CONTROL PREDICTIVO CON RESTRICCIONES

En la práctica, se requiere mantener las variables del proceso en rangos que aseguren el buen comportamiento de los equipos y evitar situaciones críticas. Por ejemplo, los actuadores tienen restricciones de límite y velocidad.

Además, los puntos de operación del proceso están determinados por objetivos económicos, que usualmente llevan al proceso a operar cerca de las restricciones.

Los sistemas de control, en especial, los sistemas de control predictivo se anticipan a estas restricciones y corregir las acciones de control.

TIPOS DE RESTRICCIONES

Restricciones de rango en las variables manipuladas

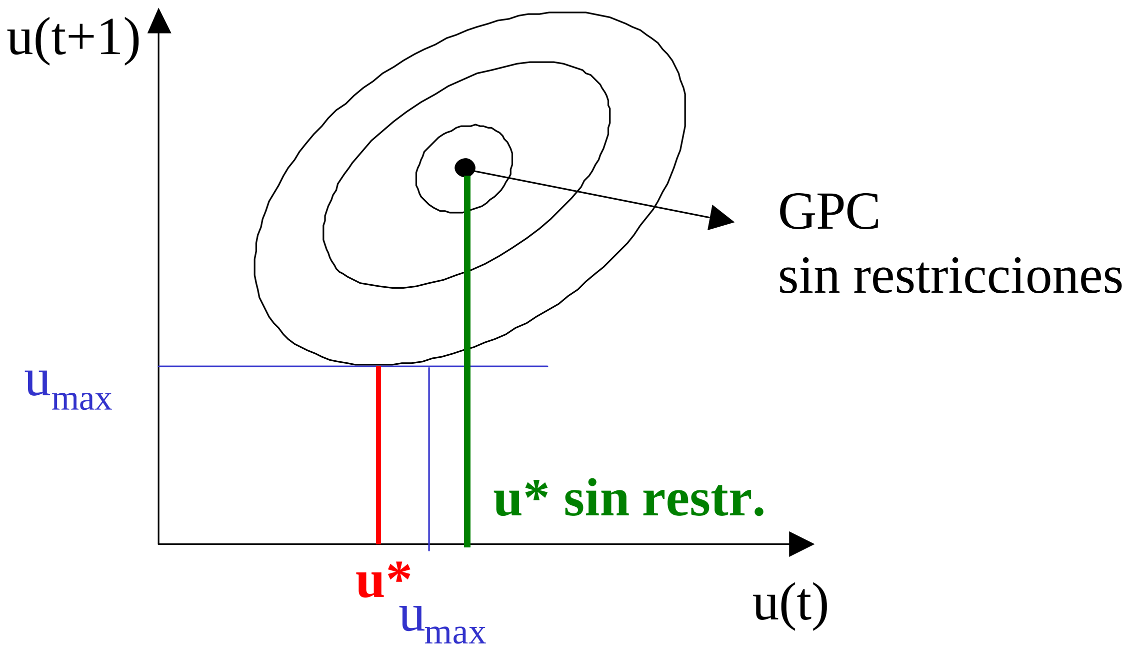
$$u_{min} \leq u(t+i-1) \leq u_{máx} \qquad i = 1, \ldots, N_u.$$

En general, se pueden saturar las variables manipuladas pero la solución obtenida no es óptima con respecto a la función objetivo predictiva.

Ejemplo: Control predictivo $N_u = 2$

$$u(t) < u_{máx}$$

$$u(t+1) < u_{máx}$$



En forma matricial, la restricción de rango en las variables manipuladas está dada por:

$$u_{min}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}u(t)\\u(t+1)\\\vdots\\u(t+N_u+1)\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u_{max}$$

$$u_{min}\mathbf{1}\le \mathrm{u}\le\mathbf{1}u_{max}$$

o bien en función de $\Delta u(t)$

$$\left[u_{min} - u(t-1)\right]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\1 & 1 & & \\\vdots & & \ddots & \\1 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\left[u_{max} - u(t-1)\right]$$

$$\left[u_{min} - u(t-1)\right]\mathbf{1} \le T\Delta u \le \mathbf{1}\left[u_{max} - u(t-1)\right]$$

con $\Delta u = \left[\Delta u(t), \Delta u(t+1), \ldots, \Delta u(t+N_u+1)\right]^T$

<u>Restricciones de variación de las variables manipuladas</u>

Los actuadores generalmente no responden con una rapidez adecuada, por lo cual es usual que se establezcan restricciones sobre las variaciones de las variables manipuladas.

$$\Delta u_{min} \le u(t+i-1) \le \Delta u_{máx} \qquad \text{con } i = 1,\ldots,N_u.$$

con $\Delta u_{min}, \Delta u_{máx}$ límites mínimo y máximo para las variaciones de las acciones de control.

Matricialmente, se tiene

$$\Delta u_{min}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & & \vdots\\\vdots & & \ddots & 0\\0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\Delta u \le \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\Delta u_{máx}$$

$$\Delta u_{min}\mathbf{1} \le \mathbf{I}\Delta u \le \mathbf{1}\Delta u_{máx}$$

Restricciones de rango en las variables controladas

En muchos procesos productivos, por problemas de seguridad o costos, se debe limitar las variables controladas a rangos de operación establecidos.

$$y_{min} \le \hat{y}(t+j) \le y_{máx} \qquad j = 1, \ldots, N_y.$$

Utilizando el predictor del GPC, se tiene:

$$\hat{y} = G\Delta u + f$$

con $\Delta u = \left[\Delta u(t), \Delta u(t+1), \ldots, \Delta u(t+N_u+1)\right]^T$

$$\hat{y} = \left[\hat{y}(t+1), \ldots, y(t+N_y)\right]^T$$

f agrupa los términos conocidos hasta t.

Matricialmente, las restricciones de rango están dadas por:

$$y_{min}\mathbf{1} \le G\Delta u + f \le \mathbf{1}y_{máx}$$

$$y_{\min}\mathbf{1} - f \leq G\Delta u \leq \mathbf{1}y_{\text{máx}} - f$$

Restricciones de variación en las variables controladas

$$\Delta y_{\min} \leq \Delta\hat{y}(t+j) \leq \Delta y_{\text{máx}} \qquad j = 1, \ldots, N_y.$$

Matricialmente, expresando estas restricciones en función de Δu, se tiene:

$$\Delta\hat{y} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{y}(t+1) \\ \vdots \\ \\ \Delta\hat{y}(t+N_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) - y(t) \\ \vdots \\ \\ \hat{y}(t+N_y) - \hat{y}(t+N_y-1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{y}(t+1) \\ \vdots \\ \\ \Delta\hat{y}(t+N_y) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\Delta\hat{y} = \mathbf{D}\begin{bmatrix} \Delta\hat{y}(t+1) \\ \vdots \\ \\ \Delta\hat{y}(t+N_y) \end{bmatrix} - \mathbf{1_0}\,y(t)$$

$$\hat{y} = G\Delta u + f$$

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

$$\Delta\hat{y} = \mathbf{D}G\Delta u + \mathbf{D}f - \mathbf{1_0}\, y(t)$$

Entonces,

$$\Delta y_{min} - \mathbf{D}f + \mathbf{1_0}\, y(t) \leq \mathbf{D}G\Delta u \leq \Delta y_{máx} - \mathbf{D}f + \mathbf{1_0}\, y(t)$$

$$\left(A\Delta u \leq b\right)$$

<u>Restricciones para asegurar el comportamiento monotónico</u>

Algunos sistemas de control presentan oscilaciones en las variables controladas antes de alcanzar una condición de régimen. En general, estas oscilaciones no son deseables, pues entre otras razones pueden dar origen a perturbaciones sobre otros procesos.

Para evitar el comportamiento monotónico y en caso que $y(t) \neq w(t)$, se tiene:

$$\hat{y}(t+j) \leq \hat{y}(t+j-1) \qquad \text{si } y(t) < w(t)$$

$$\hat{y}(t+j) \geq \hat{y}(t+j-1) \qquad \text{si } y(t) > w(t)$$

Matricialmente, se tiene:

$$G\Delta u + f \leq \begin{bmatrix} 0 \\ G' \end{bmatrix} \Delta u + \begin{bmatrix} y(t) \\ f' \end{bmatrix} \qquad \text{si } y(t) < w(t)$$

$$G\Delta u + f \geq \begin{bmatrix} 0 \\ G' \end{bmatrix} \Delta u + \begin{bmatrix} y(t) \\ f' \end{bmatrix} \quad \text{si } y(t) > w(t)$$

con G’ se compone de las primeras N-1 filas de G y f’ se compone de las primeras N-1 componentes de f.

Restricciones para evitar comportamiento de fase no mínima

Existen procesos que presentan un comportamiento de fase no minima, es decir, cuando son excitados responden inicialmente en sentido inverso a como lo hacen finalmente.

Para evitar este comportamiento, que en ciertos procesos es muy perjudicial, se incorporan las siguientes restricciones cuando $y(t) \neq w(t)$.

$$\hat{y}(t+j) \leq y(t) \qquad \text{si } y(t) > w(t)$$

$$\hat{y}(t+j) \geq y(t) \qquad \text{si } y(t) < w(t)$$

Matricialmente,

$$G\Delta u + f \leq \mathbf{1} y(t) \qquad \text{si } y(t) > w(t)$$

$$G\Delta u + f \geq \mathbf{1} y(t) \qquad \text{si } y(t) < w(t)$$

CONDICIONES: CONTROL PREDICTIVO CON RESTRICCIONES

1.- Si no existen restricciones o si éstas no se consideran, la minimización de la función objetivo genera una solución analítica.

2.- Si se consideran restricciones, la solución, en general, se obtiene utilizando un algoritmo numérico de optimización con restricciones. Para esta clase de problemas, en que la función objetivo es cuadrática, se cumple:

- Para que exista solución al problema sin restricciones, la función objetivo debe ser convexa.
- Para que exista solución al problema de optimización con restricciones, debe haber al menos un valor para el cual las variables de optimización cumplan todas las restricciones impuestas.
- Para asegurar la existencia de una solución única, el espacio de restricciones debe ser convexo

Cuando se incorporan restricciones lineales, el problema de optimización para el GPC queda definido por:

$$\text{Min } J = (G\Delta u + f - r)^T (G\Delta u + f - r) + \lambda \Delta u^T \Delta u$$

s.a $\quad A\Delta u \leq b$

con A, b determinados de acuerdo al tipo de restricción.

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

EJEMPLOS DE RESTRICIONES
EN CONTROL PREDICTIVO

Restricciones en las variables manipuladas

Modelo multivariable

$$A(z^{-1})y = B(z^{-1})u + \frac{e}{\Delta}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 1.8629z^{-1} + 0.8669z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 1.8695z^{-1} + 0.8737z^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.0420 - 0.038z^{-1} & 0.4758 - 0.4559z^{-1} \\ 0.0582 - 0.054z^{-1} & 0.1445 - 0.1361z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta u \le 0.2$$
$$-0.3 \le u_1 \le 0.3$$
$$-0.3 \le u_2 \le 0.2$$

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

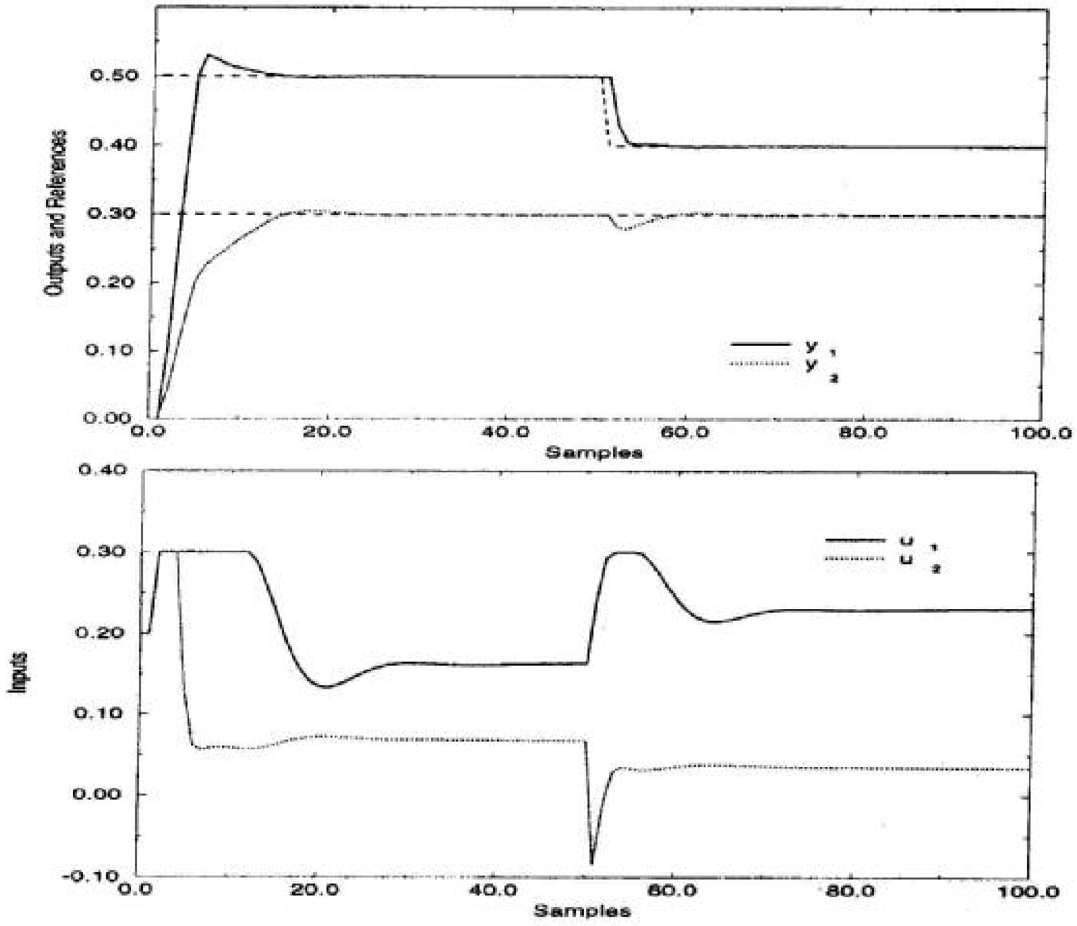


Figure 7.2: Constraints in the manipulated variables

Restricciones de comportamiento de fase no mínima

Modelo lineal

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

con T_s = 0.3 seg.

$$G(z^{-1}) = \frac{-1+1.2592z^{-1}}{1+0.7408z^{-1}}$$

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.

GPC sin restricciones $N_y = 30$, $N_u = 10$, $\lambda = 0.1$

GPC con restricción de fase no mínima

El sistema obtenido es más lento pero los peaks son eliminados.

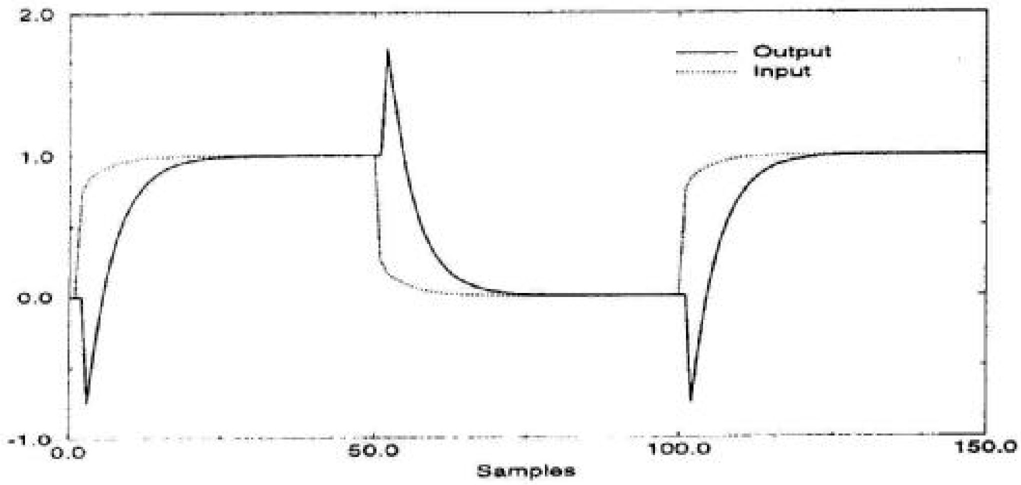


Figure 7.5: Non-minimum phase behaviour

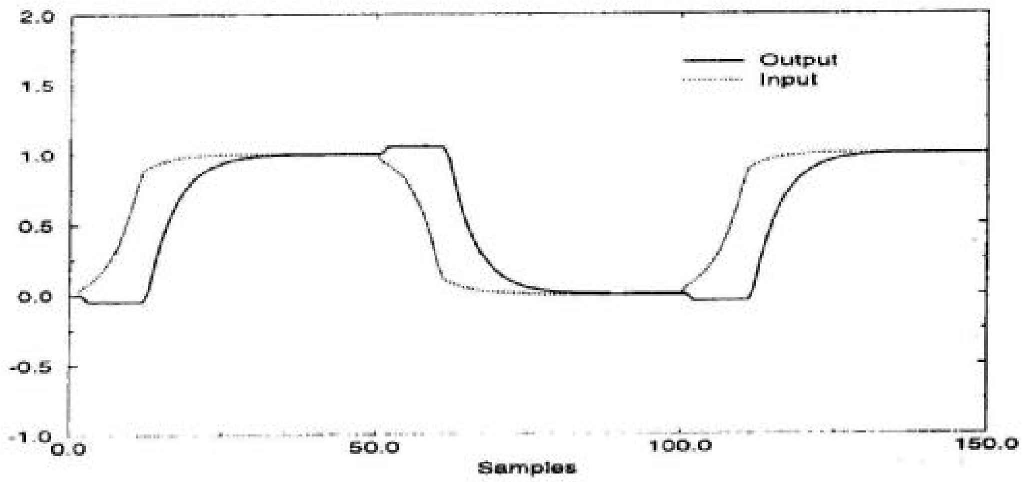


Figure 7.6: Non-minimum phase constraints

Doris Sáez (Marzo, 2002). Apuntes III: Fundamentos de Control Predictivo. Seminario AADECA-UBA, Buenos Aires.