

# תורת החישוביות (236343) – בוחן אמצע

## חורף תשע"ח

מרצה: פרופ' אלי בן ששון (אחראי), פרופ' יובל ישי.  
מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), סתיו פרלה, מיכל דורי, אבי קפלן.

### הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שעה. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורף למחברת זו דף עזר (בעמוד האחרון).
- אפשר להשתמש בכל כלי כתיבה, אולם אם הוא יהיה חלש מכדי להיקלט בסורק לא תהיה אפשרות לערער על הבדיקה.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

**בהצלחה!**

# 1 משפט הרדוקציה, 25 נק' (הרצאה, תרגול)

1. תהינה  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  שפות. הוכיחו את משפט הרדוקציה: אם  $L_1 \leq L_2$  ו- $L_2 \in \text{RE}$  אז  $L_1 \in \text{RE}$ . (13 נק')

2. נסמן  $L(M)$  אינסופית  $\langle M \rangle$   $L_\infty = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \}$ . הוכיחו כי  $L_\infty \notin \text{RE}$  (12 נק')

## 2 אפיון של $RE$ באמצעות מוודאים, 25 נק' (ש"ב)

מוודא  $V$  עבור שפה  $L$  הוא מכונת טיורינג בעלת שני מצבים סופיים,  $q_{acc}, q_{rej}$ , המקבלת זוג קלטים,  $(w, \pi)$  כאשר  $w \in \Sigma^*$  היא המילה ש- $V$  בודק את שייכותה ל- $L$  ו- $\pi \in \Sigma^*$  היא "הוכחה" לשייכות  $w$  ל- $L$  ובה  $V$  יכול להיעזר.

לכל זוג  $(w, \pi)$  המוודא **חייב** לעצור. נסמן  $V(w, \pi) = acc$  אם המוודא עוצר במצב  $q_{acc}$  על הקלט  $(w, \pi)$ , ונסמן  $V(w, \pi) = rej$  אם הוא עוצר ב- $q_{rej}$ . בנוסף, על המוודא לקיים את התכונות הבאות:

1. (שלמות) אם  $w \in L$  אז קיימת  $\pi$  כך ש- $V(w, \pi) = acc$  (עבור טענה נכונה קיימת הוכחה שאותה המוודא יכול לאשר).
2. (נאותות) אם  $w \notin L$  אז לכל  $\pi$  מתקיים  $V(w, \pi) = rej$  (עבור טענה שגויה, אי אפשר "לעבוד" על המוודא באמצעות "הוכחה" שגויה).

הראו כי עבור כל שפה  $L \in RE$ , אם ורק אם קיים מוודא  $V$  עבור השפה  $L$ .

### 3 תכונות סגור של $RE$ , 10 נק'

הוכיחו/הפריכו:  $RE$  סגורה לאיחוד בן מנייה. כלומר, בהינתן קבוצת שפות  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $L_n \in RE$ , אז מתקיים  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n \in RE$ .

#### 4 חישוב פונקציות, 40 נק'

עבור פונקציה מלאה  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ , נסמן ב- $f^i$  את ההרכבה של  $f$  על עצמה  $i$  פעמים. לדוגמא אם  $f(x) = 1x0$  אז  $f^3(x) = f(f(f(x))) = 111x000$ .  
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם  $f$  ניתנת לחישוב, אז  $f^2$  ניתנת לחישוב. (10 נק')

2. אם  $f^2$  ניתנת לחישוב, אז  $f$  ניתנת לחישוב. (10 נק')

3. אם  $f$  ניתנת לחישוב, אז השפה  $L_f = \{x \mid \exists i, f^i(x) = 0\}$  היא ב- $RE$  (10 נק')



4. אם  $f$  ניתנת לחישוב, אז  $L_f$  הנ"ל היא ב- $R$ . (10 נק')