תורת החישוביות (236343) – מועד ב'
חורף תשע"ט

12.3.2019

מרצים: פרופ' איל קושלביץ.

מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), דוד נאורי, מיכל דורי, אבי קפלן, דור קצלניק.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- אפשר להשתמש בכל כלי כתיבה, אולם אם הוא יהיה חלש מכדי להיקלט בסורק לא תהיה אפשרות לערער על הבדיקה.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- יש להוכיח כל טענה אחרת בה אתם משתמשים, אלא אם צוין במפורש אחרת.
- ניתן לקבל בכל סעיף 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

1 שאלה 1, 15 נק' (ת"ב 5, מכונות א"ד)

נאמר שמ"ט א"ד M מקבלת באופן יחיד קלט x אם קיים מסלול מקבל **יחיד** של M על x.
נגדיר $L_{\text{Unique}}(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \text{באופן יחיד } x \text{ מקבלת את } M\}$
בנוסף, נגדיר את מחלקת השפות $\text{URE} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L_{\text{Unique}}(M) = L \text{ כך ש- } M \text{ קיימת מ"ט א"ד}\}$
הוכיחו/הפריכו בקצרה את הטענות הבאות:

1. $\text{RE} \subseteq \text{URE}$ (5 נק')

2. $\overline{HP} \in \text{URE}$ (5 נק')

3. $\mathrm{URE} \subseteq \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$. (5 נק')

2 שאלה 2, 10 נק' (ת"ב 9, רדוקציה k־עצמית מקצרת)

נאמר כי לשפה L יש רדוקציה k־עצמית מקצרת אם קיימת פונקציה f המקיימת:

1. $f \in POLY$, כלומר f ניתנת לחישוב יעיל.
2. קיים N כך שלכל קלט x שאורכו לפחות N, מתקיים כי f היא מהצורה $f(x) = y_1, \ldots, y_k$ (כלומר הפונקציה f מחזירה מחרוזת המורכבת מ־k תתי מחרוזות) כך שמתקיים:
   - $|x| < |y_i|$ לכל $1 \leq i \leq k$.
   - $x \in L \iff$ קיים i כך ש־$y_i \in L$.

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. אם לשפה L יש רדוקציה 1־עצמית מקצרת, אז $L \in P$. (5 נק')

2. אם לשפה L יש רדוקציה 2-עצמית מקצרת, אז $L \in NP$. (5 נק')

3 שאלה 3, 25 נק'

תזכורות וסימונים:

- גרף הקונפיגורציות של מכונת טיורינג אי־דטרמיניסטית M על קלט x, נסמנו $G_{M,x}$, הוא גרף מכוון שקבוצת הצמתים שלו היא אוסף הקונפיגורציות האפשריות של M על x, וישנה קשת $C_1 \to C_2$ אם M בצעד חישוב אחד יכולה לעבור מהקונפיגורציה C_1 לקונפיגורציה C_2.
- אנו מסמנים ב־C_0 את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על x.

הערה: שימו לב שמס' הקונפיגורציות השונות האפשריות של M על x עשוי להיות אינסופי.

עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב־R והאם היא ב־RE:

1. $L_1 = \{\langle M \rangle, x, \ell \,|\,$ M מ"ט א"ד ויש ב־$G_{M,x}$ מעגל מכוון פשוט באורך ℓ העובר ב־$C_0\}$ (5 נק')

2. $L_2 = \{\langle M \rangle, x \big|$ M מ"ט א"ד ויש ב־$G_{M,x}$ מעגל מכוון פשוט העובר ב־C_0 $\}$ (10 נק')

3. $L_3 = \{\langle M\rangle, x \mid$ M מ"ט א"ד ויש ב־$G_{M,x}$ אינסוף מעגלים מכוונים פשוטים העוברים ב־C_0 $\}$ (10 נק')

4 שאלה 4, 30 נק'

נאמר שגרף $G=(V_G,E_G)$ מכיל עותק של גרף $H=(V_H,E_H)$, אם קיימת קבוצת צמתים $S\subseteq V_G$ בגודל $|V_H|$, כך שתת הגרף המושרה ע"י S איזומורפי ל־H. פורמלית, קיימת $f:V_H\to V_G$ חח"ע, המקיימת $(f(u),f(v))\in E_G \iff (u,v)\in E_H$.

בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או האם היא NP־שלמה.

1. השפה $L_G=\{H \mid H \text{ מכיל עותק של } G\}$ עבור גרף G כלשהו. (5 נק')

2. השפה $L_H = \{G \mid H$ מכיל עותק של $G\}$ עבור גרף H כלשהו. (7 נק')

3. $L_3 = \{(G,H) \mid$ מכיל עותק של H $G\}$ (11 נק')

4. $L_4 = \{(G,H) \mid$ הוא עץ H ו־H מכיל עותק של $G\}$ (7 נק')

רמז: הוסיפו צומת חדש לגרף G.

5 שאלה 5, 20 נק'

תזכורת: בהרצאה ראינו משפט רדוקציה עבור רדוקציות מסוג $\leq$ והמחלקות $\mathrm{R}, \mathrm{RE}, \mathrm{coRE}$, ומשפט רדוקציה עבור רדוקציות מסוג $\leq_p$ והמחלקות P, NP.

הוכיחו/הפריכו <u>בקצרה</u> את משפטי הרדוקציה הבאים:

1. $L_1 \leq_p L_2$ ו־$L_2 \in \mathrm{RE} \Longleftarrow L_1 \in \mathrm{RE}$. (5 נק')

2. $L_1 \leq_p L_2$ ו־$L_2 \in \mathrm{coNP} \Longleftarrow L_1 \in \mathrm{coNP}$. (5 נק')

3. $L_1 \le_p L_2$ ו־$L_2 \in \mathrm{PSPACE} \Longleftarrow L_1 \in \mathrm{PSPACE}$. (5 נק')

4. $L_1 \le L_2$ ו־$L_2 \in \mathrm{PSPACE} \Longleftarrow L_1 \in \mathrm{PSPACE}$. (5 נק')