

תורת החישוביות (236343) — מועד א' אביב תשפ"א

21.7.2021

מרצה: פרופ' איל קושלביץ (אחראי).

מתרגלים: נטע דפני (אחראית), דור קצלניק, עידו רפאל, קיאה מיוחס, ויקטור קולובוב.

הנחיות:

- הבחינה היא עם חומר סגור.
- לשימושכם מצורפים למחברת זו דפי עזר.
- משך הבחינה – שלוש שעות. בבחינה יש 5 שאלות. השתדלו לא להתעכב יותר על המידה על סעיף מסוים, כדי לצבור את מרב הנקודות בזמן העומד לרשותכם.
- השתדלו לכתוב תשובות תמציתיות על מנת לחסוך זמן.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר פונקציית מעברים.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק, אלא אם נדרשתם במפורש להוכיחה.
- ניתן לקבל בכל שאלה 20% מהניקוד עבור כתיבת "לא יודע/ת".

בהצלחה!

שאלה 1 (שאלת ת"ב מגליון 4) (10 נק')

הוכיחו את הוריאציה הבאה של משפט רייס: תהי $S \subseteq \text{RE}$ תכונה לא טריוויאלית כך ש- $S^* \notin \text{RE}$ אז $L_S \notin \text{RE}$.

שאלה 2 (שאלת ת"ב מגליון 8) (10 נק')

נגדיר את בעיית Set Cover כבעיית אופטימיזציה – בהינתן קבוצה U ואוסף תתי קבוצות שלה $\{C_i\}_{i=1}^m$ כך ש- $\bigcup_{i=1}^m C_i = U$, מהו המספר המינימלי של קבוצות מהאוסף שאיחודן הוא U ?
פורמלית: $f(U, \{C_i\}_{i=1}^m) = \min \{|I| : I \subseteq [m] \wedge \bigcup_{i \in I} C_i = U\}$.
בהנחה כי $P \neq NP$, הוכיחו כי f אינה ניתנת לקירוב 3 חיבורי בזמן פולינומי.

שאלה 3 (30 נק')

בהינתן מ"ט M , נסמן ב- $|L(M)|$ את גודל שפת המכונה. אם M מקבלת אינסוף מילים, אז $|L(M)| = \infty$, ואם שתי מכונות M_1, M_2 מקבלות אינסוף מילים, אז נאמר כי $|L(M_1)| = |L(M_2)|$ (בנוסף, כרגיל, נאמר כי $|L(M_1)| = |L(M_2)|$ במקרה שהשפות סופיות ובאותו גודל). קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות האם היא ב- R , ב- $R \setminus RE$ או לא ב- RE , והוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1 = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ ועוצרות על כל קלט תוך } k \text{ צעדים}\}$. (10 נק')

2. $L_2 = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \mid |L(M_1)| = |L(M_2)|\}$ וכן M_1, M_2 רצות על כל קלט 42 צעדים לפחות (10 נק').

3. $L_3 = \{(\langle M \rangle, k) \mid \text{רצה על כל קלט 42 צעדים לפחות } M \text{ וכן } k \in \mathbb{N}, |L(M)| \geq k\}$. (10 נק')

שאלה 4 (25 נק')

בהנתן פסוקית c , הפסוקית הסימטרית של c היא הפסוקית המורכבת מכל שלילותיהם של הליטרלים ב- c .

למשל: הפסוקית הסימטרית של $(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_5)$ היא $(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5})$.

פסוק φ CNF נקרא סימטרי אם לכל פסוקית ב- φ , גם הפסוקית הסימטרית שלה נמצאת ב- φ .

למשל: $(x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5})$ הוא פסוק סימטרי, אבל אם נשמיט פסוקית כלשהי אז הוא לא יהיה סימטרי.

בהנחה כי $P \neq NP$, קבעו עבור כל אחת מהשפות הבאות אם היא ב- P או NP -שלמה, והוכיחו את תשובתכם.

1. $\{\varphi \mid \varphi \text{ הוא פסוק } CNF \text{ סימטרי, וכל השמה מספקת לפחות חצי מהפסוקיות ב-}\varphi\}$. $L_1 = \{\varphi \mid \varphi \text{ (7 נק')}\}$

2. $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ הם פסוקי CNF , φ_2 הוא סימטרי ו- φ_1, φ_2 אינם שקולים $L_2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid$ (10 נק')
הערה: פסוקים φ_1, φ_2 הם שקולים אם הם מוגדרים מעל אותם משתנים ולכל השמה α מתקיים ש- α מספקת את φ_1 אם"מ
 היא מספקת את φ_2 .

3. φ הוא פסוק CNF סימטרי ו- $4SAT$. $L_3 = \{\varphi \mid \varphi \in 4SAT\}$ (8 נק')

שאלה 5 (25 נק')

בהינתן שתי שפות L_1, L_2 , נגדיר את ההפרש הסימטרי שלהן, $L_1 \oplus L_2$, להיות שפת המילים שנמצאות ב- L_1 ו- L_2 אך לא בשניהן. כלומר,

$$L_1 \oplus L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \setminus L_2 \text{ or } w \in L_2 \setminus L_1\}$$

קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה, שגויה, או שקולה לבעיה פתוחה מוכרת (רשימת בעיות פתוחות מוכרות נמצאת בדף העזר). הוכיחו את תשובתכם בקצרה.

1. אם $L_1 \in \text{R}$ ו- $L_2 \in \text{R}$ אז $L_1 \oplus L_2 \in \text{R}$. (5 נק')

2. אם $L_1, L_2 \in \text{RE}$ אז $L_1 \oplus L_2 \in \text{RE}$. (5 נק')

3. אם $L_1, L_2 \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ אז $L_1 \oplus L_2 \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ (5 נק')

4. אם $L_1 \in \text{NPC}$ ו- $L_1 \oplus L_2 \in \text{P}$ אז $L_2 \in \text{P}$ (5 נק')

5. אם $L_1 \in R$ ו- $L_2 \in P$ אז $L_1 \oplus L_2 \in P$ (5 נק')