q-binomial coefficientの効率的な計算

中間発表会　鈴木陽大

今回のゴールと目的

- q二項係数を、効率的に計算するプログラムを実装する

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

  - 計算量を意識したプログラミングができるようになることを目的とする

- 実装したプログラムをweb上で実行できるようなサイトを作り、公開する
  - （後から追加）
  - htmlやcssについての理解を深めることを目的とする

q-binomial coefficientについて

- q 拡張　ある数学的対象について、q→1の極限で元々に一致するようにパラメータqを導入すること
- q 類似　q拡張を行った後の数学的対象
- ex
  - 自然数のq類似　**q-数**　（$[n]_q$と書く）

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + \mathrm{q} + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

(q→1とすれば$[n]_q$→nで、元の自然数nと一致する）

q-binomial coefficientについて

- q - 階乗　階乗のq類似

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q$$

$$= \frac{1-q^n}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{1-q^2}{1-q} \cdot \frac{1-q^1}{1-q}$$

(q→1とすれば$[n]_q$!→n!で、元の階乗n!と一致する）

- q - 二項係数（q-binomial coefficient あるいは Gaussian binomial coefficient)

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

cf. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(= {}_nC_k)$

q-binomial coefficientについて

- q - 二項係数（q-binomial coefficient あるいは Gaussian binomial coefficient)

$$\binom{4}{2}_q = \frac{\left(\frac{1-q^4}{1-q}\frac{1-q^3}{1-q}\cancel{\frac{1-q^2}{1-q}}\cancel{\frac{1-q^1}{1-q}}\right)}{\left(\frac{1-q^2}{1-q}\frac{1-q^1}{1-q}\cancel{\frac{1-q^2}{1-q}}\cancel{\frac{1-q^1}{1-q}}\right)}$$

$$= \frac{((1-q^4)(1-q^3))}{((1-q^2)(1-q))}$$

$$= (1+q^2)(1+q+q^2)$$

$$= 1+q+q^2+q^2+q^3+q^4$$

$$= 1+q+2q^2+q^3+q^4$$

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

q-binomial coefficientについて

- q - 二項係数の具体例

$$\binom{4}{2}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

- 「0と1を4つ並べてできる文字列を考える。『0011』の状態から『01』の部分を『10』に入れ替える操作をk回行ったときに得られる文字列の並びは何通りか？

k=0	0011	1通り
1	0101	1通り
2	1001, 0110	2通り
3	1010	1通り
4	1100	1通り

q^kの係数になっている

$$\binom{4}{2}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

手法

- 通常の二項係数を効率的に計算するアルゴリズムを応用する
  - $\binom{n}{k} \bmod P$ の計算には主に以下の２つが知られている (n>k>0)
  - １　階乗と、階乗の逆元を$O(n)$であらかじめ計算する。 $\binom{n}{k} \bmod P$ は、n!を $fact[n]$ 、n!の逆元を$fact_inv[n]$として$fact[n] \cdot fact_inv[k] \cdot fact_inv[n-k]$ と計算できる。全体の計算量は$O(n)$となる。
  - ２　有名関係式$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ を利用する。$n > l, m$の範囲で$\binom{l}{m}$を全て計算する必要があるため、計算量は$O(n^2)$となる。
- 一般にqは整数とは限らないため、逆元など離散的な対象を前提とした１の手法は今回の計算と相性が悪い
- 一方で、q二項係数には$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ と類似の関係式である $\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^{n-k} \binom{n-1}{k}_q$ が成立する

中間発表までの結果

- q二項係数の定義や応用例について文献調査を行い、理解を深めた

- q二項係数の前段階として、通常の二項係数を$O(n^2)$で計算するプログラムを実装した

- 参考として、二項係数を$O(n)$で計算するプログラムも実装した
  - 逆元など、関連する数学的な知識について理解を深めた

中間発表までの結果

- $\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k}_q$ を利用してq二項係数を計算するプログラムを実装した
  - 動的計画法による実装。一度$O(n^2)$で前処理を終わらせれば、同じqに対するnまでのクエリを$O(1)$で計算することが可能
  - 入出力例

```
double comq[5050][5050]; //com[n][k]=nCk
int n = 25; //(n k)_qのn
int k = 5; //(n k)_qのk
double q = 1.2; //(n k)_qのq
double powq[5050]; //qの累乗
```

終了コード	0
実行時間	4 ms
メモリ	560 KB

標準出力

```
11521987382.700193405151367
```

進捗評価と今後の展望

- q二項係数については、実際にqに何かを代入した値よりも、各項の係数についての方に数学的な興味があることが多い
- 当初考えていた$O(n)$や$O(k)$での計算に拘らず、計算量についてはいったん$O(n^2)$で、ひとまず達成とする
- 今後、与えられたn, k, mについて、$\binom{n}{k}_q$におけるq^mの係数を計算するプログラムを実装する
  - ex　$f(n, k, m)$
    - $f(4, 2, 0) = 1$
    - $f(4, 2, 1) = 1$
    - $f(4, 2, 2) = 2$

$$\binom{4}{2}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

今後の展望

- 係数の計算について、現在考えている手法は以下の通り
- 手計算の流れから、それぞれの項の係数を独立に求めるのは難しいのではないか
- $\binom{n}{k}_q$ はqの$k(n-k)$次式になる
  - $\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$より、次数は$\{n+(n-1)+\cdots+1\} - \{k+(k-1)+\cdots+1+(n-k)+(n-k-1)+\cdots+1\} = k(k-n)$
- n, kについて未知の係数は$k(n-k)+1$こ
- したがって、$\binom{n}{k}_q$に $k(n-k)+1$この異なるqを代入して、$k(n-k)+1$元連立１次方程式を解けば良い

今後の展望

- $k(n-k)+1$は$k=\frac{n}{2}$で最大値$\frac{n^2}{4}+1$をとるから、計算量は最大でもn^2元連立１次方程式を解く時と等しい
- 一方、n元連立方程式はLU分解により$O(n^3)$の計算量で求めることが可能だから、この連立方程式を解くのに$O(n^6)$必要
- また、n^2個のq二項係数は$O(n^4)$で求めることが可能
- 結局、与えられたn, kに対して$\binom{n}{k}_q$の全ての係数は$O(n^6)$で求められるはず
- あるいは、さらに効率的な方法があるかもしれない
  - →最終発表までの課題

- また、webサイトの作成、htmlやcssについての学習も並行して進める

参考文献等

- 作成したq-binomial coefficientを計算するコードのURL
  - https://github.com/yodai49/CPP
  - リポジトリ内の”q-binomial_coefficient.cpp”

- 参考文献

  - 『整数の分割』ジョージ・アンドリュース、キムモ・エリクソン著　佐藤文広訳　数学書房　2008/3/25　第１版第２刷発行
  - “Upper Bounds and Asymptotics for the q-Binomial Coefficients” , Lefteris M.Kirousis, Yannis C. Stamatiou, and Malvina Vamvakari , https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.95.7618&rep=rep1&type=pdf, 2021/5/27閲覧