חישוביות (236343)
אביב תשע"ז
מועד א
31.7.2017

מרצים: פרופ' אלי בן ששון.
מתרגלים: גלעד קותיאל, אוהד טלמון, סתיו פרלה, מיכאל ריאבצב.

הנחיות:

- משך הבחינה 3 שעות.
- אסור כל שימוש בחומר עזר, למעט דפי העזר המצורפים.
- יש לענות על כל השאלות בקצרה ובאופן מסודר.
- יש להוכיח כל טענה עליה מסתמכים אלא אם הוכחה במפורש בתרגול או בהרצאה.
- לא ניתן להסתמך על טענות משיעורי הבית ללא הוכחה.
- הנכם רשאים לכתוב בכל סעיף "לא יודע" ולקבל 20% מהניקוד לאותו סעיף.
- מותר להיעזר בסעיפים קודמים לצורך פתרון סעיף, גם אם לא פתרתם אותם.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר פונקציית מעברים.

בהצלחה!

שאלה 1 [25 נקודות]

נסמן $L_1 \leq_p^1 L_2$ אם קיימת רדוקציה פולינומית חח"ע מ-L_1 אל L_2.
תזכורת: פונקציה f היא חח"ע אם לכל $x \neq y$ מתקיים $f(x) \neq f(y)$.
ענו בקצרה על הסעיפים הבאים:

1. **(6 נקודות)** הוכיחו: לכל שפה L מתקיים $L \leq_p^1 L$

2. **(6 נקודות)** הוכיחו: היחס $\leq_p^1$ טרנזיטיבי, כלומר אם $L_1 \leq_p^1 L_2$ וגם $L_2 \leq_p^1 L_3$ אז $L_1 \leq_p^1 L_3$.

3. **(6 נקודות)** הוכיחו: אם לכל $L_1, L_2 \in NPC$ מתקיים $L_1 \leq_p^1 L_2$ אזי $P \neq NP$.

4. **(7 נקודות)** הוכיחו: לכל שפה $L \in NP$ מתקיים $L \leq_p^1 SAT$

שאלה 2 [20 נקודות]

עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא שייכת ל-R והאם היא שייכת ל-RE:

1. **(7 נקודות)** $L_1 = \{(\langle M\rangle, x) \mid \ \exists y, |y| > |x| : y \in L(M)\}$

2. **(7 נקודות)** $L_2 = \{(\langle M \rangle, x) \mid \ \forall y, |y| > |x| : y \in L(M)\}$

3. **(6 נקודות)** $L_3 = \{(\langle M \rangle, x, y) \mid$ צעדים $|y|$ תוך x מקבלת את $M\}$

שאלה 3 [20 נקודות]

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. **(5 נקודות)** אם $L_1 \in RE \setminus R$ וגם $L_2 \in coRE \setminus R$ אז $L_1 \cup L_2 \notin R$

2. **(5 נקודות)** אם $L_1 \in RE$ וגם $L_2 \in coRE$ אז $L_1 \cap L_2 \in R$

3. **(5 נקודות)** אם $L_1 \in RE \setminus R$ וגם $L_2 \in RE \setminus R$ אז $L_1 \cup L_2 \notin R$

הערה: בסעיף זה, במידה ומציגים שפה $L \in RE \setminus R$, אין צורך להוכיח את הסיווג של L, מספיק לנמק בקצרה.

4. **(5 נקודות)** אם $L_1 \notin R$ ו-L_2 שפה סופית אז $L_1 \cup L_2 \notin R$

שאלה 4 [30 נקודות]

בהינתן גרף שקשתותיו צבועות נאמר שצביעה של הצמתים משמרת קשת אם היא צובעת את שני קצותיה בצבע של הקשת.
פורמלית, בהינתן גרף $G = (V, E)$ נגדיר צביעה של קשתות כפונקציה $f : E \to \mathbb{N}$ וצביעה של צמתים כפונקציה $g : V \to \mathbb{N}$
ונאמר ש-g משמרת קשת (u, v) אם ורק אם $f(u, v) = g(u) = g(v)$.
בהנחה ש-$P \neq NP$ קבעו עבור כל שפה אם היא ב-P או לא:

1. **(7 נקודות)** $L_1 = \{(G, f) :$ קיימת **צביעה** g **שמשמרת** את **כל** הקשתות$\}$

2. **(7 נקודות)** $L_2 = \{(G, f, k) :$ קיימת **צביעה** g **שמשמרת** k קשתות$\}$

הדרכה: הראו רדוקציה מ-SAT. בנו גרף דו צדדי כך שצד אחד שלו מייצג את המשתנים והצד השני את הפסוקיות. צבעו את הקשתות באופן כזה שניתן לשמר m (מספר הפסוקיות ב-φ) קשתות אמ"מ φ ספיק.

נאמר שצביעה של הצמתים משמרת חלקית קשת אם היא צובעת לפחות אחד מקצות הקשת בצבע של הקשת. פורמלית, g משמרת חלקית קשת (u,v) אם ורק אם $f(u,v)=g(u)$ או $f(u,v)=g(v)$. שימו לב שאם צביעה משמרת קשת אז היא גם משמרת אותה חלקית.

3. **(8 נקודות)** $L_3 = \{(G,f) :$ קיימת **צביעה** g **שמשמרת חלקית** את **כל** הקשתות$\}$

רמז: הראו רדוקציה ל-$2SAT$.

נגדיר צביעה חלקית כפונקציה $g : V \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$. נאמר שצביעה חלקית, g, צובעת k צמתים אם $k = |\{v \mid g(v) \neq -1\}|$.

4. **(8 נקודות)** $L_4 = \{(G, f, k, l) :$ קיימת **צביעה חלקית** g שצובעת k צמתים **ומשמרת** l קשתות. $\}$

שאלה 5 [5 נקודות]

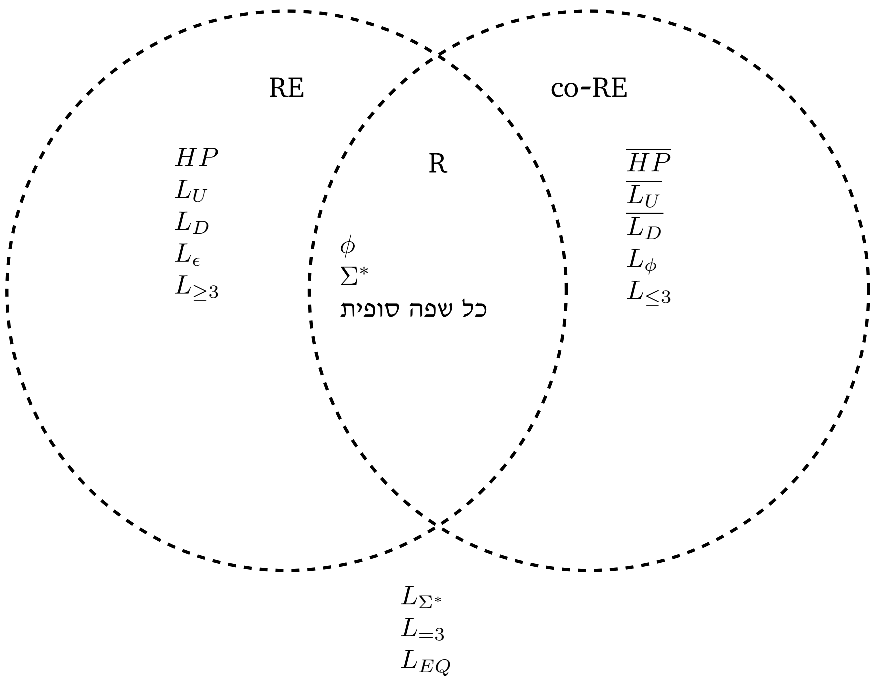
נגדיר מחלקת שפות חדשה C. שפה L שייכת למחלקה C אם קיימת מ"ט פולינומית הסתברותית, M, שמקיימת את התנאים הבאים:

1. לכל $w \in L$, M מקבלת את w בהסתברות גדולה או שווה ל-2^{-n} (כאשר n אורך הקלט)
2. לכל $w \notin L$, M דוחה את w

1. **(5 נקודות)** הוכיחו: $SAT \in C$.

שפות וסיווגן

- $\mathrm{HP} = \{\langle M\rangle, \mathrm{x} : \mathrm{x}$ עוצרת על $\mathrm{M}\}$
- $L_U = \{\langle M\rangle, \mathrm{x} : \mathrm{x}$ מקבלת את $\mathrm{M}\}$
- $L_D = \{\langle M\rangle : \langle M\rangle \in L(M)\}$
- $L_{\Sigma^*} = \{\langle M\rangle : L(M) = \Sigma^*\}$
- $L_\phi = \{\langle M\rangle : L(M) = \phi\}$
- $L_\epsilon = \{\langle M\rangle : \epsilon \in L(M)\}$
- $L_{EQ} = \{(\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle) : L(M_1) = L(M_2)\}$
- $L_{\geq 3} = \{\langle M\rangle : |L(M)| \geq 3\}$
- $L_{\leq 3} = \{\langle M\rangle : |L(M)| \leq 3\}$
- $L_{=3} = \{\langle M\rangle : |L(M)| = 3\}$



אוסף שפות NP-שלמות

- $\mathrm{HC} = \{G :$ גרף לא מכוון וקיים בו מעגל המילטוני $G\}$
- $\mathrm{SAT} = \{\varphi :$ פסוק CNF ספיק $\varphi\}$
- $\mathrm{3SAT} = \{\varphi :$ פסוק 3CNF ספיק $\varphi\}$
- $\mathrm{3COL} = \{G :$ הינו גרף 3-צביע $G\}$
- $\mathrm{VC} = \{(G,k) :$ קיים ל-G כיסוי בצמתים בגודל $k\}$
- $\mathrm{SC} = \{(n,k,S_1,\ldots,S_m) :$ קיים $I \subseteq [m]$ כך ש-$|I| = k$, ו-$\bigcup_{i\in I} S_i = [n]\}$
- $\mathrm{IS} = \{(G,k) :$ קיימת ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל $k\}$
- $\mathrm{CLIQUE} = \{(G,k) :$ קיים ב-G קליק בגודל $k\}$
- $\mathrm{SS} = \{(a_1,\ldots,a_n,s) :$ $a_1,\ldots,a_n$ ו-s מספרים טבעים וקיימת תת קבוצה, $I \subseteq [n]$, כך ש $\sum_{i\in I} a_i = s\}$

בעיות פתוחות מוכרות

- P =? NP
- NP =? coNP
- NP =? PSPACE
- NP =? EXP
- PSPACE =? EXP