תורת החישוביות (236343) – מועד א'
אביב תשע"ח

27.7.2018

מרצים: פרופ' איל קושלביץ.

מתרגלים: אוהד טלמון (אחראי), דוד נאורי, מיכל דורי, אבי קפלן, דור קצלניק.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי, ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- משך הבחינה – שלוש שעות. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- יש להוכיח כל טענה אחרת בה אתם משתמשים, אלא אם צוין במפורש אחרת.
- ניתן לקבל בכל סעיף 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע".

בהצלחה!

שאלה 1, 10 נק' (ת"ב 10)

עבור פסוק CNF φ נגדיר את $f(\varphi)$ להיות מספר הפסוקיות המרבי שניתן לספק על־ידי השמה אחת. כלומר,

$$f(\varphi) = \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} \{|T| : T \subseteq [m] \wedge (\forall i \in T)\, \alpha \models C_i\}$$

כאשר

- m הוא מספר הפסוקיות ב־φ.
- $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$.
- n הוא מספר המשתנים ב־φ.
- הסימון $\alpha \models C_i$ מציין כי ההשמה α מספקת את הפסוקית C_i.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. מכל שפה $L \in \mathrm{NP}$ קיימת רדוקציה פולינומית ל־SAT, $g(w) = \varphi_w$, כך שאם $w \in L$ אז $f(\varphi_w) = m$ ואם $w \notin L$ אז $f(\varphi_w) < \frac{m}{2}$ (5 נק').

2. מכל שפה $L \in \mathrm{NP}$ קיימת רדוקציה פולינומית ל־SAT, $g(w) = \varphi_w$, כך שאם $w \in L$ אז $f(\varphi_w) = m$ ואם $w \notin L$ אז $f(\varphi_w) = m - 1$ (5 נק').

שאלה 2, 15 נק' (ת"ב 6)

בשאלה זו נניח כי $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{0,1,\flat\}$. קבעו האם הפונקציות הבאות ניתנות לחישוב -

1. הפונקציה f_1 על קלט $\langle M \rangle$ מחזירה את מספרו של התא הימני ביותר אליו המכונה M מגיעה בריצתה על ε. (7 נק')
<u>הערה</u> - אם אין תא ימני ביותר אזי f_1 אינה מוגדרת.

2. $f_2(n) = \max\{f_1(\langle M \rangle) : M \in E_n\}$, כאשר E_n הינה קבוצת כל המ"ט בעלות n מצבים שעוצרות על הקלט ε. (8 נק')

שאלה 3, 30 נק'

עבור מכונת טיורינג M נסמן ב־$R(M)$ את קבוצת המילים אותן M דוחה, כלומר $R(M) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ דוחה את } M\}$.

1. תארו <u>בקצרה</u> זוג מכונות M, M' כך ש־$R(M) \neq R(M')$ אך $L(M) = L(M')$. (3 נק')

לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב־R והאם היא ב־RE:

2. $L_1 = \{\langle M\rangle \mid R(M) = R(M') \text{ כך ש־} M' \neq M \text{ קיימת}\}$ (7 נק')

3. $L_2 = \{\langle M \rangle \mid 2 \leq |R(M)|\}$ (10 נק')

4. $L_3 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq L(M')$ ובנוסף $R(M) = R(M')$ כך ש- $M' \neq M$ קיימת$\}$ (10 נק')

שאלה 4, 25 נק'

תזכורת: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא גרף דו־צדדי אם ניתן לחלק את V לשתי קבוצות זרות C,D כך שלכל קשת ב־E מתקיים שצד אחד שלה ב־C והשני ב־D.

הערה: בסעיפים הבאים ניתן להניח כי כל הגרפים קשירים.

בהנחה ש־$\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$, קבעו לכל אחת מהשפות הבאות האם היא ב־P או שהיא NP־שלמה.

1. $L_1 = \{G \mid$ הוא גרף דו"צ לא מכוון וקיים ב־G מעגל המילטוני $G\}$ (10 נק')

   רמז: בהינתן גרף G, צרו גרף G' אשר קבוצת צמתיו V' מתקבלת מהחלפת כל צומת $v\in V$ בארבעה צמתים v_1,v_2,v_3,v_4, כך ש־G' דו"צ ומתקיים v_1,v_3 ב־C ו־v_2,v_4 ב־D.

בהינתן גרף דו־צדדי <u>לא מכוון</u> $G=(C\cup D,E)$, נאמר ש־G הוא **גרף מרכזים** אם לכל צומת $v\in D$ דרגתו היא בדיוק 2.

2. $L_2 = \{G \mid$ הוא גרף מרכזים וקיים ב־G מעגל המילטוני $G\}$ (5 נק')

3. $L_3 = \{G|$ הוא גרף מרכזים וקיים ב־G מעגל העובר בכל צומת ב־C בדיוק פעם אחת $G\}$ (10 נק')

שאלה 5, 20 נק'

נאמר ששפה L היא **ניתנת לבחירה** אם קיימת עבורה **פונקציית בחירה** $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1. לכל $x, y \in \Sigma^*$ מתקיים $f(x,y) = x$ או $f(x,y) = y$.
2. אם $x \in L$ או $y \in L$ אז $f(x,y) \in L$.
3. $f \in POLY$.

נסמן ב־$\mathcal{A}$ את מחלקת כל השפות הניתנות לבחירה.
הוכיחו <u>בקצרה</u> את הטענות הבאות.

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathcal{A}$. (5 נק')

2. אם $L \in \mathcal{A}$ אז $\overline{L} \in \mathcal{A}$. (5 נק')

3. אם קיימת $L \in \mathcal{A}$ שהיא NPC אז $\mathrm{NP} \subseteq \mathcal{A}$. (5 נק')

4. אם קיימת $L \in \mathcal{A}$ שהיא NPC אז P=NP. (5 נק')