חישוביות - 236343 - מועד ב'
חורף תשפ"א

02/03/2021

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: נטע דפני (אחראית), אוהד טלמון, דור קצלניק, עידו רפאל, שחר רומם פלד.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור ומתקיימת באופן מקוון לפי הנהלים הטכניוניים.
- משך הבחינה - שלוש שעות. בבחינה יש 4 שאלות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורף למחברת זו דף עזר (בעמוד האחרון).
- אפשר להשתמש בעט או בעפרון בתנאי שהכתב נראה היטב בסריקת התשובות.
- מספיק לכתוב תשובות תמציתיות ולעניין, נסו לא לבזבז זמן על כתיבה מיותרת. לכל השאלות יש תשובות נכונות קצרות.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע/ת".

בהצלחה!

1 סיווג שפות (32 נק')

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P, ב־$\mathrm{R} \setminus \mathrm{P}$, ב־$\mathrm{RE} \setminus \mathrm{R}$ או לא ב־RE.

1. $L_1 = \{\langle M \rangle \mid$ בעלת לפחות 101 מצבים ומקבלת את הקלט 101 $M\}$. (8 נק')
2. $L_2 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathrm{PSPACE}\}$. (8 נק')
3. $L_3 = \{\langle M \rangle \mid$ מ"ט בעלת חסם זכרון פולינומי $M\}$. (8 נק')
4. $L_4 = \{(G,k) \mid |f(G) - k| \leq 101\}$, כאשר $f(G)$ הוא האורך המקסימלי של מעגל פשוט ב־G. (8 נק')

2 סיווג פונקציות (18 נק')

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם הטענה כי f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי היא: (א) נכונה; (ב) לא נכונה; או (ג) שקולה ל־$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

בסעיפים בהם הטענה שקולה ל־$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, יינתן ניקוד חלקי לסטודנטים שיוכיחו את אחד הכיוונים.

1. $f_1(x) = K(x')$, כאשר K היא סיבוכיות קולמוגורוב ו־x' היא הרישא של x שאורכה $\left\lfloor \sqrt{|x|} \right\rfloor$. (8 נק')
2. בהנתן גרף $G = (V,E)$ ופונקצית משקל על הקשתות $w : E \to \mathbb{N}$ (בייצוג בינארי), $f_2(G,w)$ מחזירה את המשקל המקסימלי של קליק ב־G, כאשר המשקל של קליק הוא סכום המשקלים של הקשתות שלו. (10 נק')

- המשך בעמוד הבא -

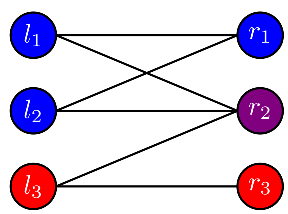
3 NP־שלמות (30 נק')

בהנתן גרף דו־צדדי $G=(L\cup R,E)$, **2־צביעה שמאלית** של G היא פונקציה $c_L:L\to\{b,r\}$ שצובעת כל צומת שמאלי בכחול או באדום.

בהנתן 2־צביעה שמאלית, **הצביעה הימנית המושרה** היא פונקציה $c_R:R\to\{b,p,r\}$ שצובעת כל צומת ימני בכחול, אדום או סגול באופן הבא:

- אם ל־v יש רק שכנים כחולים, הוא נצבע בכחול.
- אם ל־v יש רק שכנים אדומים, הוא נצבע באדום.
- אם ל־v יש לפחות שכן אחד כחול ולפחות שכן אחד אדום, הוא נצבע בסגול.
- ניתן להניח שלא קיימים צמתים ימניים מבודדים.

לדוגמה:



r_1 צבוע בכחול כי נוגעים בו רק צמתים שמאליים כחולים (l_1 ו־l_2).

r_3 צבוע באדום כי נוגעים בו רק צמתים שמאליים אדומים (l_3).

r_2 צבוע בסגול כי נוגעים בו גם צמתים שמאליים כחולים (l_1 ו־l_2) וגם צמתים שמאליים אדומים (l_3).

בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או שהיא NP־שלמה, והוכיחו את תשובתכם:

<u>**בשאלה זו**</u>: שייכות ל־NP ניתן להראות ע"י הגדרת יחס דו־מקומי מתאים ללא הוכחת קיום התכונות, או תיאור מ"ט א"ד יעילה ללא הוכחת נכונות ויעילות.

<u>הערה:</u> ניתן להניח שהקלט הוא תמיד קידוד חוקי של גרף דו־צדדי.

1. $L_1=\{G\ |$קיימת 2־צביעה שמאלית כך ש**בדיוק** שלושה מהצמתים השמאליים כחולים, ואף צומת ימני אינו אדום$\}$. (10 נק')
2. $L_2=\{(G,k)\ |$קיימת 2־צביעה שמאלית כך ש**בדיוק** k מהצמתים השמאליים כחולים, ואף צומת ימני אינו אדום$\}$. (10 נק')
3. $L_3=\{G\ |$קיימת 2־צביעה שמאלית כך שכל הצמתים הימניים הם סגולים$\}$. (10 נק')
   <u>רמז:</u> רדוקציה מ־SAT.

4 תכונות סגור (20 נק')

יהי $\Sigma=\{\text{a-z}\}\cup\{\text{A-Z}\}$, כלומר הא"ב הלטיני עם אותיות גדולות וקטנות (סה"כ 52 אותיות).

בהנתן מילה w מעל Σ, נסמן ב־ $\mathsf{IgnoreCase}\,(w)$ את קבוצת כל המילים הזהות ל־w עד כדי החלפה בין אותיות גדולות לאותיות קטנות.

נרחיב את הגדרת IgnoreCase לשפות: עבור שפה L,

$$\mathsf{IgnoreCase}\,(L)=\bigcup_{w\in L}\mathsf{IgnoreCase}\,(w)$$

למשל, עבור $L=\{aB,c\}$ מתקיים $\mathsf{IgnoreCase}\,(L)=\{ab,aB,Ab,AB,c,C\}$.

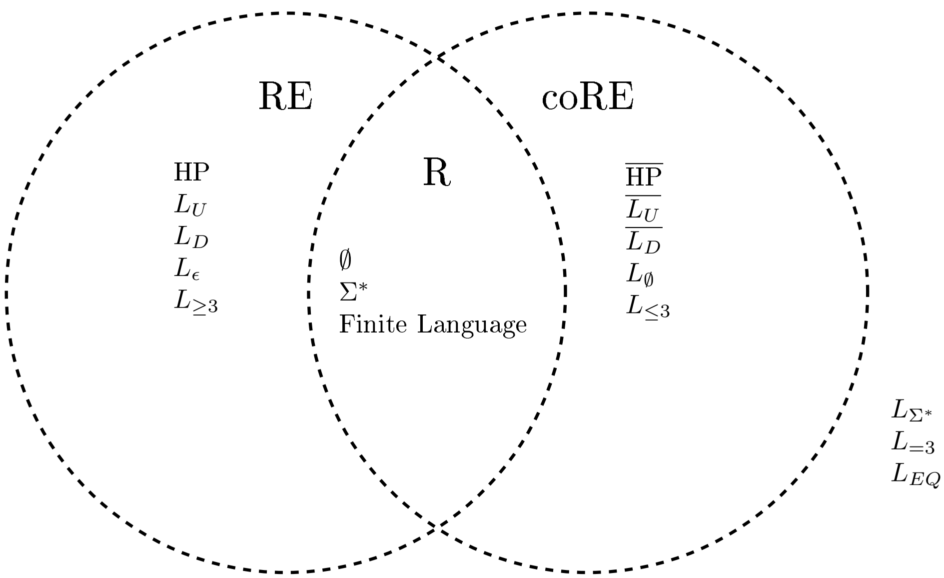
בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $L\in\mathrm{NP}$ אז $\mathsf{IgnoreCase}\,(L)\in\mathrm{NP}$. (7 נק')
2. אם $\mathsf{IgnoreCase}\,(L)\in\mathrm{NP}$ אז $L\in\mathrm{NP}$. (6 נק')
3. אם $L\in\mathrm{P}$ אז $\mathsf{IgnoreCase}\,(L)\in\mathrm{P}$. (7 נק')

דף עזר

אוסף שפות (כולן מעל א"ב $\{0,1\}$) והסווג שלהן:

- $\mathrm{HP} = \{(\langle M \rangle, x) \,|\, M \text{ halts on } x\}$.
- $L_U = \{(\langle M \rangle, x) \,|\, M \text{ accepts } x\}$.
- $L_D = \{\langle M \rangle \,|\, M \text{ accepts } \langle M \rangle\}$.
- $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \,|\, L(M) = \Sigma^*\}$.
- $L_\varepsilon = \{\langle M \rangle \,|\, \varepsilon \in L(M)\}$.
- $L_\emptyset = \{\langle M \rangle \,|\, L(M) = \emptyset\}$.
- $L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \,|\, |L(M)| \geq 3\}$.
- $L_{\leq 3} = \{\langle M \rangle \,|\, |L(M)| \leq 3\}$.
- $L_{=3} = \{\langle M \rangle \,|\, |L(M)| = 3\}$.
- $L_{EQ} = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \,|\, L(M_1) = L(M_2)\}$.



<u>סיבוכיות קולמוגורוב</u>: $\mathrm{K}(x)$ הוא מספר המצבים המינימלי של מכונת טיורינג בעלת $\Gamma = \{0,1,\flat\}$ שעל קלט ε כותבת את x.

<u>משפט</u>: הפונקציה $\mathrm{K}(x)$ אינה ניתנת לחישוב.

אוסף שפות NP-שלמות:

- $\mathrm{SAT} = \{\varphi \mid$ φ פסוק CNF ספיק$\}$
- $\mathrm{3SAT} = \{\varphi \mid$ φ פסוק 3CNF ספיק$\}$
- $\mathrm{3COL} = \{G \mid$ G הוא גרף 3-צביע$\}$
- $\mathrm{HC} = \{G \mid$ G הוא גרף לא מכוון בו קיים מעגל המילטוני$\}$
- $\mathrm{HL} = \{G \mid$ G הוא גרף לא מכוון בו קיים מסלול המילטוני$\}$
- $\mathrm{DHC} = \{G \mid$ G הוא גרף מכוון בו קיים מעגל המילטוני$\}$
- $\mathrm{DHL} = \{G \mid$ G הוא גרף מכוון בו קיים מסלול המילטוני$\}$
- $\mathrm{VC} = \{(G,k) \mid$ קיים ל- G כיסוי צמתים בגודל $k\}$
- $\mathrm{IS} = \{(G,k) \mid$ ב- G קיימת קבוצת צמתים בלתי תלויה בגודל $k\}$
- $\mathrm{CLIQUE} = \{(G,k) \mid$ ב- G קיים קליק בגודל $k\}$
- $\mathrm{SC} = \{(C_1, C_2, \ldots, C_l \subseteq [n], n, k) \mid$ קיים כיסוי של $[n]$ עם k קבוצות מתוך $(C_1, \ldots, C_l)\}$
- $\mathrm{01IP} = \{(A,b) \mid$ $b \in \mathbb{Z}^M$, $A \in \mathbb{Z}^{M\times N}$ וכן קיימת הצבה בינארית ל- x עבורה $Ax \geq b\}$
- $\mathrm{PARTITION} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \exists \mathrm{I} \subseteq \{1,...,n\}, \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\notin I} x_i\}$
- $\mathrm{SS} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, k) \mid x_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \exists \mathrm{I} \subseteq \{1,...,n\}, \sum_{i\in I} x_i = k\}$

רשימת שאלות פתוחות:

- $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP}$
- $\mathrm{NP} \stackrel{?}{=} \mathrm{coNP}$
- $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{PSPACE}$
- $\mathrm{NP} \stackrel{?}{=} \mathrm{PSPACE}$

בהצלחה!