

תורת החישוביות (236343) – מועד ב' חורף תש"ף

מרצים: איל קושלביץ (אחראי).
מתרגלים: דור קצלניק (אחראי), אוהד טלמון, אבי קפלן, ענבר קסלסי, עידו רפאל, דוד נאורי.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- משך הבחינה – שעה ו-30 דקות. **השתדלו לא להתעכב יותר על המידה על סעיף מסוים**, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- אפשר להשתמש **בעט** או **בעפרון** בתנאי שהכתב נראה היטב בסריקת התשובות.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

שאלה 1 (35 נקודות, שאלת מגן)

לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב- R והאם היא ב- RE . הוכיחו את תשובתכם.

1. M מבצעת צעד S במהלך ריצתה על הקלט ϵ $L_1 = \{\langle M \rangle \mid \epsilon\}$. (20 נק')
2. M מבצעת צעד S לאחר כל צעד L ולאחר כל צעד R במהלך ריצתה על הקלט ϵ $L_2 = \{\langle M \rangle \mid \epsilon\}$. (15 נק')

שאלה 2 (35 נקודות)

בהינתן n מספרים שלמים v_1, \dots, v_n ומספר שלם k , וקטור $\epsilon \in \{-1, 1\}^n$ ייקרא k -מאזן אם מתקיים:

$$\left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot v_i \right| \leq k$$

לדוגמא, עבור סדרת המספרים $v_1 = 4, v_2 = -5, v_3 = 2, v_4 = 1$ הוקטור $\epsilon = (1, 1, -1, -1)$ הוא 4-מאזן. בהנחה ש- $P \neq NP$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב- P או שהיא NP-שלמה. הוכיחו את תשובתכם.

1. $\{\text{קיים וקטור } \epsilon \in \{-1, 1\}^n \text{ שהוא } k\text{-מאזן עבור } v_1, \dots, v_n \mid v_1, \dots, v_n, k\}$ $L_1 = \{ \}$. (20 נק')
2. $\{\text{קיים וקטור } \epsilon \in \{-1, 1\}^n \text{ שהוא לא } k\text{-מאזן עבור } v_1, \dots, v_n \mid v_1, \dots, v_n, k\}$ $L_2 = \{ \}$. (15 נק')

שאלה 3 (30 נקודות)

עבור שפה L נגדיר את מחלקת השפות Easy (L) ע"י:

$$\text{Easy}(L) = \{L' \mid L' \leq_p L\}$$

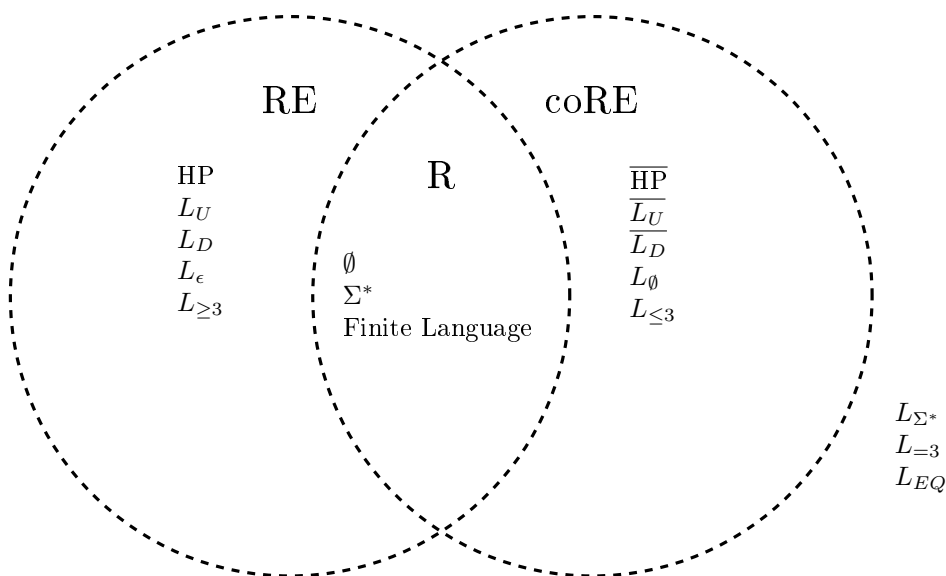
לכל אחת מהטענות הבאות קבעו והוכיחו בקצרה האם היא נכונה, לא נכונה או גוררת פתרון בעיה פתוחה מוכרת (אחת מבין הבעיות הפתוחות המופיעות בדף הנוסחאות):

1. אם $\text{Easy}(L) = NP$ אז $L \in NPC$. (7.5 נק')
2. קיימת שפה L כך ש- $\text{Easy}(L) = NP \cup \text{coNP}$. (7.5 נק')
3. קיימת שפה L כך ש- $NP \cup \text{coNP} \subseteq \text{Easy}(L)$. (7.5 נק')
4. קיימת שפה $L \notin P$ כך שלכל $L' \subseteq L$ מתקיים $L' \in \text{Easy}(L)$. (7.5 נק')

דף עזר

אוסף שפות (כולן מעל א"ב $\{0, 1\}$) והסווג שלהן:

- $HP = \{(\langle M \rangle, x) \mid M \text{ halts on } x\}$
- $L_U = \{(\langle M \rangle, x) \mid M \text{ accepts } x\}$
- $L_D = \{(\langle M \rangle) \mid M \text{ accepts } \langle M \rangle\}$
- $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$
- $L_\epsilon = \{\langle M \rangle \mid \epsilon \in L(M)\}$
- $L_\emptyset = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$
- $L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$
- $L_{\leq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \leq 3\}$
- $L_{=3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 3\}$
- $L_{EQ} = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \mid L(M_1) = L(M_2)\}$



סיבוכיות קולמוגורוב: $K(x)$ הוא מספר המצבים המינימלי של מכונת טיורינג בעלת $\Gamma = \{0, 1, b\}$ שעל קלט ϵ כותבת את x .
משפט: הפונקציה $K(x)$ אינה ניתנת לחישוב.

אוסף שפות NP-שלמות:

- $SAT = \{\phi : \phi \text{ פסוק CNF ספיק}\}$
- $3SAT = \{\phi : \phi \text{ פסוק 3CNF ספיק}\}$
- $3COL = \{G : G \text{ הינו גרף 3-צביע}\}$
- $HC = \{G : G \text{ הוא גרף לא מכוון בו קיים מעגל המילטוני}\}$
- $DHC = \{G : G \text{ הינו גרף מכוון בו קיים מעגל המילטוני}\}$
- $HL = \{G : G \text{ הינו גרף לא מכוון בו קיים מסלול המילטוני}\}$
- $DHL = \{G : G \text{ הינו גרף מכוון בו קיים מסלול המילטוני}\}$
- $VC = \{(G, k) : G \text{ כיסוי צמתים בגודל } k\}$
- $IS = \{(G, k) : G \text{ קיימת קבוצת צמתים בלתי תלויה בגודל } k\}$
- $CLIQUE = \{(G, k) : G \text{ קיים קליק בגודל } k\}$
- $SC = \{(U, C_1, C_2, \dots, C_l, k) : (C_1, \dots, C_l) \text{ קבוצות מתוך } U \text{ עם } k \text{ קיימים כיסוי של } U\}$
- $01IP = \{(A, b) : A \in \mathbb{Z}^{M \times N}, b \in \mathbb{Z}^M, \exists x \in \{0, 1\}^N : Ax \geq b\}$
- $PARTITION = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \exists I \subseteq \{1, \dots, n\}, \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \notin I} x_i\}$
- $SS = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, k) : x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \exists I \subseteq \{1, \dots, n\}, \sum_{i \in I} x_i = k\}$

רשימת שאלות פתוחות:

- $P \stackrel{?}{=} NP$
- $PSPACE \stackrel{?}{=} P$
- $NP \stackrel{?}{=} coNP$
- $PSPACE \stackrel{?}{=} NP$

בהצלחה!