# תורת החישוביות (236343) — מועד ב'
# אביב תשע"ט

20.09.2019

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: דור קצלניק (אחראי), אוהד טלמון, אבי קפלן, עידו רפאל, ענבר קסלסי.

**הנחיות:**

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה — שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על אף סעיף, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- יש להוכיח כל טענה אחרת בה אתם משתמשים, אלא אם צוין במפורש אחרת.
- ניתן לקבל בכל סעיף $20\%$ מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

## בהצלחה!

## שאלה 1 (10 נקודות)

מכונת טיוריגנ לייצור שפות $M$ זהה למודל הרגיל של מכונת טיורינג לחישוב פונקציות פרט לשינויים הבאים: המכונה אינה מקבלת קלט (דהיינו, תמיד מתחילה את ריצתה כשהסרט ריק), וכאשר היא נכנסת למצב סופי היא מוציאה כפלט את תוכן הסרט שמשמאל לראש, אך אינה עוצרת אלא ממשיכה בחישוב. נגדיר בתור $G(M)$ את שפת כל המילים אשר $M$ מוציאה כפלט מתישהו במהלך החישוב שלה.

1. הראו כי עבור כל שפה $L \in \mathrm{RE}$ קיימת $M$ כך ש־$L = G(M)$. (5 נק')

2. הראו כי אם $M$ מוציאה כפלט מילים לפי סדר לקסיקוגרפי ו־$G(M)$ אינסופית אז $G(M) \in \mathrm{R}$. (5 נק')

## שאלה 2 (15 נקודות)

נסמן $L_1 \leq_{PS} L_2$ אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1. $f$ מלאה.
2. $f(x)$ ניתנת לחישוב תוך שימוש בזיכרון פולינומי ב־$|x|$ (בפרט גודל הפלט שלה הוא פולינומי).
3. $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$.

ענו על הסעיפים הבאים:

1. הוכיחו כי $\overline{\mathrm{SAT}} \leq_{PS} \mathrm{SAT}$. (5 נק')

2. הוכיחו כי אם $\mathrm{P} \neq \mathrm{PSPACE}$ אז קיימות שפות $L_1, L_2$ כך ש-$L_1 \leq_{ps} L_2$ וגם $L_1 \not\leq_p L_2$. (10 נק')

## שאלה 3 (30 נקודות)

בשאלה זו נעסוק במכונות טיורינג המחשבות **סדרות אינסופיות** של מספרים **טבעיים**.
הגדרה: נאמר שסדרה אינסופית של מספרים טבעיים $a_n$ היא ניתנת לחישוב אם קיימת מ"ט $M$ שעל קלט $w \in \Sigma^*$, תחזיר כפלט את $|w|$ האיברים הראשונים בסדרה $a_n$. עבור מ"ט $M$ כזו, נאמר שהיא מחשבת את הסדרה $a_n$.
לדוגמה, אם $M$ מחשבת את הסדרה $a_n$, אז על קלט $w = 111$ היא תחזיר את הפלט $(a_1, a_2, a_3)$.
לצורכי ההגדרה, ניתן להניח שעל קלט $\varepsilon$ המכונה $M$ מחזירה $\varepsilon$, ושהפלט $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ מקודד בצורה הבאה: $1^{a_1}01^{a_2}0\ldots1^{a_k}0$.

1. הראו שכל סדרה מהצורה $a_n = a_1 q^{n-1}$ , כך ש-$a_1, q \in \mathbb{N}$ היא ניתנת לחישוב. (5 נק')

2. **הוכיחו** את הטענה הבאה או הפריכו ע"י **דוגמה נגדית**:
כל סדרה אינסופית של מספרים טבעיים $a_n$ ניתנת לחישוב. (10 נק')

עבור כל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא ב־$\mathrm{R}$ והאם היא ב־$\mathrm{RE}$:

3. $L_1 = \{(\langle M \rangle, a_1, q, k) \mid$ מחשבת את הסדרה $a_n = a_1 q^{n-1}$ ורצה לכל היותר $k$ צעדים על כל קלט $M\}$. (5 נק')

4. $\{\ M$ מחשבת את הסדרה $a_n = a_1 q^{n-1} \mid \langle M \rangle , a_1, q\} = L_2$. (10 נק')

## שאלה 4 (25 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, נגדיר תת־גרף מושרה של $G$ בשתי הצורות הבאות:

- עבור תת־קבוצה $E' \subseteq E$, נגדיר את $H=(V',E')$ להיות תת־גרף מושרה קשתות של $G$, כאשר $V'=\{v\in V | \exists u \in V : (u,v)\in E'\}$.
- עבור תת־קבוצה $V' \subseteq V$, נגדיר את $H=(V',E')$ להיות תת־גרף מושרה צמתים של $G$, כאשר $E'=\{(u,v)\in E | u,v \in V'\}$.

בנוסף, בהינתן פונקציית משקל $w: E\to \mathbb{N}$, נאמר שלתת־הגרף $H=(V',E')$ של $G$ יש משקל $M$ אם $\sum_{e\in E'} w(e)=M$.
בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq \mathrm{NP}$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־$\mathrm{P}$ או האם היא $\mathrm{NP}$־שלמה.

1. $L_1=\{(G,k) \mid$ ל־$G$ יש תת־גרף מושרה **צמתים** בעל $20$ צמתים ו־$k$ קשתות$\}$. (5 נק')

2. $L_2 = \{(G,k,w,M) \mid$ ל־$G$ יש תת־גרף מושרה **קשתות** בעל $\boldsymbol{k}$ צמתים עם משקל לפחות $M$ לפי פונקציית המשקל $w\}$.
(10 נק')

3. $L_3 = \{(G, k, w, M) \mid$ ל־$G$ יש תת־גרף מושרה **צמתים** בעל $\boldsymbol{k}$ צמתים שהוא עץ עם משקל לפחות $M$ לפי פונקציית המשקל $w\}$.
(10 נק')

## שאלה 5 (20 נקודות)

תזכורת: תהי $\mathcal{C}$ מחלקה של שפות. נאמר ששפה $L$ היא $\mathcal{C}$**-קשה** (ביחס לרדוקציות פולינומיות) אם לכל $L' \in \mathcal{C}$ מתקיים $L' \leq_p L$.
בנוסף, נאמר ששפה $L$ היא $\mathcal{C}$**-שלמה** אם היא $\mathcal{C}$-קשה וגם $L \in \mathcal{C}$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם הן **נכונות**, **שגויות** או **שקולות** לבעיה פתוחה מוכרת (מבין הבעיות שמופיעות בדף העזר). הוכיחו תשובתכם.

1. קיימת שפה $\mathrm{coNP}$-שלמה. (5 נק')

2. קיימת שפה NP-שלמה שהיא גם PSPACE-שלמה. (8 נק')

3. קיימת שפה $L \notin \mathrm{RE}$ שהיא NP־קשה. (7 נק')