תורת החישוביות – תרגול מספר 1
מכונת טיורינג

מבוא

תורת החישוביות (שנלמדת בחציו הראשון של הקורס) ותורת הסיבוכיות (שנלמדת בחציו השני) עוסקות שתיהן ב**מגבלות** של חישובים. בשני המקרים אנו מנסים להבין מה ניתן לחשב (בכלל, בחציו הראשון של הקורס; באופן יעיל מבחינת צריכת משאבים, בחציו השני של הקורס) ומה לא ניתן. כדי להוכיח באופן מתמטי מדויק שדברים מסויימים אינם ניתנים לחישוב, הכרחי להגדיר באופן מתמטי ומדויק את משמעות המילה "חישוב". מכיוון שלמילה זו יכולות להיות פרשנויות רבות ושונות, אנו מצטמצמים לעיסוק בחישוב שמבצע מודל אחד ספציפי – מכונת טיורינג. בתרגול זה נכיר את המודל הזה; בתרגול הבא ניווכח בכך שהצמצום למודל זה לא מגביל באופן משמעותי את מה שאנו מנסים לבצע בקורס.

מבחינה היסטורית, המודל הוצע בידי אלן טיורינג בשנת 1936 במאמרו "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". לא היה זה המודל הראשון שתפס באופן כללי את מושג החישוב, אך מבחינות רבות זה היה המודל ה"מוצלח" ביותר, בשל פשטותו ואופיו האינטואיטיבי. כאשר עוסקים במודל זה יש לזכור כי הוא אינו מיועד לשימוש בפתרון של בעיות מעשיות – את האלגוריתמים שבהם נשתמש בקורס נציג באופן מילולי, ולא פורמלית כפי שעושים, למשל, בקורס באוטומטים ושפות פורמליות; המודל מיועד לכך שנוכיח עליו תוצאות **קושי**, כלומר שישנם דברים שהוא אינו מסוגל לעשות. לשם כך, נוח לעבוד עם מודל פשוט ואינטואיטיבי שכזה.

תיאור המודל

מכונת טיורינג בנויה משלושה מרכיבים: סרט המחולק לתאים שכל אחד מהם יכול להכיל תו בודד, כך שהוא אינסופי לכיוון ימין אך סופי לכיוון שמאל (ניתן למספר את תאיו ב־$0, 1, 2, \ldots$); ראש קורא וכותב הנע על הסרט, ותמיד רואה בדיוק תא אחד של הסרט ויכול לנוע לכל היותר צעד אחד ימינה או שמאלה; וקבוצת מצבי בקרה סופית. רבים מהפרמטרים הללו הם שרירותיים; נראה בהמשך שכוחו של המודל לא ישתנה באופן מהותי אם נרשה מספר רב של סרטים, סרט אינסופי לשני הכיוונים, ראש שיכול לנוע מספר צעדים לצדדים וכן הלאה. לעומת זאת, סופיותה של קבוצת מצבי הבקרה היא קריטית.

חישוב של המכונה מתבצע כך: המכונה מתחילה את החישוב כאשר הראש נמצא בתא השמאלי ביותר, ועל הסרט כתובה מילה סופית כלשהי החל מהתא השמאלי ביותר, ושאר הסרט פרט למילה ריק. המכונה מבצעת סדרה של צעדים כאשר בכל צעד היא פועלת בהתאם למצב הבקרה הנוכחי שלה ולתוכן התא שמעליו נמצא הראש הקורא. בכל צעד המכונה יכולה לשנות את תוכן התא שמעליו נמצא הראש הקורא, לשנות את מצב הבקרה שלה, ולהזיז את הראש הקורא צעד אחד ימינה או שמאלה (או להותיר אותו במקום). המכונה מסיימת את החישוב שלה אם היא נכנסת למצב בקרה שמסומן כמצב סופי, ובמקרה זה הפלט שלה על מילת הקלט הוא המילה שכתובה החל מהתא השמאלי ביותר בסרט ועד לתא שמשמאל לראש (אם הראש נמצא בתא השמאלי ביותר, הפלט הוא "המילה הריקה"; הגדרת הפלט מהונדסת בכוונה כדי להבטיח שניתן יהיה להוציא את המילה הריקה כפלט).

פורמלית, ניתן לתאר מכונת טיורינג באמצעות $M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, \flat, \delta)$, כאשר:

Q היא קבוצה סופית שאבריה הם מצבי הבקרה של המכונה.

$q_0 \in Q$ הוא מצב הבקרה ההתחלתי של המכונה.

$F \subseteq Q$ היא קבוצת מצבי הבקרה הסופיים – מצבים שכאשר המכונה נכנסת אליהם החישוב נגמר (לעת עתה נזדקק רק לאחד כזה אך בהקשר של מכונות לזיהוי שפות שני מצבים סופיים מועילים יותר).

Γ היא א"ב הסרט – קבוצה סופית שאבריה מכונים "אותיות". כל תא בסרט מכיל איבר מתוך Γ.

$\Sigma \subset \Gamma$ היא א"ב הקלט. המילה שכתובה על הסרט בתחילת ריצת המכונה חייבת להיות כתובה רק עם אותיות מא"ב זה. בקורס זה נשתמש תמיד בא"ב הבינארי $\Sigma = \{0,1\}$ אלא אם נאמר במפורש אחרת. די בא"ב זה שכן ניתן לייצג ביעילות כל תו בייצוג בינארי (להבדיל מא"ב אונרי שכולל רק תו אחד, ובו הייצוג אינו יעיל).

$\flat \in \Gamma \backslash \Sigma$ הוא התו הריק, שמסמן שהתא שבו הוא נמצא בסרט לא כולל תוכן. בתחילת ריצת המכונה כל תאי הסרט פרט לאלו שכוללים את הקלט מכילים את $\flat$. במפורש דורשים כי $\flat$ לא תהיה שייכת לא"ב הקלט כדי שיהיה ניתן לקבוע חד משמעית היכן הקלט נגמר.

$\delta : (Q \backslash F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ היא פונקצית המעברים של המכונה - ה"קוד" של התוכנית שהיא מריצה. לכל מצב בקרה שאינו סופי ותו מא"ב הסרט מותאם אופן הפעולה של המכונה כאשר היא במצב בקרה זה וקוראת תו זה - מצב הבקרה החדש אליו היא הולכת, התו החדש שהיא כותבת על הסרט (שיכול להיות זהה לתו שנקרא, כך שהמכונה אינה משנה מאום), והכיוון שאליו ילך הראש הקורא - שמאלה (L), ימינה (R) או הישארות במקום (S).

קונפיגורציות

האופן הנוח ביותר לתיאור החישוב שמבצעת מכונה הוא באמצעות קונפיגורציות. קונפיגורציה היא מעין צילום מסך של החישוב שכולל את כל האינפורמציה על אותו הרגע. היא כוללת:

1. את מצב הבקרה הנוכחי של המכונה (איבר של Q).
2. את מיקום הראש הקורא (מספר טבעי).
3. את תוכן הסרט עד לנקודה שהחל ממנה והלאה ישנם רק תווי $\flat$ (מחרוזת סופית של תווים מתוך א"ב הסרט). שימו לב - זהו תוכן **כל** הסרט, לא רק מה שמשמאל לראש.

פורמלית מסמנים קונפיגורציה כך: $[q, i, w]$ כאשר $q \in Q$, $i \in \mathbb{N}$ ו־$w \in \Gamma^*$.

הקונפיגורציה ההתחלתית של המכונה בריצתה על הקלט x היא $[q_0, 0, x]$.

קונפיגורציה סופית היא כל קונפיגורציה $[q, i, w]$ בה $q \in F$. במקרה כזה, הפלט של המכונה הוא $w[0 \ldots i-1]$ (תוכן w מתא 0 ועד לתא $i-1$).

לכל קונפיגורציה נקבעת הקונפיגורציה העוקבת שלה באופן יחיד על פי פונקצית המעברים δ.

בהינתן מכונת טיורינג M, הפונקציה שהיא מחשבת f_M, מוגדרת על ידי $f_M(x)$ הוא הפלט של המכונה M על x בתנאי ש־M עוצרת, ואחרת $f_M(x)$ אינה מוגדרת. שימו לב כי כאן אנו מאפשרים לפונקציות להיות **חלקיות**, כלומר לא מוגדרות לכל $x \in \Sigma^*$. גם "הפונקציה הריקה" שאינה מוגדרת לאף קלט היא לגיטימית (ומחושבת על ידי מכונה M שאינה עוצרת על אף קלט אלא רצה ימינה עוד ועוד).

דוגמאות צעצוע

1. מכונה שמחשבת את הפונקציה $f(x) = \varepsilon$ תאופיין על ידי פונקצית המעברים הבאה: $\delta(q_0, \sigma) = (q_f, \sigma, S)$ לכל $\sigma \in \Gamma$.
2. מכונה שהולכת תמיד ימינה מבלי לעצור תאופיין על ידי פונקצית המעברים הבאה: $\delta(q_0, \sigma) = (q_0, \sigma, R)$, לכל $\sigma \in \Gamma$. מכונה זו מחשבת את הפונקציה שאינה מוגדרת לאף קלט.
3. מכונה שמחשבת את $f(x) = 1^{|x|}$ (ממירה את x למחרוזת של 1־ים מאותו אורך כמו x): $\delta(q_0, \sigma) = (q_0, 1, R)$ לכל $\sigma \in \Sigma$, ו־$\delta(q_0, \flat) = (q_f, \flat, S)$ (האם ה־S הכרחי?)

דוגמה רצינית: $f(x) = x + 1$

נבנה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה $f(x) = x + 1$ כאשר x הוא מספר בייצוג בינארי. נניח כי $f(\varepsilon) = \varepsilon$, כאשר ε היא המילה הריקה ־ סדרת אותיות שאין בה איברים.

הרעיון פשוט: כדי לחבר 1 למספר בבסיס בינארי, יש ללכת לקצה הימני של המספר (ה־Least significant bit), וכל עוד הסיבית שרואים היא 1, לשנות אותה ל־0 ולזוז צעד אחד שמאלה. ברגע שבו מגיעים לסיבית שהיא 0 לשנות אותה ל־1, לחזור לקצה הימני של המספר (כדי להוציא את המספר החדש כפלט) ולסיים.

הבעיה בשיטה זו היא במקרה שבו ה־Carry מגיע עד לסיבית המשמעותית ביותר. במקרה זה יש להזיז את כל המספר ימינה כדי "לפנות מקום" לסיבית החדשה. ניתן לעקוף זאת על ידי בדיקה מראש האם המספר מורכב רק מ־1־ים, אך על מנת להדגים כיצד ניתן להזיז מחרוזות ימינה ושמאלה על הסרט נמנע במכוון מהתחכמויות.

נכתוב כאן את טבלת המעברים של המכונה המתאימה. למכונה יהיה רק מצב סופי אחד – q_f. א"ב הסרט יהיה $\{0, 1, \flat, \$\}$ כאשר $\$$ ישמש אותנו לצורך סימון ראשית הסרט.

המצבים:

q_0: המצב ההתחלתי.

q_{SR}^0, q_{SR}^1: מצבים שמשמשים להזזת הקלט ימינה (Shift Right). המספר שלמעלה "זוכר" מה התו שהראש מחק קודם וצריך לכתוב כעת.

q_{add}: המצב שבו מתבצעת פעולת החיבור עצמה.

q_1: מצב שהולך ימינה לצורך הזזת כל הקלט שמאלה, משנגמר החיבור (לא דרוש אם במהלך החיבור נמחק ה־$\$$ שבהתחלה).

$q_{SL}^\flat, q_{SL}^0, q_{SL}^1$: כמו ה־$q_{SR}$־ים, רק שמאלה.

q_R: מצב שהולך ימינה לקראת סיום הריצה (כדי להחזיר את הפלט הנכון).

טבלת המעברים:

	0	1	$\flat$	$\$$
q_0	$q_{SR}^0, \$, R$	$q_{SR}^1, \$, R$	q_f	-
q_{SR}^0	$q_{SR}^0, 0, R$	$q_{SR}^1, 0, R$	$q_{add}, 0, S$	-
q_{SR}^1	$q_{SR}^0, 1, R$	$q_{SR}^1, 1, R$	$q_{add}, 1, S$	-
q_{add}	$q_1, 1, R$	$q_{add}, 0, L$	-	$q_R, 1, R$
q_1	$q_1, 0, R$	$q_1, 1, R$	$q_{SL}^\flat, \flat, L$	-
$q_{SL}^\flat$	$q_{SL}^0, \flat, L$	$q_{SL}^1, \flat, L$	-	-
q_{SL}^0	$q_{SL}^0, 0, L$	$q_{SL}^1, 0, L$		$q_R, 0, R$
q_{SL}^1	$q_{SL}^0, 1, L$	$q_{SL}^1, 1, L$		$q_R, 1, R$
q_R	$q_R, 0, R$	$q_R, 1, R$	$q_f, \flat, S$	-