

חשוביות (236343)

אביב תשע"ז

מועד ב

15.10.2017

מרצים: פרופ' אלי בן ששון.
מתרגלים: גלעד קותיאל, אוהד טלמון, סתיו פרלה, מיכאל ריאבצב.

הנחיות:

- משך הבחינה 3 שעות.
- אסור כל שימוש בחומר עזר, למעט דפי העזר המצורפים.
- יש לענות על כל השאלות בקצרה ובאופן מסודר.
- יש להוכיח כל טענה עליה מסתמכים אלא אם הוכחה במפורש בתרגול או בהרצאה.
- לא ניתן להסתמך על טענות משיעורי הבית ללא הוכחה.
- הנכם רשאים לכתוב בכל סעיף "לא יודע" ולקבל 20% מהניקוד לאותו סעיף.
- מותר להיעזר בסעיפים קודמים לצורך פתרון סעיף, גם אם לא פתרתם אותם.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר פונקציית מעברים.

בהצלחה!

שאלה 1 [25 נקודות]

נסמן $L_1 \leq_{PS} L_2$ אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיימת

• f מלאה

• $f(w)$ ניתנת לחישוב תוך שימוש בזכרון פולינומי ב- $|w|$

• $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$

ענו על הסעיפים הבאים:

1. (6 נקודות) הוכיחו: אם $L_2 \in PSPACE$ וגם $L_1 \leq_{PS} L_2$ אז $L_1 \in PSPACE$

2. (6 נקודות) הוכיחו כי $\text{SAT} \leq_{PS} \overline{\text{SAT}}$.

3. (6 נקודות) אילו שפות $L \in \text{PSPACE}$ מקיימות שלכל $L' \in \text{PSPACE}$ מתקיים ש- $L' \leq_{PS} L$.

4. (7 נקודות) הוכיחו כי אם לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 מתקיים $L_1 \leq_P L_2 \Rightarrow L_1 \leq_{PS} L_2$ אז $P = PSPACE$.

שאלה 2 [20 נקודות]

נאמר שמ"ט M על קלט x לא משנה את הסרט אם תוכן הסרט בריצה של M על x לא משתנה. נאמר שמ"ט M על קלט x לא משנה את הקלט אם תוכן הסרט ב- $|x|$ התאים הראשונים לא משתנה בריצה של M על x . אחרת נאמר ש M משנה את הקלט.

עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב- R , והאם היא ב- RE .

$$1. \quad L_1 = \{(\langle M \rangle, x) \mid M \text{ על } x \text{ לא משנה את הקלט}\} \quad (7 \text{ נקודות})$$

2. (7 נקודות) $L_2 = \{(\langle M \rangle, x) \mid \text{לא משנה את הסרט } M \text{ על } x\}$

3. (6 נקודות) $L_3 = \{ \langle M \rangle \mid \text{משנה את הקלט עבור 3 קלטים לפחות} \}$

שאלה 3 [15 נקודות]

תזכורת: שפה $L \in C$ תקרא שלמה ביחס למחלקה C אם לכל שפה $L' \in C$ מתקיים $L' \leq_p L$ (קיימת רדוקציה פולינומית מ- L' ל- L).

ענו על הסעיפים הבאים בהנחה ש- $NP \neq coNP$.

1. (7 נקודות) הוכיחו: $L \in NP$ שפה שלמה ביחס ל- NP , אם ורק אם \bar{L} שפה שלמה ביחס ל- $coNP$.

2. (8 נקודות) הוכיחו/הפריכו: קיימת שפה $L \in NP$ כך ש- L שלמה ביחס ל- NP וגם \bar{L} שלמה ביחס ל- NP .

שאלה 4 [35 נקודות]

בשאלה זו G הוא גרף פשוט ולא מכוון. בהנחה ש- $P \neq NP$ קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב- P או שהיא NP -שלמה.

1. (7 נקודות) $L_1 = \{(G, k) : \text{קיים ב-} G \text{ קליק בגודל } k \text{ או מעגל המילטוני}\}$

2. (7 נקודות) $L_2 = \{(G, k) : \text{קיים ב-} G \text{ קליק בגודל } k \text{ וגם מעגל המילטוני}\}$

3. (7 נקודות) $L_3 = \{(G) : G \text{ הוא כוכב על}\}$

כאשר גרף $G = (V, E)$ נקרא כוכב על אם קיימת תת קבוצה $K \subseteq V$ כך ש- $G[K]$ הוא קליק ו- $G[V \setminus K]$ הוא קבוצה בלתי תלויה.

רמז: הראו רדוקציה ל- $2SAT$.

בהינתן גרף G נגדיר את $f(G)$ להיות גודל הקליק הגדול ביותר ב- G .

4. (7 נקודות) הראו, בהנחה ש- $P \neq NP$, ש- f לא ניתנת לקירוב חיבורי 3.

5. (7 נקודות) הראו, בהנחה ש- $P = NP$, כיצד ניתן לחשב במדויק את f .

שאלה 5 [5 נקודות]

נגדיר מחלקת שפות חדשה PP . שפה L שייכת למחלקה PP אם קיימת מ"ט פולינומית הסתברותית, M , שמקיימת את התנאים הבאים:

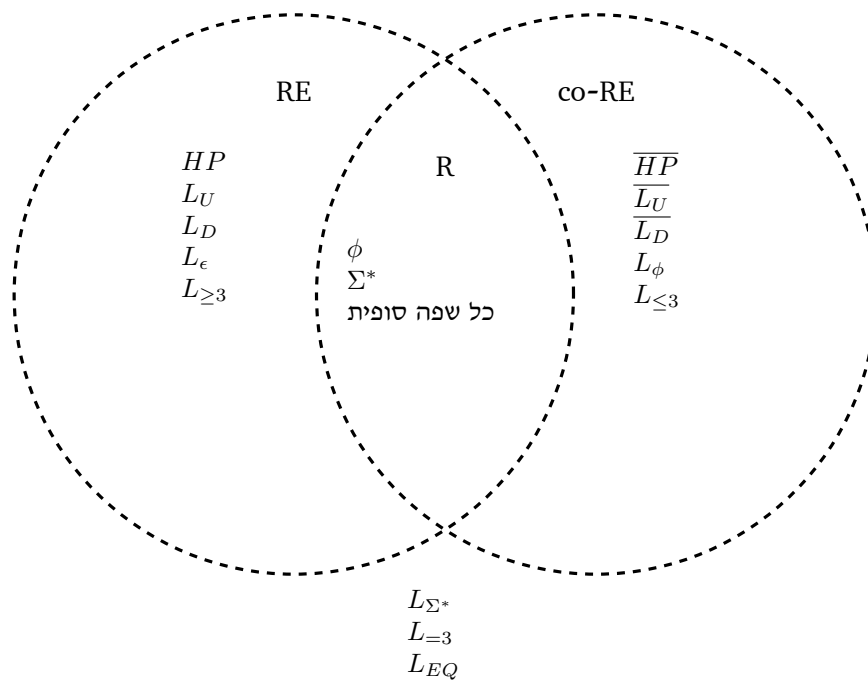
1. לכל $w \in L$, M מקבלת את w בהסתברות גדולה ממש מחצי.

2. לכל $w \notin L$, M דוחה את w בהסתברות גדולה או שווה לחצי.

1. (5 נקודות) הוכיחו: $SAT \in PP$.

שפות וסיווגן

- $HP = \{\langle M \rangle, x : x \text{ עוצרת על } M\}$
- $L_U = \{\langle M \rangle, x : x \text{ מקבלת את } M\}$
- $L_D = \{\langle M \rangle : \langle M \rangle \in L(M)\}$
- $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle : L(M) = \Sigma^*\}$
- $L_\phi = \{\langle M \rangle : L(M) = \phi\}$
- $L_\epsilon = \{\langle M \rangle : \epsilon \in L(M)\}$
- $L_{EQ} = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) : L(M_1) = L(M_2)\}$
- $L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle : |L(M)| \geq 3\}$
- $L_{\leq 3} = \{\langle M \rangle : |L(M)| \leq 3\}$
- $L_{=3} = \{\langle M \rangle : |L(M)| = 3\}$



אוסף שפות NP-שלמות

- $HC = \{G : G \text{ לא מכונן וקיים בו מעגל המילטוני}\}$
- $SAT = \{\varphi : \varphi \text{ פסוק CNF ספיק}\}$
- $3SAT = \{\varphi : \varphi \text{ פסוק 3CNF ספיק}\}$
- $3COL = \{G : G \text{ הינו גרף 3-צביע}\}$
- $VC = \{(G, k) : k \text{ כיסוי בצמתים בגודל } k\}$
- $SC = \{(n, k, S_1, \dots, S_m) : \bigcup_{i \in I} S_i = [n], |I| = k \text{ ש-} I \subseteq [m] \text{ קיים}\}$
- $IS = \{(G, k) : k \text{ קבוצה בלתי תלויה בגודל } k\}$
- $CLIQUE = \{(G, k) : k \text{ קליק בגודל } k\}$
- $SS = \{(a_1, \dots, a_n, s) : \sum_{i \in I} a_i = s \text{ ש-} I \subseteq [n] \text{ קבוצה, } a_1, \dots, a_n \text{ מספרים טבעיים וקיימת תת קבוצה}\}$

בעיות פתוחות מוכרות

- $P =? NP$
- $NP =? coNP$
- $NP =? PSPACE$
- $NP =? EXP$
- $PSPACE =? EXP$