תורת החישוביות (236343) — מועד א'
חורף תשפ"א

31/01/2021

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: נטע דפני (אחראית), אוהד טלמון, דור קצלניק, עידו רפאל, שחר רומם פלד.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור ומתקיימת באופן וירטואלי לפי הנהלים הטכניוניים.
- משך הבחינה – שלוש שעות. בבחינה יש 4 שאלות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורף למחברת זו דף עזר (בעמוד האחרון).
- אפשר להשתמש בעט או בעפרון בתנאי שהכתב נראה היטב בסריקת התשובות.
- מספיק לכתוב תשובות תמציתיות ולעניין, נסו לא לבזבז זמן על כתיבה מיותרת. לכל השאלות יש תשובות נכונות קצרות.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע/ת".

בהצלחה!

1 סיווג שפות (35 נק')

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P, ב־$\mathrm{R} \setminus \mathrm{P}$, ב־$\mathrm{RE} \setminus \mathrm{R}$ או לא ב־RE.

1. $L_1 = \{\langle M \rangle \mid$ מ"ט בינארית עם בדיוק 50 מצבים שעוצרת על כל קלט $M\ \}$. (5 נק')
2. $L_2 = \{\langle M \rangle \mid$ (אין דרישה לגבי מספר המילים מאורך אי זוגי) מקבלת בדיוק 3 מילים שאורכן זוגי $M\ \}$. (10 נק')
3. $L_3 = \{G \mid$ מהצמתים $\left\lfloor \sqrt{|V|} \right\rfloor$ הוא גרף לא מכוון שקיים בו מסלול פשוט המכיל בדיוק $G = (V, E)\ \}$. (10 נק')
4. $L_4 = \{(x, m) \mid K(x) < m\}$, כאשר K היא סיבוכיות קולמוגורוב. (10 נק')

2 סיווג פונקציות (20 נק')

לכל אחת מהפונקציות f הבאות, קבעו האם הטענה כי f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי היא: (א) נכונה; (ב) לא נכונה; או (ג) שקולה ל־$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

בסעיפים בהם הטענה שקולה ל־$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, יינתן ניקוד חלקי לסטודנטים שיוכיחו את אחד הכיוונים.

<u>הערה</u>: כרגיל, אנו מניחים כאן שכל מחרוזת מתפרשת כקלט מהפורמט המצופה.

1. על קלט (a, b) (שני מספרים טבעיים בייצוג בינארי), f_1 פולטת את a^b (בייצוג בינארי). (10 נק')
2. על רשימת מספרים שלמים $(x_1, ..., x_m)$ בייצוג בינארי, f_2 פולטת את הערך המוחלט הכי קטן של סכום של תת קבוצה $I \subseteq [m]$ **לא ריקה**. כלומר, $f_2(x_1, ..., x_m) = \min_{\emptyset \subsetneq I \subseteq [m]} \left| \sum_{i \in I} x_i \right|$. לדוגמה, $f_2(7, 3, -9) = 2$. (10 נק')

3 וריאציות על SAT (30 נק')

נאמר ששתי פסוקיות CNF הן k־קשירות אם יש להן k (או יותר) משתנים משותפים.

נאמר שפסוק CNF $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ הוא k־קשיר, אם כל שתי פסוקיות C_i, C_j ב־φ הן k־קשירות.
לדוגמה: הפסוק $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4})$ הוא 1־קשיר אבל לא 2־קשיר.

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא (א) ב־P או (ב) NP־שלמה.

<u>בשאלה זו</u>: שייכות ל־NP ניתן להראות ע"י הגדרת יחס דו מקומי מתאים ללא הוכחת קיום התכונות, או תיאר מ"ט א"ד יעילה ללא הוכחת נכונות ויעילות.

1. $L_1 = \{\varphi \mid$ פסוק CNF **ספיק** בו כל שתי פסוקיות הן **לא** 1־קשירות $\varphi\}$. (10 נק')
2. $L_2 = \{\varphi \mid$ פסוק CNF **ספיק שהוא** 2־קשיר $\varphi\}$. (10 נק')
3. $L_3 = \{(\varphi, k) \mid$ פסוק CNF (לא בהכרח ספיק), ויש לו תת־פסוק בעל k פסוקיות **שהוא** 1־קשיר $\varphi\}$. (10 נק')
   הערה: תת־פסוק של φ הוא פסוק שהפסוקיות בו הן פסוקיות מ־φ.

שאלה 4 – בעמוד הבא

שאלה 4 – בעמוד הבא

4 מכונות טיורינג לומדות (15 נק')

תהי $F:\{0,1\}^*\times\{0,1\}^*\to\{0,1\}^*$ פונקציה מלאה. אינטואיטיבית, $F(g,x)$ מגדירה את הפלט $g(x)$ של פונקציה המתוארת ע"י המחרוזת g על קלט x.

תהי M מ"ט שמקבלת כקלט סדרת זוגות $\langle(x_1,g(x_1)),...,(x_m,g(x_m))\rangle$ ופולטת מחרוזה g'. אינטואיטיבית, g היא פונקציה לא ידועה ומטרת M היא להשתמש בדוגמאות הקלט־פלט כדי לפלוט השערה g' לגבי מהי g, שעקבית עם כל הדוגמאות.

<u>פורמלית:</u> נאמר ש־M היא **לומדת** של F, אם לכל $g\in\{0,1\}^*$ ולכל $x_1,...,x_m$, הפלט של M על $\langle(x_1,F(g,x_1)),...,(x_m,F(g,x_m))\rangle$ הוא g' כך ש־$F(g',x_i)=F(g,x_i)$ לכל $1\le i\le m$.

לדוגמה: עבור g שמייצגת פולינום באמצעות וקטור מקדמים ועבור מספר שלם x, תהי $F(g,x)$ הפונקציה שמחזירה את פלט הפולינום המיוצג ע"י g על הקלט x. אז לומדת M עבור F צריכה להחזיר פולינום שעובר בכל הנקודות הנתונות. למשל, על הקלט $\langle(0,1),(2,5)\rangle$, הפלטים השונים ש־$M$ יכולה להחזיר כוללים בין היתר את $(2,1)$ (שמייצג את הפולינום $2x+1$) ואת $(1,0,1)$ (שמייצג את הפולינום x^2+1).

שימו לב כי הדרישה על הפלט של M מתייחסת רק למקרה שהדוגמאות הגיעו מפונקציה g כלשהי, ובמקרה ש"אין פתרון" אין הגבלה על התנהגות M.

הוכיחו/הפריכו:

1. לכל פונקציה מלאה וניתנת לחישוב $F(g,x)$ יש לומדת. (5 נק')

נאמר שלומדת L עבור F היא **לומדת יעילה** אם היא רצה בזמן פולינומי (על כל הקלטים, גם במקרה ש"אין פתרון").

בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם יש לה לומדת יעילה.

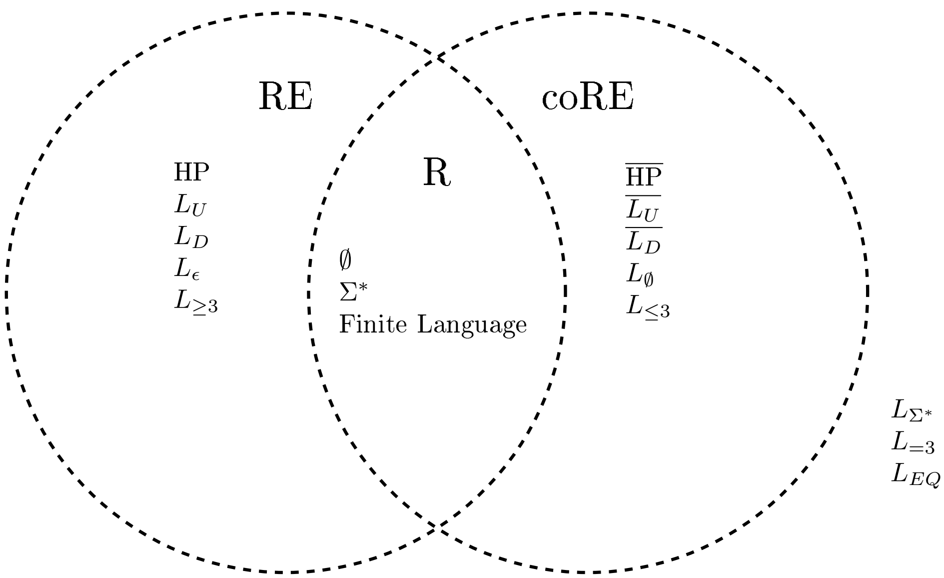
<u>הערה:</u> כרגיל, אנו מניחים כאן שכל מחרוזת מתפרשת כקלט מהפורמט המצופה.

2. $F_2(\varphi,\alpha)=\varphi(\alpha)$ כאשר φ **פסוק** CNF ו־α השמה למשתנים של φ. (5 נק')
3. $F_3(\alpha,\phi)=\phi(\alpha)$ כאשר α היא השמה ל־m משתנים ו־ϕ **פסוקית** מעל המשתנים (המכילה ליטרל אחד או יותר). (5 נק')
שימו לב שכאן ההשמה היא הארגומנט הראשון של F, בניגוד לסעיף הקודם.

דף עזר

אוסף שפות (כולן מעל א"ב $\{0,1\}$) והסווג שלהן:

- $\mathrm{HP} = \{(\langle M \rangle, x) \mid M \text{ halts on } x\}$.
- $L_U = \{(\langle M \rangle, x) \mid M \text{ accepts } x\}$.
- $L_D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ accepts } \langle M \rangle\}$.
- $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$.
- $L_\varepsilon = \{\langle M \rangle \mid \varepsilon \in L(M)\}$.
- $L_\emptyset = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$.
- $L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$.
- $L_{\leq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \leq 3\}$.
- $L_{=3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 3\}$.
- $L_{EQ} = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \mid L(M_1) = L(M_2)\}$.



<u>סיבוכיות קולמוגורוב:</u> $\mathrm{K}(x)$ הוא מספר המצבים המינימלי של מכונת טיורינג בעלת $\Gamma = \{0,1,\flat\}$ שעל קלט ε כותבת את x.

<u>משפט:</u> הפונקציה $\mathrm{K}(x)$ אינה ניתנת לחישוב.

אוסף שפות NP-שלמות:

- $\mathrm{SAT}=\{\varphi \mid$ פסוק CNF ספיק $\varphi\}$
- $\mathrm{3SAT}=\{\varphi \mid$ פסוק 3CNF ספיק $\varphi\}$
- $\mathrm{3COL}=\{G \mid$ הוא גרף 3-צביע $G\}$
- $\mathrm{HC}=\{G \mid$ הוא גרף לא מכוון בו קיים מעגל המילטוני $G\}$
- $\mathrm{HL}=\{G \mid$ הוא גרף לא מכוון בו קיים מסלול המילטוני $G\}$
- $\mathrm{DHC}=\{G \mid$ הוא גרף מכוון בו קיים מעגל המילטוני $G\}$
- $\mathrm{DHL}=\{G \mid$ הוא גרף מכוון בו קיים מסלול המילטוני $G\}$
- $\mathrm{VC}=\{(G,k) \mid$ קיים ל- G כיסוי צמתים בגודל $k\}$
- $\mathrm{IS}=\{(G,k) \mid$ ב- G קיימת קבוצת צמתים בלתי תלויה בגודל $k\}$
- $\mathrm{CLIQUE}=\{(G,k) \mid$ ב- G קיים קליק בגודל $k\}$
- $\mathrm{SC}=\{(C_1,C_2,\dots,C_l\subseteq[n],n,k) \mid$ קיים כיסוי של $[n]$ עם k קבוצות מתוך $(C_1,\dots,C_l)\}$
- $\mathrm{01IP}=\{(A,b) \mid$ $b\in\mathbb{Z}^M$, $A\in\mathbb{Z}^{M\times N}$ וכן קיימת הצבה בינארית ל- x עבורה $Ax\geq b\}$
- $\mathrm{PARTITION}=\{(x_1,x_2,...,x_n) \mid x_i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\exists \mathrm{I}\subseteq\{1,...,n\},\ \sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\notin I}x_i\}$
- $\mathrm{SS}=\{(x_1,x_2,...,x_n,k) \mid x_i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\exists \mathrm{I}\subseteq\{1,...,n\},\ \sum_{i\in I}x_i=k\}$

רשימת שאלות פתוחות:

- $\mathrm{P}\stackrel{?}{=}\mathrm{NP}$
- $\mathrm{NP}\stackrel{?}{=}\mathrm{coNP}$
- $\mathrm{P}\stackrel{?}{=}\mathrm{PSPACE}$
- $\mathrm{NP}\stackrel{?}{=}\mathrm{PSPACE}$

בהצלחה!