תורת החישוביות (236343) — מועד א'
אביב תשע"ט

28.07.2019

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: דור קצלניק (אחראי), אוהד טלמון, אבי קפלן, עידו רפאל, ענבר קסלסי.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה — שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על אף סעיף, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- יש להוכיח כל טענה אחרת בה אתם משתמשים, אלא אם צוין במפורש אחרת.
- ניתן לקבל בכל סעיף 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

שאלה 1 (10 נקודות)

בהינתן שפה $L \subseteq \{0,1\}^*$ ופונקציה **מלאה** $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, נגדיר $f(L) = \{f(x) : x \in L\}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $L \in \mathrm{R} \Leftarrow f(L) \in \mathrm{RE}$. (5 נק')

2. $L \in \mathrm{R}$ ו־ f ניתנת לחישוב $\Leftarrow f(L) \in \mathrm{R}$. (5 נק')

שאלה 2 (15 נקודות)

עבור הטענות הבאות קבעו האם הן נכונות, שגויות או שקולות לבעיה פתוחה מוכרת (לדוגמא, אם טענה גוררת את נכונות או אי נכונות $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ מן הסתם איננו מצפים שתגידו אם היא נכונה או שגויה).

1. קיים אלגוריתם יעיל אשר בהינתן פסוק φ מצורת CNF, מכריע האם כל השמה אפשרית ל־φ מספקת אותו. (5 נק')

2. קיים אלגוריתם יעיל אשר בהינתן פסוק φ מצורת CNF, מכריע האם ל־φ יש לפחות שתי השמות מספקות. (10 נק')

שאלה 3 (20 נקודות)

עבור כל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא ב־R והאם היא ב־RE:

1. $L_1 = \{\langle M\rangle \mid \exists L', L'' \in \mathrm{R}: \ L' \subseteq L(M) \subseteq L''\}$. (5 נק')

2. $L_2 = \{(\langle M_1 \rangle , \langle M_2 \rangle) \mid L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$. (8 נק')

3. $L_3 = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \mid \langle M_1 \rangle \in L(M_2)\}$. (7 נק')

שאלה 4 (15 נקודות)

תזכורת: עץ פורש של גרף קשיר $G=(V,E)$ הוא תת־גרף $T=(V,E')$ כאשר $E'\subseteq E$ ו־T הוא עץ, כלומר גרף קשיר וחסר מעגלים.
בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או האם היא NP־שלמה.

1. $L_1=\{G\mid$ ל־G יש עץ פורש בעל 2 עלים לכל היותר$\}$. (5 נק')

2. $L_2 = \{(G_1, G_2) \mid$ G_1 ו־G_2 גרפים עם אותם הצמתים $V = \{1, \ldots, n\}$ בדיוק, ויש להם עץ פורש משותף $\}$. (5 נק')

נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{ל-}G\text{ יש עץ פורש עם } k \text{ עלים (בדיוק)}\}$$

3. נניח כי $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. הוכיחו / הפריכו: הפונקציה f ניתנת לקירוב 5-חיבורי יעיל. (5 נק')

שאלה 5 (10 נקודות)

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו האם השפה הבאה היא ב־P או האם היא NP־שלמה:

$L = \{(G,k) \mid$ גרף **מכוון** ויש k צמתים שלאחר הסרתם יתקבל גרף ללא מעגלים $G\}$.

שאלה 6 (30 נקודות)

נאמר כי יחס $Q(x,y)$ הוא מלא, אם לכל $x\in\Sigma^*$ קיים y כך ש- $(x,y)\in Q$.
יהיו $Q(x,y)$ יחס מלא ו- $g:\{0,1\}^*\to\mathbb{N}$ פונקציה מלאה. **ממזער** עבור (Q,g) הוא מ"ט $M_{Q,g}$ שלכל קלט x מחזירה פלט y המקיים:

1. $(x,y)\in Q$.
2. y הוא אופטימלי: לכל y' כך ש-$(x,y')\in Q$ מתקיים $g(y)\le g(y')$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם הן נכונות, שגויות, שקולות לשאלה $\mathrm{P}=\mathrm{NP}$ או לשאלה $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$. הוכיחו תשובתכם.

1. קיים ממזער $M_{Q,g}$ עבור היחס $Q=\{(\langle M_1\rangle,\langle M_2\rangle):L(M_1)=L(M_2)\}$ והפונקציה $g(\langle M\rangle)=|\langle M\rangle|$. (5 נק')

2. קיים ממזער $M_{Q,g}$ עבור היחס $\{x \in \{0,1\}^*$ ו־M היא מ"ט בינארית המקיימת $\boldsymbol{f_M(\varepsilon)} = x$: $Q = \{(x, \langle M \rangle)$, והפונקציה $g(\langle M \rangle)$ המחזירה את מספר מצבי הבקרה של מ"ט M. (5 נק')
הערה: מכונת טיורינג בינארית היא מ"ט עם א"ב עבודה $\Gamma = \{0,1,b\}$.

3. קיים ממזער $M_{Q,g}$ עבור היחס $\{x \in \{0,1\}^*$ ו־M היא מ"ט בינארית המקיימת $\boldsymbol{f_M(x)} = x$: $Q = \{(x, \langle M \rangle)$, והפונקציה $g(\langle M \rangle)$ המחזירה את מספר מצבי הבקרה של מ"ט M. (5 נק')

4. קיים ממזער $M_{Q,g}$ עם חסם זמן פולינומי עבור היחס $Q = \{(\varphi_1, \varphi_2) :$ שקולים CNF הם פסוקי φ_2 ו־$\varphi_1\}$, והפונקציה $g(\varphi)$ המחזירה את מספר הפסוקיות ב־φ. (10 נק')

הערה: בסעיף זה, שני פסוקים הם שקולים אם הם **מכילים את אותם המשתנים** ומסתפקים ע"י אותן השמות. בנוסף, ניתן להניח שהיחס Q הוא מלא (כל מילה היא קידוד חוקי של פסוק CNF).

5. לכל יחס מלא $Q \in \mathrm{P}$ ופונקציה $g \in \mathrm{POLY}$, קיים ממזער $M_{Q,g}$. (5 נק')