תורת החישוביות (236343) — מועד ב'
אביב תש"ף

25.09.2020

מרצה: פרופ' יובל ישי (אחראי).

מתרגלים: דור קצלניק (אחראי), אוהד טלמון, ענבר קסלסי, עידו רפאל, נטע דפני, שחר רומם פלד.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- משך הבחינה — שעתיים ו־45 דקות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- אפשר להשתמש **בעט** או **בעפרון** בתנאי שהכתב נראה היטב בסריקת התשובות.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות, שאלת מגן)

סעיף א' (10 נקודות)

בהינתן שפה L נגדיר את הפונקציה

$$f_L(x) = \begin{cases} K(x) & x \in L \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

כאשר $K(x)$ הוא סיבוכיות קולמוגורוב של x.

הוכיחו / הפריכו את הטענה הבאה: לכל שפה $L \subset \{0,1\}^*$ סופית, הפונקציה f_L ניתנת לחישוב.
הערה: הוכחה צריכה להתייחס **לכל** שפה סופית, ואילו כדי להפריך את הטענה מספיק להראות **דוגמה** לשפה סופית שלא מקיימת אותה.

סעיף ב' (10 נקודות)

נאמר שהשמה $\tau : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{T, F\}$ היא k-חיובית אם היא נותנת ל-k מהמשתנים את הערך T וליתר המשתנים את הערך F.

הוכיחו כי השפה הבאה היא NP-שלמה:

$L =\{(\varphi, k) \mid$ φ פסוק CNF וקיימת השמה k-חיובית המספקת את $\varphi\}$.

שאלה 2 (30 נקודות)

קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־R והאם היא ב־RE והוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1 = \{(\langle M \rangle, k) \mid$ קיימות לפחות k מילים ש־M מקבלת$\}$. (10 נק')
2. $L_2 = \{(\langle M \rangle, k) \mid$ קיימת מילה ש־M מקבלת תוך k צעדים לכל היותר$\}$. (10 נק')
3. $L_3 = \{(\langle M \rangle, k) \mid$ M בריצתה על ε עוברת ב־k מצבים שונים לפחות$\}$. (10 נק')

שאלה 3 (30 נקודות)

בהינתן גרף פשוט ולא מכוון $G=(V,E)$, נסמן ב־$N(v)$ את השכנים של הצומת v. כלומר, $N(v)=\{u\in V:(u,v)\in E\}$.
בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או לא. הוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1=\{(G,k)\mid |N(v)|\leq 2$ מתקיים $v\in V$ ולכל k יש קבוצה בלתי־תלויה בגודל G ב־$\}$. (10 נק')
2. $L_2=\{G\mid |N(v)|\geq 2$ מתקיים $v\in V$ יש מסלול המילטוני ולכל G ב־$\}$. (10 נק')
3. $L_3=\{(G,k)\mid |N(v)|\geq 2$ מתקיים $v\in V$ ולכל k יש קליק בגודל G ב־$\}$. (10 נק')

שאלה 4 (20 נקודות)

בהנחה ש-$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, הוכיחו / הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

1. קיימת מ"ט פולינומית, אשר על קלט $\langle M \rangle$ פולטת מ"ט $\langle M' \rangle$ כך ש- $L(M) = L(M')$ וכן $|\langle M \rangle| > |\langle M' \rangle|$, או פולטת ε אם אין כזו. (6 נק')
2. קיימת מ"ט פולינומית, אשר על קלט $\langle M \rangle$ פולטת מ"ט $\langle M' \rangle$ כך ש- $L(M) = L(M')$ וכן $|\langle M \rangle| < |\langle M' \rangle|$, או פולטת ε אם אין כזו. (7 נק')
3. קיימת מ"ט פולינומית, אשר בהינתן מספרים שלמים $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ומספר טבעי b בייצוג בינארי, פולטת ייצוג בינארי של מספר טבעי x כך ש- $x < 2^m$ וכן x הוא פתרון של המשוואה $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = b$, או ε אם אין x כזה. (7 נק')