KETERBAGIAN OLEH 3 DARI BILANGAN 3 −*PERFECT* DAN 4 −*PERFECT*

(Skripsi)

Oleh

PATRICIA FERNANDA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2020

ABSTRACT

DIVISIBILITY BY 3 OF EVEN MULTIPERFECT NUMBERS OF ABUNDANCY 3 AND 4

by

Patricia Fernanda

A number is flat if it can be written as a non-trivial power of 2 times an odd squarefree number. The power is the "exponent" and the number of odd primes the "length". Let N be flat and $4-$perfect with exponent a and length m. If $a \not\equiv 1 \pmod{12}$, then a is even. If a is even and $3 \nmid N$ then m is also even. If $a \not\equiv 1 \pmod{12}$ then $3|N$ and m is even. If N is flat and $3-$perfect and $3 \nmid N$, then if $a \not\equiv 1 \pmod{12}$, a is even. If $a \equiv 1 \pmod{12}$ then m is odd. We also give some conditions for the divisibility by 3 of an arbitrary even $4-$perfect number.

Key Words: *flat numbers, perfect numbers, multiperfect numbers.*

ABSTRAK

KETERBAGIAN OLEH 3 DARI BILANGAN $3-$*PERFECT* DAN $4-$*PERFECT*

oleh

Patricia Fernanda

Suatu bilangan dikatakan *flat* jika bilangan tersebut dapat dituliskan sebagai 2 berpangkat variabel yang nilainya tidak sama dengan 0 dikali dengan beberapa bilangan prima ganjil tidak berpangkat. Pangkat dari 2 disebut "eksponen" dan banyaknya bilangan prima ganjil disebut "*length*". Misalkan N bilangan *flat* $4-$*perfect* dengan eksponen a dan *length* m. Jika $a \not\equiv 1 \pmod{12}$, maka a genap. Jika a genap dan $3 \nmid N$ maka m juga genap. Jika $a \not\equiv 1 \pmod{12}$ maka $3|N$ dan m genap. Jika N bilangan *flat* dan $3-$*perfect* dan $3 \nmid N$, maka jika $a \not\equiv 1 \pmod{12}$, a genap. Jika $a \equiv 1 \pmod{12}$, maka m ganjil. Selain itu, diberikan beberapa syarat untuk keterbagian oleh 3 dari bilangan $4-$*perfect*.

Kata Kunci: *bilangan flat, bilangan perfect, bilangan* $k-$*perfect.*

KETERBAGIAN OLEH 3 DARI BILANGAN 3 −*PERFECT* DAN 4 −*PERFECT*

Oleh

PATRICIA FERNANDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2020

Judul Skripsi	:	**KETERBAGIAN OLEH 3 DARI BILANGAN 3 −*PERFECT* DAN 4 −*PERFECT***
Nama Mahasiswa	:	Patricia Fernanda
Nomor Pokok Mahasiswa	:	1617031115
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP. 19730314 200012 1 002

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 19840627 200604 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Amanto, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Notiragayu, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **8 Mei 2020**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **Patricia Fernanda**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1617031115**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Keterbagian oleh 3 dari Bilangan 3-*Perfect* dan 4-*Perfect***

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 8 Mei 2020

Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL TGL. 20 F1E4FAHF428222648 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Patricia Fernanda

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Patricia Fernanda, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Jakarta pada tanggal 7 bulan Juli tahun 1998 oleh pasangan Bapak M. Rudiyanto dan Ibu Frecillia.

Menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) di TK Don Bos Co II tahun 2003-2004, pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 2 Rawa Laut pada tahun 2004-2010, pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 25 Bandar Lampung pada tahun 2010-2013, dan pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 4 Bandar Lampung pada tahun 2013-2016.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) pada tahun 2016. Kemudian pada tahun 2017, penulis terdaftar sebagai anggota Biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA).

Pada awal tahun 2019, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Adirejo, Kecamatan Jabung, Kabupaten Lampung Timur. Kemudian pada pertengahan tahun 2019, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT Pertamina Hulu Energi *Offshore Southeast Sumatra* (PHE OSES) Jakarta Selatan.

KATA INSPIRASI

"Berdoalah kepada-Ku, niscaya akan Aku perkenankan bagimu"
(Q.S Ghafir: 60)

"Berdoalah kepada Tuhanmu dengan berendah diri dan suara yang lembut. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas."
(Q.S Al-A'raf: 55)

"Dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap."
(Q.S Al-Insyirah: 8)

"Lakukan apapun yang membuatmu bahagia."
(Patricia Fernanda)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin

Dengan kerendahan hati dan rasa bersyukur kepada Allah SWT

Kupersembahkan karya yang sederhana ini untuk:

Orang tua tercinta, adik serta keluarga besar saya, terima kasih selalu mendo'akan dan mendukung setiap langkah yang saya pilih. Terima kasih yang sebesar-besarnya atas cinta, kasih sayang, waktu, pengorbanan, keringat dan segala yang telah kalian berikan.

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Para sahabat yang telah mendukung, memberikan semangat dan berbagi kebahagiaan selama di bangku kuliah ini.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Keterbagian oleh 3 dari Bilangan $3-Perfect$ dan $4-Perfect$". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada:

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I sekaligus Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang selalu memberikan arahan, bimbingan, saran, dukungan serta kesediaan waktu kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Notiragayu, M.Si. selaku Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik.
4. Ibu Prof. Dr. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeristas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Papa M. Rudiyanto, Mama Frecillia, Adik Thomas Graczilio serta seluruh keluarga besar tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan kepada penulis sehingga selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada.
8. Para kakak tingkat yang telah terlibat dalam pembuatan skripsi ini.
9. Para sahabat dari Sambat, BENG, Miss Me dan Subgeng yang telah memberikan dukungan, pelajaran hidup dan kenangan indah kepada penulis.
10. Teman seperbimbingan dan teman-teman angkatan 2016 jurusan matematika yang sama-sama telah berjuang serta Almamater tercinta Universitas Lampung.
11. PT Pertamina Hulu Energi Offshore Southeast Sumatera (PHE OSES) yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kerja kepada penulis.

Semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua. Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 8 Mei 2020

Penulis,

Patricia Fernanda

DAFTAR ISI

Halaman

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR SIMBOL

$a\|b$	: a membagi habis b atau b habis dibagi a
$\mathbb{Z}$	: himpunan bilangan bulat
k $-perfect$	: bilangan *perfect* kelipatan k
$>$	: lebih besar dari
p	: bilangan prima
$\equiv$	: kongruen
$\not\equiv$	: tidak kongruen
mod	: modulo
$<$	: kurang dari
$\leq$	: kurang dari sama dengan
$\sigma(N)$	: jumlah faktor/pembagi dari N
$\geq$	: lebih besar sama dengan
N	: bilangan *flat*
c_i	: bilangan 3 $-perfect$, $i = 1, 2, \cdots$
d_j	: bilangan 4 $-perfect$, $j = 1, 2, \cdots$

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran pengambilan keputusan dan sebagai bahan pertimbangan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Pada Abad ke-19 dikembangkan definisi bilangan asli menggunakan teori himpunan. Dengan definisi ini, dirasakan lebih mudah memasukkan nol (berkorespondensi dengan himpunan kosong) sebagai bilangan asli, dan sekarang menjadi konvensi dalam bidang teori himpunan, logika dan ilmu komputer. Matematikawan lain, seperti dalam bidang teori bilangan, bertahan pada tradisi lama dan tetap menjadikan 1 sebagai bilangan asli pertama.

Teori bilangan adalah salah satu cabang tertua dari matematika. Secara tradisional, teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan memuat berbagai masalah terbuka yang dapat mudah dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Dalam teori bilangan dasar, bilangan bulat dipelajari tanpa menggunakan teknik dari area matematika lainnya.

Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal misalnya $9, 21, 8765, -34, 0$ (Burton, 1976).

Keterbagian adalah sudut pandang matematika yang mempelajari suatu bilangan yang habis dibagi bilangan lain. Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Dalam matematika, konsep bilangan selama bertahun-tahun lamanya telah diperluas untuk meliputi bilangan nol, bilangan negatif, bilangan rasional, bilangan irasional, dan bilangan kompleks. Bilangan adalah suatu ide yang bersifat abstrak yang akan memberikan keterangan mengenai banyaknya suatu kumpulan benda. Lambang bilangan biasa dinotasikan dalam bentuk tulisan sebagai angka (Spiegel, 1983).

Jika membicarakan tentang keterbagian maka tidak terlepas dari pembagi dari suatu bilangan. Apabila jumlah pembagi dari suatu bilangan itu sama dengan bilangan tersebut maka dikatakan bilangan *perfect*. Selanjutnya, bilangan tersebut dikatakan k −*perfect* apabila jumlah pembagi dari bilangan tersebut sama dengan kelipatan k dari bilangan tersebut dengan k lebih besar dari 2.

Dari pemikiran yang telah diuraikan sebelumnya, penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang keterbagian oleh 3 dari bilangan 3-*perfect* dan 4-*perfect*.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah membuktikan tentang keterbagian oleh 3 dari bilangan 3-*perfect* dan 4-*perfect*.

1.3 Manfaat penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. memperluas cakrawala pada teori bilangan,
2. menambah wawasan dalam pengetahuan tentang keterbagian, faktor persekutuan terbesar (FPB), bilangan prima, modulo, bilangan *flat*, bilangan *perfect*, dan bilangan *multiperfect*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini dibahas beberapa konsep dasar meliputi keterbagian, faktor persekutuan terbesar (FPB), bilangan prima, modulo, bilangan *flat*, bilangan *perfect*, dan bilangan *multiperfect* yang akan digunakan dalam pembahasan hasil penelitian.

2.1 Keterbagian

Keterbagian merupakan konsep penting dalam matematika, khususnya teori bilangan. Dalam keterbagian akan dijelaskan definisi dan teorema keterbagian.

Definisi 2.1.1 (Burton, 1998)

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sehingga $b = k \cdot a$. Jika a tidak membagi habis b maka ditulis $a \nmid b$.

Contoh 2.1.1

Bilangan 27 habis dibagi 3 karena terdapat bilangan bulat $k = 9$ sehingga $27 = k \cdot 3$.

Istilah lain untuk $a|b$ adalah a faktor dari b, a pembagi b atau b kelipatan dari a. Bila a pembagi b maka $-a$ juga pembagi b, sehingga pembagi suatu bilangan selalu terjadi berpasangan. Jadi, dalam menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat cukup ditentukan faktor-faktor positifnya saja, kemudian tinggal menggabungkan faktor negatifnya. Fakta sederhana yang diturunkan langsung dari Definisi 2.1.1 adalah sebagai berikut:

a. $a|0$,

b. $1|a$,

c. dan $a|a$, untuk $a \neq 0$.

Fakta $a|0$ dapat dijelaskan bahwa bilangan 0 selalu habis dibagi oleh bilangan apapun yang tidak nol. Fakta $1|a$ mengatakan bahwa 1 merupakan faktor atau pembagi dari bilangan apapun termasuk bilangan 0. Fakta $a|a$ menyatakan bahwa bilangan tidak nol selalu habis membagi dirinya sendiri dengan hasil baginya adalah 1.

Berdasarkan pengertian keterbagian bilangan pada Definisi 2.1.1, berikut ini akan diberikan teorema tentang keterbagian.

Teorema 2.1.1

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku pernyataan berikut:

1. $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ $atau$ $a = -1$.

2. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.

3. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.

4. $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a = b$ $atau$ $a = -b$.

5. Jika $a|b$ *dan* $b \neq 0,$ *maka* $|a| < |b|$.

6. Jika $a|b$ *dan* $a|c$, *maka* $a|(bx + cy)$ *untuk sebarang bilangan bulat* x *dan* y.

(Sukirman, 1997).

Bukti.

1. Jika $a = 1$ atau $a = -1$, maka jelas bahwa $a|1$, sesuai penjelasan sebelumnya. Sebaliknya, diketahui $a|1$ berarti ada $k \in \mathbb{Z}$ sehinga $1 = ka$. Persamaan ini hanya dipenuhi oleh dua kemungkinan berikut: $k = 1$, $a = 1$ atau $k = -1, a = -1$. Jadi berlaku jika $a|1$ maka $a = 1$ atau $a = -1$. Jadi terbukti $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$.

2. Diketahui $a|b$ dan $c|d$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = k_1 a$ dan $d = k_2 c$. Dengan mengalikan kedua persamaan tersebut diperoleh :

$$bd = (k_1 k_2)ac,$$

yaitu $ac|bd$.

3. Diketahui $a|b$ dan $b|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$b = k_1 a \tag{2.1}$$

dan

$$c = k_2 b \tag{2.2}$$

Persamaan (2.1) disubstitusikan ke Persamaan (2.2), sehingga diperoleh $c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a = ka$ dengan $k = k_1 \cdot k_2$. Jadi, $a|c$.

4. Diketahui

$$a = k_1 b \tag{2.3}$$

dan

$$b = k_2 a \tag{2.4}$$

Persamaan (2.3) dikalikan dengan Persamaan (2.4), diperoleh $ab = (k_1 k_2)(ab)$. Diperoleh $k_1 k_2 = 1$, yakni $k_1 = k_2 = 1$ atau $k_1 = k_2 = -1$, jadi terbukti $a = b$ atau $a = -b$.

5. Diberikan $b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Diambil nilai mutlaknya $|b| = |ac| = |a||c|$. Karena $b \neq 0$ maka $|c| \geq 1$. Sehingga diperoleh $|b| = |a||c| \geq |a|$.
6. Diketahui $a|b$ dan $a|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = k_1 a$ dan $c = k_2 a$. Untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$bx + cy = k_1 ax + k_2 ay = (k_1 x + k_2 y)a$$

yang berarti $a|(bx + cy)$.

Pernyataan terakhir Teorema 2.1.1 berlaku juga untuk berhingga banyak bilangan yang dibagi oleh a, yaitu jika $a|b_k, k = 1, \cdots, n$ maka:

$$a|(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)$$

untuk setiap bilangan bulat $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

2.2 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua bilangan adalah bilangan bulat positif terbesar yang membagi habis kedua bilangan itu. Berikut diberikan definisi mengenai FPB.

Definisi 2.2.1 (Sukirman, 1997)

Misalkan a atau b dua bilangan bulat dengan minimal salah satunya tidak nol. Faktor persekutuan terbesar (FPB) atau *greatest common divisor* (gcd) dari a dan b adalah bilangan bulat d yang memenuhi

(i) $d|a$ dan $d|b$, dan

(ii) jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

Dari Definisi 2.2.1, syarat (i) menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan dari a dan b. Sedangkan syarat (ii) menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan terbesar. Selanjutnya, jika d faktor persekutuan terbesar dari a dan b akan ditulis $d = \text{FPB}(a, b)$.

Contoh 2.2.1

Akan ditentukan FPB dari $a = 12$ dan $b = 42$. Karena $12 = 2^2 \cdot 3$ dan $42 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, menyebabkan $\text{FPB}(12{,}42) = 2 \cdot 3 = 6$. Oleh karena itu, $\text{FPB}(12{,}42) = 6$.

Berikut diberikan teorema tentang algoritma pembagian.

Teorema 2.2.1

Jika a dan b merupakan bilangan bulat a, $b > 0$, $a \neq 0$ maka ada tepat satu pasang bilangan-bilangan q dan r sehingga: $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < a$ (Graham, 1975).

Algoritma pembagian adalah suatu cara atau prosedur yang dapat dipakai untuk mendapatkan faktor persekutuan terbesar (FPB).

Berdasarkan Definisi 2.2.1 berikut ini akan diberikan teorema mengenai kombinasi linear dari dua bilangan.

Teorema 2.2.2

Jika a dan b dua bilangan bulat yang keduanya tak nol, maka terdapat bilangan bulat x dan y sehingga

$$\text{FPB}(a,b) = ax + by \tag{2.5}$$

(Sukirman, 1997).

Persamaan (2.5) disebut dengan identitas *Benzout*. Sebelum membuktikan, perhatikan ilustrasi berikut,

$$\text{FPB}(-12,30) = 6 = (-12)2 + 30(-1)$$

$$\text{FPB}(-8,-36) = 4 = (-8)4 + (-36)(-1)$$

Identitas *Benzout* menyatakan bahwa $d = FPB(a,b)$ dapat disajikan dalam bentuk kombinasi linear atas a dan b. Ekspresi ruas kanan pada Persamaan (2.5) disebut kombinasi linear dari a dan b. Pada Teorema 2.2.2 keberadaan x dan y tidak harus tunggal.

Bukti.

Bentuk S himpunan semua kombinasi linear positif dari a dan b sebagai berikut

$$S = \{au + bv | au + bv \geq 1, u, v \in \mathbb{Z}\}$$

Perhatikan bahwa, jika $a \neq 0$ maka $|a| = au + b \cdot 0 \in S$, yaitu dengan mengambil $u = 1$ bila a positif atau $u = -1$ bila a negatif. Jadi, himpunan S tak kosong. Menurut sifat urutan, S terjamin memiliki anggota terkecil, katakan saja d. Selanjutnya, dibuktikan $d = \text{FPB}(a,b)$. Karena $d \in S$, terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga $d = ax + by$. Dengan menerapkan algoritma pembagian pada a dan d maka terdapat q dan r sehingga $a = qd + r$, dengan $0 \leq r < d$. Selanjutnya, akan ditunjukkan r = 0, sehingga diperoleh $d|a$. Jika $r > 0$, maka dapat ditulis

$$0 < r = a - qd = a - q(ax + by) = a(1 - qx)b(-qy) \in S.$$

Faktanya $r \in S$, sedangkan syaratnya $r < d$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan bahwa d elemen terkecil S, sehingga disimpulkan $r = 0$ atau $d|a$. Argumen yang sama dapat dipakai dengan menerapkan algoritma pembagian pada b dan d untuk menunjukkan $d|b$. Jadi, terbukti bahwa d adalah faktor persekutuan dari a dan b. Selanjutnya, akan ditunjukkan faktor persekutuan ini adalah yang terbesar. Misalkan c adalah bilangan bulat positif dengan $c|a$ dan $c|b$ maka $c|ax + b$ yaitu $c|d$. Jadi $c \leq d$, karena tidak mungkin pembagi lebih besar dari bilangan yang dibagi. Terbukti bahwa $d = \text{FPB}(a, b)$. ■

2.3 Bilangan Prima

Dalam matematika, bilangan prima adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari angka 1, yang faktor pembaginya adalah 1 dan bilangan itu sendiri.

Definisi 2.3.1 (Burton, 1998)

Sebuah bilangan bulat $p > 1$ disebut bilangan prima, jika dan hanya jika p habis dibagi dengan 1 dan bilangan p sendiri.

Contoh 2.3.1

Bilangan 299 adalah bilangan prima karena bilangan yang membagi habis 299 hanya 1 dan dirinya sendiri.

Berikut didefinisikan dua bilangan yang relatif prima.

Definisi 2.3.2 (Burton, 1998)

Bilangan bulat a dan b dikatakan *coprima* atau *relatif prima* jika $\text{FPB}(a, b) = 1$.

Contoh 2.3.2

Diberikan $a = 29$ dan $b = 37$, akan ditunjukkan bahwa 29 dan 37 adalah relatif prima karena $29 = 1 \cdot 29$ dan $37 = 1 \cdot 37$, diperoleh $\text{FPB}(29{,}37) = 1$. Oleh karena itu, terbukti bahwa 29 dan 37 adalah relatif prima.

Berdasarkan pengertian relatif prima yang terdapat pada Definisi 2.3.2, akan diberikan teorema - teorema tentang relatif prima sebagai berikut.

Teorema 2.3.1

Bilangan a dan b relatif prima jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat x, y sehingga $ax + by = 1$ (Sukirman, 1997).

Bukti.

Karena a dan b relatif prima maka $\text{FPB}(a, b) = 1$. Identitas *Bezout* menjamin adanya bilangan bulat x, y sehingga $1 = ax + by$. Sebaliknya, misalkan ada bilangan bulat $ax + by = 1$. Akan dibuktikan $\text{FPB}(a, b) = d = 1$. Karena $d|a$ dan $d|b$ maka $d|(ax + by = 1)$, jadi $d|1$. Karena itu disimpulkan $d = 1$.

Teorema 2.3.2

Jika $\text{FPB}(a, b) = 1$, *maka berlaku pernyataan berikut:*

1. *Jika* $a|c$ *dan* $b|c$ *maka* $ab|c$.
2. *Jika* $a|bc$ *maka* $a|c$ *(Lemma Euclid).*

(Sukirman, 1997).

Bukti.

1. Diketahui $a|c$ dan $b|c$. Artinya terdapat $r, s \in \mathbb{Z}$ sehingga $c = a \cdot r = b \cdot s$. Berdasarkan hipotesis, $\text{FPB}(a, b) = 1$. Oleh karena itu dapat dituliskan $ax + by = 1$ untuk suatu bilangan bulat x dan y. Akibatnya

$$\begin{aligned} c = 1 \cdot c &= (ax + by) \cdot c \\ &= acx + bcy \\ &= a(bs)x + b(ar)y \\ &= ab(sx + ry) \end{aligned}$$

   Karena terdapat bilangan bulat $sx + ry$ sehingga $ab|c$. Terbukti bahwa, jika $a|c$ dan $b|c$ maka $ab|c$. ■

2. Diketahui $a|bc$, $\text{FPB}(a, b) = 1$. Oleh karena itu dapat dituliskan $ax + by = 1$ untuk suatu bilangan bulat x, y. Akibatnya

$$\begin{aligned} c = 1 \cdot c &= (ax + by) \cdot c \\ &= acx + bcy \end{aligned}$$

   Karena diketahui $a|bc$ dan faktanya $a|ac$ maka $a|(acx + bcy)$. Karena $c = acx + bcy$, terbukti $a|c$. ■

2.4 Modulo

Dasar penyelesaian persamaan bilangan *multiperfect* yang digunakan adalah dengan relasi kongruensi modulo m. Berikut ini diberikan definisi modulo.

Definisi 2.4.1 (Grillet, 2007)

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan $m > 0$, a dikatakan kongruen dengan b modulo m atau ditulis $a \equiv b \pmod{m}$ jika m habis membagi $a - b$. Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulo m, maka ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Kekongruenan $a \equiv b \pmod{m}$ dapat pula dituliskan dalam hubungan

$$a = b + km$$

dengan k adalah bilangan bulat.

Contoh 2.4.1

$17 \equiv 2 \pmod{5}$, karena $17 = 2 + 3 \cdot 5$.

Teorema 2.4.1

$a \equiv b \pmod{m}$ *jika dan hanya jika* a *dan* b *memiliki sisa pembagi yang sama yaitu* r, *dengan syarat* $0 \leq r < m$ *dan terbagi oleh* m (Stewart, 1952).

Bukti.

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $a = b + km$, dengan k adalah bilangan bulat. Jika $b = qm + r$, dengan syarat $0 \leq r < m$, maka $a = b + km = (q + k)m + r$, yang memiliki sisa pembagian yang sama dengan b. Sebaliknya, jika $a = Qm +$

r dan $b = qm + r$, dengan syarat $0 \leq r < m$ maka $a = b + (Q - q)m$, dimana $(Q - q)$ adalah bilangan bulat. Sehingga terbukti $a \equiv b \pmod{m}$. ■

2.5 Bilangan *Perfect*

Seorang matematikawan dari Abad ke-1, Nicomachus $(60 - 120\text{M})$, menemukan keempat pertama bilangan *perfect* yaitu 6, 28, 496, dan 8.128. Tiga bilangan selanjutnya adalah 33.550.336, 8.589.869.056 dan 137.438.691.328.

Sejalan dengan filosofi yang mengaitkan kualitas dengan bilangan, *Phytagoreans* disebut sebagai bilangan "*perfect*" dan dinyatakan dengan tepat pada definisi berikut.

Definisi 2.5.1 (Burton, 1998)

Bilangan bulat positif N dikatakan *perfect* jika dan hanya jika N sama dengan jumlah semua pembagi positifnya, tidak termasuk N itu sendiri.

Jumlah pembagi positif dari bilangan bulat N, masing-masing kurang dari N, dinotasikan dengan $\sigma(N) - N$. Dengan demikian, kondisi "N *perfect*" berarti $\sigma(N) - N = N$, atau ekuivalen, dengan

$$\sigma(N) = 2N.$$

Contoh 2.5.1

Diberikan $6 \in \mathbb{Z}^+$ dan $28 \in \mathbb{Z}^+$. Akan ditentukan apakah 6 dan 28 merupakan bilangan *perfect*.

Pembagi positif 6 adalah 1, 2 dan 3. Diperoleh, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 = 6$. Selanjutnya, pembagi positif 28 adalah 1, 2, 4, 7, 14, 28. Kemudian, $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Karena $\sigma(6) = 6$ dan $\sigma(28) = 28$, oleh karena itu 6 dan 28 merupakan bilangan *perfect*.

2.6 Bilangan *Multiperfect*

Berikut diberikan definisi tentang bilangan *multiperfect*.

Definisi 2.6.1 (Broughan & Zhou, 2010)

Dikatakan bilangan asli N dikatakan *multiperfect* kelipatan k atau ($k -$*perfect*) jika dan hanya jika $\sigma(N) = kN$, $k \geq 2$, dengan $\sigma(N)$ dinotasikan sebagai jumlah dari semua pembagi dari N. Bilangan *perfect* adalah bilangan *multiperfect* kelipatan 2.

Kemudian, akan diberikan definisi tentang bilangan *flat*.

Definisi 2.6.2 (Carmichael, 1907)

Bilangan N dikatakan *flat* jika *square free*, yaitu N dapat dituliskan dalam bentuk $N = 2^a \cdot p_1 \cdots p_m$ dengan $a \geq 0$, $m \geq 0$ dan $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$, p_i adalah bilangan prima ganjil. Jika N *flat*, maka nilai a disebut ekponen dan nilai m adalah *length* dari N.

Menurut Kishore (1977) & Hagis (1983), setiap bilangan *perfect* ganjil tidak dibagi habis oleh 3 harus memiliki setidaknya beda 11 faktor utama.

Sekarang perhatikan bilangan $3-$*perfect* genap berikut ini:

$$c_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120,$$

$$c_2 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672,$$

$$c_3 = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31 = 523.776,$$

$$c_4 = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 = 459.818.240,$$

$$c_5 = 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127 = 1.476.304.896,$$

$$c_6 = 2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151 = 51.001.180.160.$$

Selanjutnya, berikut diberikan beberapa bilangan $4-$*perfect*:

$$d_1 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 30.240,$$

$$d_2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 32.760,$$

$$d_3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 72 \cdot 13 \cdot 19 = 2.178.540,$$

$$d_4 = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 = 23.569.920,$$

$$d_5 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 52 \cdot 17 \cdot 31 = 45.532.800,$$

$$d_6 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 = 142.990.848,$$

$$d_7 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 = 1.379.454.720,$$

$$d_8 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 89 = 43.861.478.400,$$

$$d_9 = 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127 = 66.433.720.320,$$

$$d_{10} = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151 = 15.300.354.048.000.$$

Diketahui ada 36 contoh dari bilangan $4-$*perfect* dan semuanya genap, serta dapat dibagi oleh 3.

Contoh 2.6.1

Untuk $k > 2$, diperoleh $4|2^{k-1}$. Oleh karena itu bilangan yang dibentuk oleh dua digit terakhir dari 2^{k-1} dapat dibagi dengan 4. Jadi angka terakhir dari 2^{k-1} adalah 4, sementara 4 membagi dua digit terakhir. Berikut penjelasannya.

Bilangan modulo 100, berbagai kemungkinan adalah

$2^{k-1} \equiv 4, 24, 44, 64,$ atau 84

tetapi ini berarti bahwa

$2^k - 1 = 2 \cdot 2^{k-1} - 1 \equiv 7, 47, 87, 27,$ atau $67 \pmod{100}$

dengan

$N = 2^{k-1}(2^k - 1)$

$\quad \equiv 4 \cdot 7, 24 \cdot 47, 44 \cdot 87, 64 \cdot 27,$ atau $84 \cdot 67 \pmod{100}$

untuk memastikan bahwa masing-masing hasil kali di sisi kanan dari kongruensi terakhir adalah kongruen dengan 28 modulo 100.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil dan genap Tahun Akademik 2019/2020 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah studi literatur, dengan literatur utama adalah *Divisibility by 3 of Even Multiperfect Numbers of Abundancy 3 and 4* oleh Kevin A. Broughan dan Qizhi Zhou.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkaji tentang keterbagian, faktor persekutuan terbesar (FPB), bilangan prima, modulo, bilangan *flat*, bilangan *perfect*, dan bilangan *multiperfect*.
2. Membuktikan misalkan N *flat* dan $4-$*perfect* dengan eksponen a dan *length* m. Jika $a \not\equiv 1 \pmod{12}$, maka a genap. Jika a genap dan $3 \nmid N$ maka m juga genap. Jika $a \equiv 1 \pmod{12}$ maka $3|N$ dan m genap, dengan sebelumnya membuktikan beberapa Lemma sebagai berikut:
   a. Membuktikan bahwa jika $d, n \in \mathbb{Z}^+$ dan p bilangan prima, maka

$d+1|n+1$ jika dan hanya jika $\sigma(p^d)|\sigma(p^n)$.

b. Membuktikan bahwa jika a *flat* bilangan $4-$*perfect* dengan eksponen a, maka $a \not\equiv 3 \pmod 4$ dan $a \not\equiv 5 \pmod 6$.

c. Membuktikan bahwa jika N adalah *flat* bilangan $4-$*perfect* dengan eksponen a maka $a \not\equiv 9 \pmod{12}$.

d. Membuktikan bahwa jika N *flat*, $4-$*perfect* dengan eksponen a, $N = 2^a p_1 \cdots p_m$. Jika $a \equiv 1 \pmod{12}$ maka $3|N$, untuk $2 \le i \le m$, $p_i \equiv 1 \pmod 3$, m adalah genap.

e. Membuktikan bahwa jika N *flat* dan $4-$*perfect* dengan eksponen genap dan juga $3 \nmid N$, maka *length* N genap.

Misalkan N bilangan *flat* dan $3-$*perfect* dengan eksponen a dan *length* m dan dengan $3 \nmid N$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jika $a \not\equiv 1 \pmod{12}$ maka a genap. Jika $a \equiv 1 \pmod{12}$ maka m ganjil dan setiap prima ganjil pembagi N kongruen pada 1 modulo 3. Dengan sebelumnya membuktikan sebuah Lemma, bahwa jika N adalah *flat* $3-$*perfect* dengan eksponen ganjil dan $3 \nmid N$ maka setiap prima genap dari N adalah kongruen terhadap 1 $modulo$ 3.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Sifat keterbagian oleh 3 dari bilangan $3-$*perfect* adalah sebagai berikut:
   a. jika pada N bilangan *flat* terdapat bilangan prima 3 pada *length*,
   b. dan apabila pada N bilangan *flat* tidak terdapat terdapat bilangan prima 3 pada *length* m oleh karena itu, jika eksponen ganjil dan $3 \nmid N$, maka setiap prima ganjil dari N kongruen terhadap 1 $modulo$ 3 ekuivalen dengan kontraposisinya, yaitu jika m genap dan setiap prima ganjil pembagi N tidak kongruen pada 1 *modulo* 3, maka $a \not\equiv 1\ (mod\ 12)$.

2. Sifat keterbagian oleh 3 dari bilangan $4-$*perfect* adalah sebagai berikut:
   a. jika $a \not\equiv 1 \pmod{12}$, maka a genap ekuivalen dengan kontraposisinya, yaitu jika a ganjil, maka $a \equiv 1 \pmod{12}$,
   b. jika a genap dan $3 \nmid N$, maka m juga genap ekuivalen dengan kontraposisinya, yaitu jika m ganjil, maka a ganjil dan $3|N$.

5.2 Saran

Keterbagian oleh 3 dari bilangan $3-$*perfect* dan $4-$*perfect,* yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang tertarik meneliti bidang kombinatorika matematika terutama tentang teori bilangan.

DAFTAR PUSTAKA

Broughan, K.A. & Zhou, Q. 2010. Divisibility by 3 of Even Multiperfect Numbers of Abundancy 3 and 4. *Journal of Integer Sequences.* **13**(10.1.5): 1-10.

Burton, D.M. 1976. *The History of Mathematics: An Introduction. 7th Ed.* McGraw-Hill, New York.

Burton, D.M. 1998. *Elementary Number Theory*. Fourth Edition. University of New Hampshire, United State of Afrika.

Carmichael, R.D. 1907. Multiply Perfect Numbers of Four Different Primes. *Journal of Ann. Math.* **8**(4): 149–158.

Grillet, P.A. 2007. *Graduate Text In Mathematics*. Second Edition. Springer, New York.

Hagis, P. 1983. Sketch of a Proof That an Odd Perfect Number Relatively Prime To 3 Has At Least Eleven Prime Factors. *Journal of Math. Comp.* **40**(1): 399–404.

Kishore, M. 1977. Odd Perfect Numbers Not Divisible By 3 Are Divisible By At Least Ten Distinct Primes. *Journal of Math. Comp*. **31**(1): 274–279.

Sukirman, M.P. 1997. *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka, Jakarta.

Spiegel, M.R. 1983. *Matematika Lanjutan*. Erlangga, Jakarta.

Stewart, B.M. 1952. *Theory of Numbers*. The Macmillan Company, New York.