תורת החישוביות (236343) — מועד א'
חורף תשפ"ב

31.1.2022

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: נטע דפני (אחראית), דור קצלניק, עידו רפאל, קיארה מיוחס, ויקטור קולובוב.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- משך הבחינה — שלוש שעות. בבחינה יש 3 שאלות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- מותר להשתמש בעט בלבד.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים, אלא אם נדרשתם לכך במפורש.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה, בתרגול או בתרגילי הבית, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע/ת".

בהצלחה!

1 סיווג שפות (29 נק')

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P, ב־$\mathrm{R} \setminus \mathrm{P}$, ב־$\mathrm{RE} \setminus \mathrm{R}$ או לא ב־RE.

1. $L_1 = \{\langle M \rangle \mid$ קיימות לכל היותר 5 מילים ש־M עוצרת עליהן$\}$ (8 נק')

2. $L_2 = \{\langle M \rangle \mid$ קיימות לפחות 5 מילים ב־HP ש־M עוצרת עליהן$\}$ (8 נק')

3. $L_3 = \{G \mid G$ מצמתי חצי לפחות שמכיל קליק קיים ב־$G\}$ (8 נק')

4. $L_4 = \{c \in \mathbb{N}^+ \mid$ קיים קירוב c־כפלי לפונקציה f, כאשר $f(G)$ פולטת את הגודל המקסימלי של קליק ב־$G\}$ (5 נק')
<u>תזכורת</u>: קירוב c־כפלי עבור $c \geq 1$ ל־ f הוא מ"ט פולינומית M שלכל G מקיימת: $\frac{1}{c} f(G) \leq f_M(G) \leq c \cdot f(G)$.

2 בלוקים (28 נק')

בלוק הוא מילה מעל הא"ב $\{0,1,?\}$. בהנתן בלוק $B\in\{0,1,?\}^n$ ומילה $x\in\{0,1\}^n$ באותו אורך, נאמר ש־B מכסה את x אם לכל $1\leq i\leq n$ כך ש־$b_i\neq ?$ מתקיים $x_i=b_i$.

<u>לדוגמה</u>: הבלוק $?0?$ מכסה את ארבע המילים $000,001,100,101$.

נסמן ב־$\mathsf{S}\left(B\right)$ את קבוצת כל המילים ש־B מכסה.

בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהבעיות הבאות האם קיימת מ"ט פולינומית שפותרת אותה. הוכיחו את תשובותיכם.

1. בהנתן בלוקים $B_1,...,B_m$ שכולם באותו אורך, פלוט מילה $w\in\bigcap_{i=1}^{m}\mathsf{S}\left(B_i\right)$ (מילה שמכוסה ע"י כל הבלוקים), או פלוט "אין" אם אין כזו. (7 נק')

2. בהנתן בלוקים $B_1, ..., B_m$ שכולם באותו אורך, פלוט מילה $w \notin \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{S}\left(B_i\right)$ באורך של הבלוקים (מילה **שלא** מכוסה ע"י אף אחד מהבלוקים), או פלוט "אין" אם אין כזו. (7 נק')

בהנתן שפה L מעל הא"ב $\{0,1,?\}$, נגדיר $\mathsf{S}(L)=\bigcup_{B\in L}\mathsf{S}(B)$.

לדוגמה: $\mathsf{S}(\{?1,0??\})=\{01,11,000,001,010,011\}$.

בהנחה ש-$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

3. לכל $L\subseteq\{0,1,?\}^*$, אם $L\in\mathrm{NP}$ אז $\mathsf{S}(L)\in\mathrm{NP}$. (7 נק')

4. לכל $L \subseteq \{0,1,?\}^*$, אם $\mathsf{S}(L) \in \mathrm{NP}$ אז $L \in \mathrm{NP}$. (7 נק')

3 השלמה אוטומטית (43 נק')

בהנתן שפה L נגדיר את הפונקציה AC_L (AutoComplete) באופן הבא: $\mathsf{AC}_L(x)$ – המילה הראשונה בסדר לקסיקוגרפי ב־L ש־x היא רישא (prefix) שלה, או לא מוגדרת אם אין כזו.

לדוגמה: עבור $L = \{10, 0100\}$ מתקיים $\mathsf{AC}_L(0) = 0100$, $\mathsf{AC}_L(10) = 10$, ו־$\mathsf{AC}_L(11)$ אינה מוגדרת.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם AC_L ניתנת לחישוב אז $L \in \mathrm{RE}$. (7 נק')

2. אם $L \in \mathrm{R}$ אז AC_L ניתנת לחישוב. (7 נק')

3. אם $L \in \mathrm{RE}$ אז AC_L ניתנת לחישוב. (7 נק')

4. עבור $L=\left\{x \mid \exists k : |x| = 2^{k}\right\}$ (שפת כל המילים שאורכן הוא חזקה של 2), הפונקציה AC_L ניתנת לחישוב בזמן פולינומי. (7 נק')

5. לכל $L \in \mathrm{P}$, הפונקציה AC_L ניתנת לחישוב בזמן פולינומי. (7 נק')

כעת נגדיר את הפונקציה המלאה BAC_L (Bounded AutoComplete) באופן הבא: $\mathsf{BAC}_L(x)$ – המילה הראשונה y בסדר לקסיקוגרפי ב־L כך ש־x היא רישא של y ו־$|y| \leq 2|x|$, או "אין" אם אין כזו.

הוכיחו, הפריכו או הוכיחו שקילות לבעיה פתוחה מוכרת:

6. לכל $L \in \mathrm{P}$, הפונקציה BAC_L ניתנת לחישוב בזמן פולינומי. (8 נק')