תורת החישוביות (236343) – מועד ב׳
חורף תשע״ח

מרצים: פרופ׳ אלי בן ששון (אחראי), פרופ׳ יובל ישי.

מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), סתיו פרלה, מיכל דורי, אבי קפלן.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורף למחברת זו דף עזר (בעמוד האחרון).
- אפשר להשתמש בכל כלי כתיבה, אולם אם הוא יהיה חלש מכדי להיקלט בסורק לא תהיה אפשרות לערער על הבדיקה.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת ״לא יודע״.

בהצלחה!

1 שאלה 1, 15 נק' (ש"ב)

עבור פסוק CNF φ נגדיר את $f(\varphi)$ להיות מספר הפסוקיות המרבי שניתן לספק על־ידי השמה אחת. כלומר,

$$f(\varphi) = \max_{\alpha \in \{0,1\}^{|var(\varphi)|}} \{|T| : T \subseteq [\#_{clauses}(\varphi)] \wedge (\forall i \in T)\, \alpha \models C_i\}$$

כאשר

- $\#_{clauses}(\varphi)$ הוא מספר הפסוקיות ב ־ φ.
- $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_{\#_{clauses}(\varphi)}$.
- $var(\varphi)$ היא קבוצת משתני φ.
- הסימון $\alpha \models C_i$ מציין כי ההשמה α מספקת את הפסוקית C_i.

בהנחה ש־$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. קיים אלגוריתם קירוב 2־כפלי ל־f. (5 נק')

2. השפה $L = \{\varphi |$ זוגי $f(\varphi)\}$ היא ב־P. (10 נק')

2 שאלה 2, 14 נק'

עבור שפות L_1, L_2 נגדיר את ההפרש הסימטרי שלהן $L_1 \triangle L_2$ כאוסף המילים x כך ש-$x \in L_1 \setminus L_2$ או $x \in L_2 \setminus L_1$ (כלומר, אוסף המילים ששיכות בדיוק לאחת מבין שתי השפות L_1, L_2).

עבור אוסף מכונות $C = \{\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, \ldots\}$ המכיל לפחות שני קידודים של מכונות, נאמר ש-D **מבחין** של C אם לכל שתי מכונות $\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle \in C$, מתקיים $D(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) = x$ כך ש-$x \in L(M_1) \triangle L(M_2)$ אם קיים כזה , ואחרת D לא עוצרת.

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו האם קיים מבחין D **לכל** אוסף מכונות C המקיים את התנאים בסעיף:

1. C אוסף קידודי מכונות כלשהו. (7 נק')

2. C המקיימת שלכל $\langle M\rangle\in C$, M מכריעה את השפה $L\left(M\right)$. (7 נק')

3 שאלה 3, 21 נק'

נאמר ש־x מילה מקסימלית המתקבלת ע"י M אם $x \in L(M)$ ולכל $y \in L(M)$ מתקיים $|y| \leq |x|$.

לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב־R והאם היא ב־RE.

1. $L_1 = \{\langle M \rangle, x \mid$ x מילה מקסימלית המתקבלת ע"י $M\}$ (7 נק')

2. $L_2 = \{\langle M\rangle, x \mid$ M מקבלת את x ו־x אינה מילה מקסימלית המתקבלת ע"י $M\}$ (7 נק')

3. $L_3 = \{\langle M\rangle, x \mid$ צעדים $|x|$ תוך M מילה מקסימלית המתקבלת ע"י $x\}$ (7 נק')

4 שאלה 4, 30 נק'

בשאלה זאת נסמן ב־n את מספר הצמתים בגרף G וב־m את מספר הקשתות בגרף G. בהנחה ש$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות אם היא ב־P או שהיא NP־שלמה.

1. $L_1 = \{(G,k) \mid$ קיימים ב־G שלושה קליקים זרים בצמתים בגודל $k, k-1, k-2\}$ (6 נק')

2. $L_2 = \{G \mid$ קיים ב־G קליק בגודל $n - \log n\}$ (8 נק')

3. $\{$קיימת חלוקה של צמתי G ל־3 קבוצות זרות שכל אחת מהווה קליק ב־G $|G\}= L_3$ (8 נק')

4. בהנחה ש־$CLIQUE \in \mathrm{P}$, **תארו במפורש וללא קופסאות שחורות** אלגוריתם יעיל שעל קלט G מוצא קליק בגודל מקסימלי ב־G.
(תרגול) (8 נק')

הערה: ניתן להשתמש במכונה שמכריעה את $CLIQUE$ בזמן פולינומי, אבל מעבר לכך לא ניתן להניח שנתון לאלגוריתם מראש קידוד של מכונת טיורינג כלשהי, גם אם היא קיימת.

5 שאלה 5, 20 נק'

מערכת הוכחה אינטרקטיבית (P,V) היא אינטרקציה בין מוכיח P למוודא V, וכאשר בתחילת האינטרקציה, V ו־P מקבלים את הקלט x, ו־P מנסה לשכנע את V שמילת הקלט x בשפה L.

נאמר ששפה L היא במחלקת השפות IP אם קיימת לה מערכת הוכחה אינטרקטיבית (P,V), כך ש־P הוא דטרמיניסטי, ו־V הוא פולינומי הסתברותי, המקיימת:

1. מספר הסיבובים של האינטרקציה הוא פולינומי (כלומר מספר ההודעות ש־V ו־P שולחים אחד לשני במהלך האינטרקציה הוא פולינומי).
2. שלמות - לכל $x \in L$:
3. נאותות - לכל $x \notin L$:

ענו על הסעיפים הבאים:

1. השלימו את הגדרת השייכות של שפה למחלקה IP. (3 נק')

תזכורת: נאמר שגרף G_1 איזומורפי לגרף G_2 אם קיימת פרמוטציה על הצמתים $\pi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ כך ש־$\pi(G_1) = G_2$. נגדיר את השפה - $GNI = \{(G_1,G_2) | \text{איזומורפיים} \text{ אינם } G_2 \text{ ו־} G_1\}$.

2. הציגו מערכת הוכחה אינטרקטיבית לשפה GNI. (אין צורך להוכיח שהיא מקיימת את התנאים) (5 נק')

3. הוכיחו כי לכל שפה $L \in NP$ קיימת מערכת הוכחה אינטרקטיבית כנ"ל, כלומר הוכיחו כי $L \in IP$. (6 נק')

4. הוכיחו כי אם קיימת מערכת הוכחה אינטרקטיבית לשפה L בה הנאותות מושלמת, אז $L \in NP$. (6 נק')