

תורת החישוביות (236343) – מועד א' חורף תש"ף

מרצים: איל קושלביץ (אחראי).
מתרגלים: דור קצלניק (אחראי), אוהד טלמון, אבי קפלן, ענבר קסלסי, עידו רפאל, דוד נאורי.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- אפשר להשתמש **בעט בלבד!** בחינות שייכתבו בכלי כתיבה אחר לא יבדקו.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

1 שאלה 1 (10 נק', תרגיל בית 3)

בהינתן שפה $L \subseteq \{0, 1\}^*$ ופונקציה מלאה $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ נגדיר $f(L) = \{f(x) : x \in L\}$.
הוכיחו/הפריכו: $L \in R$ ו- f ניתנת לחישוב $\Leftrightarrow f(L) \in R$.

2 שאלה 2 (10 נק', תרגיל בית 9)

עבור הטענה הבאה קבעו האם היא נכונה, שגויה, או שקולה לטענה פתוחה מוכרת (בהוכחת שקילות של טענות יש להוכיח שני כיוונים!).

אם טענה שקולה לנכונות או אי נכונות של בעיה פתוחה מוכרת, מן הסתם איננו מצפים שתגידו אם היא נכונה או שגויה.

- לא קיים אלגוריתם פולינומי הבודק עבור כל גרף G האם קיים בו מעגל פשוט העובר דרך מחצית מהצמתים.

3 שאלה 3 (30 נק')

לאורך השאלה כל המכונות עליהן מדובר הן מכונות אי דטרמיניסטיות.
לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב- R והאם היא ב- RE .

1. $\{M \mid \text{מ"ט א"ד וקיים מסלול חישוב של } M \text{ על הקלט } \epsilon \text{ בו } M \text{ לא עוברת את תא מספר } 10\}$ (10 נק')

2. M מ"ט א"ד ואין מסלול חישוב של M על הקלט ϵ שהוא מסלול סופי $L_2 = \{\langle M \rangle \mid$ (10 נק')

3. M מ"ט א"ד וקיים מסלול חישוב של M על הקלט ϵ בו M מבקרת באותה קונפיגורציה פעמיים $L_3 = \{ \langle M \rangle \mid$ (10 נק')

4 שאלה 4 (30 נק')

תזכורת:

- פסוקית 3DNF היא פסוקית מהצורה $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ כאשר u_i ליטרלים.
- פסוק 3DNF הוא פסוק לוגי מהצורה $\psi = C_1 \vee \dots \vee C_t$ כאשר C_i היא פסוקית 3DNF לכל $1 \leq i \leq t$.

לדוגמא - הפסוק $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_5)$ הוא פסוק 3DNF.

לאורך השאלה כאשר מדובר על פסוק 3DNF או 3CNF נניח כי באף פסוקית לא קיים משתנה המופיע גם בחיוב וגם בשלילה. נסתכל בשאלה זו גם על פסוקים מסוג 3CNF וגם על פסוקים מסוג 3DNF. בהנחה ש- $P \neq NP$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא NP-שלמה או שהיא ב-P.

1. φ הוא פסוק 3CNF וקיימת השמה a המספקת **בדיוק** k פסוקיות ב- φ $L_1 = \{\varphi, k \mid \varphi \text{ ב-} P\}$ (10 נק')

2. ψ הוא פסוק 3DNF וקיימת השמה a המספקת **בדיוק** k פסוקיות ב- ψ $L_2 = \{\psi, k \mid$ (10 נק')

3. ψ הוא פסוק 3DNF וקיימת השמה a המספקת לפחות $\frac{1}{8}$ מהפסוקיות ב- ψ $L_3 = \{\psi \mid \psi \text{ מספקת לפחות } \frac{1}{8} \text{ מהפסוקיות ב-}\psi\}$ (10 נק')

5 שאלה 5, 20 נק'

נגדיר מחלקת שפות חדשה C . נאמר ששפה L שייכת ל- C אם קיים יחס $R_L \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$ המקיים:

1. R_L חסום פולינומית - קיים פולינום p כך שאם $(x, y, z) \in R_L$ אז $|y| \leq p(|x|)$ וגם $|z| \leq p(|x|)$.

2. R_L ניתן לזיהוי יעיל.

3. R_L מגדיר את השפה L באופן הבא:

$$x \in L \iff \begin{array}{l} \forall y, |y| \leq p(|x|) \\ \exists z, |z| \leq p(|x|) : \\ (x, y, z) \in R_L \end{array}$$

הוכיחו בקצרה את הטענות הבאות:

1. $C \subseteq \text{PSPACE}$ (5 נק').

2. השפה $\{\varphi\}$ הוא פסוק CNF ולא קיים פסוק CNF ψ שקול ל- φ הקצר ממנו $|\varphi|$ היא במחלקה C (5 נק').

הערה: פסוקים φ, ψ יקראו שקולים אם קבוצת ההשמות המספקות את φ שווה לקבוצת ההשמות המספקות את ψ (כלומר שני הפסוקים מסתפקים בדיוק על ידי אותן השמות).

3. $\text{NP} \subseteq C$ (5 נק')

4. $\text{coNP} \subseteq C$ (5 נק')