תרגול 3
חיפוש יוריסטי

מבוא לבינה מלאכותית (236501)

מדעי המחשב, טכניון

חורף 2022-3

A^* wA^* A_{ϵ}^*

נושאי התרגול

- חיפוש מיודע / Heuristic Search
- Greedy Best First
- A*
- Weighted-A*
- A_{ϵ}^{*}

Heuristic Search / חיפוש מיודע

- **<u>מטרה</u>:** להאיץ את החיפוש.

- **<u>אמצעי</u>:** מידע נוסף על הבעיה.
  - למשל: בעיית ניווט – כיוון ומרחק למטרה

Heuristic Search / חיפוש מיודע

- **<u>הגדרה</u>:**
  פונקציה $h : S \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$
  נקראת **פונקציה יוריסטית**.
- **<u>משמעות</u>:**
  תפקיד h הוא להעריך מרחק לפתרון.

חיפוש מיודע / Heuristic Search

- איך אלגוריתם החיפוש ייעזר ביוריסטיקה?
- יעדיף להמשיך למצבים בעלי ערך יוריסטי <u>נמוך</u>.

דוגמא: בעיית ניווט בעיר

- <u>קב' ה**מצבים**</u>:
  - הנקודות במפה.

- <u>פונק' עוקב</u>: **succ**(**state**)
  - נק' במפה שיש כביש מהנק' **state** אליהן.

דוגמא: בעיית ניווט בעיר

- **<u>מטרה</u>:**
  - למצוא **מסלול** זול ביותר מה**מוצא I** ל**יעד G**.

- **<u>פונק' עלות</u>:** (על מה מוגדרת? איך מוגדרת?)
  - מוגדרת על **כביש**.
  - **אורך הכביש** שמחבר את 2 הנק'.

יוריסטיקות לבעיית ניווט בעיר

<u>דוגמא 1</u>:

- מרחק אוקלידי (אווירי)
- $h_E(P) = \sqrt{(G_x - P_x)^2 + \left(G_y - P_y\right)^2}$

<u>דוגמא 2</u>:

- מרחק מנהטן
- $h_{MD}(P) = |G_x - P_x| + \left|G_y - P_y\right|$

Perfect & Admissible heuristics

- **<u>יוריסטיקה מושלמת</u>**
  - מעריכה במדויק את המרחק למטרה בדרך הזולה ביותר.

$$h^*(s) = h_{perfect}(s) \equiv \min_{\substack{path:\, s\to\cdots\to goal \\ goal\in G}} \left\{ \sum_{edge\in path} cost(edge) \right\}$$

- **<u>יוריסטיקה קבילה</u>**
  - h מעריכה "אופטימית" את מחיר המסלול מכל מצב s למצב מטרה.
  - $\forall s \in S: 0 \leq h(s) \leq h^*(s)$

- יוריסטיקה קבילה בפרט מקיימת: $\forall g \in G : h(g) = 0$
  - למה?

$$\boldsymbol{0 \leq h(g) \leq h^*(g) = 0}$$

יוריסטיקות לבעיית ניווט בעיר

$$h_E(P) = \sqrt{(G_x - P_x)^2 + \left(G_y - P_y\right)^2}$$

$$h_{MD}(P) = |G_x - P_x| + |G_y - P_y|$$

שאלה 4: האם היוריסטיקות הנ"ל קבילות?
(נניח מפה מישורית)

- יוריסטיקה קבילה h מקיימת: $\forall s \in S: 0 \leq h(s) \leq h^*(s)$
- h_E קבילה. המרחק הקצר ביותר בין 2 נקודות הוא קו ישר.
- h_{MD} אינה קבילה אם יתכנו כבישים שאינם מקבילים לצירים.

יוריסטיקה

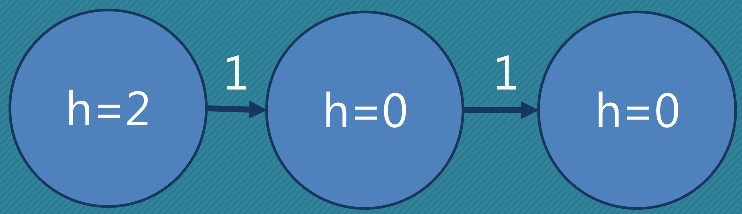
יוריסטיקה קבילה

$$\forall s \in S: 0 \le h(s) \le h^*(s)$$

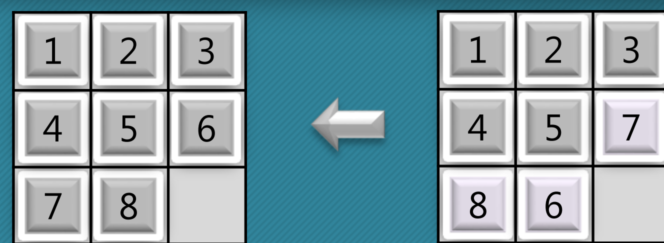
יוריסטיקה עקבית

$$\forall s \in S, s' \in succ(s): h(s) - h(s') \le cost(s, s')$$
$$\forall s \in G: h(s) = 0$$

- האם יוריסטיקה קבילה היא בהכרח עקבית?
  לא.
- האם יוריסטיקה עקבית היא בהכרח קבילה?
  כן. (תרגיל, הוכיחו באינדוקציה)



Example: 9 Tile puzzle



מצב מטרה

מצב נוכחי

נגדיר 4 אופרטורים: "הזזת" המשבצת הריקה לאחד מארבע כיווני אוויר

$$OP = \{N, S, E, W\}$$

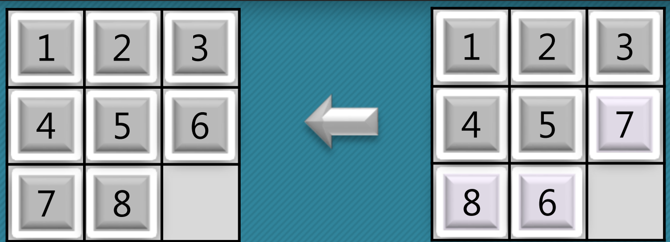
$$\forall op \in OP: \ cost(op) = 1$$

יוריסטיקת *DisplacedTiles – כמה ספרות אינן נמצאות במקום הנכון?*

$$h_{DT}(board) = \sum_{tile \in Board} \mathrm{I}\,(tile.pos \neq tile.goalPos)$$

$$h_{DT}(board) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \underbrace{1 + 1 + 1}_{tiles\ 6,7,8} = 3$$

Example: 9 Tile puzzle



מצב מטרה   מצב נוכחי

יוריסטיקת *ManhattanDistanceSum*

$$h_{MDS}(board) = \sum_{tile \in Board} MD(\, tile.pos, tile.goalPos \,)$$

tile	Δ_x	Δ_y	MD
1,2,3,4,5	0	0	0
6	1	1	2
7	2	1	3
8	1	0	1

$$h(board) = \Sigma(MD) = 6$$

האם זו יוריסטיקה קבילה...?

תחת האופרטורים ופונק' המחיר מקודם - התשובה היא כן.

Example: 9 Tile puzzle

$$h_{MDS}(board) = \sum_{tile \in Board} MD(\, tile.pos, tile.goalPos)$$

$$h_{DT}(board) = \sum_{tile \in Board} \mathrm{I}\,(tile.pos \neq tile.goalPos)$$

<u>הגדרה:</u> יוריסטיקה קבילה h_1 תקרא מיודעת מיוריסטיקה קבילה h_2
אם לכל מצב $s \in S$ יתקיים $h_1(s) \geq h_2(s)$

<u>שאלה:</u> מה הטענה הנכונה מבין הבאות?

1. h_{MDS} מיודעת מ- h_{DT}
2. h_{DT} מיודעת מ- h_{MDS}
3. שתי הטענות שגויות

שתיהן קבילות ומתקיים
$\forall board: h_{MDS}(board) \geq h_{DT}(board)$

למה?..

אריח שאינו במקומו, מרוחק לפחות צעד אחד ממקומו.
לפיכך ספירת אריחים אלו קטנה תמיד מסכום מרחק מיעד.

Example: 9 Tile puzzle

$$h_{MDS}(board) = \sum_{tile \in Board} MD(\, tile.pos, tile.goalPos)$$

$$h_{DT}(board) = \sum_{tile \in Board} \mathrm{I}\,(tile.pos \neq tile.goalPos)$$

<u>האם היוריסטיקות עקביות?</u>

תחת האופרטורים ופונק' המחיר מקודם - התשובה היא כן.

רעיון לאלגוריתם חיפוש (פשוט) שמשתמש ביוריסטיקה?

Greedy Best First Search

- מתחזק תור עדיפויות **open**.
- ה**צומת** הבא לפיתוח:
  - בעל ערך *h* מינימלי.
  - זה שהכי קרוב למטרה (ע"פ היוריסטיקה).

Greedy Best First Search

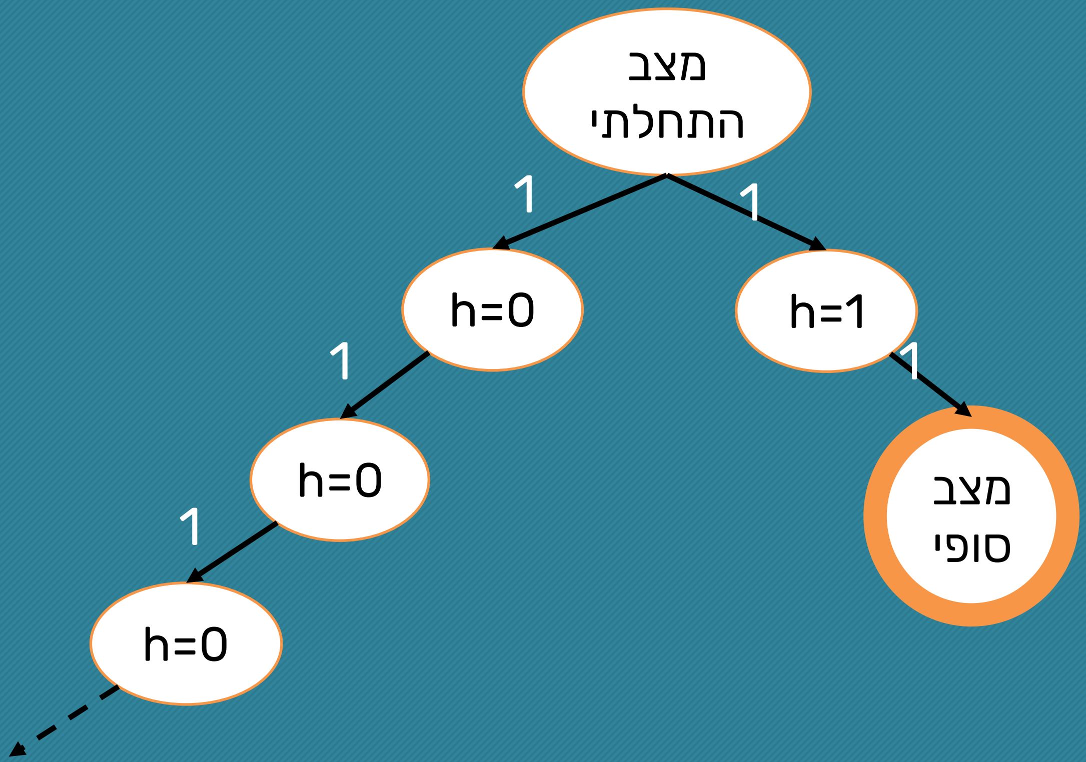
מרחב <u>סופי</u> וקשיר: האם **שלם**?

- כן.
- כל המצבים יפותחו.
- יוריסטיקה רק קובעת סדר.

Greedy Best First Search

מרחב <u>אינסופי</u> וקשיר: האם **שלם**?

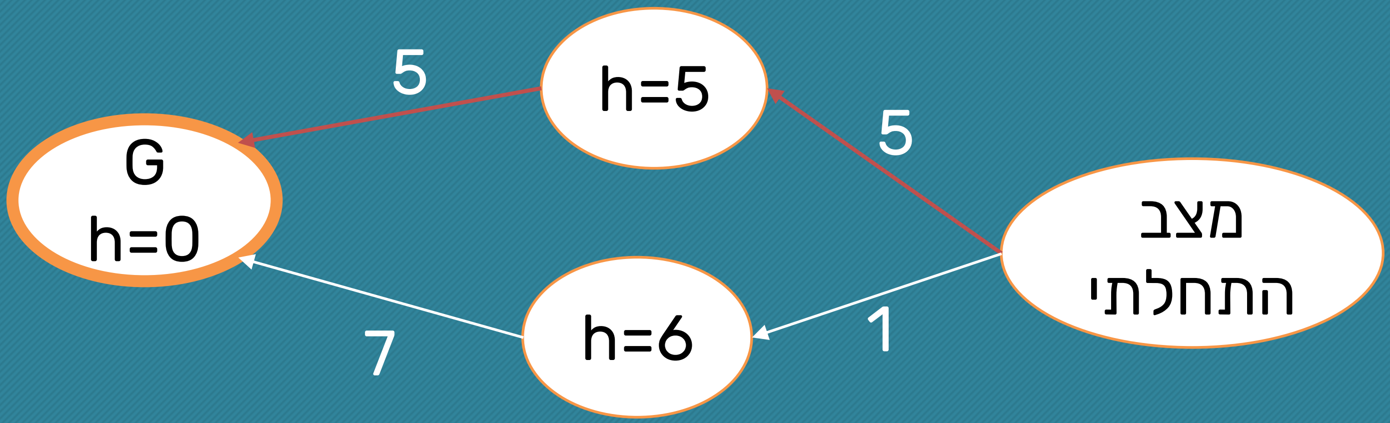
- לא.



Greedy Best First Search

מרחב סופי וקשיר: האם האלגוריתם **קביל**?

- לא.

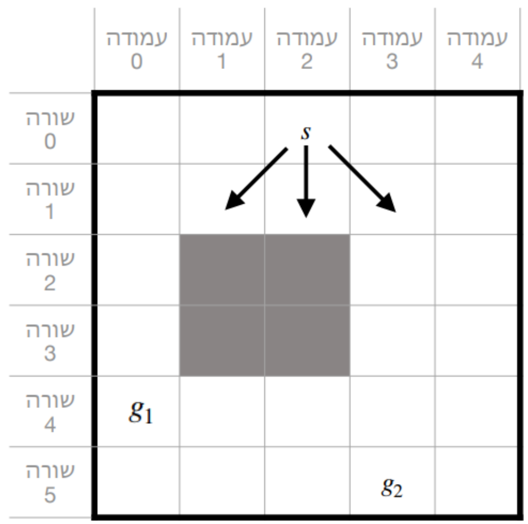


מבוסס על שאלה ממבחן

חורף 2021-2 מועד ב' – המשך תרגיל מתרגול קודם

שאלה 2 - חיפוש (18 נק')

נתון מרחב גריד בגודל 6 על 5 כאשר המצב ההתחלתי הוא בקואורדינטה (0, 2) וקיימים שני מצבים סופיים בקואורדינטות (5,0) ו-(5, 3). לנוחיותכם שמנו עותקים של הלוח בעמודים 11 ו- 12.



נתונה קבוצה של אופרטורים: $A = \{ \downarrow, \swarrow, \searrow \}$

כאשר פיתוח הצמתים הינו בסדר הנתון:

1. דרום ($\downarrow$)
2. דרום-מערב ($\swarrow$)
3. דרום-מזרח ($\searrow$)

הפעולה אפשרית רק במידה והאריח שהסוכן מנסה ללכת אליו פנוי, באריחים (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) יש בור ולכן הסוכן לא יכול לדרוך במצבים אלו.

עבור כל אחד מהאלגוריתמים הבאים, ציין את מספר המצבים השונים שפותחו, ולאיזה מצב סופי הסוכן יבחר ללכת.

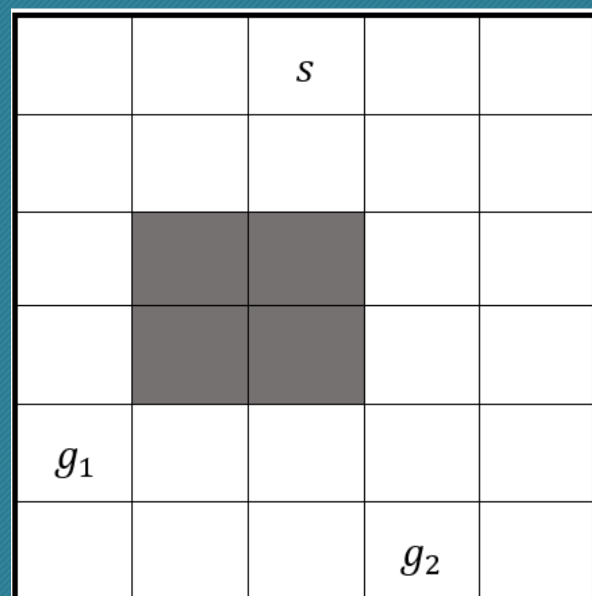
נגדיר את היוריסטיקה הבאה:

$$h(s) = \min\{h_{MDS}(s, g_1), h_{MDS}(s, g_2)\}$$

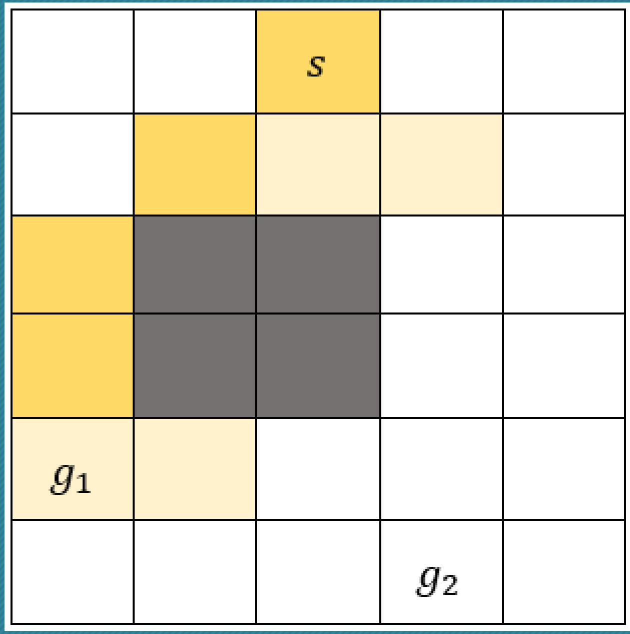
כאשר עלות של כל פעולה היא 1.

1. האם היוריסטיקה עקבית?
2. האם היוריסטיקה קבילה?

אלגוריתם: Greedy Best First



אלגוריתם: Greedy Best First



- אלגוריתם חיפוש בגרף מבטיח שאף מצב לא ייווצר פעמיים.
- המצב הסופי יימצא ביצירה של המצב הראשון מהמצב $(3,0)$.
- יפותחו בסה"כ 4 מצבים – המינימום האפשרי.
- המצב הסופי שיתקבל הוא g_1.
- מהו המסלול שהתקבל?

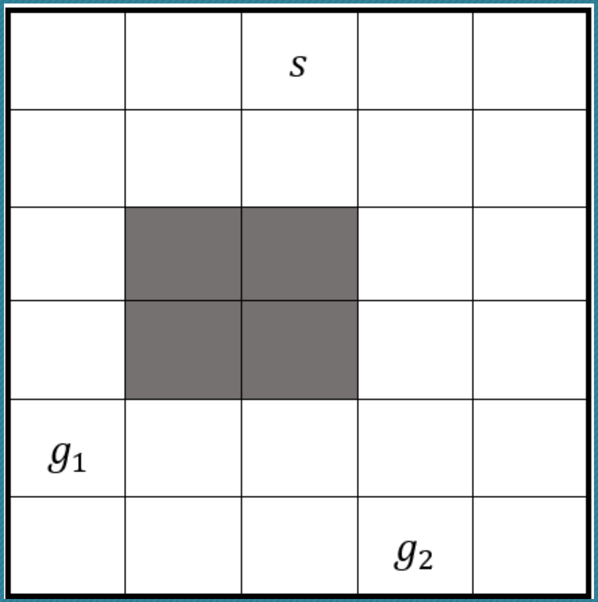
Beam Search

חיפוש אלומה
דומה ל-*Greedy best-first* אך פועל באופן ממוקד יותר:
החיפוש מגביל את רשימת הצמתים הפתוחים למס' קבוע K.

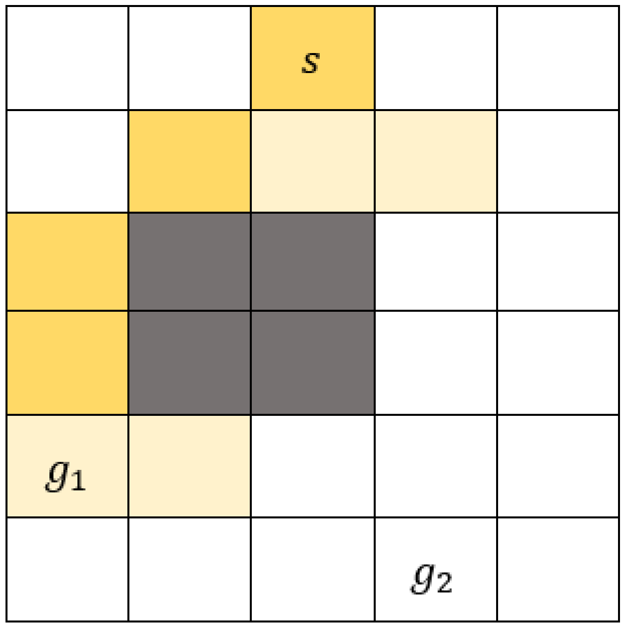
יתרון:
חוסך זיכרון וזמן ריצה.

חיסרון:
עשוי לפגוע בטיב הפתרון.

אלגוריתם: Beam Search – K=2



אלגוריתם: Beam Search – K=2



- בדומה ל-Greedy, רק שמצבים (1,2) ו-(1,3) יצאו מ-OPEN במהלך ריצת האלגוריתם.

Best First Search (not BFS!)

- קבוצת אלגוריתמים לחיפוש בגרפים
- ה**צומת** הבא לפיתוח נבחר מתוך קבוצת מועמדים (**open**)
  - כבעל ה**ערך המינימלי**
  - על פי פונקציית הערכה $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{node})$ כלשהי

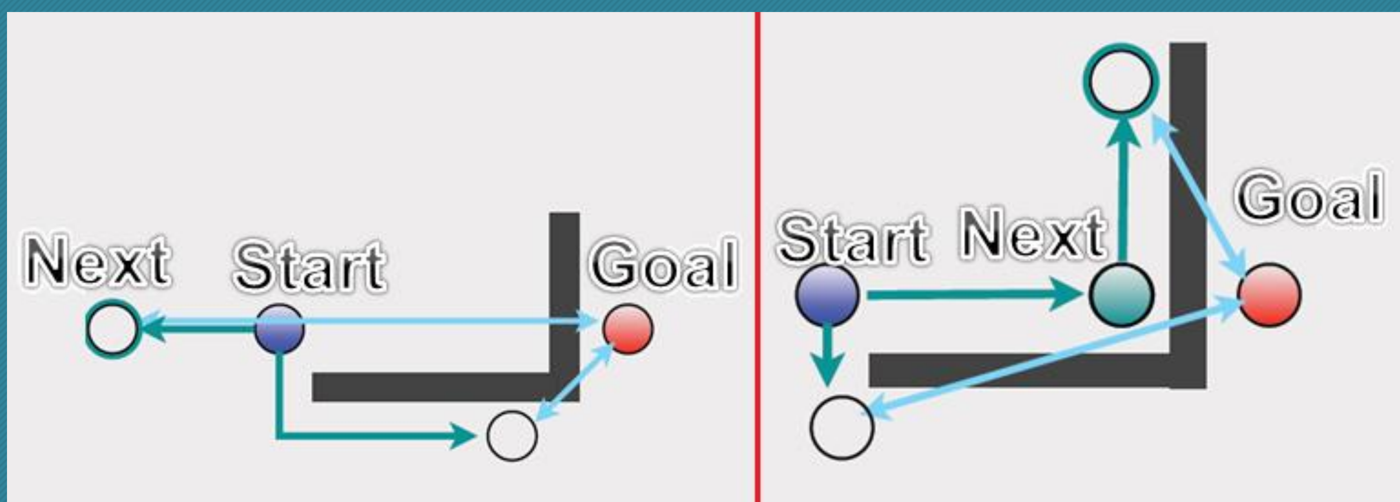
Best First Search: examples

Greedy Best First

- f = h
- מעדיף צומת קרוב למטרה
- מתעלם מהמרחק מההתחלה
- חיפוש יוריסטי (מיודע)

Uniform Cost

- f = g
- מעדיף צומת קרוב למצב התחלתי
- מתעלם מהמרחק למטרה
- חיפוש עיוור (לא מיודע)



מטרה: לשלב את **היתרונות** של **greedy best** ושל **uniform cost**.

ידע על הבעיה + קבילות

$\color{green}{\text{UniformCost}} + \color{orange}{\text{GreedyBest}} = \mathbf{A^*}$

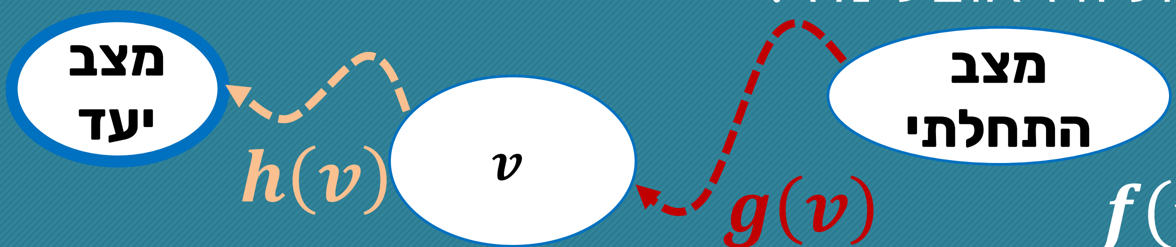
היינו רוצים: ה**צומת** הבא ל**פיתוח** (מתוך **open**):

צומת שהוא חלק **ממסלול אופטימלי לפתרון**.

בעיה: אנחנו לא יודעים ...

רעיון:

- הצומת הבא לפיתוח:
  זה שנעריך שהוא חלק ממסלול אופטימלי.
- $f(v) \triangleq ?$



$$f(v) \triangleq \underbrace{h(v)}_{\text{מרחק מהיעד}} + \underbrace{g(v)}_{\text{מרחק מהמוצא}}$$

A*

<u>האם ייתכן</u>: שנגלה מסלול זול יותר ל**צומת** שכבר **פותח**?

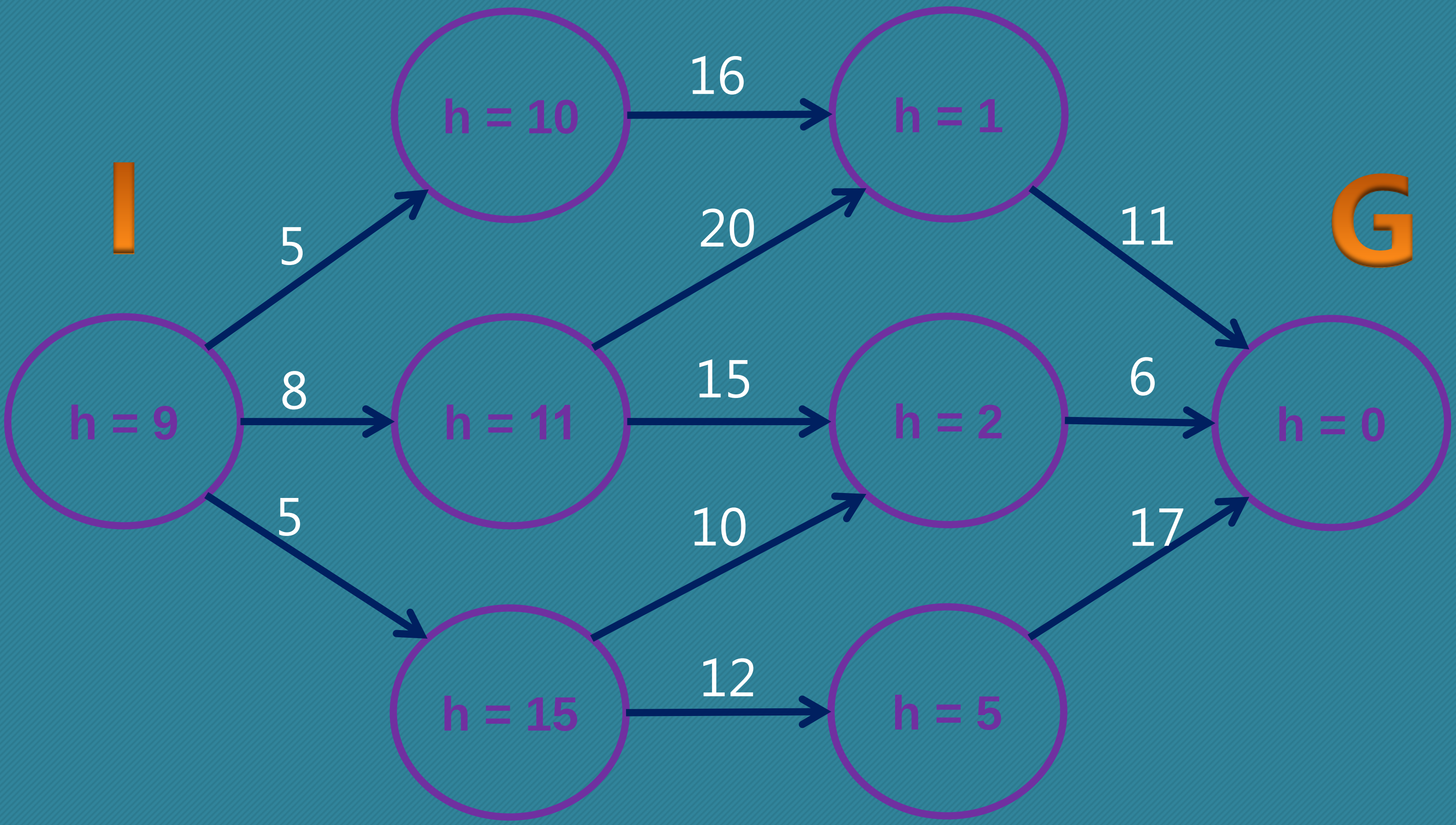
- <u>תזכורת</u>: ב- Uniform Cost Search התשובה הייתה:
  - **לא** ☺
  - עזר להראות **קבילות**.
- <u>תשובה</u>: [ב- A*] **כן** ☹

<u>למרות זאת, בהרצאה ראינו</u>☺:

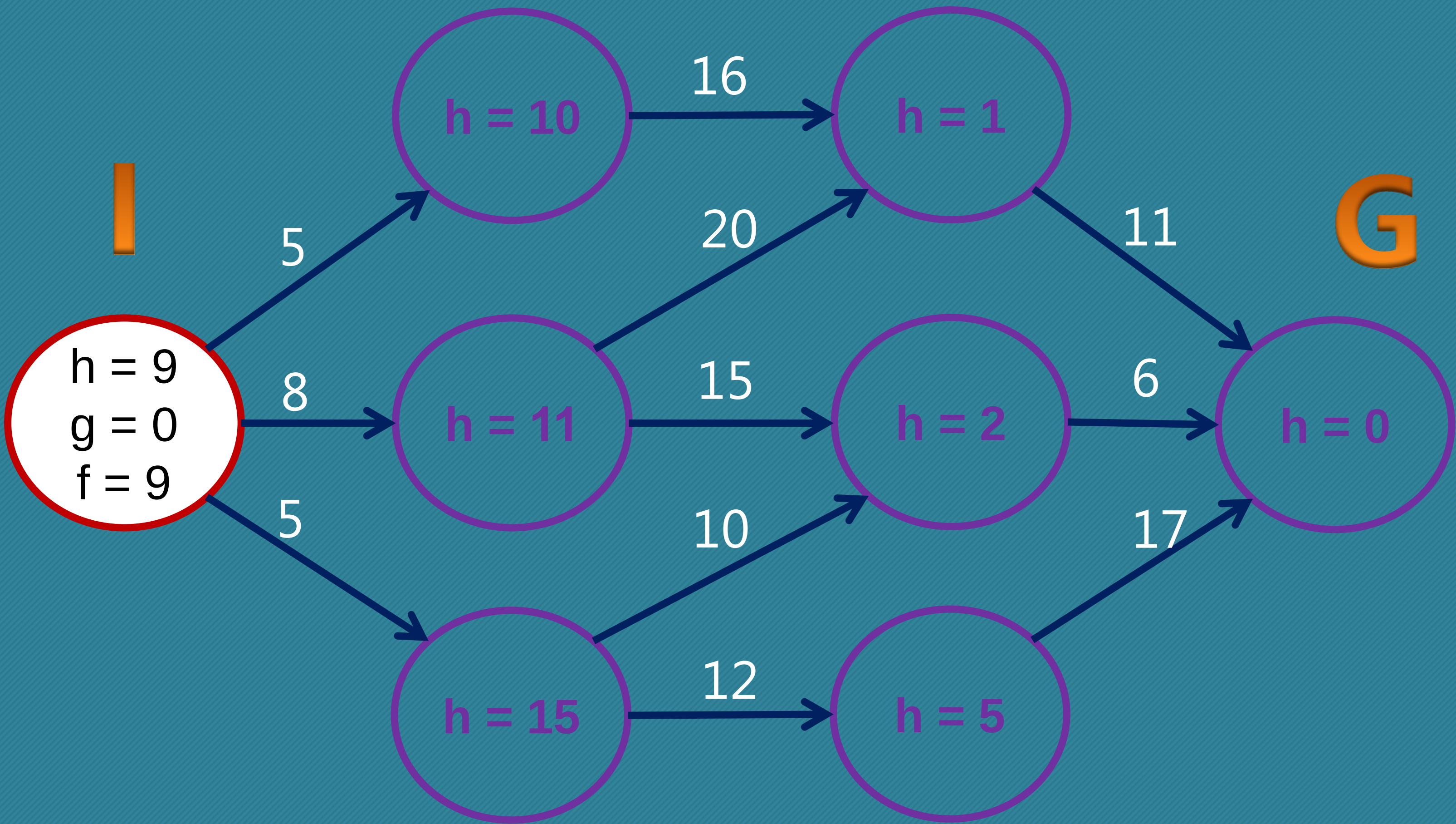
- **שלם** אם מחיר הקשתות חסום מלמטה ע"י $0 < \delta$.
- **קביל** תחת שימוש ביוריסטיקה קבילה.

A-STAR run simulation

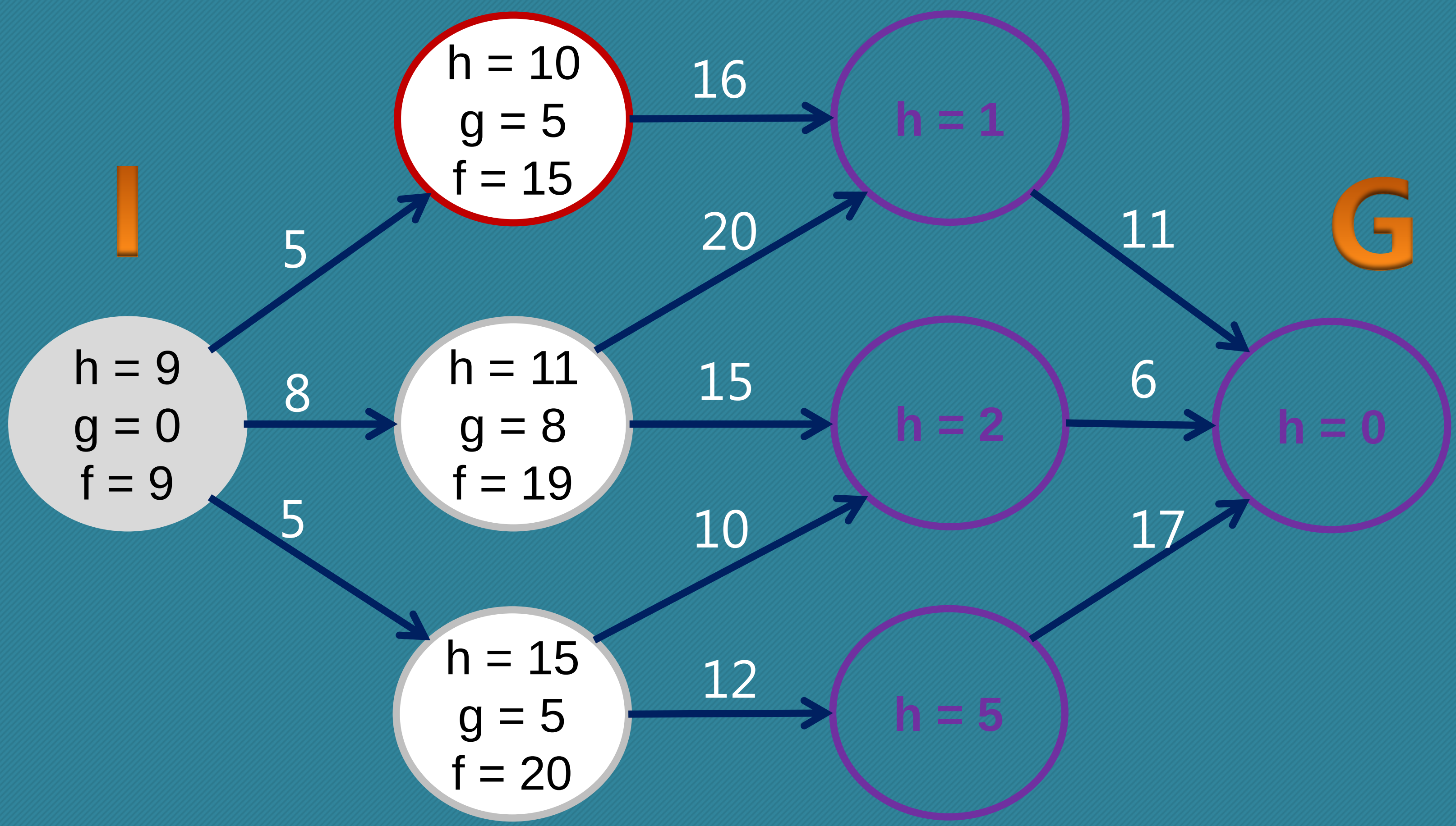
תרגיל: עקוב אחר ריצת האלגוריתם A^* על פני הגרף הבא.



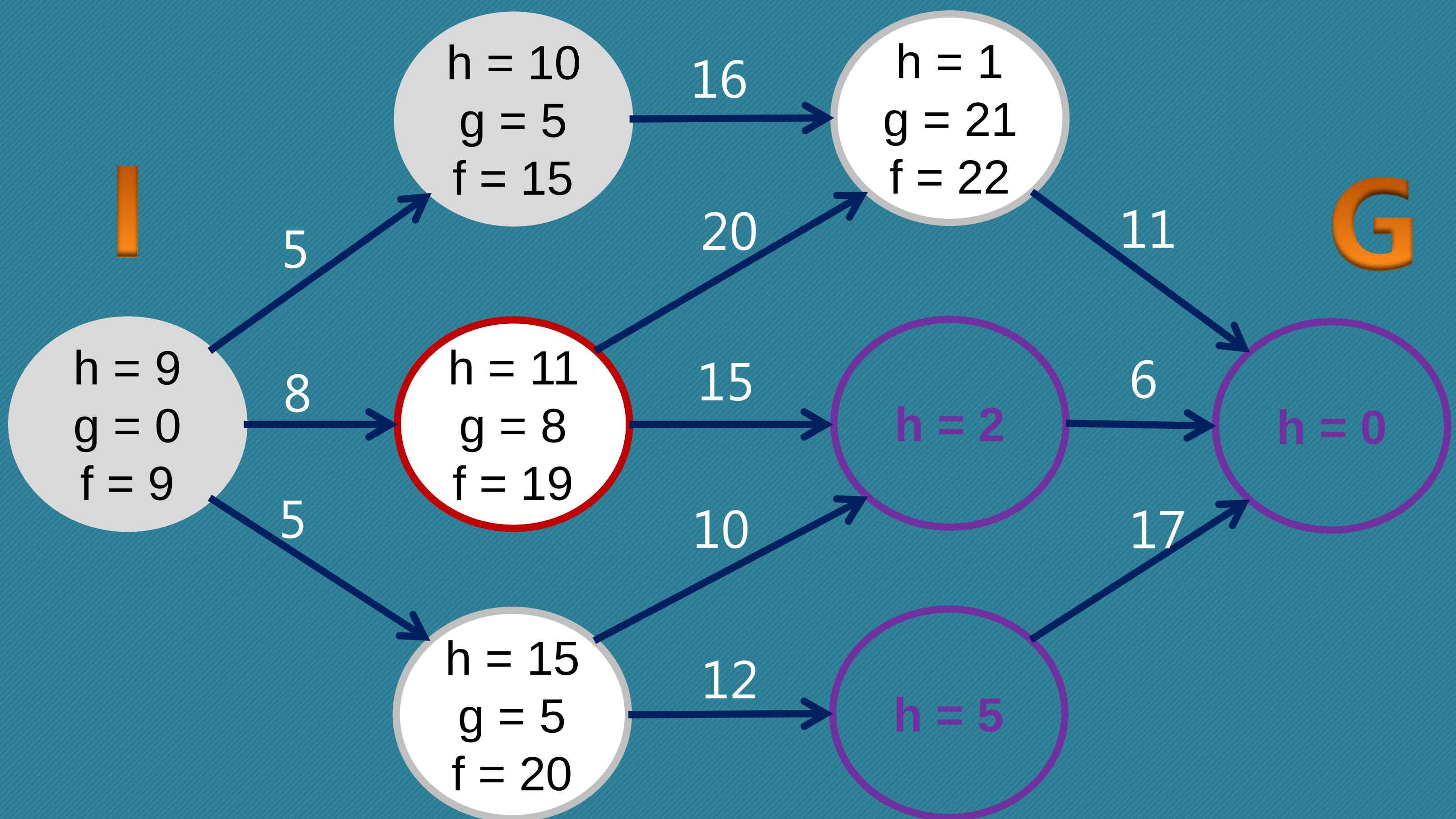
A-STAR run simulation



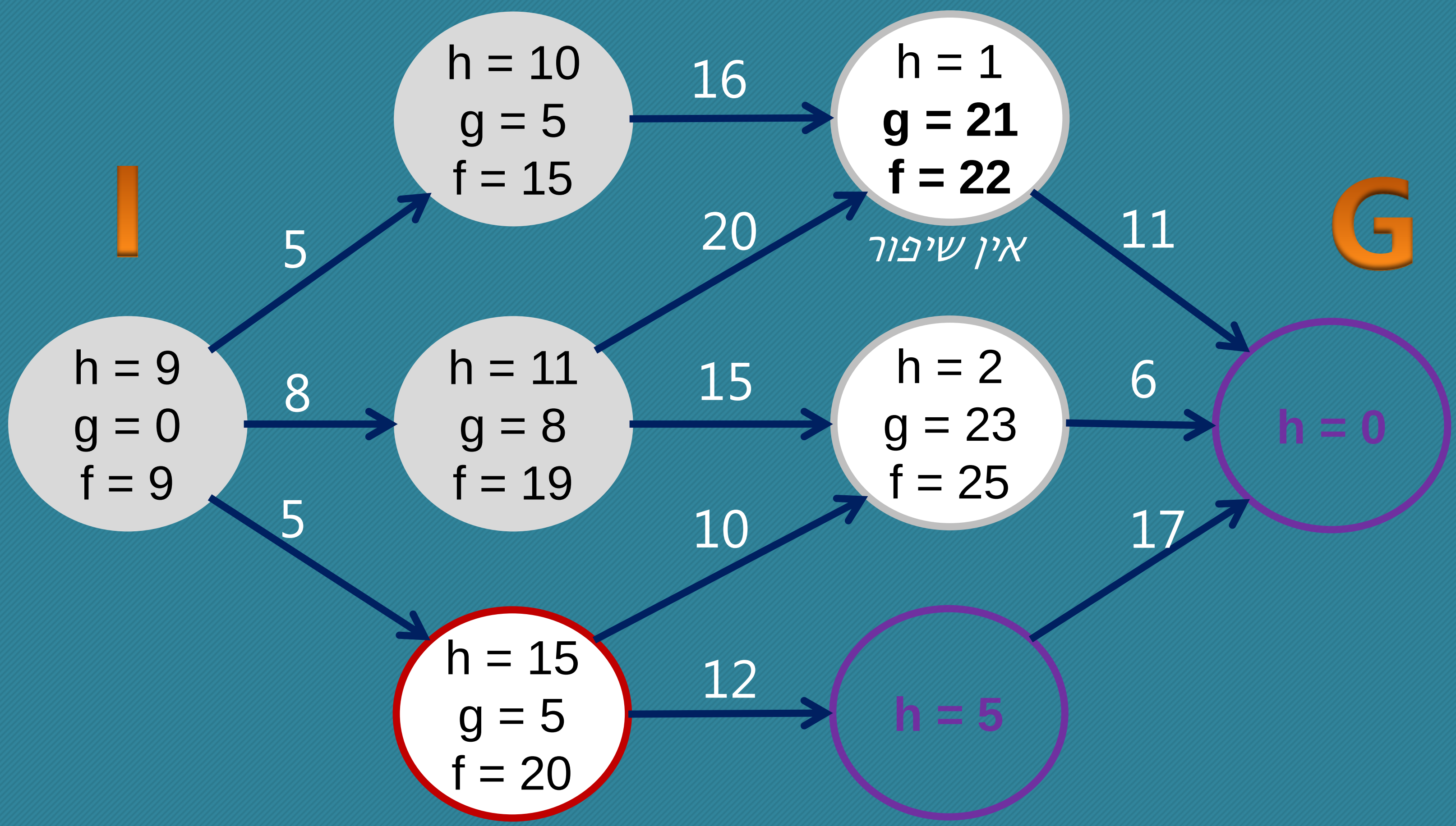
A-STAR run simulation



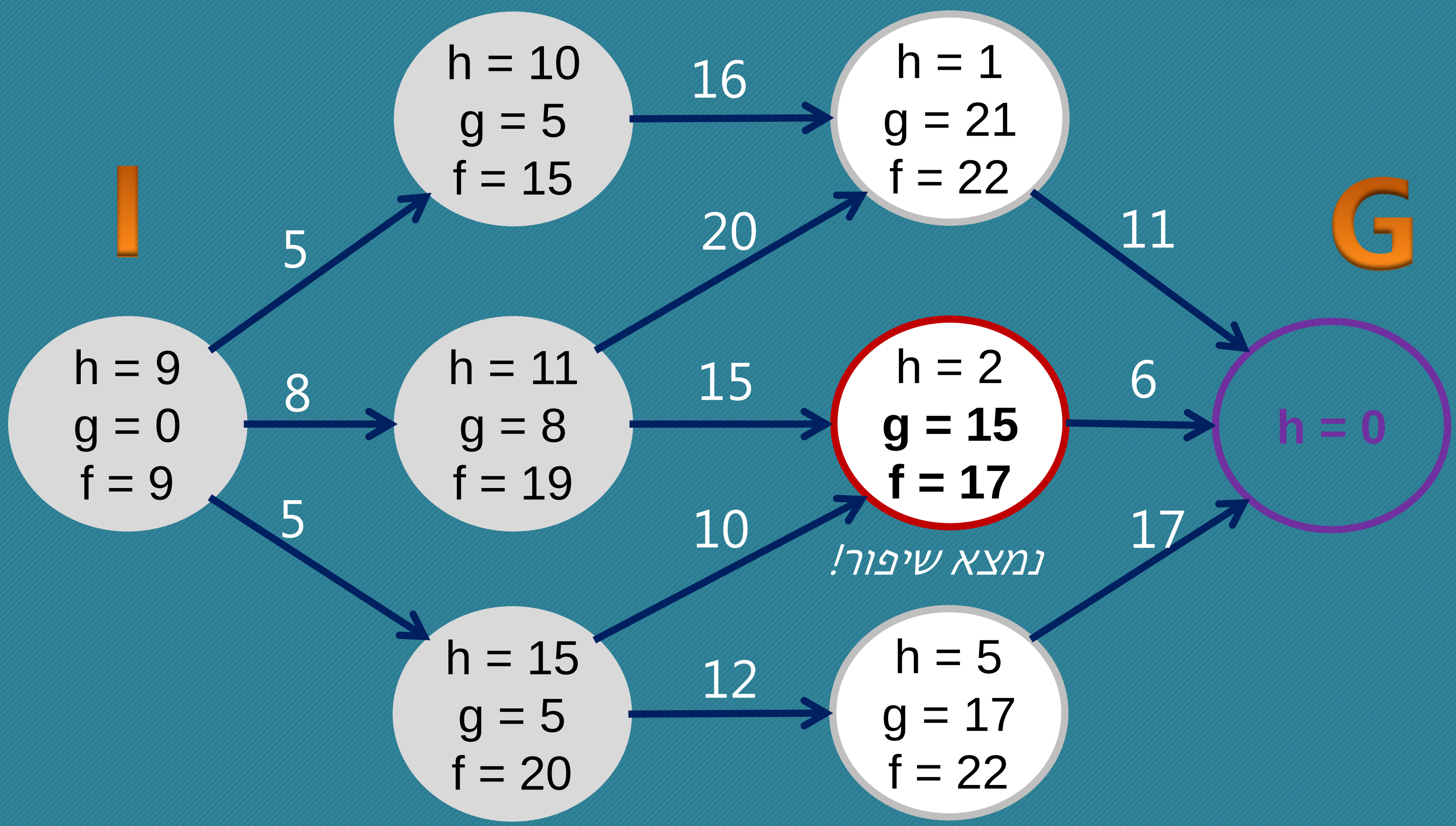
A-STAR run simulation



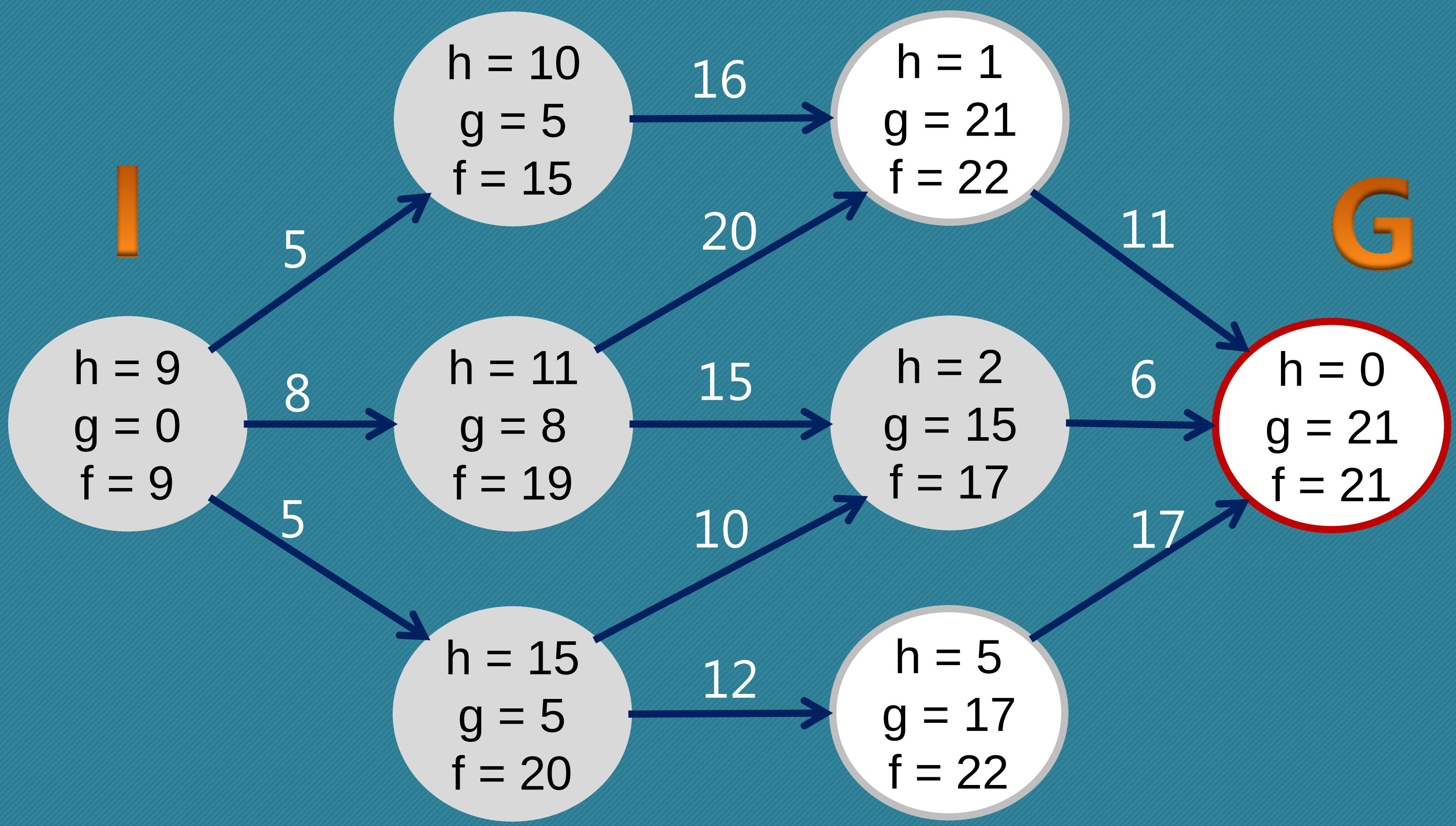
A-STAR run simulation



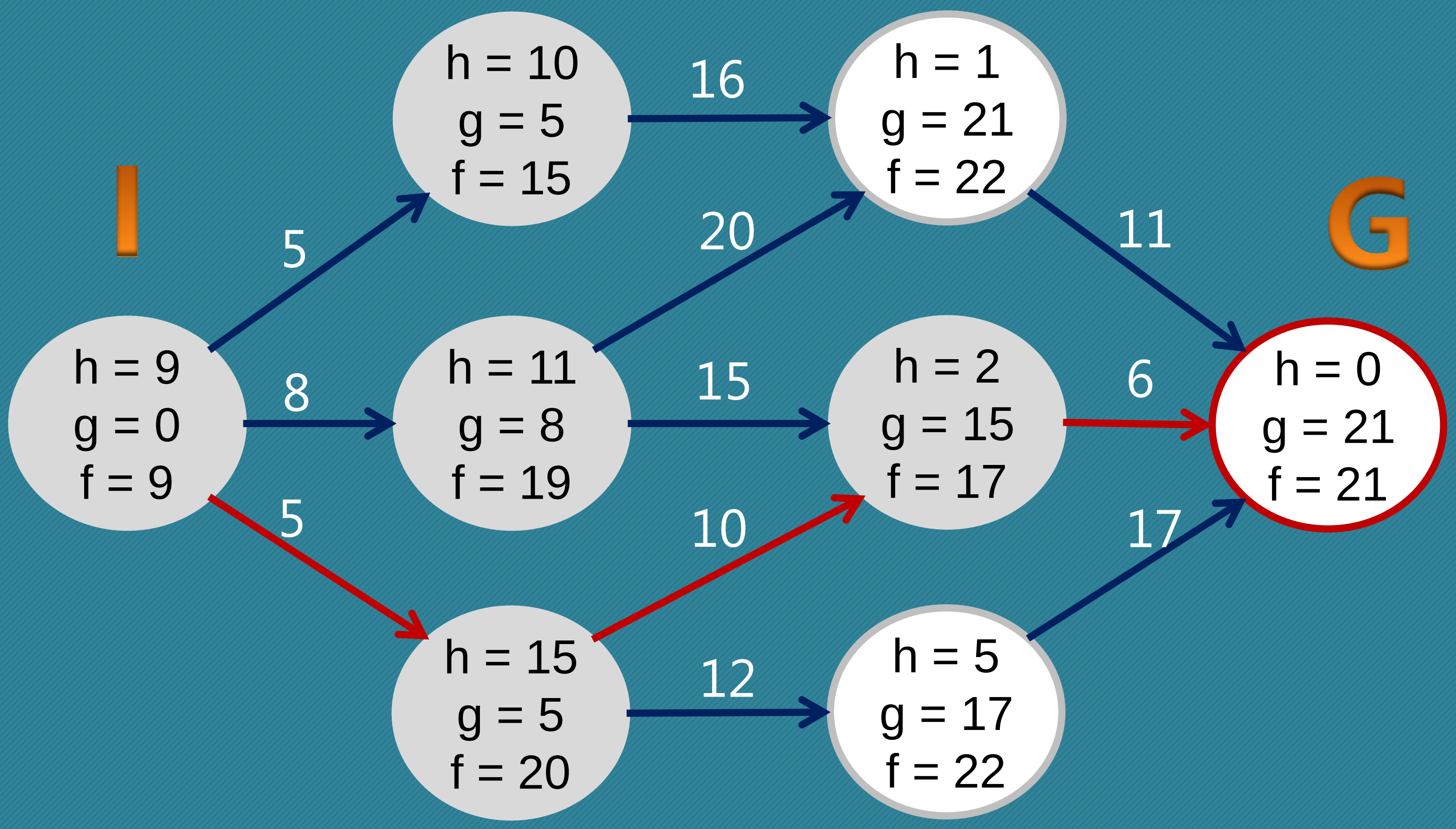
A-STAR run simulation



A-STAR run simulation



A-STAR run simulation



Weighted A-STAR

- ביצועים:
  - t(GreedyBest) < t(A*) < t(UniformCost)
- מטרה: להאיץ עוד יותר!
- נקריב: קבילות.
- אמצעי: **להאמין** יותר ליוריסטיקה.
- t(GreedyBest)< … < t(A*)

Weighted A-STAR

- **A***:
  - $f_{A^*}(v) \triangleq h(v) + g(v)$
  - $f_{A^*}(v) \triangleq 0.5 \cdot h(v) + 0.5 \cdot g(v)$
- רוצים: לתת יותר **משקל** ל**יוריסטיקה**.
  - לדוגמא: $f(v) \triangleq 0.6 \cdot h(v) + 0.4 \cdot g(v)$

Weighted A-STAR

w-A STAR

אלגוריתם נוסף ממשפחת BestFirst

בוחר את הצומת הבא לפי $f(v) = w \cdot h(v) + (1 - w) \cdot g(v)$

עבור ערך סקלר $0 \leq w \leq 1$

למעשה אנו מכירים את האלגוריתם הזה עבור משקלים מסוימים...

$wA^*[w = 0]$ ≡ **UNIFORM COST**

$wA^*[w = 1]$ ≡ **GREEDY BEST 1ST**

$wA^*[w = 0.5]$ ≡ **A-STAR**

The w parameter

$$f(v) = w \cdot h(v) + (1-w) \cdot g(v)$$

Uniform Cost
לא מיודע
שלם, קביל
איטי

A-STAR
מיודע
שלם וקביל תחת יוריסטיקה קבילה

Greedy Best 1st
מיודע
לא קביל
פוטנציאלית מהיר

$w = 0$ $w = 0.5$ $w = 1$

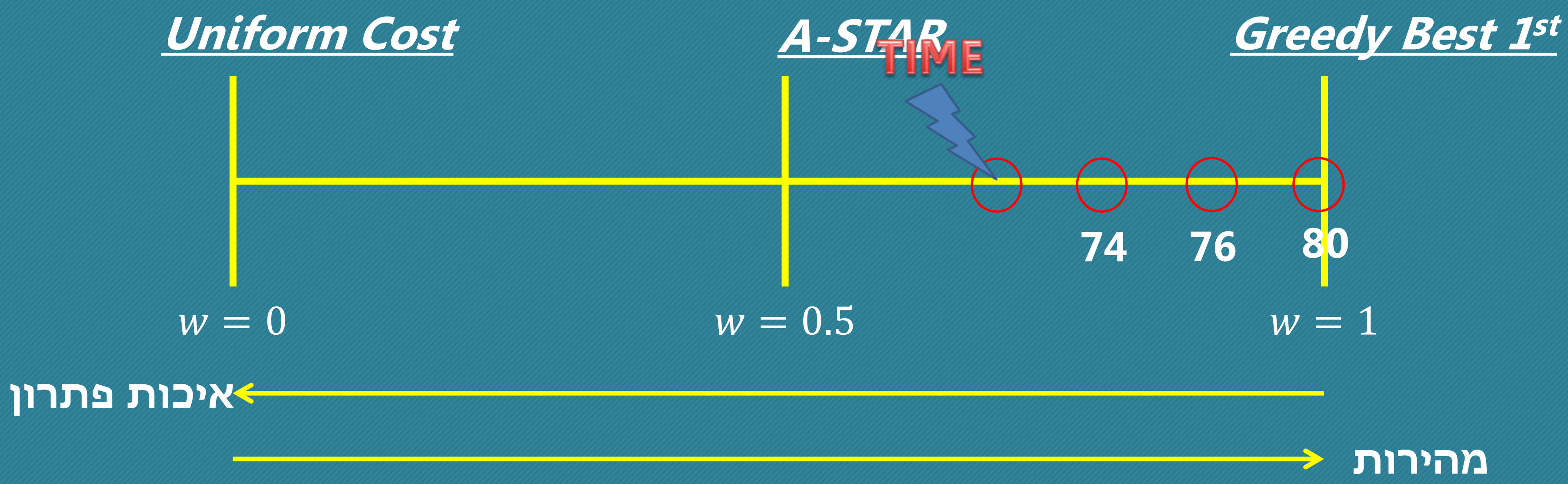
איכות פתרון

מהירות

Anytime A^*

שאלה: מה נעשה כאשר הזמן העומד לרשות האלגוריתם אינו קבוע?

פתרון אפשרי: נריץ wA^* באיטרציה על ערכי w הולכים ויורדים עד שנגמר הזמן.



A-STAR-epsilon

- באלגוריתם Anytime A* ככל שהשקענו **יותר זמן**, קיבלנו **פתרון יותר טוב**, אך **לא הובטח לנו דבר** לגבי הפתרון שנקבל אחרי זמן מסוים.
- היינו רוצים אפשרות **לקבוע מראש בכמה** אנחנו מוכנים **להתפשר** על **איכות הפתרון**, בתקווה שנקבל **זמן ריצה קצר יותר**.
- A*-epsilon מאפשר זאת. בכלליות, הוא מאפשר לקבוע קריטריון משני לבחירת הצומת הבא לפיתוח ובכך מאפשר יותר גמישות בקביעת התנהגות האלגוריתם.

A-STAR-epsilon

<u>עד כה</u>: האיבר הבא לפיתוח:

$$next(\boldsymbol{open}) \triangleq \underset{\boldsymbol{v'} \in \boldsymbol{open}}{\arg\min}\{f(\boldsymbol{v'})\}$$

<u>רעיון</u>: בחירת הצומת הבא לפיתוח: מתוך **קבוצת** מועמדים.

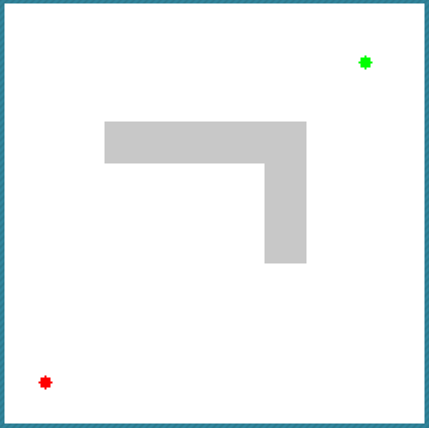
$$\boldsymbol{FOCAL} \triangleq \left\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{open} \middle| f(\boldsymbol{v}) \leq (1+\epsilon) \cdot \min_{\boldsymbol{v'} \in \boldsymbol{open}}\{f(\boldsymbol{v'})\}\right\}$$

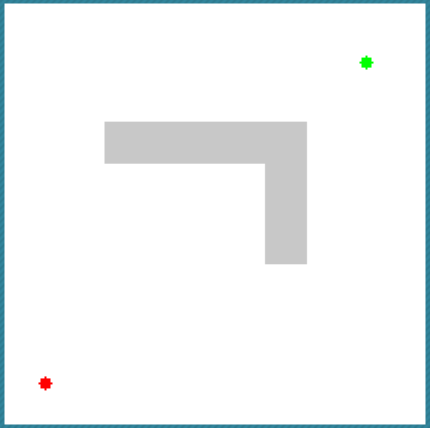
- איך בוחרים את הצומת הבא לפיתוח מתוך $\boldsymbol{FOCAL}$?
  - לפי הערך היוריסטי $\boldsymbol{h}$
  - לפי $\boldsymbol{g}$
  - אקראית יוניפורמית / מתוך התפלגות
  - לפי פונקציית הערכה אחרת
  - לפי **יוריסטיקה** אחרת, טובה יותר לדעתנו, אך **לא קבילה**

A_ϵ^* vs. A^*

כאשר פונק' המחיר חסומה מלמטה וחיובית והיוריסטיקה קבילה...

A^*	A_ϵ^*
אלגוריתם שלם	אלגוריתם שלם
מבטיח פתרון אופטימלי	מבטיח פתרון אופטימלי עד כדי פקטור $(1+\epsilon)$
מפתח את הצומת המוערך כטוב ביותר	מאפשר בחירה לא אופטימלית בתקווה למצוא פתרון מהר יותר





בעיות חיפוש
שאלות ממבחנים

מועד ב' אביב 2022

שאלה 1 (חיפוש) – 18 נק'
הקף בעיגול את התשובה הנכונה.

1) (4 נק') במהלך הרצת אלגוריתם *A עם יוריסטיקה h, הוצא צומת שהיה ב-CLOSE והוכנס ל-OPEN. מה ניתן לומר על היוריסטיקה h?
   1. היוריסטיקה h בהכרח עקבית.
   2. היוריסטיקה h בהכרח קבילה.
   3. היוריסטיקה h בהכרח לא עקבית.
   4. היוריסטיקה h בהכרח לא קבילה.

2) (4 נק') במהלך הרצת אלגוריתם *A עם יוריסטיקה h, פותח <u>צומת מטרה</u> t והוכנס ל- CLOSE עם ערך f. האם ייתכן שהערך בצומת t יתעדכן בהמשך ריצת האלגוריתם?
   1. כן, אם h עקבית.
   2. כן, אם h קבילה.
   3. כן, אם h עקבית או קבילה.
   4. לא.

3) (4 נק') הרצת Greedy Best First Search עם יוריסטיקה עקבית.
   1. עבור גרף סופי, האלגוריתם <u>**לא שלם \ שלם**</u> ו-<u>**לא קביל \ קביל**</u>.
   2. עבור גרף אינסופי, האלגוריתם <u>**לא שלם \ שלם**</u> ו-<u>**לא קביל \ קביל**</u>.

מועד ב' אביב 2022

שאלה 1 (חיפוש) – 18 נק'
הקף בעיגול את התשובה הנכונה.

1) (4 נק') במהלך הרצת אלגוריתם *A עם יוריסטיקה h, הוצא צומת שהיה ב-CLOSE והוכנס ל-OPEN. מה ניתן לומר על היוריסטיקה h?

1. היוריסטיקה h בהכרח עקבית.
2. היוריסטיקה h בהכרח קבילה.
3. **היוריסטיקה h בהכרח לא עקבית.**
4. היוריסטיקה h בהכרח לא קבילה.

2) (4 נק') במהלך הרצת אלגוריתם *A עם יוריסטיקה h, פותח צומת מטרה t והוכנס ל- CLOSE עם ערך f. האם ייתכן שהערך בצומת t יתעדכן בהמשך ריצת האלגוריתם?

1. כן, אם h עקבית.
2. כן, אם h קבילה.
3. כן, אם h עקבית או קבילה.
4. **לא.**

3) (4 נק') הרצת Greedy Best First Search עם יוריסטיקה עקבית.

1. עבור גרף סופי, האלגוריתם **לא שלם \ שלם** ו-**לא קביל \ קביל**.
2. עבור גרף אינסופי, האלגוריתם **לא שלם \ שלם** ו-**לא קביל \ קביל**.

מועד ב' אביב 2022

ענה על השאלה הבאה.

4) (6 נק') מהו מספר הצמתים המינימלי כדי לייצר דוגמא לגרף ובו יוריסטיקה קבילה אך לא עקבית (הניחו כי לא ייתכנו קשתות מקבילות)? ___________.

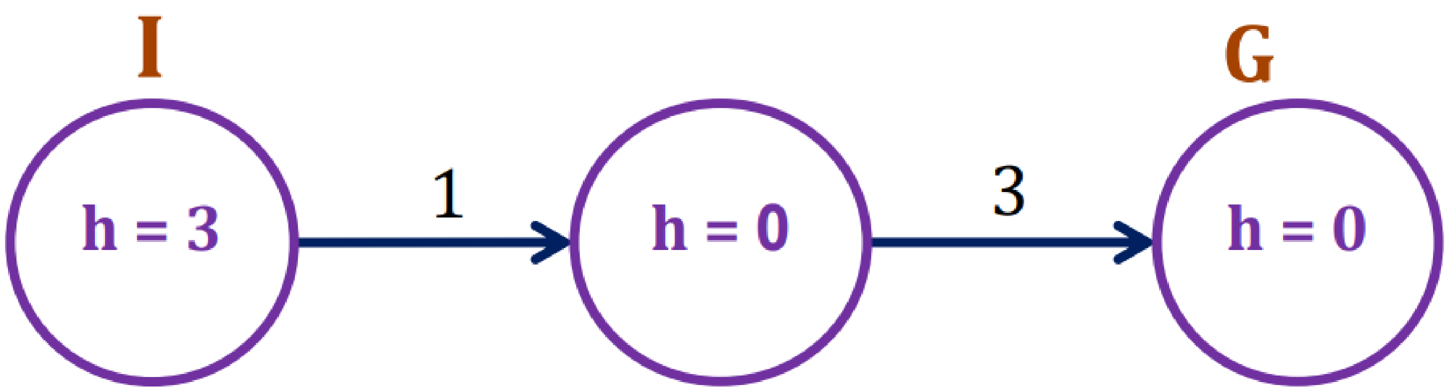
ציירו דוגמא לגרף בזה.

מועד ב' אביב 2022

ענה על השאלה הבאה.

4) (6 נק') מהו מספר הצמתים המינימלי כדי לייצר דוגמא לגרף מכוון ובו יוריסטיקה קבילה אך לא עקבית (הניחו כי לא ייתכנו קשתות מקבילות)? ______3_____.

ציירו דוגמא לגרף כזה.



דוגמא להוצאת צומת מ-close במהלך ריצת *A – תרגול עצמי

האם היוריסטיקה קבילה?
האם היוריסטיקה עקבית (מונוטונית)?