תורת החישוביות – תרגול מספר 9
גרפים המילטוניים

מבוא

מעגל המילטוני בגרף G הוא מעגל שעובר בכל צמתי G בדיוק פעם אחת. מסלול המילטוני בגרף G הוא מסלול שעובר בכל צמתי G בדיוק פעם אחת. G יכול להיות מכוון או לא מכוון, וכך אנו מקבלים ארבע שפות שונות הקשורות להמילטוניות של גרף:

$\mathrm{HC} = \{G|$ בגרף הלא מכוון G יש מעגל המילטוני$\}$

$\mathrm{HL} = \{G|$ בגרף הלא מכוון G יש מסלול המילטוני$\}$

$\mathrm{DHC} = \{G|$ בגרף המכוון G יש מעגל המילטוני$\}$

$\mathrm{DHL} = \{G|$ בגרף המכוון G יש מסלול המילטוני$\}$

מטרתנו היא להיווכח בכך שכל השפות הללו הן NP־שלמות.

נשים לב כי בעיה דומה מאוד – האם בגרף קשיר G יש מעגל/מסלול שעובר בכל **הקשתות** פעם אחת בדיוק היא ב־P; מעגל/מסלול שכזה מכונה "אוילריאני", ואוילר מצא קריטריון יעיל לבדיקתו: בגרף לא מכוון יש מעגל אוילריאני אם ורק אם מספר הצמתים בעלי דרגה אי זוגית הוא 0, ומסלול אוילריאני אם ורק אם יש בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי זוגית (והמסלול יתחיל ויסתיים בהם). זהו תרגיל נחמד למצוא קריטריון דומה עבור גרפים מכוונים.

תזכורת

בהינתן שפה L, נאמר כי L היא שפה NP־קשה, אם לכל $L' \in NP$ מתקיים - $L' \leq_p L$. כלומר, L קשה לפחות כמו כל שפה ב־NP.

אם בנוסף מתקים כי $L \in NP$, נאמר כי L היא NP־שלמה.

שרשרת הרדוקציות

ברור כי כל השפות שלעיל שייכות ל־NP: מסלול/מעגל המילטוני בגרף בעל n צמתים ניתן לתיאור באמצעות פרמוטציה על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ (שמתארת את סדר הביקור בצמתים), ועל כן מכונה אי דטרמיניסטית עבור שפות אלו מנחשת פרמוטיציה ואז בודקת שיש קשת בין כל שני צמתים סמוכים בפרמוטציה, בהתאם לסוג הבעיה הנבדקת (אם הגרף מכוון יש לבדוק שהקשת בכיוון המתאים; אם בודקים קיום של מעגל המילטוני יש לבדוק גם קיום של קשת מהצומת האחרון בפרמוטציה לצומת הראשון בה).

ניתן להוכיח את השייכות ל־NP גם באמצעות יחס מתאים: $\{(G,C)\ |G$ מכוון \ לא מכוון C מעגל\מסלול המילטוני בגרף המכוון$\}$.

כדי להראות כי השפות הן NP־שלמות נשתמש בשרשרת הרדוקציות הבאה:

$$\mathrm{SAT} \leq_p \mathrm{3SAT} \leq_p \mathrm{VC} \leq_p \mathrm{DHC} \leq_p \mathrm{HC} \leq_p \mathrm{HL} \leq_p \mathrm{DHL}$$

היותה של SAT שפה NP־שלמה הוא תוכן משפט קוק, שיוכח בהרצאות. הרדוקציה $\mathrm{SAT} \leq_p \mathrm{3SAT}$ תוצג בתרגול הבא, והרדוקציה $\mathrm{3SAT} \leq_p \mathrm{VC}$ תוצג בהרצאה.

נוכיח את 4 הרדוקציות הנותרות, בסדר הפוך.

$\mathbf{HL} \leq_p \mathbf{DHL}$

המעבר מגרף לא מכוון לגרף מכוון הוא פשוט יחסית: פשוט מחליפים כל קשת לא מכוונת (u,v) בזוג הקשתות המכוונות $v \to u$ ו־$u \to v$.

תקפות הרדוקציה נובעת מכך שיש התאמה חח"ע ועל בין מסלולים בגרף הישן ומסלולים בגרף החדש. הרדוקציה בוודאי פולינומית – כל שנדרש הוא עיבוד קל של הגרף.

$\mathbf{HC} \leq_p \mathbf{HL}$

אם ב־G יש מעגל המילטוני ודאי שיש בו גם מסלול המילטוני, אך ההפך אינו נכון, ולכן רדוקציה שפשוט אינה משנה את G לא תעבוד. צריך להבטיח שקיום מסלול המילטוני בגרף החדש מכריח קיום מעגל המילטוני בגרף המקורי.

הפתרון הוא על ידי בחירת צומת שרירותי מהגרף, v, ו"קריעה" שלו לשני צמתים v_1, v_2 שמחוברים בדיוק לאותם צמתים כמו v המקורי, אך הם עצמם אינם מחוברים בקשת. כעת נוסיף שני צמתים נוספים לגרף: v_{start} ו־v_{end} ואת הקשתות $(v_2, v_{end}), (v_{start}, v_1)$.

אם בגרף המקורי היה מעגל המילטוני $v \to u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_k \to v$ אז בגרף החדש יש את המסלול ההמילטוני $v_{start} \to v_1 \to u_1 \to \ldots \to u_k \to v_2 \to v_{end}$.

אם בגרף החדש יש מסלול המילטוני, אז **בהכרח** המסלול חייב להתחיל ולהסתיים בצמתים v_{start}, v_{end} כי אלו צמתים מדרגה 1, ולכן מרגע שנכנסים אליהם – לא ניתן לצאת שוב. בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח שהמסלול מתחיל ב־v_{start} ונגמר ב־v_{end} ואז הוא חייב להיות מהצורה $v_{start} \to v_1 \to u_1 \to \ldots \to u_k \to v_2 \to v_{end}$ ולכן מקיומו נובע קיום המעגל ההמילטוני $v \to u_1 \to \ldots \to u_k \to v$ בגרף המקורי.

$\mathbf{DHC} \leq_p \mathbf{HC}$

באופן נאיבי אפשר היה, בהינתן הגרף המכוון G, פשוט לבנות ממנו גרף לא מכוון G' שזהה לו פרט לכך שהורדנו את כיווני הקשתות ו"לקוות לטוב". אלא שכך עשויים להיווצר מעגלים שלא היו קודם. אם כן, אנו רוצים לבנות את G' באופן שיכריח מעגל המילטוני G' "לציית" לכיווני הקשתות המקוריים.

אפשר לנסות משהו כזה: כל צומת $v \in V$ נפצל לזוג צמתים $v_{in}, v_{out} \in V'$ כך שאם $u \to v$ הייתה קשת בגרף המקורי אז בגרף החדש תהיה קשת (u_{out}, v_{in}), ואם $u \to v$ הייתה קשת בגרף המקורית אז בגרף החדש תהיה הקשת (v_{out}, u_{in}). כמו כן תהיה קשת (u_{in}, u_{out}).

לרוע המזל הבניה נכשלת שכן אף אחד לא מכריח את המעגל ההמילטוני להשתמש בקשתות (u_{in}, u_{out}). הוא יכול גם להיכנס ל־u_{in} דרך v_{out} כלשהו ואז לצאת ממנו אל עבר w_{out} אחר, ולבקר ב־u_{out} אי שם בהמשך. בצורה הזו עשויים להתקבל מעגלים המילטוניים גם אם קודם לא היו כאלו. הפתרון הוא לכפות את המעבר מ־u_{in} אל u_{out} באמצעות הוספת צומת ביניים u_{middle} כך שבמקום הקשת (u_{in}, u_{out}) יהיו זוג הקשתות $(u_{in}, u_{middle}), (u_{middle}, u_{out})$. מכיוון שמעגל המילטוני **חייב** לבקר בכל הצמתים, הוא חייב לבקר ב־u_{middle}. יותר מכך – אם המעגל נכנס אל u_{in} הוא חייב לעבור ממנו אל u_{middle}, אחרת בהמשך הדרך, כשהמעגל יגיע אל u_{middle} הוא יהיה חייב לעשות זאת דרך u_{out} (כי u_{in} כבר "נשרף") ואז לא תהיה יציאה מ־u_{middle} והמעגל ייתקע.

אם כן, הצורה הכללית של מעגל המילטוני ב־G' היא $\ldots \to u_{in} \to u_{middle} \to u_{out} \to v_{in} \to v_{middle} \to v_{out} \to \ldots$ (ייתכן שהמעגל ילך גם בכיוון ההפוך, אך מכיוון שהגרף אינו מכוון ינבע מכך קיום של מעגל "בכיוון הנכון"). מכאן קל לראות שיש מעגל המילטוני ב־G (המכוון) אם ורק אם יש מעגל המילטוני ב־G' (הלא מכוון): כדי להפוך מעגל המילטוני ב־G למעגל המילטוני ב־G' פשוט "מרחיבים" כל צומת v לשלשה $v_{in} \to v_{middle} \to v_{out}$, וכדי להפוך מעגל המילטוני ב־G' למעגל המילטוני ב־G פשוט "מכווצים" כל שלשה מהצורה $v_{in} \to v_{middle} \to v_{out}$ חזרה לצומת v המקורי.

$\mathbf{VC} \leq_p \mathbf{DHC}$

זוהי רדוקציה מחוכמת למדי. הרעיון הבסיסי הוא, בהינתן קלט $G = (V,E)$ ו־k טבעי, לבנות גרף חדש $G_D = (V_D, E_D)$ שבו כל קשת $(u,v) \in E$ מיוצגת על ידי תת־רכיב בן ארבע צמתים המחולק לשני חלקים (אחד המתאים ל־u והשני המתאים ל־v) כך שבביקור בתת־הרכיב אפשר "לשרוף" את שני החלקים בו זמנית או רק אחד מהם, כך שניתן יהיה לבקר בתת־הרכיב שוב ולשרוף את החלק השני. בנוסף, ישנם בדיוק k צמתי עזר $a_1, \ldots, a_k$ שמהם ניתן לצאת לטיול בגרף ששורף חלק מתתי־הרכיבים של הקשתות – בדיוק כאלו שמתאימות לאחד מצמתי הגרף. מכיוון שיש בדיוק k צמתי עזר שכאלו, המעגל יותאם בדיוק לכיסוי מגודל k.

פורמלית הבניה פועלת כך:

$$V_D = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \bigcup_{e=(u,v)\in E} \{[u,e,0], [u,e,1], [v,e,0], [v,e,1]\}.$$

דהיינו, לכל קשת $e = (u,v)$ יש לנו את ארבעת הצמתים $[u,e,0], [u,e,1], [v,e,0], [v,e,1]$. הצמתים מחוברים אחד לשני בקשתות באופן הבא:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ [u,e,0] & \leftrightarrow & [v,e,0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [u,e,1] & \leftrightarrow & [v,e,1] \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

כלומר, אפשר להיכנס לתוך הרכיב או דרך $[u,e,0]$ או דרך $[v,e,0]$, ולצאת דרך $[u,e,1]$ או דרך $[v,e,1]$. מרגע שנכנסים דרך הכניסה המתאימה לצומת u אחד משניים: או שמבקרים בכל ארבעת צמתי הרכיב, או שמבקרים רק בשני הצמתים המתאימים ל־u (אחרת, מובטח שלא יהיה מעגל המילטוני בגרף).

כעת נעבור לשאלה איך הרכיבים מחוברים זה לזה. לכל צומת $u \in V$ נמספר את הקשתות שנוגעות בו: $e_1^u, e_2^u, \ldots, e_t^u$. נגדיר את הקשתות הבאות ב־E_D:

$$\begin{array}{ccc} [u,e_1^u,1] & \rightarrow & [u,e_2^u,0] \\ [u,e_2^u,1] & \rightarrow & [u,e_3^u,0] \\ & \vdots & \\ \left[u,e_{t-1}^u,1\right] & \rightarrow & [u,e_t^u,0] \end{array}$$

כלומר, הרכיבים של הקשתות $e_1,\ldots,e_t$ מושחלים על מעין "שרשרת" שמתאימה ל־u. נשים לב **שבו זמנית** הרכיבים הללו מושחלים על שרשרות שמתאימות לצמתים האחרים שאליהם מחוברות הקשתות - כל רכיב מושחל על שתי שרשרות בדיוק.

נותר לקבוע איך נראית הכניסה והיציאה לכל שרשרת. לכל a_i נוסיף את הקשתות $a_i \rightarrow [u,e_1^u,0]$ ו־$[u,e_t^u,1] \rightarrow a_i$.

זוהי הרדוקציה כולה. נותר להיווכח בנכונותה. ראשית, אם בגרף G יש כיסוי בצמתים $u_1,\ldots,u_k$ אז המעגל ההמילטוני ייבנה כך: מהצומת a_i עוברים לצומת $[u_i,e_1^{u_i},0]$; משם נעים על השרשרת. בכל פעם שבה מגיעים לרכיב המתאים לקשת e **ששני** צמתיה שייכים לכיסוי $u_1,\ldots,u_k$ "שורפים" רק את החלק שבה שמתאים ל־u_i, ואילו אם מגיעים לקשת שרק אחד מצמתיה שייך לכיסוי "שורפים" את כולה. בסופו של דבר מבצעים את המעבר מ־$[u_i,e_t^{u_i},1]$ אל a_{i+1} (ובסופו של דבר סוגרים את המעגל על ידי חזרה ל־a_1). באופן זה אכן עוברים על כל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת, שכן $u_1,\ldots,u_k$ היה כיסוי ולכן במסלול "שורפים" את כל רכיבי הקשתות שבגרף (ולא נתקעים בגלל האופן החכם שבו בחרנו "לשרוף" רק באופן חלקי את הרכיבים שמשותפים לשני צמתים שבכיסוי).

בכיוון השני האבחנה המרכזית היא שמעגל המילטוני בגרף חייב להיות מהצורה שתיארנו לעיל (הגמישות היחידה היא ביכולת לצאת מרכיב של קשת שלא דרך הצומת שבה נכנסו אליו, אך במקרה כזה בבירור נותר צומת שלא ניתן לבקר בו אף פעם), ולכן הצמתים $u_1,\ldots,u_k$ שאל השרשראות שלהם המסלול עובר כשהוא עוזב את הצמתים $a_1,\ldots,a_k$ יהוו כיסוי בגרף. נשים לב כי ייתכן שהמסלול לא יבקר בצמתים $a_1,\ldots,a_k$ לפי הסדר אך אין לכך חשיבות של ממש.