תורת החישוביות - תרגול 13
תרגילים

שקילות מכונות

נאמר כי שתי מכונות טיורינג M_1, M_2 (בעלות אותו א"ב קלט וא"ב עבודה) הן שקולות אם $L(M_1) = L(M_2)$.

1. עבור מכונה M_1 ו־$c \in \mathbb{N}$ נגדיר שפה:
   - $L_{M_1,c} = \{\langle M_2 \rangle \mid M_2\text{־}$ שקולה ל־M_1 וכמו כן $|\langle M_2 \rangle| = c\}$.

   הוכיחו/הפריכו: לכל M_1 ולכל c מתקיים $L_{M_1,c} \in \mathrm{R}$.

2. הוכיחו/הפריכו: קיימת פונקציה ניתנת לחישוב f כך ש־$f(\langle M_1 \rangle, c) = \langle M_2 \rangle$ ו־M_2 מכונה השקולה ל־M_1 ומקיימת $|\langle M_2 \rangle| = c$ (אם לא קיימת מכונה M_2 שכזו, $f(\langle M_1 \rangle, c)$ אינה מוגדרת).

פתרון:

סעיף 1

השפה סופית ולכן כריעה.

ברצינות, זה כל הפתרון שדרוש כאן, וזה היה מזכה במלוא הנקודות במבחן. הפדנטים יכולים להוסיף שגודל השפה הוא לכל היותר $|\Sigma|^c$.

סעיף 2

כאן החלק המאתגר של השאלה. נניח קיום של f שכזו, ונראה כיצד ניתן באמצעותה להכריע את HP. כרגיל עם HP, בהינתן $(\langle M \rangle, x)$ ניתן לבנות מכונה M_x שמריצה את M על x ואז מקבלת. במקרה זה $L(M_x) = \Sigma^*$ אם M עוצרת על x ו־$L(M_x) = \emptyset$ אחרת.

הרעיון הוא לחשב את $f(\langle M_x \rangle, c)$ עבור c מתאים ולבדוק אם התוצאה היא מכונה ששפתה Σ^*, או מכונה שהפונקציה ששפתה ריקה. נותר רק להבהיר כמה פרטים עדינים.

אם כן, תהא M_{Σ^*} מכונה שלכל קלט ישר מקבלת (כלומר שפתה היא Σ^*), ונגדיר $c = |\langle M_{\Sigma^*} \rangle|$.

מכונה שמכריעה את HP תפעל כך: בהינתן $(\langle M \rangle, x)$ תחשב את $\langle M_2 \rangle = f(\langle M_x \rangle, c)$ ותבדוק האם $L(M_2) = \Sigma^*$. אם כן, תקבל, ואחרת תדחה.

בפתרון זה שתי בעיות, אחת פשוטה לפתרון (אך אופן הפתרון עשוי להיות לא קל להבנה), והשנייה קצת יותר מסובכת. הבעיה הראשונה היא שלא ברור כיצד ניתן לבדוק האם $L(M_x) = \Sigma^*$ (הרי $L_{\Sigma^*} \notin \mathrm{RE}$); אלא שאין צורך ממש לבדוק זאת, אלא רק צריך לבדוק האם $\langle M_2 \rangle \in L_{M_{\Sigma^*},c}$, וכבר ראינו כי שפה זו ב־R בסעיף א', שכן היא סופית.

הבעיה השניה היא שלא מובטח לנו ש־$f(\langle M_x \rangle, c)$ מוגדרת כלל. ייתכן ש־M_x לא עוצרת על אף קלט, ו**שלא קיימת** מכונה מגודל c ששפתה ריקה. כתוצאה מכך האלגוריתם שהצגנו אינו מכריע את HP שכן הוא אינו עוצר בהכרח.

אך נשים לב שבאמצעות החלפת המצבים המקבל והדוחה של M_{Σ^*} מתקבלת מכונה $M_\emptyset$ ששפתה ריקה, ואורך הקידוד שלה הוא c (החלפת המצב המקבל והדוחה לא משפיעה על אורך הקידוד), ולכן האלגוריתם שהצגנו בוודאות עוצר.

שימו לב שדרך פשוטה לחשוב על הפתרון שלנו היא כרדקוציה $\mathrm{HP} \le L_{M_{\Sigma^*},c}$ שכמובן מראה ש־$\mathrm{HP} \in \mathrm{R}$.

בעיות אופטימיזציה

שאלה זו עוסקת בגרפים שהקשתות שלהם ממושקלות, כלומר קיימת פונקציית משקל $w\colon E\to\mathbb{N}$. בהנתן קליק בגרף, משקל הקליק הוא סכום המשקלים של כל הקשתות בקליק.

הוכיחו, הפריכו או הראו שקילות לבעיה פתוחה מוכרת של הטענה הבאה:

קיימת מ"ט פולינומית שמקבלת כקלט גרף $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w\colon E\to\mathbb{N}$ המיוצגת באופן בינארי, ומחזירה את **המשקל המקסימלי** של קליק ב־G.

פתרון:

הטענה שקולה ל־$\mathrm{P}=\mathrm{NP}$.

בכיוון הראשון, נניח שקיימת מ"ט M כנ"ל ונראה כי $\mathrm{P}=\mathrm{NP}$. הבעיה ש־M פותרת מזכירה את השפה $\mathrm{CLIQUE}=\{(G,k)\mid k$ קיים ב־G קליק בגודל$\}$, שכזכור היא NP־שלמה, ולכן כדי להראות את הדרוש מספיק להראות כי $\mathrm{CLIQUE}\in\mathrm{P}$. ואכן, נראה מ"ט פולינומית M_{CLIQUE} המכריעה את CLIQUE בעזרת שימוש במ"ט M.

אם יודעים למצוא ביעילות קליק **בגודל מקסימלי** בגרף, אז ניתן להכריע ביעילות את CLIQUE - בהנתן קלט (G,k), פשוט מוצאים קליק בעל גודל מקסימלי ב־G ומקבלים אמ"מ גודלו לפחות k. אולם מה ש־M עושה זה לא למצוא קליק בעל **גודל המקסימלי**, אלא קליק בעל **משקל המקסימלי** לפי פונקציית המשקל w, שזה לא בהכרח אותו דבר עבור כל פונקציה w.

בעיה זו נפתרת ע"י העובדה שלנו **יש חופש בהגדרת** w - בבואנו להכריע את CLIQUE, כל שנתון לנו הוא קלט (G,k), ואנחנו יכולים להריץ את M על G עם איזו פונקציית משקל שאנחנו בוחרים. אם כן, נדאג לבחור w שעבורה מתקיים כי קליק בעל משקל מקסימלי הוא **כן** קליק בעל גודל מקסימלי ולהפך - למשל, w שנותנת לכל קשת את המשקל 1. כעת קליק הוא בגודל לפחות k אמ"מ משקלו הוא לפחות $\binom{k}{2}$, ואחרי שמוצאים קליק בעל משקל מקסימלי נשאר לקבל/לדחות בהתאם.

לסיכום, M_{CLIQUE} על קלט (G,k):

- הריצי את M על הקלט (G,w) כאשר $w(e)=1$ לכל $e\in E$.
- קבלי אם המשקל שהוחזר הוא לפחות $\binom{k}{2}$, ואחרת דחי.

פולינומיות M_{CLIQUE} נובעת מפולינומיות M, ונכונותה מההבחנות שעשינו לעיל.

בכיוון השני, נניח כי $\mathrm{P}=\mathrm{NP}$, ונראה קיום של M כנ"ל. נציג שני פתרונות לכיוון זה.

<u>פתרון א':</u>

בפתרון זה נמצא את המשקל המקסימלי של קליק ב־G באמצעות איטרציות שבכל אחת מהן נבדוק האם המשקל המקסימלי הוא לפחות מספר נתון.

נתבונן בשפה $L=\{(G,w,k)\mid w$ קיים ב־G קליק שמשקלו לפחות k לפי פונקציית המשקל$\}$. קל לראות ששפה זו שייכת ל־NP, באמצעות מ"ט א"ד שמנחשת קליק ומקבלת אמ"מ הוא במשקל מתאים, או באמצעות היחס $R_L=\{((G,w,k),C)\mid k$ הוא קליק ב־G ומשקלו לפי פונקציית המשקל w הוא לפחות $C\}$. מההנחה $\mathrm{P}=\mathrm{NP}$ נובע כי $L\in\mathrm{P}$ ולכן קיימת מ"ט פולינומית M_L המכריעה אותה. כעת נתבונן במ"ט M שעל קלט (G,w) פועלת כך:

- לכל $k=W,W-1,...,0$ כאשר $W=\sum_{e\in E}w(e)$:
  - הריצי את M_L על (G,w,k).
  - אם M_L קיבלה, החזירי k.

נכונות M נובעת מכך שמשקל מקסימלי של קליק בגרף הוא לכל היותר סכום כל המשקלים של הקשתות בגרף, ולכן הבדיקה מכסה את כל האפשרויות למשקל המקסימלי. בנוסף, הפולינומיות של כל איטרציה נובעת מפולינומיות M_L.

אז איפה הבעיה? האלגוריתם כולל מספר **לא פולינומי של איטרציות**. זאת מכיוון שהמשקלים בקלט מיוצגים באופן **בינארי**, ולכן המשקלים עצמם לא פולינומיים באורך הייצוג שלהם, ו־W לא פולינומי באורך הקלט שמורכב מהייצוגים הבינאריים של המשקלים.

בעיה זו ניתנת לפתרון: במקום לרוץ על k מ־0 ועד W, נבצע **חיפוש בינארי**. כעת מספר האיטרציות הוא $\log W$ ולכן פולינומי בקלט, וסיימנו.

פתרון ב':

פתרון זה עושה שימוש במשפט שהוכח בהרצאה האומר כי $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ אמ"מ כל יחס חסום פולינומית הניתן לזיהוי יעיל ניתן גם לחיפוש יעיל.

אמנם עלינו למצוא רק את המשקל המקסימלי של קליק בגרף, אבל נפתור בעיה קצת יותר חזקה: נמצא קליק בעל משקל מקסימלי, ולא רק את המשקל עצמו. זה מספיק כיוון שבהנתן קליק בעל משקל מקסימלי, נשאר פשוט לסכום את משקלי קשתותיו ולהחזיר את המשקל שלו.

נפתור אם כן את בעיית החיפוש של היחס הבא: $R = \{((G,w),C) \mid$ C הוא קליק בעל משקל מקסימלי ב־$G\}$. נשים לב כי R חסום פולינומית ונזכר במשפט לעיל, שעל פיו עלינו רק להראות כי R ניתן לזיהוי יעיל, כלומר כי קיים אלגוריתם פולינומי שבהנתן קלט $((G,w),C)$ מכריע האם C הוא קליק בעל משקל מקסימלי ב־G, או במילים אחרות, $R \in \mathrm{P}$.

לא ברור איך למצוא אלגוריתם כנ"ל, אולם למזלנו, נתון כי $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ ולכן מספיק להראות כי $R \in \mathrm{NP}$. כעת אנחנו נתקלים שוב בבעיה - אינטואיטיבית, NP היא מחלקת השפות שאפשר **לוודא** בזמן יעיל, כלומר שבהנתן קלט ועד לכך שהקלט שייך לשפה, קל לוודא באמצעות העד שהקלט אכן שייך לשפה. אולם לא ברור איזה עד יכול להיות לכך ש־C הוא קליק בעל משקל מקסימלי ב־G.

מה שכן ניתן, אינטואיטיבית, לעשות, הוא **להפריך** שייכות של קלט $((G,w),C)$ ל־R - על ידי כך שמראים קיום של קליק C' ב־G בעל משקל גדול משל C. במילים אחרות, קל לוודא את השפה **המשלימה** של R: $\overline{R} = \{((G,w),C) \mid$ C **אינו** קליק בעל משקל מקסימלי ב־$G\}$. אם כן, כדי להראות כי $R \in \mathrm{P}$, נשתמש בסגירות P למשלים ונראה כי $\overline{R} \in \mathrm{P}$.

לשם כך מספיק, כאמור, להראות כי $\overline{R} \in \mathrm{NP}$, וזה נכון באמצעות היחס $R_{\overline{R}} = \{(((G,w),C),C') \mid$ C' קליק ב־G בעל משקל גדול מ־$C\}$, שמקיים את שלוש התכונות הנדרשות מיחס על מנת להגדיר שפה ב־NP: הוא חסום פולינומית, ניתן לזיהוי יעיל (כי קל לבדוק את המשקלים של C, C' ולהשוות ביניהם), ומגדיר את $\overline{R}$ (הערה: נכון שלפי הגדרתו $\overline{R}$ מכיל גם קלטים עבורם C כלל אינו קליק ב־G, אולם כיוון שקל לבדוק אם קבוצת צמתים היא קליק בגרף או לא, זה לא משפיע על שייכותו של $\overline{R}$ ל־P). ובכך סיימנו.

נסכם את הפתרון:

- הגדרנו את היחס $R = \{((G,w),C) \mid$ C הוא קליק בעל משקל מקסימלי ב־$G\}$, והתבוננו במשלים שלו $\overline{R} = \{((G,w),C) \mid$ C **אינו** קליק בעל משקל מקסימלי ב־$G\}$.
- הגדרנו את היחס $R_{\overline{R}} = \{(((G,w),C),C') \mid$ C' קליק ב־G בעל משקל גדול ממש מ־$C\}$, וטענו כי הוא מקיים את שלוש התכונות ולכן $\overline{R} \in \mathrm{NP}$.
- מההנחה כי $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, נובע כי $\overline{R} \in \mathrm{P}$.
- מסגירות P למשלים, נובע כי $R \in \mathrm{P}$.
- קיבלנו כי R חסום פולינומית וניתן לזיהוי יעיל, ולכן מההנחה ומהמשפט, הוא ניתן לחיפוש יעיל.
- זה מוכיח את קיום M המבוקשת: M תפתור את בעיית החיפוש של R, ותחזיר את משקלו של הקליק שיוחזר.