

## תורת החישוביות (236343) – מועד א' חורף תשע"ח

מרצים: פרופ' אלי בן ששון (אחראי), פרופ' יובל ישי.  
מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), סתיו פרלה, מיכל דורי, אבי קפלן.

### הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורף למחברת זו דף עזר (בעמוד האחרון).
- אפשר להשתמש בכל כלי כתיבה, אולם אם הוא יהיה חלש מכדי להיקלט בסורק לא תהיה אפשרות לערער על הבדיקה.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

**בהצלחה!**

## 1 שאלה 1, 17 נק' (ש"ב)

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה, לא נכונה או שקולה לפתרון בעיה פתוחה, והוכיחו תשובתכם.

1.  $\overline{VC} \notin \text{NPSpace}$ . (5 נק')

2. אם קיימת ל- $SAT$  מ"ט הרצה בזמן  $n^{O(\log n)}$  אז לכל  $L \in NP$  קיימת מ"ט שרצה בזמן  $n^{O(\log n)}$ . (5 נק')

3. לא קיימת מ"ט פולינומית  $M$  כך ש- $|f_M(G)|$  (אורך הפלט של  $M$  על  $G$ ) שווה לגודל המעגל הפשוט הארוך ביותר ב- $G$ . (7 נק')

## 2 שאלה 2, 20 נק'

1. הוכיחו כי אם  $M$  היא מ"ט א"ד, אז  $L(M) \in RE$ . (תרגול) (10 נק')

נאמר שמחרוזת  $s$  לא ריקה **ניתנת לייצור** ע"י מ"ט  $M$ , אם קיים  $n \in \mathbb{N}$  וקיימים  $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}^*$  כך שמתקיים

$$f_M(x_1) f_M(x_2) \dots f_M(x_n) = s$$

כלומר,  $s$  ניתנת לייצור ע"י שרשור של פלטים של המכונה  $M$ . נגדיר את השפה השפה  $s$  ניתנת לייצור ע"י  $M$   $L = \{ \langle M \rangle, s \mid s \text{ ניתנת לייצור ע"י } M \}$ . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

2.  $L \in RE$ . (5 נק')

3.  $L \in R$  (5 נק')

### 3 שאלה 3, 19 נק'

לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב- $R$  והאם היא ב- $RE$ .

1.  $L_1 = \{ \langle M \rangle, q \mid q \text{ עוברת במצב } \epsilon \text{ עוברת במצב } q \}$  (6 נק')



2.  $\{ \langle M \rangle \mid q \text{ מבקרת לכל קלט ב-} q \}$   $L_2$  (6 נק')

3.  $\{M\}$  מבקרת בריצתה על כל קלט לפחות ב-  $k$  מצבים שונים  $L_3 = \{\langle M \rangle, k\}$  (7 נק')

#### 4 שאלה 4, 24 נק'

עבור גרף  $G$ ,  $k$ -חתך של  $G$  הוא חלוקה של צמתי  $G$  ל- $k$  קבוצות  $S_1, \dots, S_k$  זרות בזוגות ולא ריקות שאיחודן הוא  $V$ . נאמר שקשת  $e = (u, v)$  חוצה את החתך אם קיימים  $1 \leq i \neq j \leq k$  כך ש- $u \in S_i$  ו- $v \in S_j$ . בהנחה ש- $P \neq NP$ , לכל שפה, קבעו האם היא ב- $P$  או שהיא  $NP$ -שלמה.

1.  $\{G, k \mid G \text{ } k\text{-חתך כך שכל הקשתות ב-} G \text{ חוצות את החתך } CUT(G, k) \text{ (8 נק')}\}$

2. {קיים ל- $G$   $k$ -חתך כך שלפחות מחצית מהקשתות ב- $G$  חוצות את החתך  $\{G, k\}$   $HALF - CUT =$  (8 נק')}

3.  $\{G, k \mid \text{קיים ל-} G \text{ חתך כך שלכל היותר 9 קשתות ב-} G \text{ לא חוצות את החתך}\}$   $ALMOST - CUT$  (8 נק')

## 5 שאלה 5, 20 נק'

המחלקה RP היא מחלקה הסתברותית אותה ראינו בהרצאות והתרגולים. נאמר ששפה  $L$  שייכת למחלקה RP אם קיימת  $M_L$  הסתברותית פולינומית כך שמתקיים:

• אם  $x \in L$

• אם  $x \notin L$

1. השלימו את הגדרת המחלקה RP (3 נק').

2. הציגו אלגוריתם RP אשר בהינתן שני פולינומים  $P_1, P_2$  במשתנה אחד הנתונים כקופסאות שחורות (כלומר יש מכונה שעל קלט  $x$  מחזירה בזמן יעיל  $(P_1(x), P_2(x))$ ), כאשר  $P_1, P_2$  שניהם ממעלה  $d$  ומקבלים ערכים מתוך שדה סופי שגודלו  $2d \leq$ , מכריע האם הם **לא** שווים זהותית. (5 נק')

נגדיר את מחלקת השפות ZPP. נאמר ששפה  $L$  שייכת למחלקה ZPP אם קיימת  $M_L$  הסתברותית פולינומית עם שלושה מצבים סופיים  $q_{acc}, q_{rej}, q_{dont-know}$ , כלומר  $M_L$  יכולה לקבל, לדחות או להגיד שהיא לא יודעת את התשובה, כך שמתקיים:

• לכל  $M_L, x$  אף פעם לא טועה -

- אם  $x \in L$  אז  $\Pr[M_L(x) = rej] = 0$ .

- אם  $x \notin L$  אז  $\Pr[M_L(x) = acc] = 0$ .

• לכל  $M_L, x$  מחזירה "לא יודעת" בהסת' קטנה או שווה לחצי, כלומר  $\Pr[M_L(x) = dont-know] \leq \frac{1}{2}$ .

**הוכיחו את הטענות הבאות:**

3. אם  $L \in ZPP$  אז  $L \in RP$ . (5 נק')

4. אם  $L \in \text{RP}$  ו- $\bar{L} \in \text{RP}$  אז  $L \in \text{ZPP}$  (7 נק')