CONTROL POR MATRIZ DINÁMICA
(DMC "Dynamic Matrix Control")

Este algoritmo utiliza el modelo repuesta al escalón para la predicción.

Matricialmente, y considerando que $\Delta u(t+j-1)=0$ para j > N_u, se tiene que la predicción está dada por:

$$\hat{y}=G\Delta u+p$$

donde

$$\hat{y}=\left[\hat{y}(t+N_1/t) \quad \hat{y}(t+N_1+1/t) \quad \cdots \quad \hat{y}(t+N_2/t)\right]^T$$

$$G=\begin{bmatrix} g_{N_1} & \cdots & g_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_{N_1+1} & \cdots & \cdots & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta u=\left[\Delta u(t/t) \quad \Delta u(t+1/t) \quad \cdots \quad \Delta u(t+N_u-1/t)\right]^T$$

$$p=\left[p_{N_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}\right]$$

Por otra parte, el controlador por matriz dinámica utiliza la función objetivo definida en la ecuación (*) con δ = 1, la cual matricialmente está dada por:

$$J = [w - \hat{y}]^T [w - \hat{y}] + \lambda \Delta u^T \Delta u$$

Reemplazando en esta ecuación la predicción $\hat{y}$, se tiene

$$J = [w - G\Delta u - p]^T [w - G\Delta u - p] + \lambda \Delta u^T \Delta u$$

Si se define $e_0 = w - p$, entonces

$$J = [e_0 - G\Delta u]^T [e_0 - G\Delta u] + \lambda \Delta u^T \Delta u$$

Minimizando esta función objetivo se obtiene:

$$\Delta u = [G^T G + \lambda I]^{-1} G^T e_0$$

donde sólo se aplica $\Delta u(t/t)$ de acuerdo a la estrategia de control de horizonte móvil definida. Esto es,

$$\Delta u(t/t) = K e_0$$

donde K es la primera fila de matriz $[G^T G + \lambda I]^{-1} G$.

CONTROL PREDICTIVO GENERALIZADO
G.P.C. (“Generalized Predictive Control”)

Para el diseño de Controladores Predictivos Generalizados G.P.C. se utiliza el siguiente modelo ARIMAX:

$$A(z^{-1})y_t = B(z^{-1})u_{t-d} + n_t$$

donde $$n_t = \frac{C(z^{-1})w_t}{\Delta}$$

Predicción óptima

$$\boxed{\hat{y}_{t+j} = E\left[y_{t+j}/t\right] = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t} \qquad (*)$$

con $G_j = BE_j$ y $1 = A\Delta E_j + z^{-j}F_j$ (Ecuación diofántica)

y si d = 1, N_1 = 1 y N_2 = N, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+1} &= G_1 \Delta u_t + F_1 y_t \\
\hat{y}_{t+2} &= G_2 \Delta u_{t+1} + F_2 y_t \\
&\vdots \\
\hat{y}_{t+N} &= G_N \Delta u_{t-1+N} + F_N y_t
\end{aligned}$$

A continuación, se agrupan los términos conocidos hasta “t” en el vector f $\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\}$, es decir

$$
\begin{aligned}
f_{t+1} &= \left[G_1(z^{-1}) - g_0\right]\Delta u_t + F_1 y_t \\
f_{t+2} &= \left[G_2(z^{-1}) - g_1 z^{-1} - g_0\right]\Delta u_{t+1} + F_2 y_t \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Entonces, la expresión (*) se puede expresar de manera vectorial como

$$\hat{y} = G\tilde{u} + f$$

donde

$\hat{y} \equiv \left[\hat{y}_{t+}, \hat{y}_{t+2}, \ldots, \hat{y}_{t+N}\right]$ son las predicciones desde el horizonte de predicción $N_1 = 1$ hasta $N_2 = N$.

$$
G = \begin{bmatrix}
g_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
g_1 & g_0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \\
 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & & g_0
\end{bmatrix}_{N \times N}
$$

$\tilde{u} \equiv \left[\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+2}, \ldots., \Delta u_{t+N-1}\right]^T$ son las acciones de control futuras.

Por lo tanto, $G\tilde{u}$ contiene términos desconocidos por determinar $\left\{\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+N-1}\right\}$ y f agrupa los términos conocidos $\left\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\right\}$

Para el cálculo de las acciones de control futuras, el algoritmo de Control Predictivo Generalizado G.P.C. minimiza la siguiente función de costos:

$$\boxed{J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \left[\hat{y}_{t+j} - r_{t+j}\right]^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i \left[\Delta u_{t+i-1}\right]^2} \qquad (**)$$

En general,

$N_1 = d$ (N1 = 1, por defecto)

$N_2 = 10$ o N_2 es del orden del tiempo de estabilización (Ts) del sistema.

$N_u = 1$ hasta el orden de la planta.

Además, la función de costo definida anteriormente (ecuación (**)) se puede expresar en forma más compacta por

$$J = (\hat{y} - r)^T (\hat{y} - r) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u}$$

donde

$$\hat{y} = G\tilde{u} + f$$

$$r = \left[r_{t+1}, r_{t+2}, \ldots, r_{t+N}\right]^T$$ (con $N_1 = 1$, $N_2 = N$)

$$
G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{N_u-1} & g_{N_u-2} & \cdots & g_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_{N-N_u} \end{bmatrix}_{N \times N_u}
$$

pues $\Delta u_{t+j} = 0$ para $j \geq N_u$.

Entonces,

$$
J = (G\tilde{u} + f - r)^T (G\tilde{u} + f - r) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u}
$$

Para la minimización de esta función de costos, se tiene

$$
\frac{\partial J}{\partial \tilde{u}} = 0
$$

Entonces,

$$
(G\tilde{u} + f - r)^T G + \lambda \tilde{u}^T = 0
$$

$$
G^T (G\tilde{u} + f - r) + \lambda \tilde{u} = 0
$$

$$
G^T G\tilde{u} + \lambda \tilde{u} = G^T (r - f)
$$

Por lo tanto, las acciones de control óptimas están dadas por:

$$\tilde{u} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (r - f)$$

De este modo, se tiene

$$\begin{bmatrix} \Delta u_t \\ \Delta u_{t+1} \\ \\ \Delta u_{t+N_u-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^T \\ H_2^T \\ \vdots \\ \end{bmatrix} (r - f)$$

Sin embargo, sólo se utiliza Δu_t, dado que en el siguiente instante se desplazan los horizontes de predicción y control, siendo posible calcular una nueva acción de control para ese instante.

La acción de control en "t" está dada por:

$$\Delta u_t = H_1^T (r - f)$$

con H_1^T la primera fila de $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$

$$\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$$

Entonces,

$$\boxed{u_t = u_{t-1} + H_1^T (r - f)}$$

RESUMEN
CONTROL PREDICTIVO GENERALIZADO (G.P.C.)

Modelo ARIMAX

$$\boxed{A(z^{-1})y_t = B(z^{-1})u_{t-d} + \frac{w_t}{\Delta}}$$

Predicción óptima

$$\boxed{\hat{y}_{t+j} = E\left[y_{t+j}/t\right] = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t}$$

con $G_j = BE_j$ y $1 = A\Delta E_j + z^{-j}F_j$ (Ecuación diofántica)

Función de costo

$$\boxed{J = \sum_{j=N_1}^{N_2}\left[\hat{y}_{t+j} - r_{t+j}\right]^2 + \sum_{i=1}^{N_u}\lambda_i\left[\Delta u_{t+i-1}\right]^2}$$

con $\Delta u_{t+j} = 0$ para $j \geq N_u$.

Acción de control óptima

$$\boxed{u_t = u_{t-1} + H_1^T(r - f)}$$

con H_1^T la primera fila de $(G^TG + \lambda I)^{-1}G^T$

$G\tilde{u}$ términos desconocidos $\left\{\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+N_u-1}\right\}$

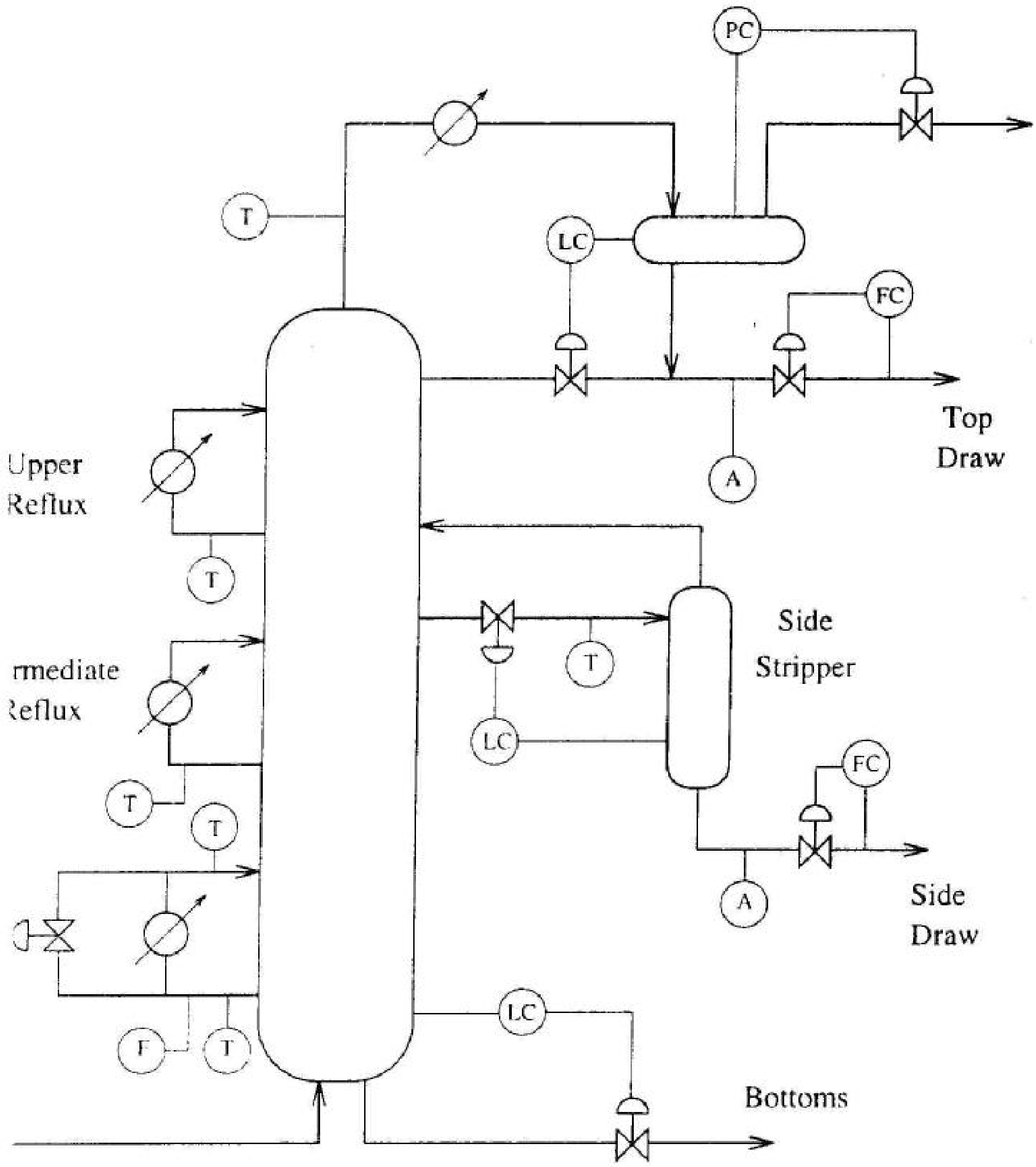
f términos conocidos $\left\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\right\}$

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

EJEMPLO DE GPC MULTIVARIABLE

Columna de destilación

Variable manipuladas:	Tasa de tiro superior (top draw rate) u_1 Tasa de tiro lateral (side draw rate) u_2 Reflujo inferior (bottom reflux duty) u_3
Variables controladas:	Composición producto superior (top product composition) y_1 Compision de producto lateral (side product composition) y_2 Temperatura inferior (Bottom temperature) y_3



La dinámica de la planta está descrita por:

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

$$
\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4.05e^{-27s}}{1+50s} & \dfrac{1.77e^{-28s}}{1+60s} & \dfrac{5.88e^{-27s}}{1+50s} \\ \dfrac{5.39e^{-18s}}{1+50s} & \dfrac{5.72e^{-14s}}{1+60s} & \dfrac{6.9e^{-15s}}{1+40s} \\ \dfrac{4.38e^{-20s}}{1+33s} & \dfrac{4.42e^{-22s}}{1+44s} & \dfrac{7.2}{1+19s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}
$$

Los retardos van desde 0 a 28 min.

El modelo discreto con Ts = 4 min, está dado por:

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{0.08(z^{-1}+2.88z^{-2})}{1-0.923z^{-1}}z^{-6} & \dfrac{0.114z^{-1}}{1-0.936z^{-1}}z^{-7} & \dfrac{0.116(z^{-1}+2.883z^{-2})}{1-0.923z^{-1}}z^{-6} \\ \dfrac{0.211(z^{-1}+0.96z^{-2})}{1-0.923z^{-1}}z^{-4} & \dfrac{0.187(z^{-1}+0.967z^{-2})}{1-0.936z^{-1}}z^{-3} & \dfrac{0.17(z^{-1}+2.854z^{-2})}{1-0.905z^{-1}}z^{-3} \\ \dfrac{0.5z^{-1}}{1-0.886z^{-1}}z^{-5} & \dfrac{0.196z^{-1}+0.955z^{-2}}{1-0.913z^{-1}}z^{-5} & \dfrac{1.367z^{-1}}{1-0.81z^{-1}} \end{bmatrix}
$$

La matriz A(z-1) es una matriz diagonal con los siguientes elementos:

$$
\begin{aligned}
A_{11}(z^{-1}) &= 1 - 1.859z^{-1} + 0.8639z^{-2} \\
A_{22}(z^{-1}) &= 1 - 2.764z^{-1} + 2.5463z^{-2} - 0.7819z^{-3} \\
A_{33}(z^{-1}) &= 1 - 2.609z^{-1} + 2.2661z^{-2} - 0.6552z^{-3} \\
B_{11}(z^{-1}) &= (0.08 + 0.155z^{-1} - 0.216z^{-2})z^{-6} \\
B_{12}(z^{-1}) &= (0.114 - 0.105z^{-1})z^{-7} \\
B_{13}(z^{-1}) &= (0.116 + 0.226z^{-1} - 0.313z^{-2})z^{-6} \\
B_{21}(z^{-1}) &= (0.211 - 0.186z^{-1} - 0.194z^{-2} + 0.172z^{-3})z^{-4} \\
B_{22}(z^{-1}) &= (0.187 - 0.161z^{-1} - 0.174z^{-2} + 0.151z^{-3})z^{-3} \\
B_{23}(z^{-1}) &= (0.17 + 0.169z^{-1} - 0.755z^{-2} + 0.419z^{-3})z^{-4} \\
B_{31}(z^{-1}) &= (0.5 - 0.8615z^{-1} + 0.369z^{-2})z^{-5} \\
B_{32}(z^{-1}) &= (0.196 + 0.145z^{-1} - 1.77z^{-2} + 0.134z^{-3})z^{-5} \\
B_{33}(z^{-1}) &= 1.367 - 2.459z^{-1} + 1.105z^{-2}
\end{aligned}
$$

El mínimo retardo de las variables de salida es 27, 14 y 0 min. Entonces, los mínimos retardos son 6, 3 y 0 (con Ts = 4 min).

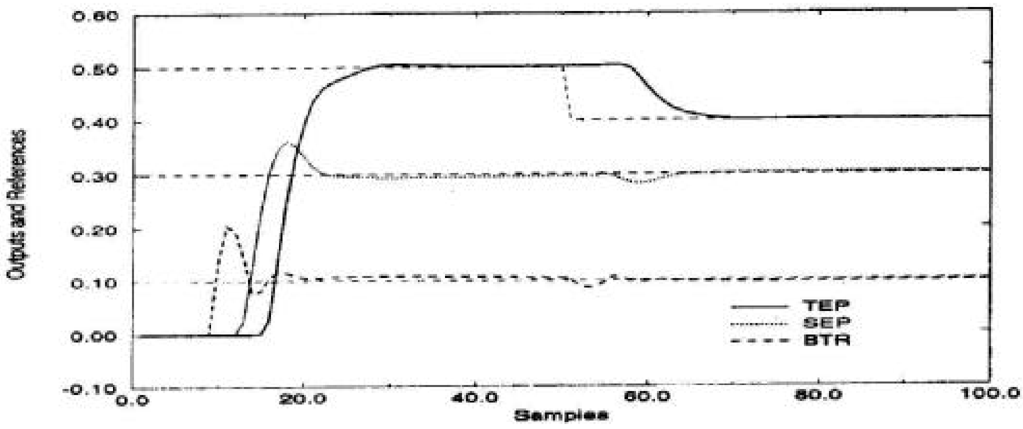
$N_y = 30$ y $N_u = 5$ para todas las variables.

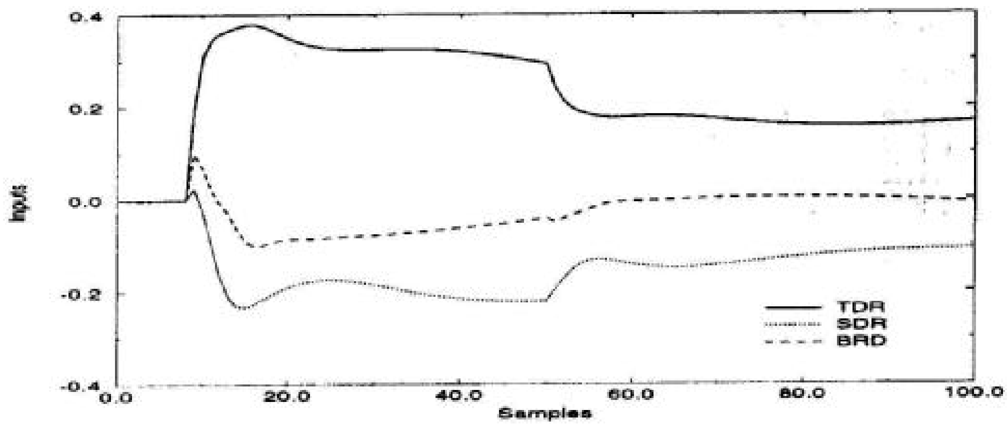
$$
Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

Set points o referencias = 0.5, 0.3 y 0.1 respectivamente.

Prueba realizada: Cambio de set-point de la composición superior de 0.5 a 0.4

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

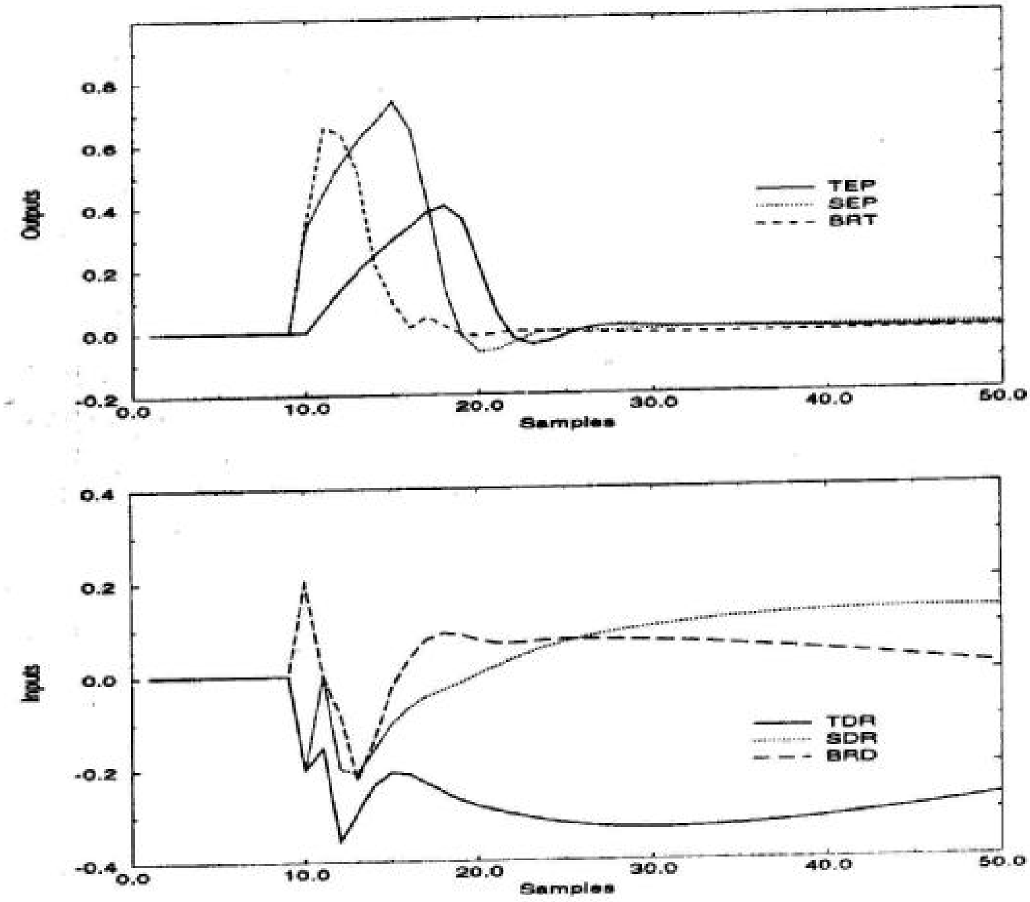




Como se observa todas las variables llegan rápidamente al set-point, sólo la temperatura inferior tiene un overshoot apreciable.

El reflujo superior (upper reflux) es considerado como una perturbación no medible.

Una perturbación de 0.5 es introducida en el reflujo superior, manteniendo todas las referencias en cero.



Como se puede observar la perturbación es rápidamente cancelada.

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.