תורת החישוביות – תרגול 5
משפט רייס ובעיות הכרעה מורכבות

24 באפריל 2022

משפט רייס

רוב השפות שבהן אנו עוסקים בחלק זה של הקורס הן מהצורה "כל המכונות M כך שמתקיים דבר מה עבור M". במקרה שבו הדבר מה אינו נוגע ספציפית ל־M אלא רק לשפה אותה M מקבלת, קיימת הוכחה פשוטה לכך שלא ניתן לומר **שום דבר מעניין** עליה. בניסוח קצת יותר מדויק - לא קיים אלגוריתם כללי אשר בהינתן מכונה M יכול לומר משהו מעניין על דברים אותם השפה $L\left(M\right)$ מקיימת.

פורמלית המשפט מתבסס על המושג של **תכונה של שפות**. באופן עקרוני ניתן לתאר את המושג של "תכונה" באמצעות פרדיקטים לוגיים, וזו אף גישה מקובלת ומועילה בהקשרים רבים, אך אנו נוקטים כאן בגישה שונה וכללית יותר. גם מבלי להגדיר במפורש מהי תכונה, ברור שהיא מחלקת את אוסף כל השפות בעולם לשתיים - שפות בעלות התכונה, ושפות שאינן בעלות התכונה. אם כן, ניתן לזהות תכונה עם **קבוצת השפות שמקיימות את התכונה**.

פורמלית נגדיר תכונה של שפות ב־RE בתור קבוצה $S\subseteq\mathrm{RE}$. תכונה היא טריוויאלית אם $S=\emptyset$ או $S=\mathrm{RE}$, כלומר אם התכונה אינה מתקיימת לאף שפה, או מתקיימת לכל השפות.

משפט רייס: תהא S תכונה **לא טריוויאלית** של שפות ב־RE ונגדיר שפה $L_S=\left\{\left\langle M\right\rangle |L\left(M\right)\in S\right\}$. אז $L_S\notin\mathrm{R}$. אם $\emptyset\in S$ (השפה הריקה היא בעלת התכונה S) אז גם $L_S\notin\mathrm{RE}$ (ואם $\emptyset\notin S$ אז גם $L_S\notin\mathrm{coRE}$, אך זה לרוב פחות מעניין אותנו).

הוכחת המשפט היא הכללה פשוטה של הרדוקציה הסטנדרטית מ־HP. ברדוקציה הסטנדרטית, בהינתן $\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)$ נבנתה מכונה M_x שמריצה את M על x ומקבלת אם M עצרה. האבחנה היא ש־M_x אינה חייבת לקבל מייד עם עצירת M על x; תחת זאת, היא יכולה להתנהג כמו כל מכונה שרק נרצה, ובפרט לקבל כל שפה ב־RE שנרצה. במילים אחרות, עבור $L\in\mathrm{RE}$ כלשהי, בהינתן $\left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)$ ניתן לבנות M_x כך ש־

$$L\left(M_{x}\right)=\begin{cases} L & \left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\in\mathrm{HP}\\ \emptyset & \left(\left\langle M\right\rangle ,x\right)\notin\mathrm{HP} \end{cases}$$

כאשר $S\notin\emptyset$ (ולכן S אינה RE) אנו מקבלים כך רדוקציה מיידית $\mathrm{HP}\le L_S$ על ידי בחירת שפה $L\in S$ (כאן משתמשים בכך ש־S אינה ריקה).

כאשר $\emptyset\in S$ (ולכן S אינה ריקה) הרדוקציה שלעיל לא תעבוד, אך לעומת זאת נוכל לקבל בקלות רדוקציה $\overline{\mathrm{HP}}\le L_S$ על ידי בחירת שפה $L\notin S$ (כאן משתמשים בכך ש־S אינה RE). מכאן נובע שבמקרה זה $L_S\notin\mathrm{RE}$.

למעשה, מההוכחה נובע שלכל תכונה S לא טריוויאלית של שפות ב־RE, או ש־$L_S\notin\mathrm{RE}$ (אם $\emptyset\in S$) או ש־$L_S\notin\mathrm{coRE}$ (אם $\emptyset\notin S$). לפעמים $L_S\notin\mathrm{RE}$ **וגם** $L_S\notin\mathrm{coRE}$, כפי שנראה בהמשך התרגול, אבל משפט רייס נותן בדיוק אחד מהשניים.

דוגמאות פשוטות לשפות שעבורן משפט רייס תקף:

1. $L_{\ge3}=\left\{\left\langle M\right\rangle |\left|L\left(M\right)\right|\ge3\right\}$ (מוכיח אי שייכות ל־R; השפה שייכת ל־RE).
2. $L=\left\{\left\langle M\right\rangle |L\left(M\right)\subseteq\mathrm{HP}\right\}$ (מוכיח אי שייכות ל־RE).
3. $L_{=3}=\left\{\left\langle M\right\rangle |\left|L\left(M\right)\right|=3\right\}$ (מוכיח רק אי שייכת ל־R אף שהשפה אינה שייכת ל־RE).

דוגמה לשימוש במשפט רייס

נוכיח עתה את הטענה הראשונה: $L_{\geq 3}=\{\langle M\rangle\,|\,|L(M)|\geq 3\}\in \mathrm{RE}\setminus\mathrm{R}$.

בתרגול הקודם הוכחנו כי $L_{\geq 3}\in \mathrm{RE}$, והוכחנו כי $L_{\geq 3}\notin \mathrm{R}$ באמצעות רדוקציה מ־HP. כעת ניעזר במשפט רייס, שמהווה "מעטפת" לאותה רדוקציה, כדי להוכיח אותו דבר בלי להשתמש מפורשות ברדוקציה:

נגדיר תכונה $S\subseteq \mathrm{RE}$ על־ידי $S=\{L\in\mathrm{RE}\,|\,|L|\geq 3\}$. מהגדרה זו נובע מייד כי $L_S=\{\langle M\rangle\,|\,|L(M)|\geq 3\}$.

כדי להוכיח ש־S אינה טריויאלית, צריך להראות שפה שנמצאת ב־RE אך לא ב־S, ושפה שכן נמצאת ב־S (מהגדרת S, שפה זו חייבת להמצא גם ב־RE).

"החשודים המיידיים" להוכחה כזו הן השפות $\emptyset,\Sigma^*$, ובמקרה שלפנינו הן אינן מכזיבות: $\Sigma^*\in S$ כי זוהי שפה אינסופית, ובפרט $|\Sigma^*|\geq 3$. מנגד, $\emptyset\notin S$ כי $|\emptyset|=0<3$. לא במקרה, $\emptyset,\Sigma^*$ הן השפות האפשריות המתקבלות על ידי M_x ברדוקציה אותה עשינו בתרגול הקודם (שאותה משפט רייס מכליל), ובהוכחת התקפות של הרדוקציה השתמשנו עבור שפות אלו באותם שיקולים בהם השתמשנו כאן כדי להראות שייכות/אי שייכות של השפות לתכונה. נשים לב כי השתמשנו גם בעובדה ש־$\emptyset,\Sigma^*\in\mathrm{RE}$, וייתכן שבמקרים מורכבים יותר נצטרך להשתמש בשפות אחרות, ואף להוכיח שהן ב־RE.

שימוש במשפט רייס משלים את ההוכחה: מהמשפט נובע $L_S\notin R$, וראינו $L_{\geq 3}=L_S$.

מתי לא ניתן להשתמש במשפט רייס

1. כאשר S טריוויאלית. לעתים לא קל לראות זאת במבט ראשון. לדוגמה, השפה $L=\{\langle M\rangle\,|L(M)\in\mathrm{RE}\}$.
2. כאשר השפה שמנסים לתקוף "לא מתאימה לסינטקס" – כלומר, איננה מהצורה $L=\{\langle M\rangle\mid L(M)\ldots\}$. למשל, $L_u=\{(\langle M\rangle,x)\,|x\in L(M)\}$ אמנם עוסקת בתכונה של השפה $L(M)$, אך השפה מורכבת מזוגות של מכונה + קלט, ולכן המשפט, כפי שהוכח, לא תקף לגביו. לרוב ניתן "לתקן" את המשפט כך שיתפוס גם מקרים מחוכמים יותר שכאלו, אך כבר עדיף להוכיח את אי־כריעות השפה באופן ישיר במקרה זה.
3. כאשר התכונה שמגדירה את השפה אותה תוקפים איננה תכונה של $L(M)$ אלא של המכונה M עצמה. כאן המשפט נוחל את הכשלון החרוץ ביותר שלו, ולעתים קרובות שפות כאלו עשויות להיות ב־R גם אם התכונה אינה טריוויאלית כלל. הסיבה האינטואיטיבית לכשלון היא באופן הוכחת המשפט: כאשר בונים את M_x יש לנו שליטה רבה על **השפה שאותה** M_x **תקבל**; אין לנו שליטה גדולה כל כך על **האופן שבו המכונה** M_x תתנהג עד לקבלת השפה הזו, שכן חלק אינטגרלי מריצת M_x הוא הרצה של M על x, והשליטה שלנו על המתרחש בשלב זה היא מוגבלת (למשל, אם M רצה 1,000 צעדים על x, לא סביר ש־M_x תוכל לרוץ פחות מ־1,000 צעדים).

$L_{=3}\notin\mathbf{RE}$

בעזרת משפט רייס, קל להראות כי השפה $L_{=3}=\{\langle M\rangle\,|\,|L(M)|=3\}$ אינה ב־R, אך לא ניתן להוכיח באמצעות רייס כי היא אינה ב־RE אף שהיא אכן אינה ב־RE. זוהי נקודה חשובה: העובדה שמשפט רייס לא מסוגל להוכיח ששפה מסויימת אינה ב־R או אינה ב־RE לא מעידה שהשפה כן או לא נמצאת נמצאת במחלקה זו. בפרט, משפט רייס **אינו** יכול להוכיח ששפה כלשהי שייכת ל־R או ל־RE!

העניין הוא בכך שמשפט רייס מתבסס על רדוקציה **פשוטה**. ייתכן שהיא נכשלת, אך רדוקציה מחוכמת יותר עובדת. נדגים כעת רדוקציה שכזו, $\overline{\mathrm{HP}}\leq L_{=3}$, וממנה נסיק כי $L_{=3}\notin\mathrm{RE}$. ממשפט רייס נובע ש־$L_{=3}\notin\mathrm{coRE}$, ובכך הכל נקבל $L_{=3}\notin\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}$.

כרגיל, אנו מתחילים עם קלט $(\langle M\rangle,x)$ ורוצים לבנות ממנו מכונה M_x כך ש־$\langle M_x\rangle\in L_{=3}$ רק אם M **לא** עוצרת על x.

הרעיון הוא לקבל מייד 3 מילים כלשהן, ואם M עוצרת על x (ולכן אנו רוצים "להיכשל") לקבל את כל שאר המילים האפשריות.

אם כן, M_x על קלט w פועלת כך:

1. אם $w\in\{\varepsilon,0,1\}$, אז M_x מקבלת.
2. M_x מריצה את M על x.
3. אם M עצרה, M_x מקבלת.

בבירור יתקיים:

$$L(M_x)=\begin{cases}\{\varepsilon,0,1\} & (\langle M\rangle,x)\notin\mathrm{HP}\\ \Sigma^* & (\langle M\rangle,x)\in\mathrm{HP}\end{cases}$$

ותקפות הרדוקציה נובעת מיידית מאבחנה זו.

השפה L_{Σ^*}

תהי $L_{\Sigma^*} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$. ממשפט רייס נובע כי $L_{\Sigma^*} \notin R$ (ולמעשה גם אינה ב־coRE), אך בדומה לדוגמה הקודמת של $L_{=3}$, לא נובע מהמשפט שהיא אינה ב־RE, למרות שהיא אכן אינה ב־RE. הפעם, כדי להוכיח כי $L_{\Sigma^*} \notin \mathrm{RE}$, לא נשתמש בוריאציה על הרדוקציה של משפט רייס כמו שעשינו קודם, אלא נזכר ברדוקציה נוספת שראינו בתרגול הקודם, שבה $f(\langle M\rangle, x) = \langle M_x\rangle$ כך ש־M_x היא מכונה שעל כל קלט w:

1. מריצה את M על x למשך $|w|$ צעדים.
2. אם M עצרה על x - דוחה. אחרת - מקבלת.

מתקיים כי f היא רדוקציה מ־$\overline{\mathrm{HP}}$ אל L_{Σ^*}. נזכר באבחנה שעשינו בתרגול הקודם: אם M אינה עוצרת על x אז $L(M_x) = \Sigma^*$, ואם M כן עוצרת על x אז $L(M_x)$ היא סופית ולכן אינה Σ^*.

ספירת קונפיגורציות

נציג כעת דוגמה למקרה 3 , שבו מתקבלת שפה כריעה אף שאנו נדרשים לטכניקה מחוכמת יחסית (שתשתמש אותנו גם בהמשך) כדי לראות זאת. נגדיר את השפה:

$L = \{\langle M\rangle \mid$ M בריצתה על ε אינה מגיעה לתא שמספרו גדול מ־10$\}$

בבירור L מוגדרת באמצעות תכונה של המכונה M ולא של השפה ש־M מקבלת. נסיון לבצע את הרדוקציה של משפט רייס באופן ישיר ייכשל, שכן המכונה M_x שנבנה לא תוכל לבצע סימולציה של מכונה M שרירותית על x שרירותי מבלי שתצטרך לעבור לפעמים את תא מספר 10 (ולכן $\langle M_x\rangle$ אף פעם לא יהיה שייך ל־L עבור אותם M, x בלי תלות בשאלה אם M עוצרת על x או לא).

הקושי כאן אינו מקרי – נראה כעת כי $L \in \mathrm{R}$. האינטואיציה פשוטה – בהינתן $\langle M\rangle$, יש להריץ אותה על ε ואם M עברה את תא 10, דוחים. הבעיה נובעת מכך שלא ברור מתי יש לקבל את M; ודאי שאם M עצרה מבלי לחרוג מתא 10 יש לקבלה, אבל M עשויה שלא לעצור כלל.

האבחנה המרכזית כאן הוא שאם M אינה עוברת את תא 10, כל הסרט שמתא 10 והלאה אינו משתנה; על כן, יש מספר **סופי** של קונפיגורציות אפשריות בריצתה של המכונה M, ומרגע שהמכונה ביקרה באותה קונפיגורציה פעמיים אנו יודעים בודאות שהיא נמצאת בלולאה אינסופית ולכן לעולם לא תעבור את תא 10, ולכן ניתן לקבל.

כזכור, **קונפיגורציה** הוגדרה כשלשה $[q, i, w]$ כאשר q הוא מצב בקרה $q \in Q$, i הוא מספר טבעי שמציין את מיקום הראש על הסרט, ו־$w \in \Gamma^*$ היא מילה שמציינת את תוכן הסרט עד לנקודה שהחל ממנה והלאה ישנם רק תווי $\flat$ (ניתן לתת הגדרות שונות מעט לקונפיגורציה אך ההבדל בינן אינו מהותי).

אם M אינה עוברת את תא 10 בריצתה, אז ישנם רק 10 ערכים אפשריים עבור i, ורק $|\Gamma|^{10}$ ערכים אפשריים עבור w, ולכן $|Q| \cdot 10 \cdot |\Gamma|^{10}$ ערכים אפשריים לקונפיגורציות של M בריצתה על ε. אם כן, אלגוריתם המכריע את L הוא כדלהלן:

1. הרץ את M על ε וספור את מספר צעדי החישוב של M.
2. אם M הגיעה לתא 11 במהלך הריצה, דחה מייד.
3. אם M עצרה, קבל.
4. אם מספר צעדי החישוב עבר את $|Q| \cdot 10 \cdot |\Gamma|^{10}$, קבל.

נכונות צעד 4 נובעת מכך שאם מספר צעדי החישוב עבר את מספר הקונפיגורציות האפשריות, אז מעקרון שובך היונים אותה קונפיגורציה הופיעה פעמיים במהלך ריצת M, ומכאן ש־M בלולאה אינסופית.