תורת החישוביות — תרגול 6
אי־דטרמיניזם, ותרגילים מחלק א'

הגדרה

מכונת טיורינג א"ד הינה מכונת טיורינג שפונקציית המעברים שלה מוגדרת באופן הבא:

δ:Q\F×Γ $\to (Q \times \Gamma \times \{R, L, S\})^2$. כלומר, בכל שלב יש למכונה שתי אפשרויות כיצד להתקדם.

נוח לחשוב על החישוב שמכונה כזאת מבצעת כ**עץ חישוב בינארי**, שבו השורש מייצג את הקונפיגורציה ההתחלתית של המכונה וכל מסלול מהשורש לעלה מייצג חישוב אפשרי של המכונה עד הגעה למצב למסיים. נשים לב שיכולים להיות מסלולים אין־סופיים (עץ החישוב הוא לאו דווקא סופי).

אנו נדבר על מ"ט א"ד בהקשר של קבלת שפות, ולכן צריך להגדיר מתי מכונה כזאת מקבלת קלט. נגדיר שמ"ט א"ד **מקבלת את הקלט** w אם קיים מסלול חישוב שמסתיים במצב מקבל. נגדיר את השפה $L(M)$ של מ"ט א"ד M להיות אוסף הקלטים אותו היא מקבלת.

תרגילון

נתבונן במ"ט הא"ד M' שעל קלט $(\langle M \rangle, x)$:

מנחשת מספר n ומריצה את M על x למשך n צעדים. אם M עצרה אז M' עוצרת ב־q_{acc}, ואחרת עוצרת ב־q_{rej}.

1. כיצד מנחשים מספר על ידי אי־דטרמיניזם? מנחשים ביט־ביט, ואחרי כל ביט מנחשים האם לסיים עם הניחוש או לא.
2. כיצד מריצים מכונה דטרמיניסטית (או כל תהליך דטרמיניסטי אחר) על ידי מכונה א"ד?

(א) שתי התוצאות האפשריות של פונקציית המעברים לא חייבות להיות שונות אחת מהשניה. ככלל, ניתן לראות כל מכונה דטרמיניסטית כמכונה א"ד שבה שתי התוצאות האפשריות של פונקציית המעברים תמיד זהות.

(ב) ניתן להגדיר שהמכונה הא"ד מנחשת בכל שלב האם להמשיך חישוב של המכונה הדטרמיניסטית או לעבור למצב דוחה. בתרגילים מסויימים, אפשרות זאת עדיפה. (למשל, בהנתן מכונה דטרמיניסטית M צור מכונה א"ד בעלת אותה שפה שיש לה לכל היותר מסלול מקבל אחד לכל קלט.)

3. מה השפה ש־M' מקבלת? אם M עוצרת על x אז קיים ניחוש שיוביל למצב מקבל ולכן M' מקבלת. אם M לא עוצרת על x אז שום ניחוש לא יוביל למצב מקבל ולכן M' לא תקבל. לכן $L(M) = \mathrm{HP}$.

בעצם נתנו למכונה את היכולת "לנחש" ואם קיים ניחוש כלשהו שהוא "נכון" אז אנו אומרים שהיא מקבלת. שימו לב שריצה של המכונה כוללת מסלול חישוב יחיד, המכונה לא עוברת סידרתית על כל הניחושים האפשריים אלא מנחשת ניחוש יחיד ורצה לפיו. בהגדרת קבלה של המכונה אנו מסתכלים על כל הריצות האפשריות ובודקים אם קיימת ריצה אחת שהגיע למצב מקבל.

בתרגילון, מדוע אמרנו שאם M לא עוצרת על x אז M' לא מקבלת, למה לא אמרנו שהיא דוחה? נשים לב שלא הגדרנו את המושג של דחייה במכונה א"ד. נגדיר שמ"ט א"ד דוחה קלט w אם **כל** מסלול חישוב שלה על w **מסתיים** במצב דוחה. בנוסף נגדיר שמ"ט א"ד **מכריעה** שפה L אם היא מקבלת את L וכל מסלול חישוב שלה הוא סופי.

האם M' מכריעה את HP? לא! התהליך שתיארנו להגרלת מספר n מוביל למסלול חישוב אינסופי (זה שבו הניחוש לא עוצר) ולכן לא כל מסלולי החישוב סופיים.

שימו לב: לא הגדרנו מהי הפונקציה שמכונה א"ד מחשבת ואכן אין הגדרה קאנונית למושג זה. מאותה סיבה לא נדבר על רדוקציות אי־דטרמיניסטיות.

שקילות ל־RE

ניתן לחשוב על מחלקת השפות שניתנות לקבלה על ידי מכונה א"ד, ואנחנו נראה שמחלקה זאת שווה ל־RE. מחלקת השפות הניתנות להכרעה על ידי מכונה א"ד שווה ל־R, ההוכחה זהה.

כיוון אחד ברור: ניתן לחשוב על כל מכונה דטרמיניסטית כמכונה א"ד ולכן אם שפה L מתקבלת על ידי מכונה דטרמיניסטית אז קיימת מכונה א"ד שקולה לה, המקבלת את L.

עכשיו נראה את הכיוון השני: תהי L שפה ו־M_L מ"ט א"ד שמקבלת את L. נבנה M דטרמיניסטית שתקבל את L.

אינטואיטיבית, מה שנרצה לעשות יהיה לחפש בעץ החישוב של M_L אחרי מצב מקבל. DFS בעץ החישוב עלול לא להסתיים גם אם קיים מצב מקבל ולכן נרצה לעשות BFS בעץ (כי אם קיים מצב מקבל אז הוא בעומק סופי).

נשים לב שניתן למדל את הבחירות האי־דטרמיניסטיות של מכונה א"ד כמחרוזות בינארית שבה כל ביט מייצג את הבחירה הא"ד המתאימה (הביט הראשון מייצג את המעבר הראשון בפונקצית המעברים וכו').

M תהיה מכונה דטרמיניסטית תלת־סרטית. בסרט הראשון היא תעבור על כל המילים בסדר לקסיקוגרפי. לכל מילה w_i, היא תסמלץ בסרט השני את ריצת M_L עם מסלול החישוב המיוצג על ידי w_i. אם M_L הגיעה למצב מקבל אז M תקבל, אחרת היא תשחזר את הקלט (שנשמר בינתיים בסרט השלישי) לסרט השני ותעבור למילה הבאה בסדר הלקסיקוגרפי בסרט הראשון.

אם קיים מסלול מקבל, אז הוא מיוצג על ידי מחרוזת סופית כלשהי. מתישהו M תסמלץ ריצה עם מחרוזת זאת ולכן תקבל.

אם לא קיים מסלול מקבל אז M לעולם לא תקבל (כי תנאי הקבלה היחיד שלה הוא הגעה למצב מקבל של M_L).

נשוב לדון במ"ט א"ד במהשך הקורס, כשנדבר על מ"ט מוגבלות חישובית.

דוגמא

בתרגול 3 ראינו את שפת קידודי המכונות שיש לפונקציה אותה הן מחשבות נקודת שבת - $L = \{\langle M \rangle \mid$ קיים x כך ש־$f_M(x) = x\}$, עליה ראינו שהיא ב־RE באמצעות הרצה מבוקרת. נראה כיצד ניתן להראות כי היא ב־RE בקלות באמצעות מכונה א"ד. נגדיר מ"ט א"ד M_L שעל קלט $\langle M \rangle$, מנחשת $x \in \{0,1\}^*$, מריצה את M על x, ומקבלת אם $f_M(x) = x$ ודוחה אחרת.

נוכיח כי M_Lאכן מקבלת את השפה L:

- אם $\langle M \rangle \in L$ אז קיים x שעבורו $f_M(x) = x$, ובמסלול החישוב המתאים לניחוש של המחרוזת x, M_L תקבל את M, ולכן $\langle M \rangle \in L(M_L)$.
- אם $\langle M \rangle \notin L$ אז לכל x מתקיים $f_M(x) \neq x$, ולכן לכל מסלול חישוב, M_L לא תקבל את $\langle M \rangle$, כלומר $\langle M \rangle \notin L(M_L)$

נשים לב כי הניחוש של x במקרה זה, שקול למעשה להרצה של M על כל הקלטים במקביל, שכן כל קלט x מגדיר מסלול חישוב, ומספיק שאחד מבין המסלולים הללו יהיה מקבל, כלומר אחד מבין ה־x־ים יהווה נקודת שבת של f_M.