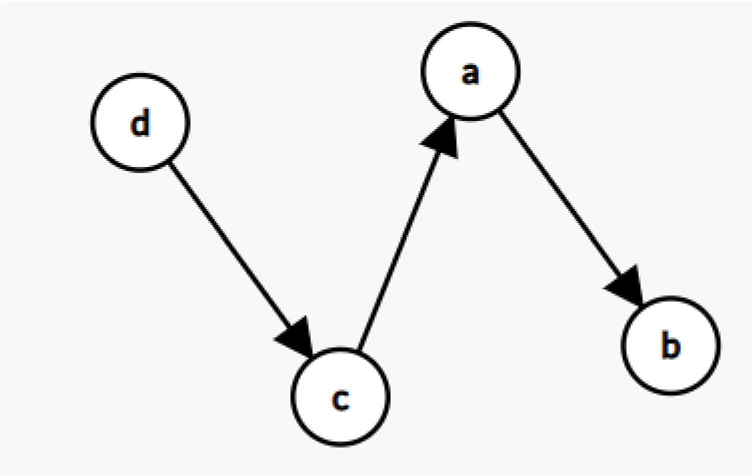
<u>אלגוריתמים 1 – תרגילים לבוחן</u>

<u>תרגיל בית 1 שאלה 2</u>

<u>שאלה 2</u> מיון טופולוגי, DFS

א. הוכיחו/הפריכו: כל ריצת DFS על גרף מכוון $G=(V,E)$ מניבה אותה כמות של קשתות עץ.
ב. הוכיחו/הפריכו: כל ריצת DFS על גרף לא מכוון $G=(V,E)$ מניבה אותה כמות של קשתות עץ.
ג. הוכיחו/הפריכו: כל ריצת DFS על גרף לא מכוון $G=(V,E)$ מניבה אותה כמות של עצים ביער ה-DFS.
ד. הוכיחו/הפריכו: בהינתן גרף מכוון וחסר מעגלים $G=(V,E)$, וזוג צמתים $u,v\in V$, הצומת u מופיע בכל מיון טופולוגי מיד אחרי v אם ורק אם קיימת קשת מ u ל-v.

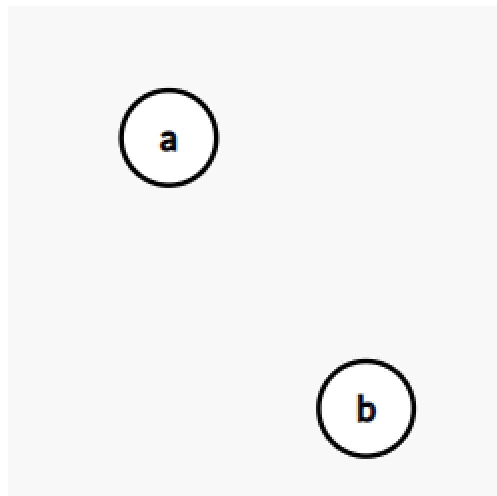
א. **הטענה אינה נכונה.** לדוגמה, בגרף הבא, ריצת DFS המתחילה מצומת d תניב 3 קשתות עץ (dc, ca, ab) אבל ריצת DFS המתחילה מצומת c תניב רק 2 קשתות עץ (ca, ab) ולכן עבור שתי ריצות שונות נקבל כמות שונה של קשתות עץ.



ב. **הטענה נכונה.**
נראה שבכל ריצת DFS על גרף לא מכוון $G=(V,E)$ לכל רכיב קשירות של העץ מתאים עץ ביער המסלולים.
נוכיח באינדוקציה על k, מספר רכיבי הקשירות.
בסיס: עבור $k=1$, הגרף קשיר. יהי $u\in V$ הצומת הראשון בריצת ה-DFS. אז לכל $v\in V\setminus\{u\}$ יש מסלול מ-u ל-v (מפאת הקשירות) ולכן לפי משפט המסלול הלבן, v צאצא של u בעץ המסלולים. זה מתקיים לכל שאר הצמתים בגרף ולכן יש עץ יחיד כנגד רכיב קשירות יחיד.
צעד: נניח שעבור גרף בעל k רכיבי קשירות מתקבל יער מסלולים בעל k עצים.
נתבונן בגרף בעל $k+1$ רכיבי קשירות. יהי $u\in V$ הצומת הראשון בריצת ה-DFS ויהי U רכיב הקשירות שלו. יש מסלול לבן מ-u לכל צומת ב-$U\setminus\{u\}$ ולכן כל שאר הצמתים ב-U הם צאצאים של u ביער המסלולים. אין מסלול כלשהו (בפרט לבן)

מ-u אל כל הצמתים שאינם ב-U ולכן הם לא צאצאים של u ביער המסלולים.
לאחר שסיימנו לבנות את העץ המתקבל מכל הצמתים ב-U, נותר לטפל ב-k רכיבי הקשירות שנותרו, וע"פ ה"א, יתקבלו בדיוק k עצים ביער המסלולים.
לכל רכיב קשירות i בעל n_i צמתים, נקבל ביער המסלולים עץ בעל מספר קשתות $n_i - 1$ (מאחר שזהו עץ) ולכן בסה"כ יש מספר קבוע של קשתות בעץ בכל ריצת DFS.

ג. **הטענה נכונה** והוכחה כחלק מההוכחה של סעיף ב'.
ד. **הטענה לא נכונה**. ייתכן מצב במיון טופולוגי שבו שני צמתים צמודים אך אינם באותו רכיב קשירות ולכן לא קיימת קשת ביניהם. לדוגמה, עבור הגרף הבא הממוין לפי מספרים שלמים מיון טופולוגי חוקי הוא $2 \rightarrow 1$, אולם, לא קיימת קשת $2 \rightarrow 1$.



תרגיל בית 1 שאלה 3

שאלה 3 מיון טופולוגי

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ חסר מעגלים.

מסלול המילטוני בגרף הינו מסלול פשוט העובר דרך כל צמתי הגרף.

הציעו אלגוריתם המכריע האם בגרף G קיים מסלול המילטוני. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נבנה אלגוריתם המכריע האם בגרף G קיים מסלול המילטוני.
קלט: גרף G מכוון וחסר מעגלים
פלט: "כן" אם קיים בגרף מסלול המילטוני, ואחרת "לא".

האלגוריתם:

1. נבצע מיון טופולוגי ונתבונן בצומת הראשון במיון.
2. אם קיים מסלול לצומת הבא במיון, נעבור אליו, אחרת, נחזיר "לא".
3. אם נעבור דרך כל הצמתים בגרף מבלי להחזיר "לא", נחזיר "כן".

נכונות:
נוכיח את הטענה הבאה: ב-DAG, קיים מסלול המילטוני מכוון אם ורק אם בכל מיון טופולוגי על הגרף בין כל שני צמתים שכנים במיון קיימת קשת $u \to v$.
⇒: נתון כי בגרף מכוון חסר מעגלים בין כל שני צמתים במיון טופולוגי קיימת קשת. ניתן לבנות מסלול מכוון העובר בכל צמתי הגרף באמצעות המיון הטופולוגי עצמו, המכיל קשת בין כל שני צמתים ולכן קיים מסלול העובר בכל הצמתים בגרף, ולכן הגרף המילטוני.
⇐: יהי מסלול המילטוני ומיון טופולוגי כלשהו בגרף G.
נניח בשלילה כי קיימים שני צמתים שכנים $u < v$ במיון הטופולוגי ואין ביניהם קשת בגרף. המסלול ההמילטוני חייב לעבור גם ב-u וגם ב-v כי הוא עובר בכל צמתי הגרף.
מכיוון שאין קשת בין u ל-v קיימות שתי אופציות למסלול ביניהם כחלק מהמסלול ההמילטוני:
u מגיע לפני v במסלול מסוג $u \to w \to \cdots \to v$ – קיימת כאן סתירה לכך ש-v מגיע אחרי u במיון הטופולוגי מכיוון שלאחר הורדת צומת u והקשתות היוצאות ממנו, v איננו מקור בגרף ולכן לא יהיה הבא בתור.
v מגיע לפני u במסלול מסוג $v \to w \to \cdots \to u$ – קיימת כאן סתירה לכך ש-v > u במיון הטופולוגי.
בשני המקרים קיימת סתירה ולכן לא ייתכן מצב בו קיימים שני צמתים עוקבים במיון הטופולוגי בלי קשת מכוונת בכיוון המיון בגרף, ולכן הטענה נכונה.

סיבוכיות: $O(V^2)$ עבור מיון טופולוגי ועוד V איטרציות בסיבוכיות $O(1)$ ולכן סה"כ $O(V^2)$.

תרגיל בית 1 שאלה 4

שאלה 4 BFS

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$ וצומת $s \in V$.

הציעו אלגוריתם המחזיר מעגל (לא בהכרח פשוט) בעל אורך זוגי מינימלי העובר דרך הצומת s, או מחזיר שגיאה במידה ואין מעגל כזה. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נבנה אלגוריתם המכריע האם בגרף קיים מעגל בעל אורך זוגי מינימלי העובר דרך הצומת s, ואם כן, מחזיר אותו.
קלט: גרף מכוון G
פלט: מעגל בעל אורך זוגי מינימלי או שגיאה אם לא קיים מעגל כזה.

האלגוריתם:

1. נגדיר $G' = (V', E'), V' = \{v' | v \in V\}, E' = \{(u', v') | (u, v) \in E\}$. נשמור דגל המסמן "גרף נבחר" ומאותחל ל-G.
2. נבצע סריקת BFS במקביל על שני הגרפים G, G' החל מהצומת s ובכל מעבר צומת נחליף את הדגל (מ-G ל-G' ולהפך).
3. בכל צעד, נבחן אם הצומת s שממנו התחלתי הוא צאצא של הצומת הנוכחי. אם כן, נבדוק אם הדגל. אם הדגל על G', נחזיר את המסלול מהצומת הנוכחי עד לצומת המקור s. אחרת, נמשיך בסיור.
4. אם סיימנו את הסיור ובצומת האחרון התנאי לא מתקיים, נחזיר כי לא קיים מעגל באורך זוגי בגרף.

נכונות:

ע"י שימוש בשני גרפים הרצים במקביל קיבלנו כי כל פעם שהדגל נמצא על G' התקדמנו מספר אי זוגי של צעדים ולכן צעד נוסף יהיה מספר זוגי וכל פעם שהדגל נמצא על G התקדמנו מספר זוגי של צעדים ולכן צעד נוסף יהיה מספר אי זוגי.
בסריקת BFS הסורקת לרוחב, המעגל בעל האורך הקצר ביותר יגיע ראשון בחיפוש מאופי הסריקה. לא ייתכן שנקבל מעגל בעל אורך שאינו הקצר ביותר כי בכל צעד מתקדמים לכל היותר מרחק אחד מהמקור.
מובטח כי אם קיים בגרף מעגל, במהלך סריקת ה-BFS נמצא אותו, מאחר שבסריקה מתבצע מעבר על כלל הקשתות (שחלקן נפסל אבל עדיין ניתן לבצע בדיקה האם אחת הקשתות מובילה לצומת s).

סיבוכיות:

שכפול הגרף אינו פוגע בסיבוכיות הזמן או המקום. סריקת BFS כפולה תעלה $O(V + E)$ זמן.

תרגיל בית 1 שאלה 5

שאלה 5 BFS

נתונים גרף לא מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \{0,1\}$ וצומת $s \in V$.

משקל של מסלול P בגרף הינו סכום משקלי הקשתות לאורכו, כלומר $\sum_{e \in P} w(e)$.

הציעו אלגוריתם המחשב לכל $v \in V$ את משקל המסלול הקל ביותר בגרף מהצומת s אליו, בסיבוכיות זמן $O(|V| + |E|)$. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נבנה אלגוריתם המקבל גרף לא מכוון $G = (V, E)$, צומת $v \in V$ ופונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \{0,1\}$ ומחזיר לכל צומת בגרף את משקל המסלול הקל ביותר מ-s אליו.

קלט: גרף $G=(V,E)$ לא מכוון, פונקציית משקל $w: E \to \{0,1\}$ וצומת מקור $s \in V$.
פלט: לכל צומת $v \in V$, משקל המסלול הקל ביותר מ-s ל-v.

האלגוריתם:

1. לכל צומת בגרף יהיה שמור המרחק של הצומת מ-s, שיאותחל לאינסוף לכל צומת פרט ל-s, עבורו יאותחל ל-0.
2. בסריקת BFS, בכל הגעה לצומת, נעדכן את המרחק של כל בניו מ-s באופן הבא: נניח ש-$v \in V$ הצומת ו-$u \in V$ הוא בן שלו, אז נקבע:
$$\mathrm{dist}(u) \leftarrow \min(\mathrm{dist}(u), \mathrm{dist}(z) + w(uz))$$
3. בסוף ה-BFS, נחזיר את כל הערכים $\mathrm{dist}(v)$ לכל $v \in V$.

נכונות:
יהי v צומת בגרף. אם קיים מסלול מ-s ל-v, הערך של $\mathrm{dist}(v)$ ישתנה במהלך האלגוריתם. אחרת, נחזיר אינסוף, הלוא הוא משקל המסלול מ-s ל-v.
בזכות צורת העדכון של ערכי dist של כל צומת, נבטיח כי בכל צומת יהיה את המסלול הקל ביותר מ-s ל-v, זאת מאחר שגם אם ביקרנו באחד מבניו של צומת z בסיור BFS בעבר, עדיין נעדכן את משקל מסלולו מ-s אם המסלול המגיע מהבן אכן קל יותר.
בסוף סריקת ה-BFS, כל הצמתים יכילו את ערך משקל המסלול מ-s מאחר שסריקת BFS תעבור על כל קשתות הגרף הנגישות מהמקור ותבצע פעולות גם על קשתות שאינן ממשיכות את הסיור.

סיבוכיות: סריקת BFS בגרף תהיה בסיבוכיות $O(|V|+|E|)$. סה"כ נבצע צעדים בסיבוכיות נוספת $O(|E|)$ ולכן סה"כ $O(|V|+|E|)$.

<u>תרגיל בית 1 שאלה 6</u>

<u>שאלה 6</u> מיון טופולוגי

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ חסר מעגלים, פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$ וצומת $s \in V$.

<u>משקל</u> של מסלול P בגרף הינו סכום משקלי הקשתות לאורכו, כלומר $\sum_{e \in P} w(e)$.

הציעו אלגוריתם המחשב לכל $v \in V$ את משקל המסלול הקל ביותר בגרף מהצומת s אליו, בסיבוכיות זמן $O(|V|+|E|)$. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נבנה אלגוריתם המקבל גרף מכוון חסר מעגלים $G=(V,E)$, צומת $v \in V$ ופונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$ ומחזיר לכל צומת בגרף את משקל המסלול הקל ביותר מ-s אליו.

קלט: גרף $G = (V, E)$ מכוון וחסר מעגלים, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$ וצומת מקור $s \in V$.

פלט: לכל צומת $v \in V$, משקל המסלול הקל ביותר מ-s ל-v.

האלגוריתם:

1. לכל צומת בגרף יהיה שמור המרחק של הצומת מ-s, שיאותחל לאינסוף לכל צומת פרט ל-s, עבורו יאותחל ל-0.
2. נבצע מיון טופולוגי לגרף G.
3. נעבור על כל הצמתים בגרף על פי המיון הטופולוגי, כאשר בכל מעבר נבצע את העדכון הבא עבור הצומת u בסיור, ועבור כל בן v שלו:
   אם $\mathrm{dist}(v) > \mathrm{dist}(u) + w(uv)$, נעדכן $\mathrm{dist}(v) \leftarrow \mathrm{dist}(u) + w(uv)$.
   אחרת, לא נשנה את $\mathrm{dist}(v)$ ונמשיך בן הבא.
4. בסוף הריצה, נחזיר את כל הערכים $\mathrm{dist}(v)$ לכל $v \in V$.

נכונות:
נוכיח באינדוקציה על מרחק צומת v_i מהמקור s שמתקיים כי $\mathrm{dist}(v_i)$ הוא אורך המסלול הקל ביותר בין s ל-v_i (כאשר $v_1, \dots, v_n$ הצמתים מסודרים לפי קרבה ל-s).
בסיס: עבור $i = 0$, נקבל $v_i = s$ ואכן $\mathrm{dist}(v_i) = 0$.
צעד: נניח כי לכל $i \leq k - 1$ מתקיים ש-$\mathrm{dist}(v_i)$ הוא אורך המסלול הקל ביותר בין s ל-v_i ונתבונן בצומת v_k. אם קיים מסלול מ-s ל-v_k מובטח מתכונות המיון הטופולוגי כי קיים צומת v_i שהינו אביו של v_k וגם $i < k$. לכן, צעד העדכון שהשתמשנו בו מבצע בחירה של האב הקדמון בעל המסלול הקל ביותר ומבצע השוואה בין כל המסלולים כנ"ל. מה"א, מובטח כי לכל צומת לפני k ערך המסלול הקל ביותר הוא נכון. אם אין מסלול כזה, ערכו של v_k לא ישתנה ויוחזר אינסוף.

ע"פ ה"א לפני הגעה לצומת k ביקרנו בכל הצמתים v_i כך ש-$i < k$ ומתכונות המיון הטופולוגי לא יהיו צמתים v_j כך ש-$j > k$ בהמשך הסריקה שיהיו אבותיו של k.

סיבוכיות: סיבוכיות המיון הטופולוגי $O(|V| + |E|)$. סה"כ נבצע צעדים בסיבוכיות נוספת $O(|E|)$ ולכן סה"כ $O(|V| + |E|)$.

תרגיל בית 2 שאלה 1

שאלה 1 רכיבים קשירים היטב

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$.

הציעו אלגוריתם המחזיר קבוצה $U \subseteq V$ בגודל מקסימלי כך שקיים מסלול (לא בהכרח פשוט) העובר דרך כל צמתי U, בסיבוכיות זמן $O(|V| + |E|)$. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נציע אלגוריתם המחזיר קבוצה $U \subseteq V$ בגודל מקסימלי כך שקיים מסלול העובר דרך כל צמתי הקבוצה.

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$.
פלט: קבוצה $U \subseteq V$ מגודל מקסימלי כך שקיים מסלול העובר דרך כל צמתי הקבוצה.

האלגוריתם:

1. נבנה את הגרף G^{SCC} ונבצע לו מיון טופולוגי (הוא חסר מעגלים).
2. נעבור על רכיבי הקשירות של הגרף לפי סדר המיון הטופולוגי מהסוף להתחלה. לכל רק"ה C_i בצע:
   a. אתחל משתנה $n_{C_i} \leftarrow |C_i|$ וקבוצה $U_{C_i} \leftarrow C_i$.
   b. עבור על כל הקשתות הנכנסות ל-C_i ולכל $(C_j, C_i) \in E^{\mathrm{SCC}}$ עדכן את הערכים $n_{C_j} \leftarrow \max(n_{C_j}, |C_j| + n_{C_i}\}$, $U_{C_j} \leftarrow U_{C_i} \cup C_j$.
3. עבור על כל רכיבי הקשירות והחזר את U_{C_i} עבורו n_{C_i} מקסימלי.

נכונות:
נוכיח את נכונות האלגוריתם.

טענת עזר 1: בכל שלב בריצה, בגרף G קיים מסלול העובר דרך כל צמתי U_{C_i} ומתקיים $n_{C_i} = |U_{C_i}|$ לכל רק"ה $C_i \in V^{\mathrm{SCC}}$.
הוכחת טענת העזר: באינדוקציה על n, שלב הריצה של האלגוריתם.
בסיס: $n = 0$. בשלב הראשון, הטענה מתקיימת מאופן אתחול השדות.
צעד: נניח כי בשלב ה-$n - 1$ קיים מסלול העובר דרך כל צמתי U_{C_i} ומתקיים $n_{C_i} = |U_{C_i}|$ לכל $C_i \in V^{\mathrm{SCC}}$.
בשלב ה-n באלגוריתם, אנו מטפלים בצומת C_i ומעדכנים לכל הצמתים שמהם יש קשתות נכנסות ל-C_i את השדות בהתאם.
יהי $C_j \in V^{\mathrm{SCC}}$ צומת לאחר שלב זה באלגוריתם. אם שדותיו לא עודכנו, אין מ-C_j ל-C_i קשתות ולכן הטענה נכונה מה"א.
אם שדותיו עודכנו, $U_{C_j} = U_{C_i} \cup C_j, n_{C_j} = |C_j| + n_{C_i}$. מה"א קיים מסלול העובר דרך כל צמתי U_{C_i}, ומכיוון שיש קשת $C_j \to C_i$, כעת יש מסלול העובר דרך כל צמתי U_{C_j} המעודכן. בנוסף, אכן מתקיים $|U_{C_j}| = |C_j| + n_{C_i} = n_{C_j}$.
בסה"כ, לאחר הפעלת השלב ה-n באלגוריתם, הטענה מתקיימת לכל $C_i \in V^{\mathrm{SCC}}$.

טענת עזר 2: בכל שלב בריצה, הקבוצה U_{C_i} היא הקבוצה המקסימלית כך שקיים מסלול מ-$u \in C_i$ כלשהו העובר דרך כל צמתי הקבוצה U_{C_i}, לכל רק"ה $C_i \in V^{\mathrm{SCC}}$.
הוכחת טענת העזר: נניח שקיים שלב בריצה שבו עבור צומת C_i יש קבוצה גדולה יותר מ-

U_{C_i}. תהי האיטרציה האחרונה בה עדכנו את U_{C_i}, והקבוצה המקסימלית $U_{\max}$ הקיימת מהנחת השלילה. באיטרציה זו, עדכנו $U_{C_i} = C_i \cup U_{C_j}, n_{C_i} = \max\left(\left|U_{C_i}\right|, C_i + n_{C_j}\right)$ עבור צומת C_j כלשהו. מתקיים כי $|U_{\max}| \leq |C_i| + n_{C_j}$ ולכן $\left|U_{C_i}\right| \geq |U_{\max}|$ בסתירה לכך ש-$U_{\max}$ יותר מקסימלית מ-U_{C_i}.

מטענות העזר הנ"ל נקבל את נכונות האלגוריתם שכן בסוף ריצתו, כל צומת יחזיק את U_{C_i} המקסימלית.

סיבוכיות: בניית G^{SCC} לוקחת $O(V+E)$, מיון טופולוגי $O(V+E)$, מעבר על כל צומת והקשתות שנכנסות אליו $O(V+E)$, מעבר על כל הצמתים $O(V)$. סה"כ $O(V+E)$.

<u>תרגיל בית 2 שאלה 2</u>

<u>שאלה 2</u> רכיבים קשירים היטב

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$.

<u>קבוצה לא קשורה</u> בגרף G הינה קבוצת צמתים $\emptyset \neq U \subseteq V$ כך שלא קיימת קשת מצומת שאינו שייך ל-U לצומת ששייך ל-U.

הציעו אלגוריתם המוצא קבוצה לא קשורה בגרף G בעלת גודל מינימלי בסיבוכיות זמן $O(|V| + |E|)$. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נציע אלגוריתם המוצא קבוצה לא קשורה בגרף G בעלת גודל מינימלי.

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$.
פלט: קבוצה לא קשורה בעלת גודל מינימלי.

האלגוריתם:

1. בנה גרף G^{SCC}.
2. לכל $v \in V^{\mathrm{SCC}}$, אם $d_{\mathrm{in}}(v) = 0$, עדכן $m \leftarrow \min(m, |v|)$. אם m עודכן, אז קבע $U_{\min} \leftarrow v$.
3. החזר את $U_{\min}$.

נכונות: נראה את נכונות האלגוריתם.

טענת עזר 1: אם קבוצה לא קשורה U מכילה צומת מרכיב קשירות היטב כלשהו, היא מכילה את כל הצמתים מרכיב קשירות היטב זה.
הוכחת טענת העזר: נניח בשלילה שקיים צומת ברכיב קשירות U $v \in V \cap U$ כאשר יש צומת אחר $u \in V \setminus U$. מהגדרת רכיב הקשירות V קיים מסלול $u \to \cdots \to v$. תהי $e = (x, y)$ הקשת בין הצומת האחרון במסלול שאינו ב-U לבין הצומת הראשון במסלול ב-U. קיום קשת כזו הוא סתירה לכך שהקבוצה לא קשורה.

טענת עזר 2: אם קיימת קשת מצומת ברכיב קשירות היטב אחד H_1 לצומת ברכיב קשירות היטב אחר H_2 שצמתיו הם חלק מקבוצה לא קשורה, אז גם צמתי H_1 חלק מאותה קבוצה לא קשורה.
הוכחת טענת העזר: תהי $e = (x, y)$ הקשת המחברת את H_1, H_2. מטענת עזר 1, $y \in U$ ולכן מההגדרה של קבוצה לא קשורה, על כל צמתי H_1 להיות ב-U.

משום שכל קשת בין רכיבי קשירות ב-G מתאימה לקשת בין צמתים ב-G^{SCC} ובאמצעות טענות העזר, הקבוצה U המינימלית היא אחד מרכיבי הקשירות היטב המתאימים למקורות ב-G^{SCC}. מהגדרת האלגוריתם, נתונים לנו הגדלים של כל רכיב קשירות היטב כזה, ולכן כאשר נחזיר את רכיב הקשירות היטב המתאים למקור עם המשקל הנמוך ביותר, נחזיר את הקבוצה הלא-קשורה המינימלית.

סיבוכיות: בניית G^{SCC} ובדיקת דרגות כניסה - $O(V + E)$ כ"א. סה"כ $O(V + E)$.

<u>תרגיל בית 2 שאלה 3</u>

<u>שאלה 3</u> עץ פורש מינימום

נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$ ועפ"מ T של הגרף G.

מוסיפים לגרף G צומת חדש v, וקשתות ממושקלות מהצומת v לחלק מצמתי הגרף G. את הגרף המתקבל נסמן ב-G'.

הציעו אלגוריתם המוצא עפ"מ של הגרף G' בסיבוכיות זמן $O(|V|\log|V|)$. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נציע אלגוריתם המוצא עפ"מ של הגרף G'.

קלט: גרף לא מכוון וקשיר עם פונקציית משקל $G' = (V \cup \{v\}, E')$ ועפ"מ $T = (E^T, V^T)$ של הגרף G.
פלט: עפ"מ של הגרף G'.

האלגוריתם:

1. בנה גרף $\bar{G} = (V', E^T \cup \{uv | uv \in E'\})$.
2. הרץ קרוסקל על $\bar{G}$ והחזר את העפ"מ המתקבל.

נכונות: נוכיח כי העפ"מ של $\bar{G}$ הוא עפ"מ של G'.
קיימת סדרת פעולות של הפעלת הכלל האדום על G כך שנקבל את העפ"מ T. בגרף G', נוכל להפעיל את אותה סדרת פעולות של הכלל האדום שהפעלנו על G וזאת מכיוון שהוספת v וקשתות ממנו לצמתים ב-G לא שינתה את המעגלים שהיו ב-G. כלומר, בהפעלת סדרת פעולות זו, נגיע בדיוק לגרף שמכיל את קשתות העץ T והקשתות שהוספנו ב-G', וזהו בדיוק הגרף $\bar{G}$. לכן, הפעלת קרוסקל משלב זה תמצא עפ"מ של G', שכן עד כה ביצענו סדרה חוקית של כללים מהאלגוריתם הגנרי. זהו גם בדיוק אותו

העפ"מ שיתקבל מהרצת קרוסקל על $\bar{G}$. מכך, נסיק כי העפ"מ של $\bar{G}$ הוא עפ"מ של G' שכן מצאנו סדרה חוקית של הפעלת הכלל האדום ולאחריה הרצת קרוסקל על G' שתניב את אותו העפ"מ.

סיבוכיות: בניית $\bar{G}$ תיקח $O(V)$ כמספר הקשתות שנוסיף. הרצת קרוסקל תיקח $O(E\log V)$ אך מכיוון שמספר הקשתות ב-$\bar{G}$ הוא לכל היותר $2(|V|-1)$, נקבל כי $|E| = O(V)$ ולכן $O(E\log V) = O(V\log V)$. סה"כ $O(V\log V)$.

תרגיל בית 2 שאלה 4

שאלה 4 עץ פורש מינימום

נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הצמתים $w: V \to \mathbb{R}$.

משקל מדורג של עפ"מ T מוגדר להיות $w_d(T) = \sum_{v\in V} w(v)\cdot \deg_T(v)$, כאשר $\deg_T(v)$ הינו מספר השכנים של הצומת v בעץ T.

הציעו אלגוריתם המוצא עץ פורש של הגרף G בעל משקל מדורג מינימלי. יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נציע אלגוריתם המוצא עץ פורש של הגרף G בעל משקל מדורג מינימלי.

קלט: גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הצמתים w.
פלט: עץ פורש על G בעל משקל מדורג מינימלי.

האלגוריתם:

1. בנה פונקציית משקל $w': E \to \mathbb{R}$ כך שלכל $e = (u, v) \in E$,
$w'(e) = w(u) + w(v)$
2. הרץ קרוסקל על G עם w' והחזר את העפ"מ המתקבל.

נכונות:
טענה: עפ"מ T של G עם פונקציית המשקל w' הוא עץ פורש בעל משקל מדורג מינימלי ב-G.
הוכחת הטענה: יהי T עפ"מ של G עם פונקציית המשקל w'.

$$w'(T) = \sum_{e\in E_T} w'(e) = \sum_{(u,v)\in E^T} (w(u) + w(v)) = \sum_{u\in V} w(u)\deg(u) = w_d(T)$$

המעבר האחרון הוא מאחר שדרגת כל צומת u נקבעת לפי מספר השכנים שלו. מאחר שלכל שכן של u הקשת ביניהם מכילה את הערך $w(u)$, נקבל כי מתקיים לכל צומת u, $w_d(u) = w(u)\deg(u)$. בסה"כ קיבלנו כי סכום הקשתות המעורבות בעפ"מ T שווה למשקל העץ המדורג. מאחר שסכום הקשתות בעפ"מ הוא מינימלי ביחס ל-w', נקבל כי גם $w_d(T)$ מינימלי ולכן T עץ מדורג בעל משקל מינימלי.

סיבוכיות: יצירת פונקציית המשקל יכולה להתבצע לפי הצורך ולכן לא לוקחת זמן. הרצת קרוסקל $O(E\log V)$ ולכן סה"כ $O(E\log V)$.

תרגיל בית 2 שאלה 5

שאלה 5 עץ פורש מינימום

נתונים גרף קשיר $G=(V,E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E\to\mathbb{R}$ וזוג עפ"מים של הגרף G $T_1\neq T_2$.

הוכיחו כי לכל $e\in T_1\backslash T_2$ קיימת קשת $e'\in T_2$ כך ש-$T_2\backslash\{e'\}\cup\{e\}$ עפ"מ של הגרף G.

יהי גרף קשיר $G=(V,E)$, פונקציית משקל על הקשתות וזוג עפ"מים $T_1\neq T_2$ של G.
תהי $e=(u,v)\in T_1\setminus T_2$. הסרת e מ-T_1 מחלקת אותו לשני רכיבים קשירות A_u,A_v.
בנוסף, קיים מסלול p בין u ל-v בעפ"מ T_2 אשר לא עובר דרך הקשת e כי $e\notin T_2$.
כלומר, קיימת קשת $e'\in T_2\setminus T_1$ שחוצה את החתך. נתבונן בעץ T' המתקבל מהסרת e מ-T_1 והוספת e'. אם $w(T')<w(T_1)$ נקבל סתירה לכך ש-T_1 עפ"מ של G. אם $w(T')>w(T_1)$, נקבל כי $w(e')>w(e)$ ולכן בהפעלת הכלל הכחול של החתך A_u,A_v, בהכרח e' לא תיבחר, בסתירה למינימליות T_2. נקבל כי $w(e')=w(e)$ ולכן בבניית העץ T_2 כאשר אנו מפעילים את הכלל הכחול על החתך A_u,A_v נבחר את הקשת e ונסיר את e'. כך נקבל גרף קשיר בעל $|V|-1$ קשתות ומכיוון שהוספנו והסרנו קשתות בעלות משקל זהה מ-T_2, משקל העץ החדש T'' יהיה שווה למשקל T_2 ולכן T'' עפ"מ של G.

תרגיל בית 2 שאלה 6

שאלה 6 עץ פורש מינימום

נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w: E\to\mathbb{R}$ וזוג עצים פורשים מינימליים T',T'' של הגרף G.

הוכיחו כי קיימת סדרה של עצים פורשים מינימליים $T'=T_1,T_2,\dots,T_k=T''$ של הגרף G, כאשר $T_i=(V,E_i)$, כך לכל $1\leq i<k$ מתקיים כי $|E_i\backslash E_{i+1}|=1$. במילים אחרות, לכל $1\leq i<k$ קיימת קשת אחת בלבד e כך ש-$e\in E_i\backslash E_{i+1}$.

יהי גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, w פונקציית משקל על הקשתות ו-T',T'' עפ"מים של G.
נגדיר $T_1\leftarrow T'$. עבור קשת $e'=(u,v)\in T'\setminus T''$ קיים מסלול p בין u ל-v ב-T'' ולכן קיימת קשת $e''\in T''$ שחוצה את החתך שיוצרת e'. בשלב ה-i, ניקח קשת כלשהי $e'\in T'\setminus T''$ שעוד לא בחרנו. כפי שהוסבר קיימת קשת $e''\in T''$ ולכן נבחר אותה במקום e' ונקבל $T_i\leftarrow T_{i-1}\setminus\{e'\}\cup\{e''\}$ עפ"מ של G. נבצע כך k פעמים עבור כל הקשתות $e'\in T'\setminus T''$ ונקבל סדרה של עפ"מים כך ש-$|E_i\setminus E_{i-1}|=1$ שכן כל פעם אנו מסירים קשת אחת ומוסיפים אחת אחרת.