תורת החישוביות (236343) – מועד ב'
אביב תשע"ח

11.10.2018

מרצים: פרופ' איל קושלביץ.

מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), דוד נאורי, מיכל דורי, אבי קפלן, דור קצלניק.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- אפשר להשתמש בכל כלי כתיבה, אולם אם הוא יהיה חלש מכדי להיקלט בסורק לא תהיה אפשרות לערער על הבדיקה.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- יש להוכיח כל טענה אחרת בה אתם משתמשים, אלא אם צוין במפורש אחרת.
- ניתן לקבל בכל סעיף 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

1 שאלה 1, 10 נק' (ת"ב 10)

נסמן $L_1 \leq_{PS} L_2$ אם קיימת פונקציה $f(x) : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1. $f(x)$ מלאה
2. $f(x)$ ניתנת לחישוב תוך שימוש בזיכרון פולינומי ב־$|x|$ (בפרט גודל הפלט שלה הוא פולינומי)
3. $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$

הוכיחו כי אם $L_1 \leq_p L_2 \implies L_1 \leq_{PS} L_2$ אז $\mathrm{P} = \mathrm{PSPACE}$.

2 שאלה 2, 15 נק' (ת"ב 5)

1. הוכיחו את ההרחבה הבאה של משפט רייס:

אם S תכונה לא טריוויאלית של שפות ב־RE, כך ש־$\Sigma^* \notin S$ אז $L_S \notin \mathrm{RE}$. (10 נק')

2. נגדיר תכונה של שפות ב־coRE להיות תת קבוצה של שפות $S \subseteq \mathrm{coRE}$.

תכונה S תקרא לא טריוויאלית אם $S \neq \emptyset$ וגם $S \neq \mathrm{coRE}$.

בהינתן תכונה S, נגדיר $L_S = \{\langle M\rangle \,|L(M) \in S\}$.

הוכיחו/הפריכו: עבור כל תכונה S טריוויאלית של שפות ב־coRE, מתקיים $L_S \in \mathrm{R}$. (5 נק')

3 שאלה 3, 25 נק'

לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב־R והאם היא ב־RE:

1. $L_1 = \{\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle \mid \quad |L(M_1) \cap L(M_2)| = \infty\}$ (8 נק')

2. $L_2 = \{\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, k \mid \ |L(M_1) \cap L(M_2)| \geq k\}$ (9 נק')

3. $L_3 = \{\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, k \mid$ צעדים k רצות לכל קלט לכל היותר M_2 ו־M_1 $|L(M_1) \cap L(M_2)| < \infty\}$ (8 נק')

4 שאלה 4, 25 נק'

לאורך השאלה נניח כי $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

נאמר שפסוק CNF הוא **כמעט** $3CNF$ אם כל פסוקית בו מכילה שניים או שלושה ליטרלים, ומספר הפסוקיות המכילות 3 ליטרלים הוא לכל היותר $\log n$, כאשר n מספר המשתנים בפסוק.

נגדיר את השפה $ASAT = \{\varphi \mid$ ספיק $3CNF$ **כמעט** הוא פסוק $\varphi\}$.

1. קבעו האם $ASAT$ ב־P או שהיא NP־שלמה. (7 נק')

נאמר שקבוצה $U \subseteq V$ היא **כמעט כיסוי בצמתים** של גרף G, אם U מכסה את כל הקשתות פרט (אולי) לאחת.
נגדיר את השפה $AVC = \{(G,k) \mid k$ בגודל **כמעט כיסוי בצמתים** יש G-ב$\}$.

2. קבעו האם AVC ב-P או שהיא NP-שלמה. (12 נק')

נאמר שפונקציה g היא **כמעט α-קירוב** (עבור $\alpha > 1$) של פונקציה f אם g ניתנת לחישוב יעיל ובנוסף לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים:

$$f(x) - \alpha \leq g(x) \leq \alpha \cdot f(x) + \alpha$$

נגדיר את הפונקציה הבאה: $f_{AVC}(G) = \min\{|U| \ \ |$ כמעט כיסוי בצמתים של G $U\}$.
כלומר, f_{AVC} בהינתן גרף G מחשבת את גודל U המינימלי, כך ש-U מהווה כמעט כיסוי בצמתים של G.
הוכיחו/הפריכו:

3. קיים כמעט 2-קירוב ל-f_{AVC} . (6 נק')

5 שאלה 5, 25 נק'

נאמר שמ"ט א"ד M **מקבלת באופן יחיד** קלט x אם קיים מסלול מקבל **יחיד** של M על x.
נגדיר $L_{\text{Unique}}(M) = \{x \in \Sigma^* \,|\, \text{מקבלת את } x \text{ באופן יחיד } M\}$ ואת מחלקת השפות:
$\text{URE} = \{L \subseteq \Sigma^* \,|\, \text{קיימת מ"ט א"ד } M \text{ כך ש- } L_{\text{Unique}}(M) = L\}$.
הוכיחו/הפריכו בקצרה את הטענות הבאות:

1. $\text{RE} \subseteq \text{URE}$ (5 נק')

2. $\overline{HP} \in \text{URE}$ (5 נק')

3. $\mathrm{URE} \subseteq \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$. (5 נק')

בנוסף, נגדיר את המחלקה $\mathrm{UNP} = \{L \subseteq \Sigma^* \big| L_{\mathrm{Unique}}(M) = L$ כך ש- M קיימת מ"ט א"ד פולינומית$\}$.
הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

4. $\mathrm{UNP} \subseteq \mathrm{coNP}$. (5 נק')

נגדיר את השפה $USAT = \{\varphi \mid$ הוא פסוק CNF וקיימת ל־φ השמה מספקת יחידה $\varphi\}$.

5. השפה $USAT$ היא שפה UNP־שלמה, כלומר $USAT \in \mathrm{UNP}$ ובנוסף, מתקיים כי לכל $L \in \mathrm{UNP}$ קיימת רדוקציה פולינומית $L \leq_p USAT$. (5 נק')

הערה: ניתן להשתמש ללא הוכחה בטענה הבאה - $L \in \mathrm{UNP}$ אמ"מ קיים יחס R_L חסום פולי', הניתן לזיהוי יעיל ומקיים $x \in L \iff$ קיים y **יחיד** כך ש־$(x, y) \in R_L$.