SEMINARIO AADECA-UBA

“Lógica difusa, redes neuronales y control predictivo. Técnicas modernas de control”

Profesora: Dra. Doris Sáez

APUNTES III: FUNDAMENTOS DE CONTROL PREDICTIVO

CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELOS (MBPC "Model Based Predictive Control")

El control predictivo basado en modelos se presenta actualmente como una atractiva herramienta de control que permite incorporar criterios operacionales a través de la utilización de una función objetivo y restricciones para el cálculo de las acciones de control. Además, estas estrategias de control han alcanzado un nivel muy significativo de aceptabilidad industrial en aplicaciones prácticas de control de procesos.

El control predictivo basado en modelos se basa principalmente en los siguientes elementos:

- El uso de un modelo matemático del proceso que se utiliza para predecir la evolución futura de las variables controladas sobre un horizonte de predicción.

- La imposición de una estructura en las variables manipuladas futuras.

- El establecimiento de una trayectoria deseada futura, o referencia, para las variables controladas.

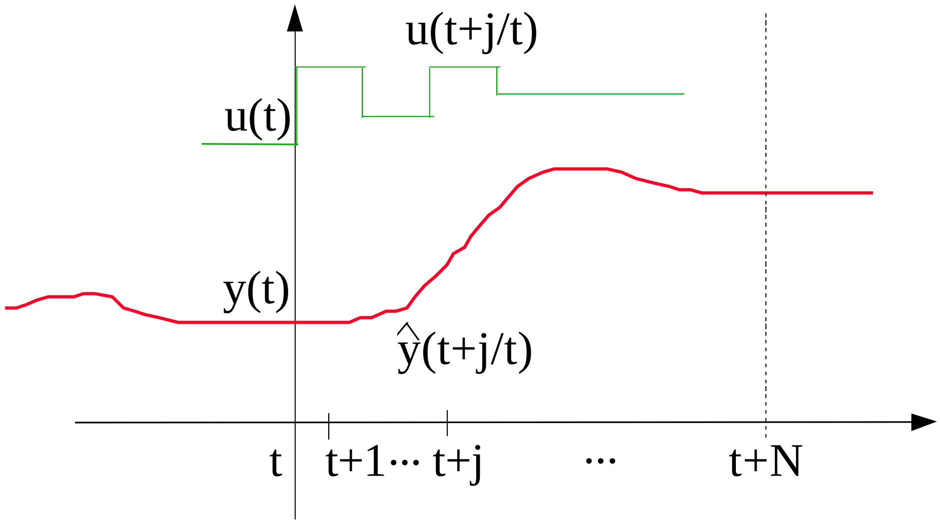
- El cálculo de las variables manipuladas optimizando una cierta función objetivo o función de costos.

- La aplicación del control siguiendo una política de horizonte móvil.

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

ESTRATEGIA DEL MBPC

La metodología de los controladores MBPC consiste en los siguientes pasos:



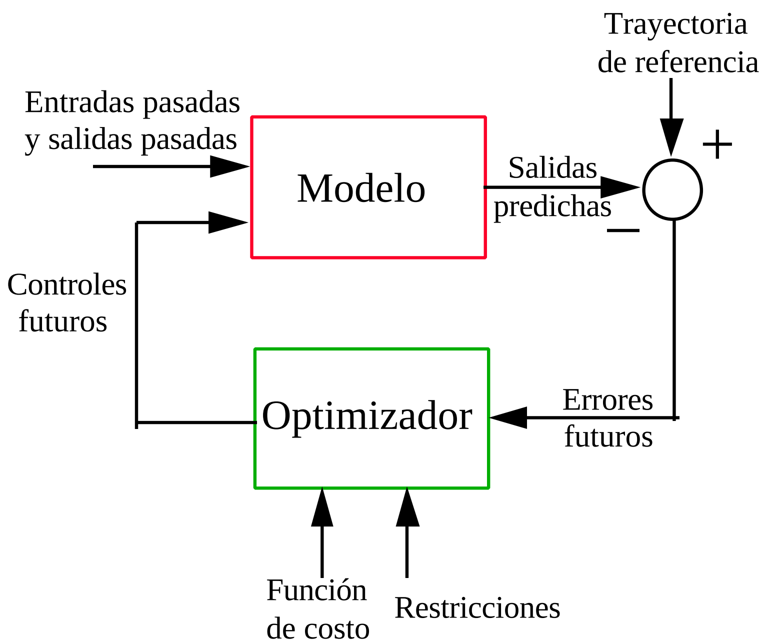
1. Las salidas futuras para un horizonte de predicción N son predichas en cada instante t, usando un modelo del proceso. Estas salidas predichas $\hat{y}(t+j/t)$ dependen de los valores conocidos hasta t (entradas y salidas pasadas) y además pueden depender de las señales de control futuras u(t+j/t) que se quieren calcular.

2. Las acciones de control futuras u(t+j/t) son calculadas optimizando una función objetivo de manera de llevar la salida del proceso lo más cerca posible de una trayectoria de referencia dada. Este criterio, generalmente es una función cuadrática de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia deseada, incluyendo en muchos casos el esfuerzo de control.

3. Sólo se aplica u(t/t) al proceso, debido a que en el instante siguiente t+1 se tienen los valores de todas las variables controladas hasta t+1 y variables manipuladas hasta t.

ESTRUCTURA BÁSICA DEL CONTROL MBPC

La figura muestra la estructura básica de las estrategias de control predictivo basado en modelos. En este caso, se hace uso de un modelo para predecir las salidas futuras del proceso, basándose además en los controles futuros o entradas futuras propuestas. Estas señales son calculadas por un optimizador teniendo en cuenta una función de costo y restricciones del proceso.



Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

ELEMENTOS DEL MBPC

Los elementos principales del control predictivo son:

- Modelos de predicción
- Función objetivo
- Obtención de la ley de control

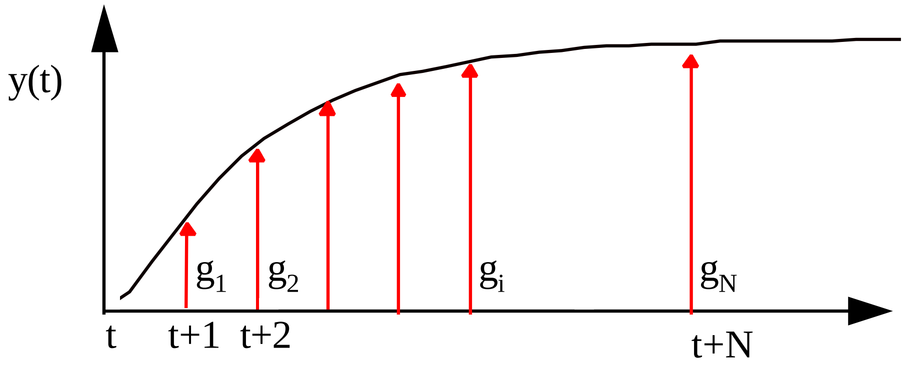
MODELOS DE PREDICCIÓN

El modelo de predicción debe ser capaz de capturar la dinámica del proceso para poder predecir las salidas futuras, al mismo tiempo que debe ser sencillo de usar y comprender, y además permitir un análisis teórico.

Las estrategias de MBPC utilizan diferentes modelos del proceso para representar la relación de las salidas con las entradas medibles (variables manipuladas y perturbaciones medibles). Además, se considera incluir las entradas no medibles, el ruido y los errores de modelación (pereturbaciones).

A continuación se presentarán los principales modelos utilizados para las formulaciones del control predictivo.

Modelo de respuesta al escalón



La salida está dada por:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + n(t)$$

donde g_i son los valores muestreadas cuando el proceso es excitado con un escalón.

Las perturbaciones se consideran constantes a lo largo del horizonte de predicción e iguales al valor en el instante t, es decir:

$$\hat{n}(t+j/t) = \hat{n}(t/t) = y(t) - \hat{y}(t/t)$$

La predicción está dada por:

$$\hat{y}(t+j/t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i/t) + \hat{n}(t+j/t)$$

Entonces, la predicción está dada por

$$\hat{y}(t+j/t)$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{j} g_i \Delta u(t+j-i/t)}_{\text{acciones de control futuras}} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i)}_{\text{acciones de control pasadas}} + \hat{n}(t+j/t)$$

Reemplazando la predicción de la perturbación en esta ecuación y el modelo para $\hat{y}(t/t)$ en ella, se tiene:

$$\hat{y}(t+j/t) = \sum_{i=1}^{j} g_i \Delta u(t+j-i/t) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i)$$
$$+ y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \qquad (**)$$

Entonces, se define la respuesta libre del sistema como los valores conocidos hasta el instante t, es decir:

$$p_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} \left[g_{j+i} - g_i\right] \Delta u(t-i) + y(t)$$

Como $g_{j+i} - g_i \approx 0$ para i > N, se tiene:

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} \left[g_{j+i} - g_i\right] \Delta u(t-i) + y(t)$$

Por lo tanto, la ecuación (**) se puede reescribir como:

$$\hat{y}(t+j/t)=\sum_{i=1}^{j} g_i \Delta u(t+j-i/t)+p_j$$

Entonces, las predicciones en el intervalo N_1 y N_2 están dadas por:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t+N_1/t) &= g_1\Delta u(t+N_1-1/t)+\cdots+g_{N_1}\Delta u(t/t)+p_{N_1}\\
\hat{y}(t+N_1+1/t) &= g_1\Delta u(t+N_1/t)+\cdots+g_{N_1+1}\Delta u(t/t)+p_{N_1+1}\\
&\vdots\\
\hat{y}(t+N_2/t) &= g_1\Delta u(t+N_2-1/t)+\cdots+g_{N_2}\Delta u(t/t)+p_{N_2}
\end{aligned}$$

Matricialmente, y considerando que $\Delta u(t+j-1)=0$ para $j > N_u$, se tiene:

$$\hat{y}=G\Delta u+p$$

donde

$$\hat{y}=\begin{bmatrix}\hat{y}(t+N_1/t) & \hat{y}(t+N_1+1/t) & \cdots & \hat{y}(t+N_2/t)\end{bmatrix}^T$$

$$G=\begin{bmatrix} g_{N_1} & \cdots & g_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_{N_1+1} & \cdots & \cdots & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta u=\left[\Delta u(t/t) \quad \Delta u(t+1/t) \quad \cdots \quad \Delta u(t+N_u-1/t)\right]^T$$

$$p=\left[p_{N_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}\right]$$

Una gran ventaja de este método es que no requiere información previa sobre el proceso, con lo cual el proceso de identificación se simplifica. Además, permite modelar sistemas complejos como fase no mínima y sistemas con retardos. Sin embargo, esta representación sólo es válida para procesos estables.

Modelo función de transferencia

Este modelo está dado por la siguiente ecuación:

$$A(z^{-1})y(t)=B(z^{-1})u(t)+n(t)$$

$$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1})=b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_{nb}z^{-nb}$$

Para calcular la predicción, se considera un modelo ARIMAX:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-d) + n(t) = B(z^{-1})u(t-d) + \frac{w(t)}{\Delta}$$

$$y_t = \frac{B}{A}u_{t-d} + \frac{w_t}{A\Delta}$$

$$y_{t+j} = \frac{B}{A}u_{t-d+j} + \frac{w_{t+j}}{A\Delta}$$

donde

$$\frac{1}{A\Delta} = \underbrace{E_j}_{\text{Cuociente}} + \underbrace{\frac{F_j}{A\Delta}z^{-j}}_{\text{Resto}} \qquad \text{Ecuación diofántica}$$

(F_j y G_j notación en ARMAX)

La división $\frac{1}{A\Delta}$ se realiza hasta que E_j sea un polinomio de grado $j-1$, de modo que $E_j w_{t+j}$ tenga los valores futuros de w_t, es decir, $w_{t+1}, w_{t+2}, \ldots, w_{t+j}$

Además,

$$A\Delta = 1 - z^{-1} + a_1 z^{-1} - a_1 z^{-2} + \cdots$$

entonces $A\Delta$ es mónico y por ende E_j es mónico.

Por lo tanto,

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} + \underbrace{E_j w_{t+j}}_{(w_{t+1}, w_{t+2}, \ldots)} + \underbrace{\frac{F_j}{A\Delta} w_t}_{(w_t, w_{t-1}, \ldots)} \qquad (\#)$$

Para la determinación de w_t, w_{t-1}, ..., se utiliza el modelo ARIMAX, es decir

$$A y_t = B u_{t-d} + \frac{w_t}{\Delta}$$

$$w_t = A\Delta y_t - B\Delta u_{t-d}$$

Entonces, reemplazando w_t en la ecuación (#), se obtiene:

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + \frac{F_j}{A\Delta} A\Delta y_t - \frac{F_j}{A\Delta} B\Delta u_{t-d}$$

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} + F_j y_t - F_j \frac{B}{A} u_{t-d} + E_j w_{t+j} \qquad (j \geq 1)$$

F_j es de grado n-1 (n orden del sistema) considerando que E_j tiene grado j-1 por hipótesis.

A continuación,

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t - F_j \frac{B}{A} \underbrace{u_{t-d+j} z^{-j}}_{u_{t-d}}$$

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} \left[1 - F_j z^{-j}\right] + E_j w_{t+j} + F_j y_t$$

donde según la ecuación diofántica

$$F_j z^{-j} = 1 - E_j A\Delta$$

Entonces,

$$y_{t+j} = \frac{B}{A} u_{t-d+j} E_j \Delta A + E_j w_{t+j} + F_j y_t$$

$$y_{t+j} = BE_j \Delta u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t$$

Se define $G_j \cong BE_j$

$$y_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t$$

Por lo tanto, la predicción a j pasos de "y" está dada por:

$$\boxed{E[y_{t+j} / t] \equiv \hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t} \qquad (*)$$

pues $E_j w_{t+j}$ genera sólo valores futuros de ruido blanco (w_{t+1}, w_{t+2}, w_{t+3}, ...).

G_j representa los j primeros términos de la respuesta escalón, entonces $g_{ji} = g_i$ para i = 0, 1, 2, ... < j. Es decir,

$$
\begin{aligned}
g_{j0} &= g_{10} = \cdots = g_{k0} = \cdots = g_0 \\
&\vdots \\
g_{ji} &= g_{ji} = \cdots = g_{ki} = \cdots = g_i
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene

$$
\begin{aligned}
G_1 &= g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots + g_{n_b} z^{-n_b} \\
G_2 &= g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots + g_{n_b+1} z^{-(n_b+1)} \\
G_3 &= g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots + g_{n_b+2} z^{-(n_b+2)}
\end{aligned}
$$

$$
G_j = g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots + g_{n_b+j-1} z^{-(n_b+j-1)}
$$

Por otra parte,

$$
\hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t
$$

y si d = 1, N_1 = 1 y N_2 = N, se tiene

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{t+1} &= G_1 \Delta u_t + F_1 y_t \\
\hat{y}_{t+2} &= G_2 \Delta u_{t+1} + F_2 y_t \\
&\vdots \\
\hat{y}_{t+N} &= G_N \Delta u_{t-1+N} + F_N y_t
\end{aligned}
$$

A continuación, se agrupan los términos conocidos hasta “t” en el vector f $\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\}$, es decir

$$
\begin{aligned}
f_{t+1} &= \left[G_1(z^{-1}) - g_0\right]\Delta u_t + F_1 y_t \\
f_{t+2} &= \left[G_2(z^{-1}) - g_1 z^{-1} - g_0\right]\Delta u_{t+1} + F_2 y_t \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Entonces, la expresión (*) se puede expresar de manera vectorial como

$$
\hat{y} = G\tilde{u} + f
$$

donde

$\hat{y} \equiv \left[\hat{y}_{t+}, \hat{y}_{t+2}, \ldots, \hat{y}_{t+N}\right]$ son las predicciones desde el horizonte de predicción $N_1 = 1$ hasta $N_2 = N$.

$$
G = \begin{bmatrix}
g_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
g_1 & g_0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \\
& & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & & g_0
\end{bmatrix}_{N\times N}
$$

$\tilde{u} \equiv \left[\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+2}, \ldots., \Delta u_{t+N-1}\right]^T$ son las acciones de control futuras.

Por lo tanto, $G\tilde{u}$ contiene términos desconocidos por determinar $\{\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+N-1}\}$ y f agrupa los términos conocidos $\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\}$

Está representación es también válida para procesos inestables.

FUNCIÓN OBJETIVO

Los diferentes algoritmos de control predictivo utilizan diferentes funciones objetivo o de costo para la obtención de la ley de control.

En primer lugar se considera la función objetivo dada por:

$$J = \left[w(t+1) - \hat{y}(t+1/t)\right]^2$$

donde w(t+1) es la referencia o salida deseada en el instante t+1 y $\hat{y}(t+1/t)$ es la salida predicha en el instante t+1.

Nótese que utilizando esta función objetivo y un modelo ARIX, se obtiene un controlador de varianza mínima.

Para reducir variaciones en la variable manipulada o sobreactuaciones se puede utilizar la siguiente función objetivo, que además incluye acción integral.

$$J = \left[w(t+1) - \hat{y}(t+1/t)\right]^2 + \lambda\left[\Delta u(t)\right]^2$$

A continuación, para incluir algunos sistemas de fase no mínima y sistemas inestables se utiliza la siguiente función objetivo que incluye horizontes de predicción y control mayores:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)\left[w(t+j) - \hat{y}(t+j/t)\right]^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \lambda(i)\left[\Delta u(t+i-1)\right]^2$$

donde $\delta(j)$ y $\lambda(j)$ son coeficientes que ponderan el comportamiento futuro,

$\hat{y}(t+j/t)$ es la salida predicha en el instante t+j,

$w(t+j)$ representa la trayectoria de referencia deseada,

N_1 y N_2 son los horizontes mínimo y máximo de predicción,

N_u es el horizonte de control

OBTENCIÓN DE LA LEY DE CONTROL

Para obtener los valores u(t+j/t) es necesario minimizar la función de objetivo planteada anteriormente. Para ello se calculan los valores de las salidas predichas $\hat{y}(t+j/t)$ en función de los valores pasados de las entradas y salidas, y de las señales de control futuras, haciendo uso de un modelo de predicción y luego se sustituyen estos valores en la función objetivo. La minimización de esta expresión conduce a los valores buscados.

Además se ha encontrado que una estructuración de la ley de control produce una mejora en la robustez del sistema. Esta estructura de la ley de control se basa en el uso del concepto de horizonte de control (N_u), que consiste en considerar que tras un cierto intervalo $N_u < N_2$ no hay variación en las señales de control propuestas, es decir:

$$\Delta u(t+j-1) = 0$$

para $j > N_u$.