תורת החישוביות – תרגול 4
רדוקציות חישוביות

מבוא

רדוקציה היא הכלי שבו אנו משתמשים כדי לתרגם בעיה חישובית אחת לבעיה חישובית אחרת.

פורמלית, רדוקציה של השפה L_1 לשפה L_2 היא פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שהיא:

1. מלאה.
2. ניתנת לחישוב.
3. תקפה: $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$.

שימו לב: f מוגדרת **לכל** x, ולא רק למילים ששייכות ל־L_1. כמו כן אין שום הכרח ש־f "תתפוס" את כל L_2 – ייתכן מאוד שתמונת f על L_1 תהיה קבוצה מצומצמת בהרבה מכל L_2.

אם קיימת רדוקציה של L_1 ל־L_2 אומרים ש־L_1 ניתנת לרדוקציה אל L_2 ומסמנים זאת $L_1 \leq L_2$.

חשיבותן של רדוקציות נובעת ממשפט הרדוקציה:

- אם $L_2 \in \mathrm{R}$ ו־$L_1 \leq L_2$ אז גם $L_1 \in \mathrm{R}$. בדומה, אם $L_2 \in \mathrm{RE}$ ו־$L_1 \leq L_2$ אז גם $L_1 \in \mathrm{RE}$.

הוכחת המשפט פשוטה: בהינתן מכונה M_2 עבור L_2 ניתן לבנות מכונה M_1 עבור L_1 שעל קלט x ראשית מחשבת את $f(x)$ (כאן נדרש ש־f תהיה מלאה אחרת שלב זה עשוי שלא להסתיים, וכמובן נדרש ש־f תהיה ניתנת לחישוב) ושנית מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה (כאן נדרש ש־f תהיה תקפה).

נציג ללא הוכחה מספר תכונות של רדוקציות (מומלץ כתרגיל למצוא את ההוכחה):

1. לכל שפה L מתקיים $L \leq L$ (רדוקציה היא יחס רפלקסיבי).
2. אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_2 \leq L_3$ אז $L_1 \leq L_3$ (רדוקציה היא יחס טרנזיטיבי).
3. רדוקציה איננה יחס סימטרי: כך למשל $\mathrm{HP} \leq \Sigma^*$ אך לא $\Sigma^* \leq \mathrm{HP}$ (אחרת ממשפט הרדוקציה היינו מקבלים ש־$\mathrm{HP} \in \mathrm{R}$).
4. אם $L_1 \leq L_2$ אז $\overline{L_1} \leq \overline{L_2}$.

השימוש העיקרי שלנו ברדוקציות הוא על מנת להראות ששפות מסוימות **אינן** ב־R או RE. לשם כך אנו הופכים את משפט הרדוקציה על פיו:

- אם $L_1 \notin \mathrm{R}$ ו־$L_1 \leq L_2$ אז $L_2 \notin \mathrm{R}$. בדומה, אם $L_1 \notin \mathrm{RE}$ ו־$L_1 \leq L_2$ אז $L_2 \notin \mathrm{RE}$.

תרגילים

תרגיל 1

יש להוכיח כי השפה $L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$ אינה ב־R.

פתרון: נוכיח כי $\mathrm{HP} \leq L_{\geq 3}$. ראינו כי $\mathrm{HP} \notin \mathrm{R}$, ובעזרת משפט הרדוקציה נסיק כי $L_{\geq 3} \notin \mathrm{R}$, כנדרש.

הרדוקציה תוגדר בתור $f(\langle M \rangle, x) = \langle M_x \rangle$ כך ש־M_x היא מכונה שעל כל קלט w:

1. מריצה את M על x (**ומתעלמת** מהקלט w שלה).
2. אם M עצרה, מקבלת.

באופן זה גרמנו לכך שהתשובה לשאלה "מהי השפה ש־M_x מקבלת?" תהיה תלויה בתשובה לשאלה "האם M עוצרת על x?" בפרט:

$$L\left(M_{x}\right) = \begin{cases} \Sigma^{*} & \left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\in\mathrm{HP}\\ \emptyset & \left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\notin\mathrm{HP} \end{cases}$$

בבירור הרדוקציה שהגדרנו מלאה וניתנת לחישוב – ייצור M_x מתוך $\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)$ הוא פעולת קומפילציה פשוטה. הנקודה המרכזית כאן היא שייצור M_x מתוך $\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)$ רק דורש מניפולציה סינטקטית של המחרוזות $\left\langle M\right\rangle$ ו־x – איננו צריכים, למשל, להריץ את M על x או כל פעולה חישובית דומה שעשויה שלא להסתיים.

תקפות הרדוקציה פשוטה להוכחה. למעשה, כל שנחוץ לנו הוא ש־$|\Sigma^{*}|\geq3$ ו־$|\emptyset|<3$:

$$\begin{gathered}\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\in\mathrm{HP}\\ \Downarrow\\ L\left(M_{x}\right)=\Sigma^{*}\\ \Downarrow\\ \left|L\left(M_{x}\right)\right|\geq3\\ \Downarrow\\ \left\langle M_{x}\right\rangle \in L_{\geq3}\\ \Downarrow\\ f\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\in L_{\geq3}\end{gathered}$$

ובכיוון השני:

$$\begin{gathered}\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\notin\mathrm{HP}\\ \Downarrow\\ L\left(M_{x}\right)=\emptyset\\ \Downarrow\\ \left|L\left(M_{x}\right)\right|<3\\ \Downarrow\\ \left\langle M_{x}\right\rangle \notin L_{\geq3}\\ \Downarrow\\ f\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\notin L_{\geq3}\end{gathered}$$

תרגיל 2

נעבור כעת לרדוקציה דומה באופיה אך מחוכמת יותר, שלרוב משתמשים בה כדי להראות שמשהו אינו שייך אפילו ל־RE:

$L_{\infty}=\left\{ \left\langle M\right\rangle \mid\ \left|L\left(M\right)\right|=\infty\right\}$.

ניתן להשתמש בדיוק באותה רדוקציה כמו בתרגיל 1 כדי להוכיח ש־$L_{\infty}\notin\mathrm{R}$, אך אנו רוצים להוכיח תוצאה חזקה יותר – ש־$L_{\infty}\notin\mathrm{RE}$ – ולשם כך עלינו להראות רדוקציה משפה שאיננה ב־RE, כדוגמת $\overline{\mathrm{HP}}$.

נראה אם כן $\overline{\mathrm{HP}}\leq L_{\infty}$. כאן עלינו לבנות מכונה כך שאם M **אינה** עוצרת על x, אז שפת המכונה אינסופית. לצורך כך המכונה שלנו כן תתייחס לקלט w שלה באופן מחוכם.

הרדוקציה תוגדר בתור $f\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)=\left\langle M_{x}\right\rangle$ כך ש־M_x היא מכונה שעל כל קלט w:

1. מריצה את M על x למשך $|w|$ צעדים.
2. אם M עצרה על x – דוחה. אחרת – מקבלת.

האבחנה הבסיסית כאן היא שאם M עוצרת על x, היא עוצרת אחרי מספר קבוע k של צעדים שאינו תלוי ב־w, ולכן M_x תדחה כל קלט w המקיים $|w| \geq k$.

מכאן שאם $(\langle M \rangle, x) \in \overline{\mathrm{HP}}$ אז $|L(M_x)| = |\Sigma^*| = \infty$ ואחרת $|L(M_x)| < \infty$, מה שמראה את תקפות הרדוקציה.

תרגיל 3

עד כה עסקנו בשפות מהצורה "כל המכונות M כך ש־$L(M)$ מקיימת תכונה מסוימת". כעת אנו רוצים לעבור לשפה מהצורה "כל המכונות M כך שהמכונה M מקיימת תכונה מסוימת", שהן לרוב מאתגרות יותר (ולעתים שפה שמוגדרת באמצעות תכונה שנראית מסובכת היא למעשה ב־R).

נגדיר $L = \{\langle M \rangle \mid$ המכונה M בריצתה על ε מבצעת שלושה צעדים רצופים ימינה$\}$

לא קשה להראות כי $L \in \mathrm{RE}$. נראה כי $L \notin \mathrm{R}$ באמצעות רדוקציה $L_\varepsilon \leq L$.

הרדוקציה תוגדר כך $f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle$ כך ש־M' זהה ל־M פרט לשינויים הבאים:

1. לכל $q \in Q$ נוסיף מצב q^R ומעברים $\delta(q^R, \sigma) = (q, \sigma, R)$ לכל $\sigma \in \Gamma$.
2. לכל מעבר $\delta(q, \sigma) = (p, \tau, R)$, נחליף אותו במעבר $\delta(q, \sigma) = (p^R, \tau, S)$.
3. q_{acc} יוצא מקבוצת המצבים הסופיים, ונגדיר $\delta(q_{acc}, \sigma) = (q_{acc}, \sigma, R)$.

פשר השינויים הללו: כל עוד M' מריצה את M היא אינה מסוגלת לבצע שלושה צעדים רצופים ימינה (שכן לפני כל צעד ימינה היא נעמדת לרגע במקום). אם ריצת M הסתיימה במצב מקבל, אז M' הולכת אינסוף צעדים ימינה, ובפרט שלושה.

אם $\langle M \rangle \in L_\varepsilon$ אז M בריצתה על ε מקבלת, ולכן M' בריצתה על ε מבצעת שלושה צעדים רצופים ימינה, ואפילו אינסוף (שימו לב ש־M' **אינה עוצרת** ואין בעיה עם זה).

אם $\langle M \rangle \notin L_\varepsilon$ אז M' אינה מבצעת שלושה צעדים רצופים ימינה, שכן במהלך ריצת M היא ודאי שאינה עושה זאת, ואחרי ש־M עוצרת כך גם M' (כי q_{rej} נותר מצב סופי).