תורת החישוביות (236343) — מועד ב'
חורף תשפ"ב

27.2.2022

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: נטע דפני (אחראית), דור קצלניק, עידו רפאל, קיארה מיוחס, ויקטור קולובוב.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- משך הבחינה — שלוש שעות. בבחינה יש 4 שאלות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- מותר להשתמש בעט בלבד.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים, אלא אם נדרשתם לכך במפורש.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה, בתרגול או בתרגילי הבית, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע/ת".

בהצלחה!

1 סיווג טענות (35 נק')

עבור הטענות הבאות קבעו האם הן נכונות, שגויות, או שקולות לבעיה פתוחה מוכרת. (בהוכחת שקילות של בעיות יש להראות שני כיוונים. ניקוד חלקי יינתן על הוכחת כיוון אחד.)

1. לכל $L \in \mathrm{RE}$ קיימת מ"ט M כך שלכל $x \in \Sigma^*$: אם $x \in L$ אז M מקבלת את x, ואם $x \notin L$ אז M לא עוצרת על x. (5 נק')

2. השפה $L_2 = \{(x,n) \mid K(x) > n\}$ שייכת ל־RE, כאשר K היא סיבוכיות קולמוגורוב. (10 נק')

3. השפה $L_3 = \{\varphi \mid \varphi \in \mathrm{SAT}$ ויש לו השמה מספקת שנותנת T למספר אי־זוגי של משתנים בפסוק$\}$ שייכת ל־P. (10 נק')

4. קיימת מ"ט פולינומית שעל קלט $(x_1,...,x_n)$ (מספרים טבעיים בייצוג בינארי) פולטת $I \subseteq \{1,...,n\}$ כך ש־$\Sigma_{i\in I} x_i = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i$
(תת קבוצה שסכומה רבע מהסכום הכולל), או "אין" אם אין כזו. (10 נק')

2 וריאציה על משפט רייס (10 נק')

<u>תזכורת</u>: תכונה של שפות ב־RE היא $S \subseteq \mathrm{RE}$. S נקראת טריוויאלית אם $S \in \{\emptyset, \mathrm{RE}\}$.

בהנתן מ"ט M, נגדיר: $H(M) = \{x \in \Sigma^* \mid$ **<u>עוצרת</u>** על x $M\}$.

בהנתן תכונה S של שפות ב־RE, נגדיר: $H_S = \{\langle M \rangle \mid H(M) \in S\}$.

הוכיחו כי אם S אינה טריוויאלית, אז $H_S \notin \mathrm{R}$.

3 קבוצות שליטה (25 נק')

<u>הגדרה:</u> בהנתן גרף **מכוון** $G=(V,E)$, קבוצה $U\subseteq V$ היא **קבוצת שליטה** בגרף אם לכל $v\in V\setminus U$ קיים צומת $u\in U$ כך ש־$u\to v\in E$.
<u>במילים:</u> לכל צומת שלא בקבוצת השליטה נכנסת קשת שיוצאת מצומת ששייך לקבוצת השליטה.

דוגמה: בגרף שקשתותיו הן $v_1\to v_2, v_2\to v_3, v_1\to v_3$, הקבוצה $\{v_1\}$ היא קבוצת שליטה.

נגדיר את השפה $\mathrm{CS}=\{(G,k)\mid$ בגרף G קיימת קבוצת שליטה מגודל לכל היותר $k\}$

1. הראו <u>רדוקציה פולינומית מפורשת</u> מהשפה CS לשפה SC (SET COVER). אין צורך להוכיח פולינומיות ותקפות. (5 נק')

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או לא. הוכיחו את תשובתכם.

2. $L_2 = \{G \mid 3$ קיימת קבוצת שליטה מגודל לכל היותר ב־$G\}$. (5 נק')

3. $L_3 = \mathrm{CS}$ (השפה שהוגדרה בשאלה). (5 נק')

תהי $f_{\text{CS}}(G)$ – הגודל המינימלי של קבוצת שליטה ב־G.

בהנחה ש־$\text{P} \neq \text{NP}$, הוכיחו/הפריכו:

4. קיים ל־f_{CS} קירוב 10־חיבורי יעיל. (5 נק')

5. קיים ל־f_{CS} קירוב $O\left(\log n\right)$־כפלי יעיל. (5 נק')

4 פונקציות ספירה (30 נק')

עבור מ"ט בינארית M, נגדיר $\text{count}\left(M,n\right)=\left|L\left(M\right)\cap\{0,1\}^{n}\right|$ (מספר המילים ב־$L\left(M\right)$ באורך n).

נאמר ש־$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא **פונקציית ספירה** אם קיימת מ"ט בינארית M כך שלכל n, $\text{count}\left(M,n\right)=f\left(n\right)$.

נאמר ש־f היא פונקציית ספירה **יעילה** אם קיימת M כנ"ל שהיא פולינומית.

<u>לדוגמה</u>: הפונקציה $f\left(n\right)=2^{n}$ היא פונקציית ספירה יעילה, כי M שמקבלת מיד כל קלט עונה על הדרישות.

<u>הערה</u>: כל המספרים בקלט או בפלט בשאלה זו מיוצגים באופן **בינארי**.

בהנחה כי $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. כל פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש־$0\leq f\left(n\right)\leq2^{n}$ היא פונקציית ספירה. (5 נק')

2. כל פונקציה $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ כך ש־$0\leq f\left(n\right)\leq 2^{n}$ ו־f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי היא פונקציית ספירה יעילה. (5 נק')

3. הפונקציה count ניתנת לחישוב, כלומר קיימת מ"ט M_{count} שעל קלט $(\langle M\rangle, n)$ פולטת את $\mathsf{count}(M,n)$. (10 נק')

4. קיימים מ"ט M_{count} ופולינום p, כך שלכל מ"ט **פולינומית** M, M_{count} על הקלט $(\langle M\rangle, n)$ פולטת את $\text{count}(M,n)$ בזמן $p(|\langle M\rangle| + n)$ לכל היותר (אין דרישות על פעולת M_{count} כאשר M לא פולינומית). אינטואיטיבית, count ניתנת לחישוב "מהיר" כאשר הקלט שלה הוא מ"ט פולינומית. (10 נק')