עבודת בית 1: תכנון אלגוריתמים 2023

עדכון אחרון: 3/11

תאריך הגשה: 17/11 23:59. את העבודה יש להגיש במערכת ההגשה (עדיף מוקלד).

* מומלץ ביותר ***לא להמתין לרגע האחרון*** להגשת העבודה.

מתרגל אחראי: גיא סער.

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן ריצה (**כולל** זמן הריצה של הקופסה השחורה).
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.

תזכורת:

רדוקציה הינה פתרון בעיה אחת בעזרת בעיה אחרת. באופן פורמלי (מהתרגול):
לרדוקציה

הגדרה פורמאלית ל- רדוקציה:

תהיינה A ו-B זוג בעיות נתונות. רדוקציה מ- A לבעיה B היא זוג פונקציות f,g כך ש:

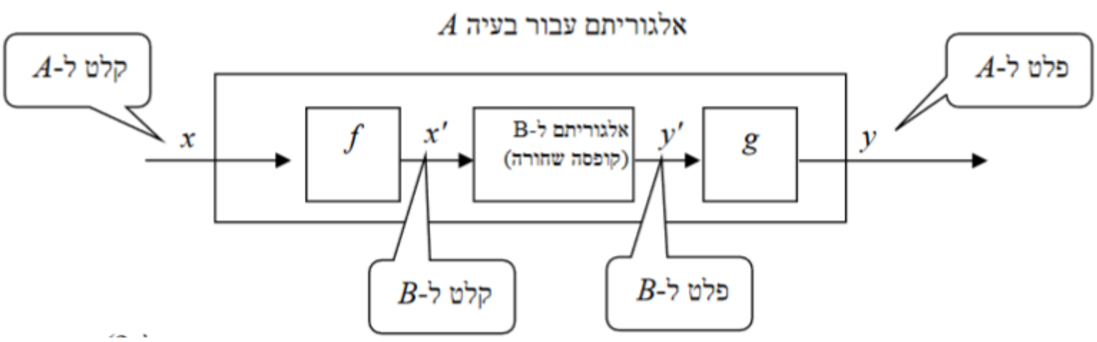
- f היא פונקציית המרת הקלט, המעבירה מופע של בעיה A למופע של בעיה B.
- g היא פונקציית המרת הפלט, המעבירה פתרון של בעיה B לפתרון של בעיה A.
- עבור מופע a לבעיה A, אם $B(f(a))$ הוא פתרון עבור המופע $f(a)$ תחת בעיה B אזי $g(B(f(a)))$ הוא פתרון למופע a תחת בעיה A. (הגדרת נכונות).

כדי להוכיח את נכונות הרדוקציה, יש להוכיח שהאלגוריתם הבא פותר את הבעיה A:

1. עבור מופע a לבעיה A, נחשב את $f(a)$.
2. עבור המופע $f(a)$ לבעיה B, חשב את הפיתרון b.
3. נחשב את $g(b)$ להיות הפתרון של A.

כאשר f הינה תרגום הקלט, g הינה תרגום הפלט והאלגוריתם לבעיה B הינו ה"קופסא השחורה".
לטובת העבודה, כשאנו מבקשים רדוקציה מבעיה A לבעיה B, יש לתת פתרון לבעיה A באמצעות קופסא שחורה של בעיה B.

הערה: ניתן להניח כי ממיר הפלט מכיר גם את הקלט המקורי x לבעיה A.



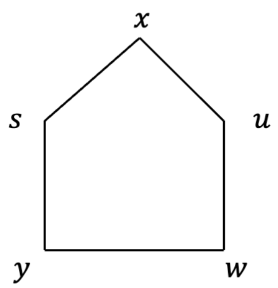
הגדרות עבור **גרפים מכוונים** (בלבד):

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון.
סדרת קודקודים $P = (v_1, \dots, v_k)$ בגרף היא *מסלול* אם לכל $1 \le i \le k-1$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$.
מסלול $P = (v_1, \dots, v_k)$ הוא *מסלול פשוט* מ v_1 ל v_k אם לכל $1 \le i < j \le k$, $v_i \ne v_j$.
אורך מסלול הוא מספר הקשתות במסלול.

שאלה 1

א. **בעיית מסלול קצר**.
מופע לבעיה: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים שונים $s, t \in V$.
פתרון למופע: $d(s,t)$ – אורך מסלול קצר ביותר מ- s ל- t, או ∞ אם אין מסלול ביניהם.

ב. **בעיית מסלול מוסדר קצר**.
מופע לבעיה: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושלושה קודקודים שונים (s, t, u) $s, t, u \in V$.
הגדרה: מסלול $P = (v_1, \dots, v_k)$ הוא *מסלול מוסדר* אם מתקיים התנאי הבא:
לכל $1 \le i \le k$, אם $v_i = u$ אז i זוגי. כלומר הקודקוד u מופיע רק במיקומים זוגיים בP.



למשל בגרף הנתון בדוגמא, (s, x, u) הוא לא מסלול מוסדר (u מופיע במיקום אי זוגי).
(s, y, w, u) הוא מסלול מוסדר (u מופיע במיקום זוגי).
(s, y, w) הוא מסלול מוסדר (אין מופעים של u).

פתרון למופע: אורך מסלול קצר ביותר מכל המסלולים המוסדרים הקיימים מ- s ל- t או ∞ אם אין מסלול מוסדר מ- s ל- t.

מצאו רדוקציה מבעיה ב' לבעיה א'. יש להשתמש ב"קופסא השחורה" פעם אחת בלבד. על אלגוריתם מבוסס הרדוקציה שתכננתם להיות יעיל ככל האפשר. הוכיחו נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו, כולל זמן הריצה של הקופסה השחורה, כאשר ידוע שניתן לפתור את בעיה א' בזמן ריצה $O(|V| + |E|)$.

ההגדרות הבאות הן לשתי השאלות הבאות.

<u>הגדרה:</u> יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא *קליקה* אם בין כל שני קודקודים שונים $u, v \in U$ קיימת צלע. במקרה כזה נגיד שU היא קליקה בגודל $|U|$.

<u>**א. בעיית *4-Clique*–:**</u>
<u>מופע לבעיה</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
<u>פתרון לבעיה</u>: האם קיימת בגרף קליקה בגודל 4?

<u>**ב. בעיית *12-Clique*–:**</u>
<u>מופע לבעיה</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
<u>פתרון לבעיה</u>: האם קיימת בגרף קליקה בגודל 12?

<u>**שאלה 2**</u>
<u>**סעיף א (קל)**</u>
הראו כי לבעיית *12-Clique* יש אלגוריתם בסיבוכיות ריצה $O(|V|^{12})$.

<u>**סעיף ב**</u>
מצאו רדוקציה מבעיה א' לבעיה ב'. יש להשתמש ב"קופסא השחורה" (שתכננתם בסעיף א׳) פעם אחת בלבד. על האלגוריתם שתכננתם להיות יעיל ככל האפשר. הוכיחו נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו (<u>כולל</u> זמן הריצה של הקופסה השחורה).

<u>**שאלה 3**</u>
מצאו רדוקציה מבעיה ב' לבעיה א'. יש להשתמש ב"קופסא השחורה" פעם אחת בלבד. על האלגוריתם שתכננתם להיות יעיל ככל האפשר. הוכיחו נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו (<u>כולל</u> זמן הריצה של הקופסה השחורה- כאשר ידוע שבהינתן גרף $G = (V, E)$, הקופסא השחורה פועלת בזמן ריצה $O(|V|^4)$).

רמז: בנו גרף בו כל קודקוד מייצג קבוצה של קודקודים בגרף שהתקבל כקלט.

<u>שאלה 4: תדלוק אופטימלי</u>

במכונית הסטודנטיאלית יש מיכל דלק בנפח של f ליטרים שמספיק עבור n ק"מ.

הדרך ממטולה לאילת היא באורך m ק"מ. לאורך הדרך יש מספר תחנות דלק כאשר x_i הוא מרחק תחנת הדלק ה-i-ית מתחילת הדרך.

מחיר ליטר דלק הוא p ועל כל תדלוק יש עמלה קבועה c.

בתחילת הדרך (מטולה) למכונית יש מיכל דלק מלא.

<u>הבעיה</u>: למצוא <u>סדרת תדלוקים</u> כזאת שהנסיעה היא הזולה ביותר האפשרית, אם קיימת.

הגדרה פורמלית של הבעיה:

<u>קלט</u>: $m, n, f, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ חיוביים כך ש $n < m$, וגם $0 < x_1 < \cdots < x_k < m$.

<u>פתרון</u>: $x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}, f_{i_1}, \dots, f_{i_\ell} \in \mathbb{R}$ חיוביים כך שמתקיים:

- $x_{i_1} < \cdots < x_{i_\ell}$.
- $x_{i_j} \in \{x_1, \dots, x_k\}$ לכל $1 \le j \le \ell$.
- לכל $1 \le j \le \ell$, $0 \le f - \frac{f}{n} * x_{i_j} + \sum_{1 \le t < j} f_{i_t}$ (כלומר מד הדלק תמיד אי שלילי כשנגיע לתדלק) וגם $f - \frac{f}{n} * x_{i_j} + \sum_{1 \le t \le j} f_{i_t} \le f$ (לא תדלקנו מעל הכמות של המיכל).
- $0 \le f - \frac{f}{n} * m + \sum_{1 \le t \le \ell} f_{i_t}$ (מד הדלק אי שלילי כשהגענו ליעד).

<u>פתרון אופטימלי</u>: פתרון $x_{i_1} < \cdots < x_{i_\ell}$ ו $f_{i_1}, \dots, f_{i_\ell}$, (כאשר x_{i_j} זו התחנה ה-j במסלול בה נמלא דלק, וf_{i_j} זו כמות הדלק שנמלא בה) כך ש $\sum_{1 \le j \le \ell} (f_{i_j} p + c)$ מינימלי.

א. בנו אלגוריתם חמדן שיפתור את הבעיה בצורה אופטימאלית.
ב. נסחו טענה לאופטימליות.
ג. הוכיחו את הטענה שניסחתם.
ד. כתבו מימוש יעיל ככל האפשר לאלגוריתם וניתחו זמן ריצה.
ה. לאחר פתיחת השוק לתחרות חופשית, כל תחנת דלק גובה מחיר שונה על הדלק p_i.
הראו דוגמא שבה האלגוריתם מסעיף א' אינו יוצר פתרון אופטימלי. יש להראות את ריצת האלגוריתם על הקלט ואת הפלט שלו, פתרון אופטימלי לדוגמא וערכו של פתרון אופטימלי.

בהצלחה!