תורת החישוביות (236343) – מועד א'
חורף תשע"ט

18.2.2019

מרצים: פרופ' איל קושלביץ.

מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), מיכל דורי, דוד נאורי, אבי קפלן, דור קצלניק.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על אף סעיף, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- יש להוכיח כל טענה אחרת בה אתם משתמשים, אלא אם צוין במפורש אחרת.
- ניתן לקבל בכל סעיף 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

שאלה 1, 15 נק' (ת"ב 2, אפיונים אלטרנטיביים של RE)

1. כזכור, קבוצה אינסופית L היא בת מניה (או ניתנת למניה) אם קיימת פונקציה מלאה ועל $f : \mathbb{N} \to L$.

   הראו כי עבור כל שפה L לא ריקה, $L \in RE$ אם ורק אם קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to L$ שהיא מלאה, על **וניתנת לחישוב**. (10 נק')

2. מוודא V עבור שפה L הוא מכונת טיורינג בעלת שני מצבים סופיים, q_{acc}, q_{rej}, המקבלת זוג קלטים, (w,π) כאשר $w \in \Sigma^*$ היא המילה ש־V בודק את שייכותה ל־L ו־$\pi \in \Sigma^*$ היא "הוכחה" לשייכות w ל־L ובה V יכול להיעזר.

לכל זוג (w,π) המוודא **חייב** לעצור. נסמן $V(w,\pi) = \mathrm{acc}$ אם המוודא עוצר במצב q_{acc} על הקלט (w,π), ונסמן $V(w,\pi) = \mathrm{rej}$ אם הוא עוצר ב־q_{rej}. בנוסף, על המוודא לקיים את התכונות הבאות:

- (שלמות) אם $w \in L$ אז קיימת π כך ש־$V(w,\pi) = \mathrm{acc}$ (עבור טענה נכונה קיימת הוכחה שאותה המוודא יכול לאשר).
- (נאותות) אם $w \notin L$ אז לכל π מתקיים $V(w,\pi) = \mathrm{rej}$ (עבור טענה שגויה, אי אפשר "לעבוד" על המוודא באמצעות "הוכחה" שגויה).

הראו כי עבור כל שפה $L \in \mathrm{RE}$, קיים מוודא V עבור השפה L. (5 נק')

הערה: שימו לב שבתרגיל הבית הייתם צריכים להראות שני כיוונים, ופה אתם מתבקשים להראות רק כיוון אחד.

שאלה 2, 10 נק' (ת"ב 9, טענות והשלכותיהן)

עבור הטענות הבאות קבעו האם הן נכונות, שגויות או שקולות לבעיה פתוחה מוכרת (לדוגמא, אם טענה גוררת את נכונות או אי נכונות $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ מן הסתם איננו מצפים שתגידו אם היא נכונה או שגויה).

1. קיימת מ"ט פולינומית אשר בהנתן פסוק CNF φ: אם φ ספיק, פולטת השמה מספקת ל־φ, ואחרת פולטת השמה כלשהי ל־φ. (5 נק')

2. אם קיימת ל-SAT מ"ט הרצה בזמן $n^{O(\log n)}$ אז לכל $L \in \mathrm{NP}$ קיימת מ"ט שרצה בזמן $n^{O(\log n)}$. (5 נק')

שאלה 3, 25 נק'

עבור שפה L נגדיר $L^{\geq k} = \{w \in L \mid |w| \geq k\}$. כלומר $L^{\geq k}$ היא אוסף כל המילים ב־L שאורכן הוא לפחות k.
עבור השפות הבאות קבעו האם הן ב־R והאם הן ב־RE:

1. $L_1 = \left\{\langle M\rangle \mid \exists k: \;\; L(M)^{\geq k} \cap HP^{\geq k} \neq \emptyset\right\}$ (10 נק')

2. $L_2 = \left\{ \langle M \rangle \mid \exists k : \ L(M)^{\geq k} = HP^{\geq k} \right\}$ (10 נק')

3. $L_3 = \left\{ \langle M \rangle \mid \exists k: \ \ L\left(M\right)^{\geq k} = \overline{HP}^{\geq k} \right\}$ (5 נק')

שאלה 4, 25 נק'

נאמר שפסוק CNF φ הוא **ספיק באמצעות** k **ג'וקרים** אם קיימים k משתנים $x_{i_1}, \dots x_{i_k}$ ב־φ כך שהפסוק φ' המתקבל מהסרת כל הפסוקיות בהן מופיעים המשתנים הללו ב־φ (בחיוב או בשלילה), הוא ספיק.

לדוגמא ־ עבור הפסוק $\varphi = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee x_4)$, אם x_2 הוא ג'וקר ב־φ, הפסוק φ' המתקבל הוא הפסוק $\varphi' = (x_4 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee x_4)$.

הערה: לצורך ההגדרה נניח כי פסוק ריק (כלומר פסוק ללא פסוקיות) הוא ספיק.

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או שהיא NP־שלמה.

1. $L_1 = \{\varphi \mid \text{הוא פסוק 3CNF ספיק באמצעות 3 ג'וקרים } \varphi\}$ (10 נק')

2. $L_2 = \{\varphi \mid \text{ הוא פסוק } \varphi \text{ ספיק באמצעות 3 ג'וקרים } 2\text{CNF}\}$ (7 נק')

3. $L_3 = \{(\varphi, k) \mid$ φ הוא פסוק $\mathrm{2CNF}$ ספיק באמצעות k ג'וקרים$\}$ (8 נק')

שאלה 5, 25 נק'

עבור שתי מכונות טיורינג M_1 ו־M_2 נאמר שהן **לא מסכימות** על מילה x, אם M_1 מקבלת את x ו־M_2 דוחה את x או אם M_1 דוחה את x ו־M_2 מקבלת את x.

נסמן ב־ $\mathrm{Disagree}\left(M_1, M_2\right) = \{x \mid x$ לא מסכימות על M_2 ו־$M_1\}$, את אוסף המילים עליהן M_1 ו־M_2 לא מסכימות.

נגדיר את מחלקת השפות ־ $\mathcal{PA} = \{L \mid \mathrm{Disagree}\left(M_1, M_2\right) = L$ קיימות M_1 ו־M_2 **דטרמיניסטיות פולינומיות** כך ש־$\}$.

הוכיחו/הפריכו <u>בקצרה</u> את הטענות הבאות:

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathcal{PA}$. (5 נק')

2. $\mathcal{PA} \subseteq \mathrm{P}$. (5 נק')

כעת נגדיר את המחלקה - $\mathcal{NPA} = \{L \mid \text{Disagree}\left(M_1, M_2\right) = L$ כך ש- M_2 ו- M_1 קיימות **אי־דטרמיניסטיות** פולינומיות $\}$.

הערה: שימו לב שמכונות טיורינג א"ד לא מסכימות אם אחת מקבלת והשנייה דוחה בהתאם להגדרת קבלה ודחייה של מ"ט אי דטרמיניסטיות.

הוכיחו/הפריכו <u>בקצרה</u> את הטענות הבאות:

3. $\text{coNP} \subseteq \mathcal{NPA}$. (5 נק')

4. $\mathcal{NPA} = \text{R}$. (5 נק')

נגדיר את השפה $\{\varphi_1$ ו־φ_2 הם פסוקי CNF כך ש**בדיוק** אחד מבין φ_1, φ_2 הוא ספיק $| \ \oplus\mathrm{SAT} = \{\varphi_1, \varphi_2$

5. לכל שפה $L \in \mathcal{NPA}$ מתקיים $L \leq_p \oplus\mathrm{SAT}$. (5 נק')