

## חשוביות (236343)

אביב תשע"ז

בוחן אמצע

11.6.2017

מרצים: פרופ' אלי בן ששון.  
מתרגלים: גלעד קותיאל, אוהד טלמון, סתיו פרלה, מיכאל ריאבצב.

הנחיות:

- משך הבוחן שעה וחצי.
- אסור כל שימוש בחומר עזר, למעט דף העזר המצורף.
- יש לענות על כל השאלות בקצרה ובאופן מסודר.
- ניתן להשתמש בטענות שהוכחו בתרגול או בהרצאות, למעט בסעיפים בהם אתם מתבקשים להוכיח טענות אלו במפורש.
- לא ניתן להסתמך על טענות משיעורי הבית ללא הוכחה.
- הנכם רשאים לכתוב בכל סעיף "לא יודע" ולקבל 20% מהניקוד לאותו סעיף.
- מותר להיעזר בסעיפים קודמים לצורך פתרון סעיף, גם אם לא פתרתם אותם.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית מעברים.

**בהצלחה!**

**שאלה 1 [40 נקודות]**

קבוצה בלתי תלויה בגרף היא תת קבוצה של צמתים  $I \subseteq V$  כך ש  $G[I]$  חסר קשתות. קליק בגרף הוא תת קבוצה של צמתים  $K \subseteq V$  כך ש  $G[K]$  גרף מלא. נתונות השפות הבאות:

- $VC = \{(G, k) : k \text{ גודל } G \text{ קיים כיסוי בצמתים בגודל } k\}$
- $IS = \{(G, k) : k \text{ גודל } G \text{ קיימת קבוצה בלתי תלויה בגודל } k\}$
- $CLIQUE = \{(G, k) : k \text{ גודל } G \text{ קיים קליק בגודל } k\}$

1. (10 נקודות) הראו ש:  $VC \leq_p IS$ .

2. (10 נקודות) הראו ש:  $IS \leq_p \text{CLIQUE}$ .

3. (10 נקודות) הראו ש:  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{VC}$ .

4. (10 נקודות) הוכיחו: השפה  $\{G : G \text{ קיים כיסוי בצמתים בגודל } 3\}$   $VC_3 =$  שייכת ל  $P$ .

**שאלה 2 [35 נקודות]**

בהנחה ש- $P \neq NP$ , עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב- $P$  או לא. הוכיחו את תשובתכם.

1. (9 נקודות)  $VC_{\deg 2} = \{G, k : k \text{ כיסוי בצמתים בגודל } k \text{ ב-} G \text{ ויש } 2 \text{ ויש ל-} G\}$

2. (9 נקודות)  $VC_{17} = \{G : |V| - 17 \text{ כיסוי בצמתים בגודל } 17\}$  קיים ב- $G$

3. (9 נקודות) קיים ב- $G$  כיסוי בצמתים בגודל  $\frac{|V|}{2}$  לכל היותר:  $VC_{\frac{1}{2}} = \{G : \text{לכל היותר } \frac{|V|}{2}\}$



4. (8 נקודות) קיים ב  $G$  כיסוי בצמתים בגודל  $\log |V|$  לכל היותר :  $VC_{\log} = \{G$

**שאלה 3 [25 נקודות]**

בהנחה ש  $P \neq NP$  עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא ב  $P$  או לא. הוכיחו את תשובתכם.

1. (7 נקודות)  $L_1 = \{\varphi \in SAT : \varphi \text{ ויש בה לפחות } 100 \text{ פסוקיות} : \varphi\}$

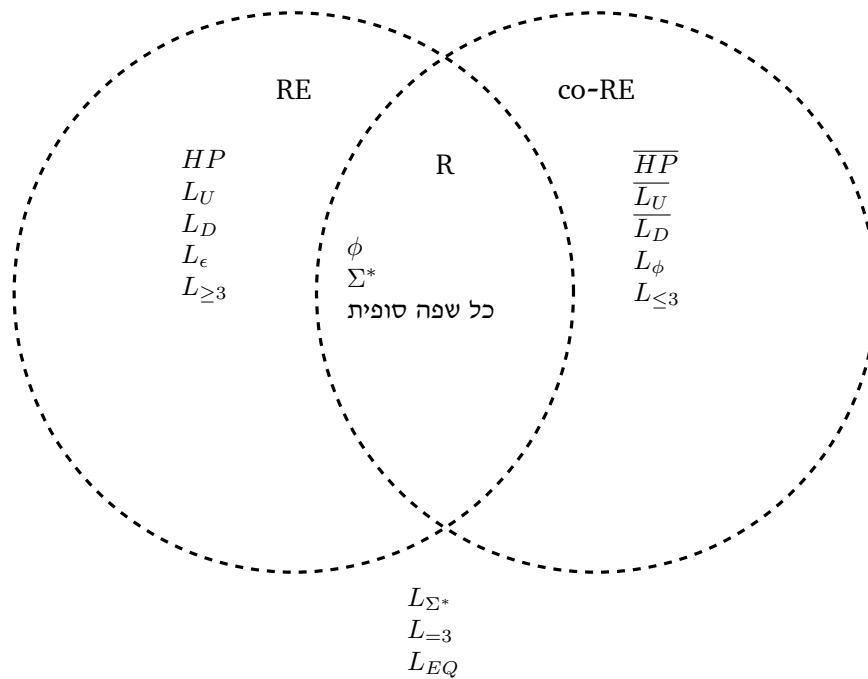
2. (6 נקודות)  $L_2 = \{\varphi \in SAT : \varphi \text{ ויש בה לכל היותר } 100 \text{ פסוקיות} : \varphi\}$

3. (6 נקודות)  $L_3 = \{\varphi \in SAT \mid \varphi \text{ בת } n \text{ משתנים ולפחות } 2^n \text{ פסוקיות} : \varphi\}$

4. (6 נקודות)  $L_4 = \{(A, B, E), k : G = (A \cup B, E) \text{ דו צדדי וקיימת } D \subseteq B \text{ בגודל } k, \text{ כך שהגרף המושרה } G[A \cup D] \text{ קשיר}\}$

## שפות וסיווגן

- $HP = \{\langle M \rangle, x : x \text{ עוצרת על } M\}$
- $L_U = \{\langle M \rangle, x : x \text{ מקבלת את } M\}$
- $L_D = \{\langle M \rangle : \langle M \rangle \in L(M)\}$
- $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle : L(M) = \Sigma^*\}$
- $L_\phi = \{\langle M \rangle : L(M) = \phi\}$
- $L_\epsilon = \{\langle M \rangle : \epsilon \in L(M)\}$
- $L_{EQ} = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) : L(M_1) = L(M_2)\}$
- $L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle : |L(M)| \geq 3\}$
- $L_{\leq 3} = \{\langle M \rangle : |L(M)| \leq 3\}$
- $L_{=3} = \{\langle M \rangle : |L(M)| = 3\}$



## אוסף שפות NP-שלמות

- $HC = \{G : G \text{ לא מכון וקיים בו מעגל המילטוני}\}$
- $SAT = \{\varphi : \varphi \text{ פסוק CNF ספיק}\}$
- $3SAT = \{\varphi : \varphi \text{ פסוק 3CNF ספיק}\}$
- $3COL = \{G : G \text{ הינו גרף 3-צביע}\}$
- $VC = \{(G, k) : k \text{ כיסוי בצמתים בגודל } k\}$
- $SC = \{(n, k, S_1, \dots, S_m) : \bigcup_{i \in I} S_i = [n], |I| = k \text{ ש-} I \subseteq [m] \text{ קיים}\}$
- $IS = \{(G, k) : k \text{ קבוצה בלתי תלויה בגודל } k\}$
- $CLIQUE = \{(G, k) : k \text{ קליק בגודל } k\}$
- $SS = \{(a_1, \dots, a_n, s) : \sum_{i \in I} a_i = s \text{ ש-} I \subseteq [n] \text{ קבוצה, ו-} a_1, \dots, a_n \text{ מספרים טבעיים וקיימת תת קבוצה}\}$