תורת החישוביות (236343) — מועד ב'
אביב תשפ"א

10.10.2021

מרצה: פרופ' איל קושלביץ.

מתרגלים: נטע דפני (אחראית), דור קצלניק, עידו רפאל, קיארה מיוחס, ויקטור קולובוב.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- יש לכתוב את התשובות **בעט בלבד**.
- משך הבחינה – שלוש שעות. בבחינה יש 5 שאלות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- השתדלו לכתוב תשובות תמציתיות על מנת לחסוך זמן.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל סעיף 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע/ת".

בהצלחה!

שאלה 1 (שאלת ת"ב מגליון 4) (10 נק')

קבעו האם הפונקציה הבאה ניתנת לחישוב, והוכיחו את תשובתכם: הפונקציה f על קלט $\langle M\rangle$ מחזירה את מספרו של התא הימני ביותר אליו המכונה M מגיעה בריצתה על ε.
<u>הערה:</u> אם אין תא ימני ביותר אזי f אינה מוגדרת.

שאלה 2 (שאלת ת"ב מגליון 5) (10 נק')

ניזכר כי המחלקה NP היא מחלקת כל השפות עבורן קיים יחס דו מקומי $A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, חסום פולינומית וניתן לזיהוי יעיל, כך ש - $L = \{x : \exists y \, (x, y) \in A\}$.
בשאלה זו נתעניין במחלקות המתקבלות ע"י שינוי הדרישות על A. עבור כל אחת מהדרישות הבאות, קבעו מהי המחלקה המתקבלת, והוכיחו את תשובתכם.
<u>למשל</u>: A חסום פולינומית וניתן לזיהוי יעיל. <u>תשובה</u>: המחלקה היא NP.

1. A חסום לוגריתמית וניתן לזיהוי יעיל. (5 נק')
<u>הבהרה</u>: יחס חסום לוגריתמית הוא יחס עבורו קיימת $l(n) \in O(\log n)$ כך שאם $(x, y) \in A$ אז $|y| \le l(|x|)$.

2. A חסום פולינומית. (5 נק')

שאלה 3 (30 נק')

בשאלה זו נעסוק בחישוב פונקציות ע"י מכונות טיורינג אי־דטרמיניסטיות.
בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\mathbb{N}$, נאמר שמכונת טיורינג א"ד M מחשבת את f אם לכל קלט x, מספר מסלולי החישוב הסופיים של M על x הוא $f(x)$. (אם f לא מוגדרת עבור קלט מסויים, אז ל־M יהיו אינסוף מסלולים סופיים עבור הקלט).
<u>הערה:</u> מסלול חישוב סופי הינו מסלול חישוב המסתיים במצב סופי.

<u>לדוגמה:</u> מ"ט א"ד M_1 שלכל קלט עוברת בצעד הראשון למצב סופי (בשני המעברים) מחשבת את הפונקציה $f_1\equiv 2$. מ"ט א"ד M_2 שלכל קלט, בוחרת בכל צעד האם לעצור או להמשיך את החישוב, מחשבת את הפונקציה f_2 שלא מוגדרת עבור אף קלט.

קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־R, ב־$\mathrm{RE}\setminus\mathrm{R}$ או לא ב־RE. הוכיחו את תשובתכם.

<u>הערה:</u> קידוד של מ"ט א"ד מוגדר באופן דומה לקידוד של מ"ט דטרמיניסטית, פרט לכך שהקידוד מכיל לכל $q\in Q\backslash F, a\in\Gamma$ שני מעברים.

<u>הערה:</u> כפי שהוגדר בקורס, כל מחרוזת שאינה קידוד תקין של מ"ט מקודדת מ"ט טריוויאלית M_{stam}.

1. $L_1=\{\langle M\rangle \mid$ M מכונה אי־דטרמיניסטית וקיימת פונקציה $f:\Sigma^*\to\mathbb{N}$ כלשהי כך ש־M מחשבת את $f\}$. (10 נק')

2. $L_2 = \{\langle M \rangle \mid$ מכונה אי־דטרמיניסטית **שלא** מחשבת את הפונקציה $f \equiv 0$ $M\}$. (10 נק')

<u>הערה</u>: $f \equiv 0$ זו הפונקציה שמחזירה 0 לכל קלט $x \in \Sigma^*$.

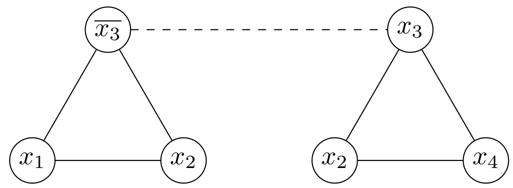
3. $\{M_1, M_2$ מכונות אי־דטרמיניסטיות המחשבות את אותה הפונקציה $| \langle M_1 \rangle , \langle M_2 \rangle\} = L_3$. (10 נק')

שאלה 4 (30 נק')

תזכורת: קבוצה ב"ת בגרף היא קבוצת צמתים $A \subseteq V$ כך שלכל שני צמתים $v, u \in A$, אין קשת בין u ו־v.

1. בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו האם השפה הבאה היא ב־P או שהיא NP־שלמה:
$IS_{HALF} = \{G \mid$ קיימת בגרף $G = (V, E)$ קבוצה ב"ת בגודל $\frac{|V|}{2}\}$ (10 נק')

2. נתונה הרדוקציה הבאה מ־$3SAT$ ל־IS. $f\left(\varphi\right)=\left(G,k\right)$ כאשר k הוא מספר הפסוקיות ב־φ ו־G נבנה באופן הבא: ב־G יש בדיוק $3k$ צמתים, כאשר לכל פסוקית $c_i\in\varphi$ שהליטרלים בה הם α,β,γ, נוסיף ל־G משולש $\alpha_i,\beta_i.\gamma_i$ (שלושה צמתים המייצגים את שלושת הליטרלים ומחוברים בקשתות). כמו כן, לכל ליטרל $\alpha\in\varphi$, נוסיף קשת בין כל שני צמתים מהצורה $\alpha_i,\overline{\alpha}_j$, כלומר בין כל מופע של α ומופע של שלילתו.
לדוגמה: עבור הפסוק $\varphi=\left(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}\right)\wedge\left(x_2\vee x_3\vee x_4\right)$, מתקבל הגרף הבא:



הוכיחו את תקפות ופולינומיות הרדוקציה. (10 נק')

3. הכלילו את הרדוקציה מהסעיף הקודם לרדוקציה פולינומית מפורשת מ־SAT ל־IS. אין צורך להוכיח פולינומיות ותקפות. (5 נק')

4. ידוע (והוכח בתרגיל בית 6) כי בהנתן גרף $G=(V,E)$ ותת קבוצה של צמתים $A\subseteq V$, הקבוצה A היא כיסוי בצמתים של G אמ"מ $V\backslash A$ היא קבוצה ב"ת.

תהי $f_{IS}(G)$ – הגודל המקסימלי של קבוצה ב"ת ב־G.

נתון האלגוריתם הבא למציאת קירוב ל־f_{IS} על קלט $G=(V,E)$:

- הפעל על G את אלגוריתם ה־2־קירוב הכפלי למציאת כיסוי בצמתים מינימלי שנלמד בהרצאה. סמן את הפלט A.
- החזר את $V\backslash A$.

הוכיחו/הפריכו: קיים קבוע α כך שהאלגוריתם הנ"ל הוא קירוב α־כפלי ל־f_{IS}. (5 נק')

שאלה 5 (20 נק')

הוכיחו/הפריכו:

1. SAT ניתנת לרדוקציה ל-L_ϵ. (5 נק')

2. L_u ניתנת לרדוקציה פולינומית ל-HP. (5 נק')

3. SAT ניתנת לרדוקציה פולינומית ל־L_u. (5 נק')

4. L_u ניתנת לרדוקציה פולינומית ל־SAT. (5 נק')