תורת החישוביות (236343) — מועד א'
אביב תש"ף

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: דור קצלניק (אחראי), אוהד טלמון, ענבר קסלסי, עידו רפאל, נטע דפני, שחר רומם פלד.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- משך הבחינה — שעתיים ו־45 דקות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- אפשר להשתמש **בעט** או **בעפרון** בתנאי שהכתב נראה היטב בסריקת התשובות.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

שאלה 1 (15 נקודות, שאלת מגן)

סעיף א' (8 נקודות)

1. הראו כי השפה $\mathrm{PARTITION}$ ב־NP ע"י הצגת יחס דו־מקומי מתאים. אין צורך להוכיח שהיחס מקיים את התכונות הנדרשות.
2. הציגו רדוקציה פולינומית $\mathrm{PARTITION} \leq_p \mathrm{SS}$ באופן מפורש. אין צורך להוכיח את תקפות הרדוקציה.

סעיף ב' (7 נקודות)

בשאלה זו נניח כי $\Sigma = \{0,1\}$. קבעו האם הפונקציה הבאה ניתנת לחישוב והוכיחו את תשובתכם.

הפונקציה f על קלט $\langle M \rangle$ מחזירה כפלט את המילה הראשונה לפי סדר לקיסקוגרפי ש־M מקבלת. אם אין מילה כזו אז f אינה מוגדרת.

שאלה 2 (35 נקודות)

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P, $\mathrm{R} \setminus \mathrm{P}$, $\mathrm{RE} \setminus \mathrm{R}$ או לא ב־RE. הוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1 = \{\langle M \rangle \mid$ M לא מקבלת אף מילה מאורך זוגי$\}$. (7 נק')
2. $L_2 = \{(\langle M \rangle, \sigma) \mid$ קיים קלט w כך שבמהלך ריצת M על w היא כותבת את התו σ על הסרט$\}$. (8 נק')
3. $L_3 = \{\langle M \rangle \mid L(M') = VC$ וגם $|\langle M' \rangle| < |\langle M \rangle|$ קיימת מ"ט M' כך ש־$\}$. (7 נק')
4. $L_4 = \{\varphi \mid$ $\varphi \in SAT$ וקיימת פסוקית ב־φ המכילה לפחות $\log_2(|\varphi|)$ ליטרלים שונים$\}$. (8 נק')
5. $L_5 = \{\varphi \mid$ $\varphi \in SAT$ וכל פסוקית ב־φ מכילה לפחות $\log_2(|\varphi|)$ ליטרלים שונים$\}$. (5 נק')

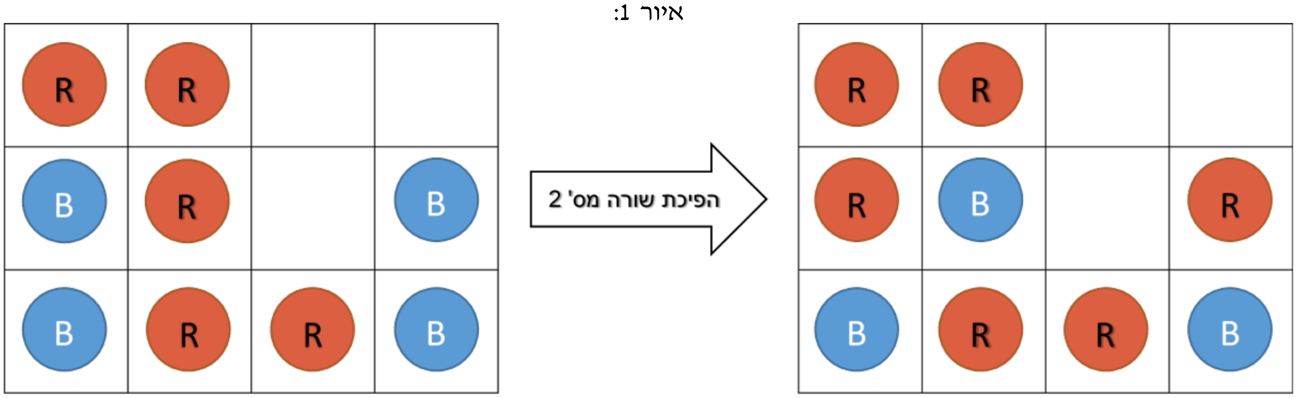
שאלה 3 (25 נקודות)

בשאלה זו נעסוק בבעיות לוח. נגדיר **לוח** בתור טבלה, מגודל כלשהו, לא בהכרח ריבועי. כל משבצת בלוח יכולה להיות ריקה או להכיל אבן. לאבן יש שני צדדים - אדום וכחול. אבן המונחת עם הצד הכחול/אדום כלפי מעלה תקרא כחולה/אדומה בהתאם.

נגדיר פעולה בלוח - **הפיכת שורות**: בפעולה זו בוחרים מספר כלשהו של שורות, והופכים את כל האבנים בשורות שבחרנו (מכחול לאדום, ולהיפך).

להלן איור המדגים כיצד יכול להראות לוח התחלתי (בצד שמאל), ואיך הוא יראה לאחר שבוצעה פעולה של הפיכת שורה מס' 2 בלוח.

איור 1:



בהנחה ש-$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב-P או לא. הוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1 = \{A \mid$ A הוא לוח וניתן להפוך שורות ב-A כך שלפחות חצי מהאבנים תהינה כחולות$\}$. (5 נק')
2. $L_2 = \{(A,k) \mid$ A הוא לוח וקיימות k שורות שלאחר הפיכתן (כולן ביחד), בכל עמודה תהיה אבן כחולה$\}$. (10 נק')
3. $L_3 = \{A \mid$ A הוא לוח וניתן להפוך שורות ב-A כך שבכל עמודה תיהיה אבן כחולה$\}$. (10 נק')

שאלה 4 (25 נקודות)

הגדרה: **דוחס אופטימלי** הוא מ"ט C כך שלכל קלט $x \in \Sigma^*$, C פולטת קידוד $\langle M \rangle$ של מ"ט M המקיימת:

1. $f_M(\varepsilon) = x$.
2. לכל M' המקיימת את (1), מתקיים בנוסף ש־$|\langle M \rangle| \le |\langle M' \rangle|$.

כמו כן, דוחס אופטימלי **חסום** מוגדר באופן דומה לדוחס אופטימלי, פרט לכך שבתנאי (1) דורשים ש־M בריצתה על ε תחזיר כפלט את x תוך $(|x|+1)^3$ צעדים לכל היותר.
הוכיחו / הפריכו את הטענות הבאות:

1. קיים דוחס אופטימלי חסום C_1. (8 נק')
2. אם $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ אז קיים דוחס אופטימלי חסום C_2 שרץ בזמן פולינומי. (9 נק')
3. קיים דוחס אופטימלי C_3. (8 נק')