תורת החישוביות – תרגול מספר 13
צביעה של גרפים

מבוא

בהינתן גרף $G=(V,E)$, **צביעה** שלו באמצעות k צבעים היא פונקציה $f:V\to\{1,2,\ldots,k\}$ כך שלכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים ש־$f(u)\neq f(v)$. במילים, אין שני צמתים המחוברים בקשת שצבועים באותו הצבע.

מוטיבציה אינטואיטיבית להגדרה הזו אפשר למצוא בצביעה של מפות מדיניות; במפה שכזו כל מדינה נצבעת בצבע כלשהו, באופן כזה שאין שתי מדינות סמוכות שצבועות באותו הצבע. כאן המדינות הן הצמתים ויש קשת בין שתי מדינות החולקות גבול משותף. השאלה מהו מספר הצבעים המינימלי שנדרש כדי לצבוע מפה שכזו הייתה בעיה פתוחה במתמטיקה במשך כמאה וחמישים שנים; ההשערה הייתה שמספיקים לשם כך ארבעה צבעים (הייתה קיימת הוכחה שחמישה צבעים מספיקים, ושלושה אינם מספיקים) ומכאן שמה של הבעיה, "בעיית ארבעת הצבעים". הוכחה ניתנה רק בשנות השבעים של המאה ה־20; פורמלית, הטענה שהוכחה הייתה שכל גרף **מישורי** ניתן לצביעה בארבעה צבעים, כאשר גרף מישורי הוא גרף שניתן לצייר במישור מבלי שקשתותיו יחתכו זו את זו (קיימים גרפים רבים שאינם מישוריים ויש צורך ביותר מארבעה צבעים כדי לצבוע אותם).

בעיות צביעה צצות גם בהקשרים שונים לחלוטין, כשדוגמה קלאסית היא בעיה של הקצאת משאבים. כך למשל ניתן לעסוק בבעיה של חלוקת כיתות לימוד להרצאות: הצמתים הרצאות שונות, יש קשת בין שתי הרצאות שהזמנים שלהם חופפים, והצבעים הם כיתות הלימוד השונות. צביעה של הגרף מתאימה לחלוקת כיתות לימוד להרצאות באופן כזה ששתי הרצאות שונות לא ניתנות באותה כיתה בו זמנית. אותה בעיה בהקשר אחר צצה באופטימיזציה של קוד שמבצע קומפיילר; כדי לשפר את יעילות הקוד הקומפיילר מאחסן משתנים ברגיסטרים במקום בזכרון, ויש לוודא שלא ייתכן ששני משתנים שחיים באותו פרק זמן יאוחסנו באותו הרגיסטר.

בעיות ההכרעה המתאימות

בהינתן מספר טבעי k נגדיר את השפה $k\text{-COL}=\{G|$ ניתן לצביעה ב־k צבעים $G\}$ (על גרף כזה אומרים גם שהוא "k־צביע"). נרצה להבין את הקושי של שפות אלו.

בבירור $1\text{COL}\in\text{P}$ באופן טריוויאלי, שכן ניתן לצבוע גרף בצבע בודד אם ורק אם אין בו קשתות.

גם $2\text{COL}\in\text{P}$ שכן קל לתת אלגוריתם שצובע את הגרף בשני צבעים או מדווח על כשלון אם לא ניתן לעשות זאת. האלגוריתם מתחיל מצומת שרירותי וצובע אותו בצבע 1 (שכן אין זה משנה באיזה צבע ייצבע הצומת הראשון). מרגע זה נקבע באופן יחיד צבעם של כל הצמתים ברכיב הקשירות של אותו צומת ־ שכניו של הצומת הראשון חייבים להיצבע בצבע 2, ושכניהם חייבים להיצבע ב־1 וכן הלאה. אם בשלב כלשהו אחד מהצמתים צריך להיצבע בשני צבעים שונים, מדווחים על כשלון. נשים לב כי הגרפים שהם 2־צביעים הם בדיוק הגרפים הדו־צדדיים.

לעומת זאת 3COL היא בעיה NP־שלמה, וכך גם לכל $k>3$. מטרתנו העיקרית בתרגול זה היא להיווכח בקושי של 3COL.

$3\mathbf{SAT} \leq_p 3\mathbf{COL}$

נציג כעת רדוקציה אל 3COL מ־3SAT. אף שבשתי השפות מכבב המספר 3, כפי שנראה בהמשך אין שום קשר בין ה־3 של 3SAT וה־3 של 3COL והם יבואו לידי ביטוי ברדוקציה באופנים שונים.

הרעיון הבסיסי הוא, בהינתן פסוק φ, לבנות גרף שמכיל רכיבים שממדלים את הפסוקיות של φ, ולהשתמש בצבעים כדי לייצג ערכי אמת ושקר. אם כן, נסמן שניים משלושת הצבעים ב־T ו־F ואת הצבע השלישי (שעדיין לא ברור מה הצורך בו בכלל) ב־N (מלשון Neutral).

ראשית נרצה למדל השמה באמצעות חלקים מהגרף. אם כן, לכל משתנה x שמופיע ב־φ יהיו לנו שני צמתים v_x ו־$v_{\overline{x}}$, וקשת שמחברת אותם: $(v_x, v_{\overline{x}})$. כך מובטח ששני צמתים אלו לא יקבלו את אותו הצבע. עם זאת, אנחנו רוצים שכל הצמתים הללו ייצבעו או ב־T או ב־F ולא ב־N; אם כן, נוסיף צומת חדש, "הארקה", v_{ground} ונחבר אליו את כל הצמתים שמתאימים לליטרלים. כעת, בכל צביעה של הגרף נסמן ב־N את הצבע שבו נצבע v_{ground}, ואת שני הצבעים הנותרים ב־T ו־F. כעת ניתן לחשוב על צביעת צמתי הליטרלים כעל השמת ערכים בוליאניים למשתנים.

כעת נתאר איך בונים את הרכיבים שמייצגים את הפסוקיות של φ. הרעיון הוא שהרכיבים יהיו תתי־גרפים שמזכירים מעין מעגל בוליאני. צמתי ה"כניסה" לכל רכיב יהיו שלושת צמתי הליטרלים שמשתתפים בפסוקית שהרכיב מתאר, וכמו כן יהיה צומת יציאה. המטרה היא לבנות את הרכיב באופן שיתקיימו שתי הדרישות הבאות:

- אם קיים צומת כניסה כלשהו שצבוע ב־T, אז יש צביעה של הרכיב כך שצומת היציאה צבוע ב־T.
- אם כל צמתי הכניסה צבועים ב־F, אז בכל צביעה של הרכיב גם צומת היציאה חייב להיות צבוע ב־F.

יותר קל להבין איך לבנות רכיב כזה אם יש רק שני צמתי כניסה, v_1, v_2. במקרה זה הרכיב יכלול "משולש" שמורכב מעל v_1, v_2: v_{11}, v_{22} ו־v_{out}, כך ש־v_{11} מחובר ל־v_1, v_{22} מחובר ל־v_2, וכל שלושת הצמתים v_{11}, v_{22}, v_{out} מחוברים זה לזה.

אם, למשל, v_1 נצבע ב־T אז v_{11} ניתן לצביעה ב־F, את v_{22} ניתן לצבוע ב־N בלי תלות בשאלה מהו הצבע של v_2 ־ זהו בדיוק המקום שבו הצבע הנוסף N בא לידי ביטוי ובלעדיו בניית הרכיב הייתה בלתי אפשרית ־ ואז את v_{out} ניתן לצבוע ב־T, כנדרש. אולי קיימות צביעות אפשריות נוספות של הרכיב במקרה זה (למשל, כזו שבה v_{out} ייצבע ב־N) אבל הדבר לא פוגע בהוכחה.

אם לעומת זאת v_1 וגם v_2 נצבעו שניהם ב־F, אז בהכרח v_{11} ו־v_{22} ייצבעו ב־T,N ולכן v_{out} יהיה חייב להיצבע בצבע היחיד שנותר, F.

ראינו איך לבנות רכיב המטפל בזוג צמתים. כדי לטפל בשלשה של צמתים פשוט משרשרים את הרכיב של שני צמתים פעמיים: מחליפים את שני הצמתים הראשונים ברכיב שמבצע את ה־$\vee$ שלהם, ואז מפעילים את הבניה שוב על צומת הכניסה השלישי ועל צומת היציאה של הרכיב שכבר בנינו.

סיימנו לתאר את בניית הרכיבים. לסיום הרדוקציה, מוסיפים צומת חדש, "שמיים", v_{sky} לגרף, מחברים אותו ל־v_{ground} ולכל צמתי היציאה של הרכיבים. זהו הצומת ש"בודק" שכל צמתי היציאה של הרכיבים קיבלו T.

נעבור להוכחה של נכונות הבניה. ראשית, אם φ ספיק, אז נצבע את הגרף שבנינו כדלהלן: v_{ground} ייצבע ב־N; v_{sky} ייצבע ב־F; צמתי הליטרלים ייצבעו בהתאם להשמה המספקת; וצמתי הרכיבים ייצבעו באופן שמבטיח שצומת היציאה של כל אחד מהם יהיה T. ניתן לעשות זאת שכן ההשמה מספקת ולכן לכל רכיב יהיה צומת כניסה שצבוע ב־T. לא קשה לבדוק פורמלית כי זוהי אכן צביעה חוקית של הגרף.

בכיוון השני, נניח שהגרף צביע. ניקח צביעה כלשהי שלו ונפיק ממנה השמה מספקת של φ. ראשית **נסמן** את הצבע של v_{ground} באות N, את הצבע של v_{sky} באות F ואת הצבע הנותר באות T. נגדיר את ההשמה באופן הבא: במשתנה x נציב את הערך שבו נצבע v_x. ערך זה הוא בהכרח T או F שכן אם היה N היינו מקבלים שהצמתים השכנים v_x ו־v_{ground} צבועים באותו הצבע.

כדי להראות כי זוהי השמה מספקת יש להראות כי בכל פסוקית יש ליטרל שמקבל T. נניח כי יש פסוקית שבה כל הליטרלים מקבלים F, ונתבונן ברכיב שמתאים לאותה פסוקית בגרף. כל צמתי הכניסה שלה מקבלים F (שכן צמתים אלו מתאימים לליטרלים, והערכים שהליטרלים מקבלים מתאימים להשמה ־ בפרט, הצומת $v_{\overline{x}}$ מקבל ערך הפוך משל v_x). על כן, לפי התכונה שהוכחנו לעיל, גם צומת היציאה של הרכיב צבוע ב־F וזו סתירה שכן צומת זה מחובר ל־v_{sky}.

קירוב לצביעה

נוכיח כעת את הטענה הבאה: בהינתן גרף 3־צביע בעל n צמתים, ניתן לצבוע אותו ביעילות בעזרת $O\left(\sqrt{n}\right)$ צבעים.

אבחנת המפתח כאן היא שגרף בו הדרגה המקסימלית של צומת היא d ניתן לצבוע ביעילות באמצעות $d+1$ צבעים – פשוט צובעים כל צומת בצבע שאף אחד משכניו טרם נצבע בו, והדרגה המקסימלית של הצומת מבטיחה שלא "ייגמרו לנו הצבעים".

אם כן, אם כל הצמתים בגרף שלנו הם בעלי דרגה קטנה יחסית, בפרט קטנה מ־$\sqrt{n}$, סיימנו. אחרת נטפל באופן פרטני בצמתים בעלי דרגה גדולה מ־$\sqrt{n}$. לשם כך נשים לב לאבחנה שנייה: בגרף 3־צביע ולכל צומת v, קבוצת השכנים שלו $N\left(v\right)$ (שאינה כוללת את v עצמו) ניתנת לצביעה ב־2 צבעים. זאת מכיוון שכל אחד מהשכנים חייב להיצבע בצבע ששונה מצבעו של v. כבר ראינו בעבר שניתן למצוא ביעילות

2־צביעה לגרפים שהם 2־צביעים, ולכן בהינתן צומת v ניתן לצבוע אותו ואת כל שכניו ב־3 צבעים באופן יעיל. לאחר מכן נשליך את שלושת הצבעים שבהם השתמשנו לפח, ונוציא מהגרף את v ואת כל שכניו $N\left(v\right)$.

אם כן, במחיר של 3 צבעים שבהם לא נשתמש שוב, הקטנו את מספר הצמתים בגרף. אם ניקח את v להיות צומת שדרגתו גדולה מ־$\sqrt{n}$, נקטין את מספר הצמתים בגרף ב־$\sqrt{n}$ בערך. נחזור שוב ושוב על פעולה זו עד אשר הדרגה המקסימלית של צומת בגרף קטנה מ־$\sqrt{n}$ ואז ניתן יהיה לצבוע את כולו.

לא ייתכן שנחזור על השלב הראשון של האלגוריתם למעלה מ־$\sqrt{n}$ איטרציות (כי בכל איטרציה מעיפים $\sqrt{n}$ צמתים מהגרף) ולכן בשלב הראשון של האלגוריתם נשתמש לכל היותר ב־$3\sqrt{n}$ צבעים, ובשלב השני ב־$\sqrt{n}$ צבעים, ולכן בסך הכל ב־$4\sqrt{n}=O\left(\sqrt{n}\right)$ צבעים.