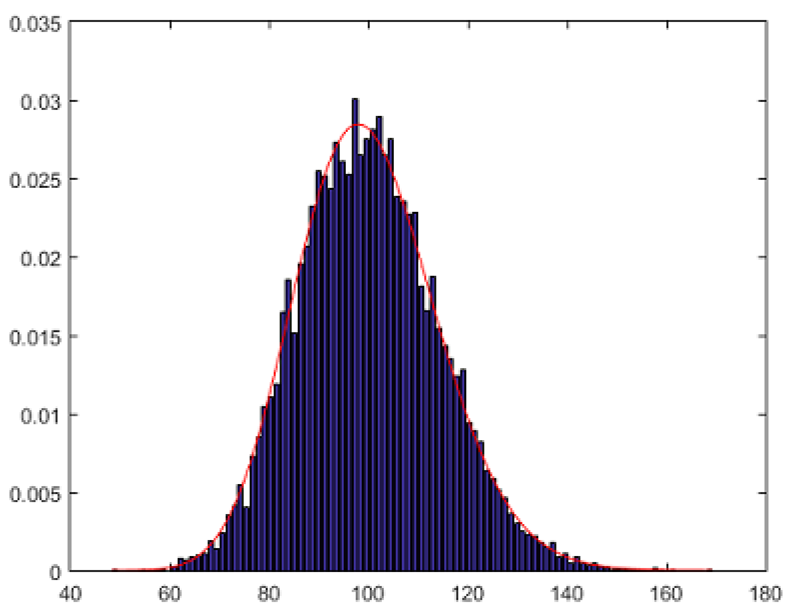
Réponse :

```
N = 10000;
K = 100;
X = randn([K, N]);
Y = sum(X);
%histo y
[counts, centers] = hist(Y,100);
bar(centers, counts/N/(centers(2)-centers(1)));

sigma = sqrt(((1/N)*sum(Y*Y')))
meanx = 0;
rangey = (min(Y):0.1:max(Y));
py = (1/(sqrt(2*pi)*sigma))*exp(-(rangey-meanx).*(rangey-meanx)/(2*sigma*sigma));
%superposition theorique y
hold on;
plot(rangey, py, 'r')

figure
X_chi2=X.*X;
z=sum(X_chi2);
%histo z
[counts, centers] = hist(z,100);
bar(centers, counts/N/(centers(2)-centers(1)));

hold on
range_z=(min(z):0.1:max(z));
pz=(range_z.^((K/2)-1).*exp(-range_z/2))/(2^(K/2)*gamma(K/2));
%superposition theorique z
plot(range_z,pz,'r');
```

Superposition de la densité de probabilité de y avec son approximation empirique(K=100)



Superposition de la densité de probabilité de z avec son approximation empirique(K=100)



TODO Quel type de loi obtient-on ? Quels sont ses moments ? Établir un lien avec le théorème central limite.