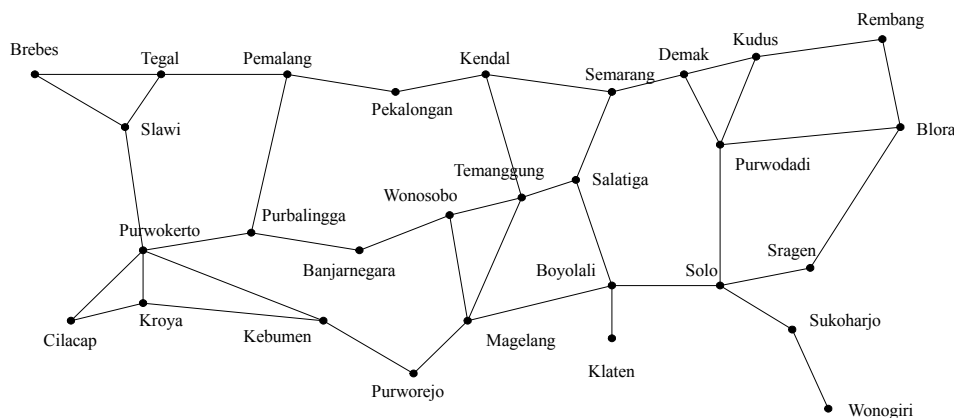
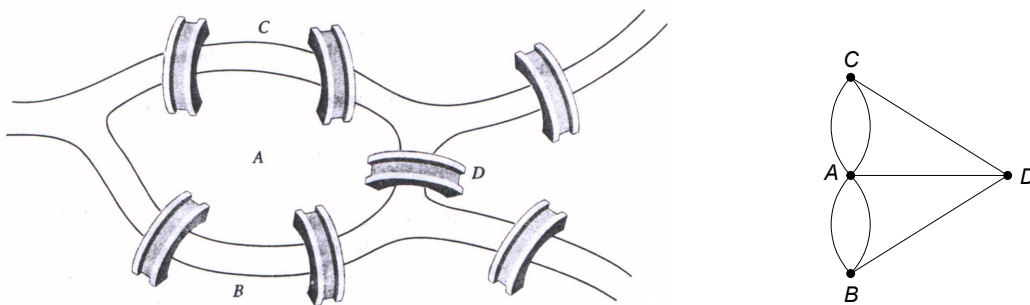


Graf

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



- Sejarah Graf: masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)



Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:
Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan
Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan
- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

Definisi Graf

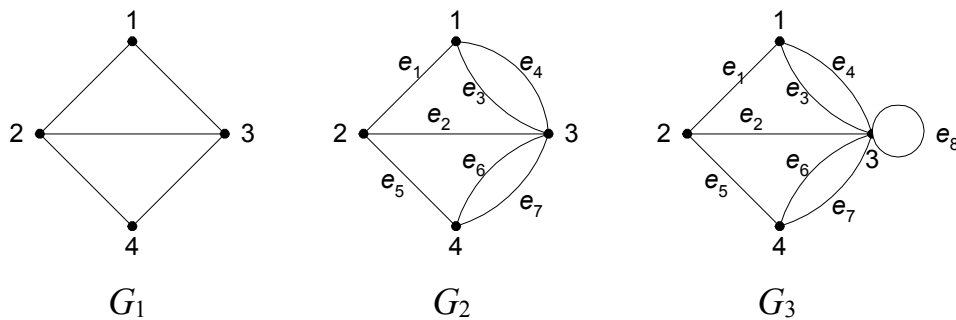
Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

$$= \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$$= \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 2, G_1 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

G_2 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \} = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$$

G_3 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \} = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$$

- Pada G_2 , sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.
- Pada G_3 , sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*).

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. G_1 pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana

2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*).

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). G_2 dan G_3 pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana

- Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga (*limited graph*)

Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya, n , berhingga.

2. Graf tak-berhingga (*unlimited graph*)

Graf yang jumlah simpulnya, n , tidak berhingga banyaknya disebut **graf tak-berhingga**.

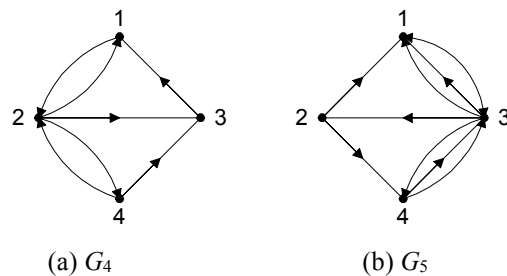
- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.

2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.



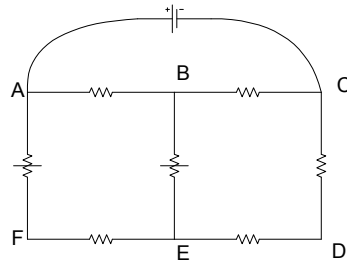
Gambar 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Tabel 1 Jenis-jenis graf [ROS99]

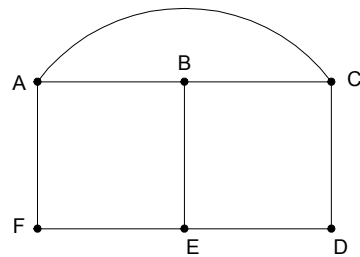
| Jenis | Sisi | Sisi ganda dibolehkan? | Sisi gelang dibolehkan? |
|--------------------|-------------|---------------------------|----------------------------|
| Graf sederhana | Tak-berarah | Tidak | Tidak |
| Graf ganda | Tak-berarah | Ya | Tidak |
| Graf semu | Tak-berarah | Ya | Ya |
| Graf berarah | Berarah | Tidak | Ya |
| Graf-ganda berarah | Berarah | Ya | Ya |

Contoh Terapan Graf

1. Rangkaian listrik.



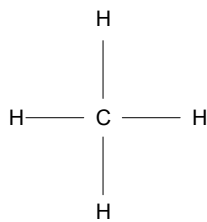
(a)



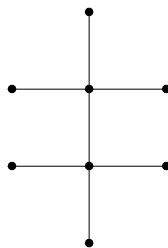
(b)

2. Isomer senyawa kimia karbon

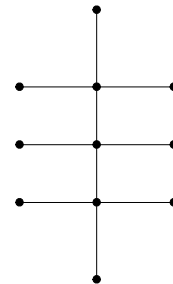
metana (CH_4)



etana (C_2H_6)



propana (C_3H_8)



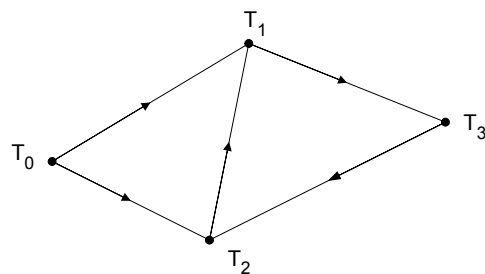
3. Transaksi konkuren pada basis data terpusat

Transaksi T_0 menunggu transaksi T_1 dan T_2

Transaksi T_2 menunggu transaksi T_1

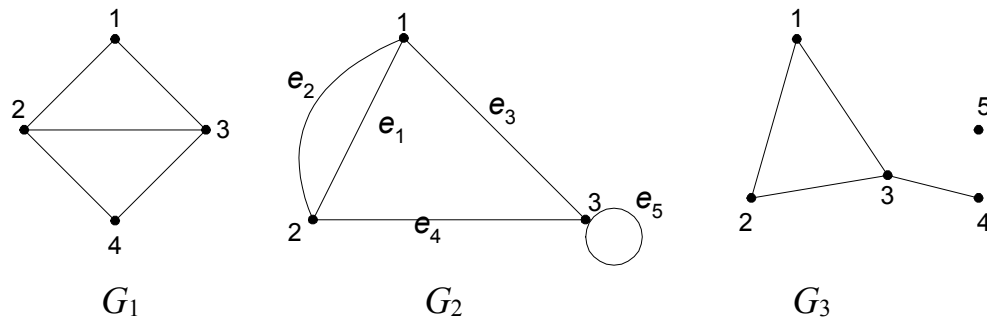
Transaksi T_1 menunggu transaksi T_3

Transaksi T_3 menunggu transaksi T_2



deadlock!

Terminologi Graf



Gambar 4. Graf yang digunakan untuk menjelaskan terminologi pada graf

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graf G_1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

e bersisian dengan simpul v_j , atau
 e bersisian dengan simpul v_k

Tinjau graf G_1 : sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

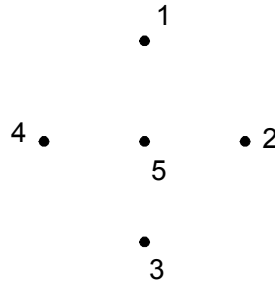
Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graf G_1 : simpul 5 adalah simpul terpencil.

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).

Graf N_5 :



5. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graf G_1 :

$$d(1) = d(4) = 2$$

$$d(2) = d(3) = 3$$

Tinjau graf G_3 : $d(5) = 0 \rightarrow$ simpul terpencil

$d(4) = 1 \rightarrow$ simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graf G_2 : $d(1) = 3 \rightarrow$ bersisian dengan sisi ganda

$d(2) = 4 \rightarrow$ bersisian dengan sisi gelang (*loop*)

Pada graf berarah,

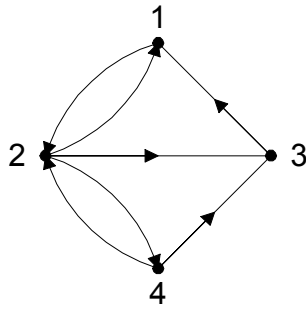
$d_{\text{in}}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*)

= jumlah busur yang masuk ke simpul v

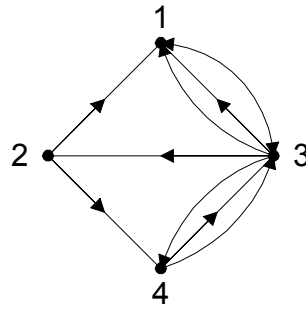
$d_{\text{out}}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)

= jumlah busur yang keluar dari simpul v

$$d(v) = d_{\text{in}}(v) + d_{\text{out}}(v)$$



G_4



G_5

Tinjau graf G_4 :

$$d_{\text{in}}(1) = 1; d_{\text{out}}(1) = 1$$

$$d_{\text{in}}(2) = 1; d_{\text{out}}(2) = 3$$

$$d_{\text{in}}(3) = 1; d_{\text{out}}(3) = 1$$

$$d_{\text{in}}(4) = 2; d_{\text{out}}(4) = 0$$

Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

$$\begin{aligned} \text{Tinjau graf } G_1: d(1) + d(2) + d(3) + d(4) &= 2 + 3 + 3 + 2 = 10 \\ &= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tinjau graf } G_2: d(1) + d(2) + d(3) &= 3 + 3 + 4 = 10 \\ &= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tinjau graf } G_3: d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) \\ &= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8 \\ &= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4 \end{aligned}$$

Contoh 2. Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

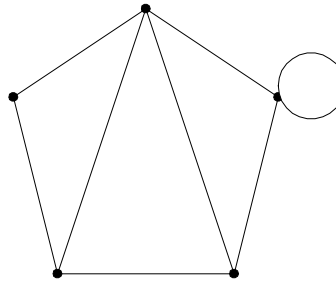
Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil

$$(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9).$$

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap

$$(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16).$$



6. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Tinjau graf G_1 : lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf G_1 : 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.

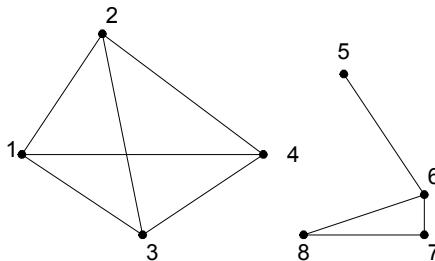
8. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 .

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j .

Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Contoh graf tak-terhubung:

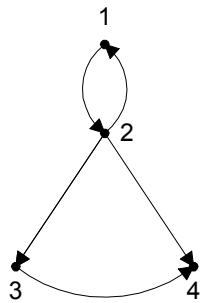


Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

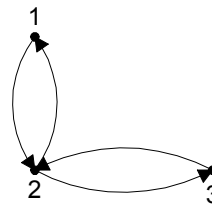
Dua simpul, u dan v , pada graf berarah G disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u .

Jika u dan v tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).

Graf berarah G disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G , terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut **graf terhubung lemah**.



graf berarah terhubung lemah

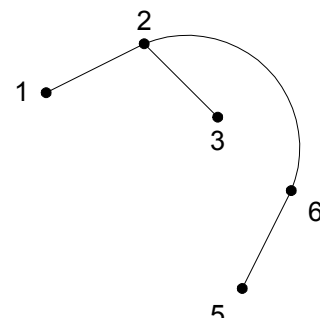
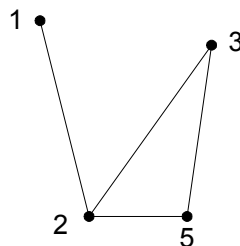
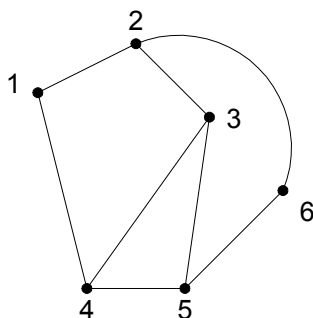


graf berarah terhubung kuat

8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

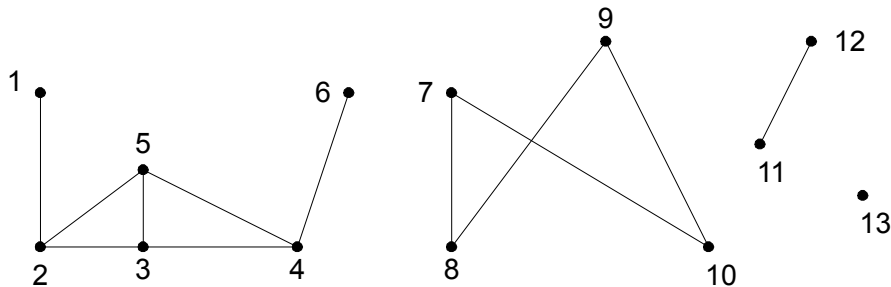
Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.



(a) Graf G_1 (b) Sebuah upagraf (c) komplemen dari upagraf (b)

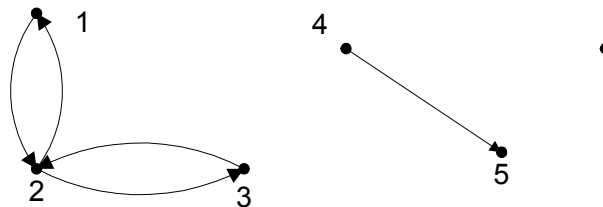
Komponen graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G .

Graf G di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



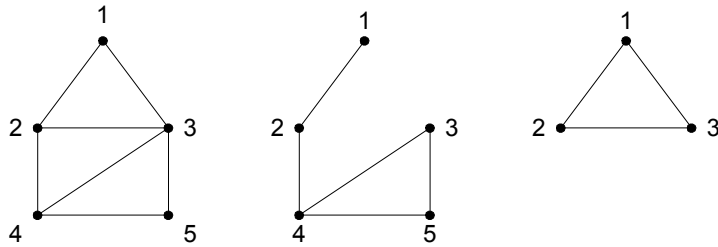
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



9. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



(a) graf G , (b) upagraf rentang dari G , (c) bukan upagraf rentang dari G

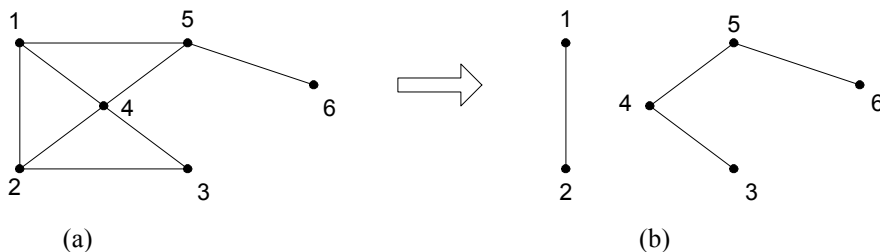
10. *Cut-Set*

Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, $\{(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)\}$ adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

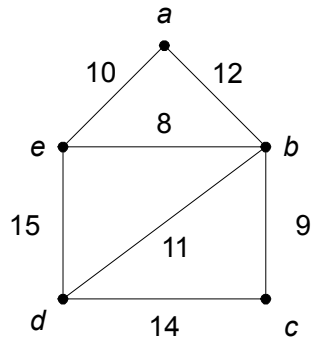
Himpunan $\{(1,2), (2,5)\}$ juga adalah *cut-set*, $\{(1,3), (1,5), (1,2)\}$ adalah *cut-set*, $\{(2,6)\}$ juga *cut-set*,

tetapi $\{(1,2), (2,5), (4,5)\}$ bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, $\{(1,2), (2,5)\}$ adalah *cut-set*.



11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

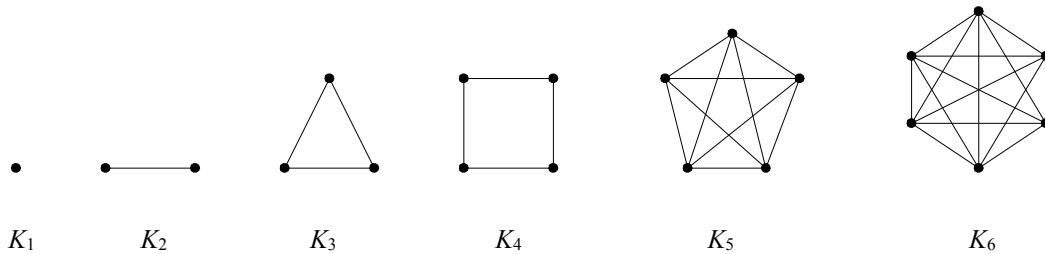
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Beberapa Graf Sederhana Khusus

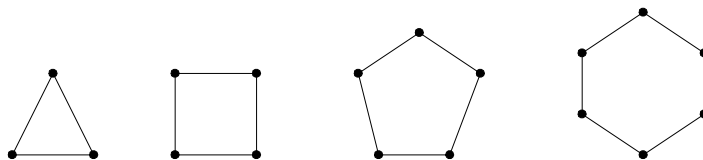
a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.



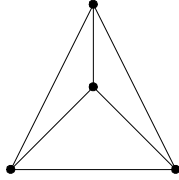
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n .



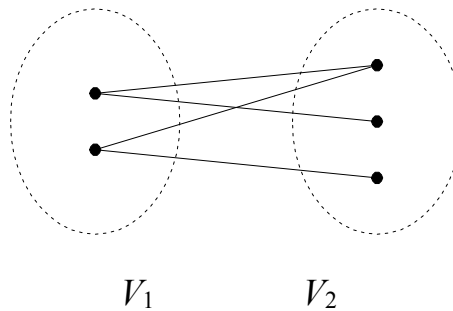
c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r . Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.

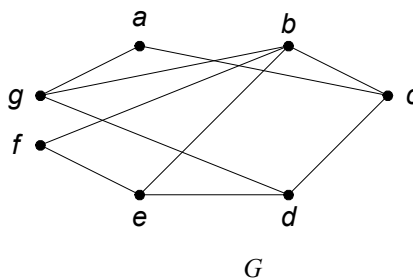


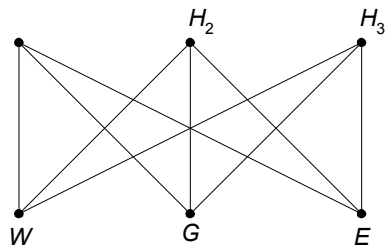
d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.

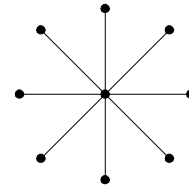


Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$





graf persoalan utilitas,



topologi bintang

Representasi Graf

1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

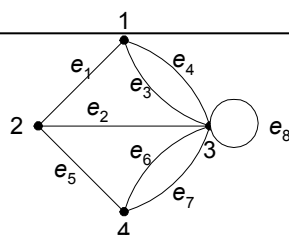
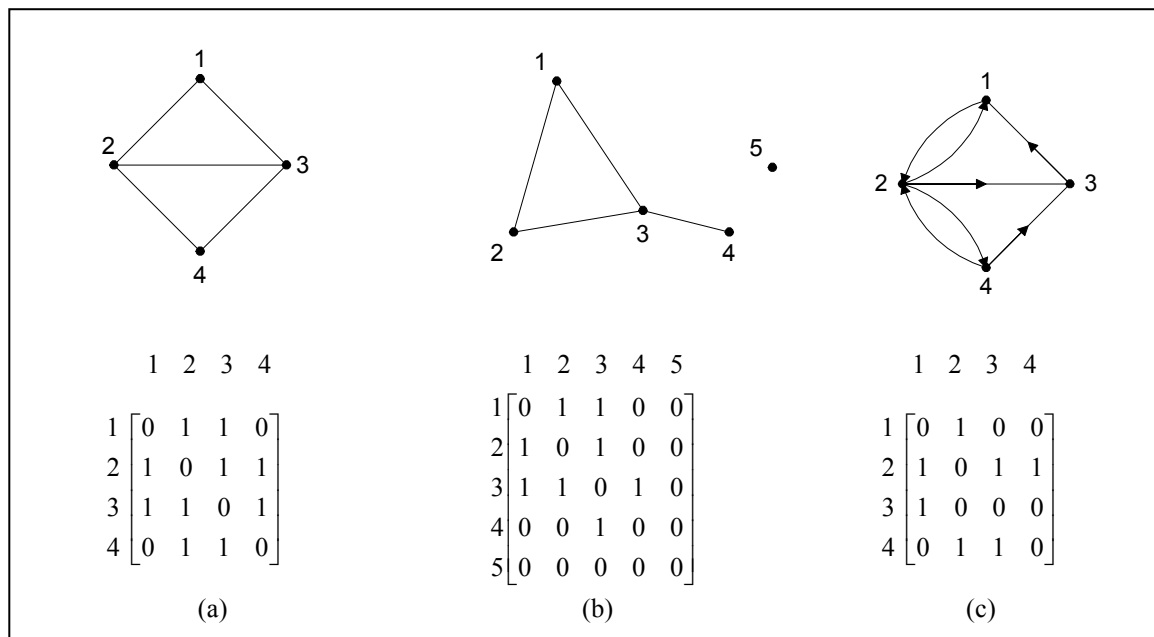
$$A = [a_{ij}],$$

1, jika simpul i dan j bertetangga

$$a_{ij} = \begin{cases}$$

0, jika simpul i dan j tidak bertetangga

Contoh:



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Derajat tiap simpul i :

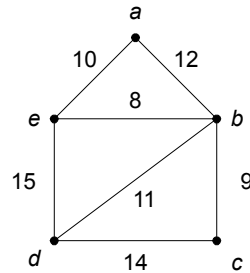
(a) Untuk graf tak-berarah,

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

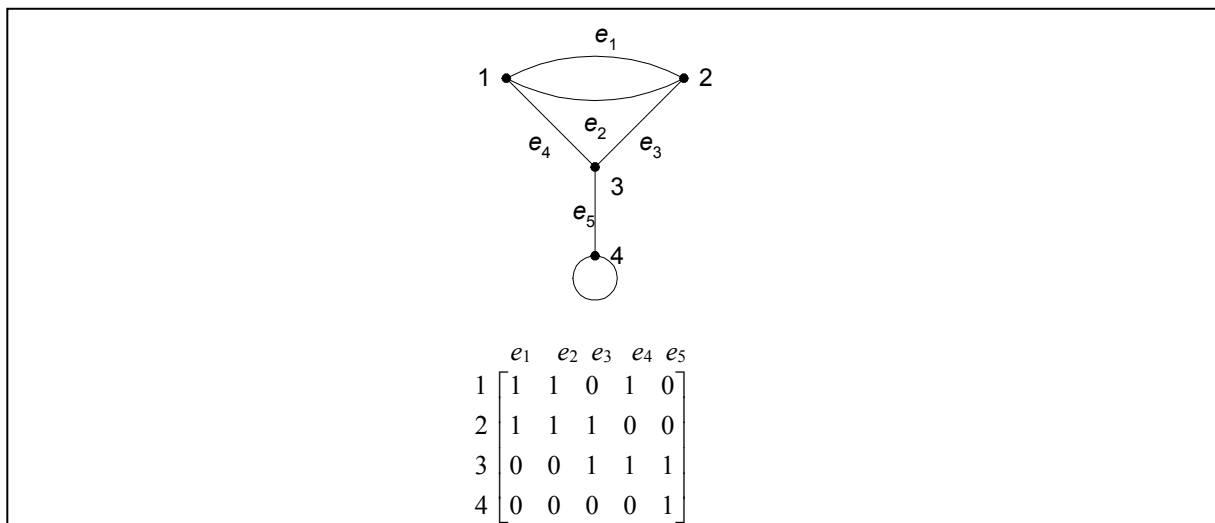


$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & a & b & c & d & e \\
 \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

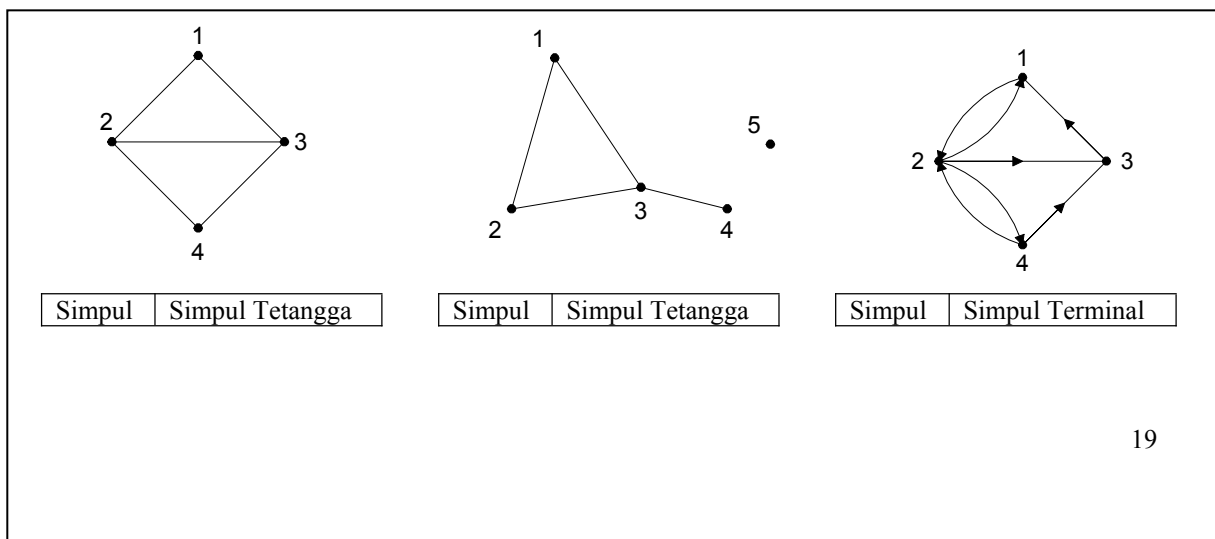
2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$



3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)



| | |
|---|---------|
| 1 | 2, 3 |
| 2 | 1, 3, 4 |
| 3 | 1, 2, 4 |
| 4 | 2, 3 |

(a)

| | |
|---|---------|
| 1 | 2, 3 |
| 2 | 1, 3 |
| 3 | 1, 2, 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | - |

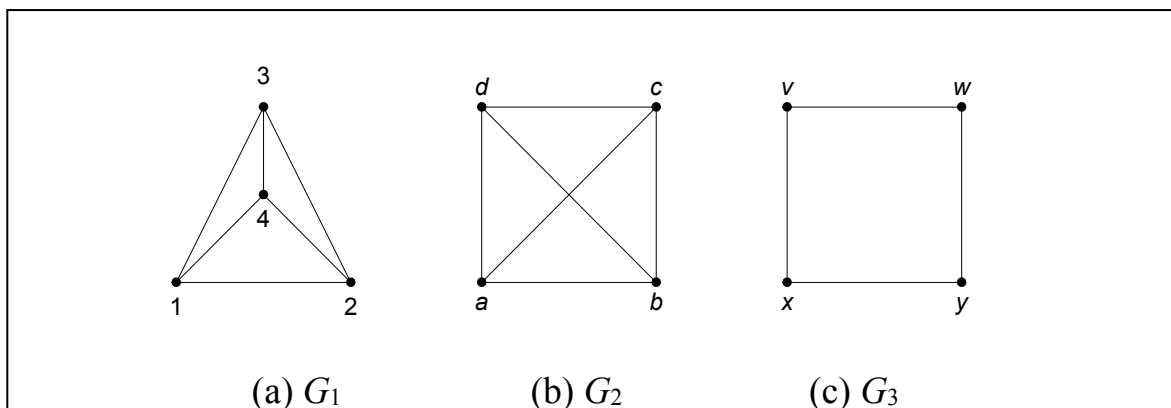
(b)

| | |
|---|---------|
| 1 | 2 |
| 2 | 1, 3, 4 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2, 3 |

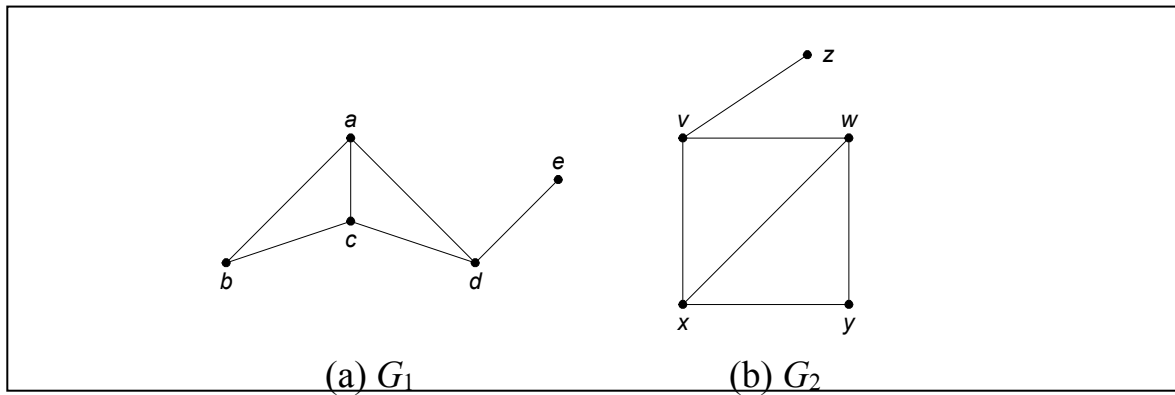
(c)

Graf Isomorfik (*Isomorphic Graph*)

- Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.
- Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.
- Dengan kata lain, misalkan sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1 , maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 harus bersisian dengan simpul u' dan v' yang di G_2 .
- Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.



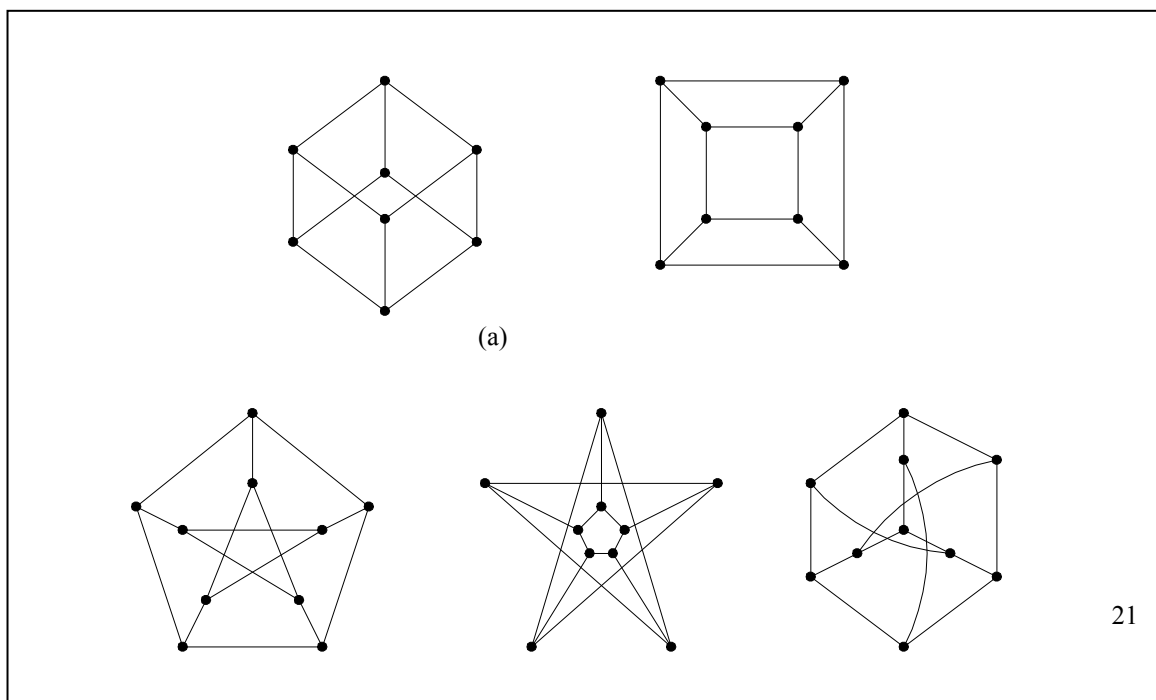
Gambar 6.35 G_1 isomorfik dengan G_2 , tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3



Gambar 6.36 Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

$$A_{G_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{G_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & w & v & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



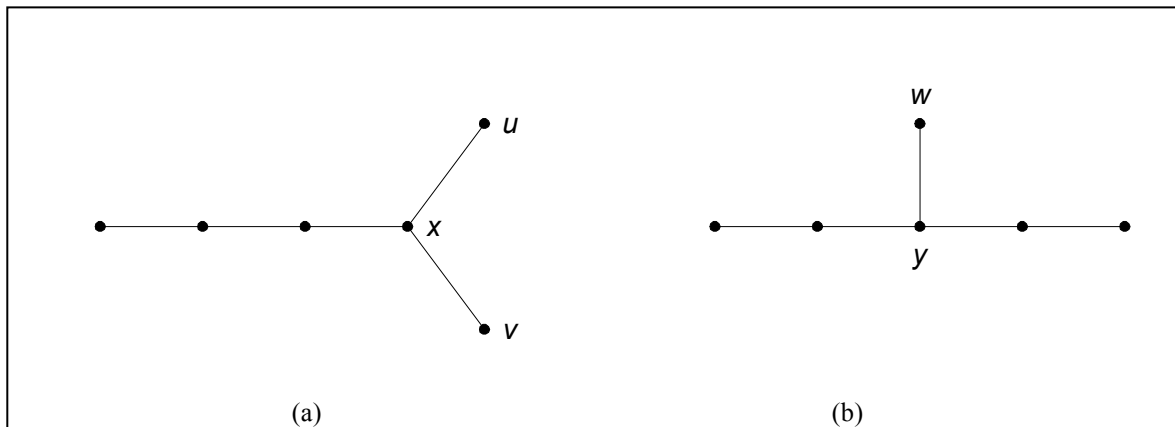
(b)

Gambar 6.38 (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik

Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

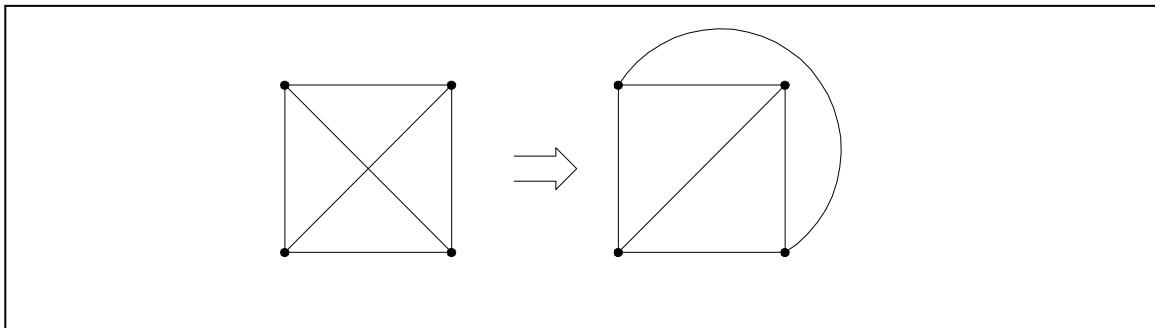
1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.

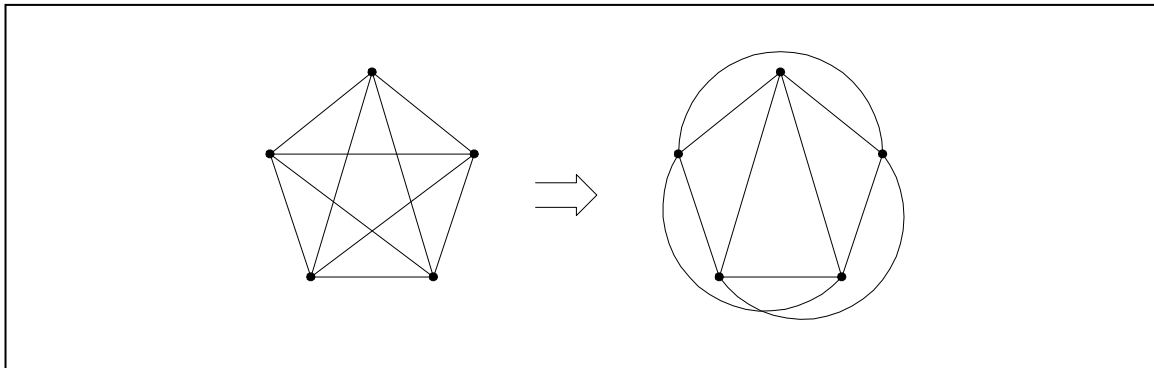


Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong disebut sebagai **graf planar**, jika tidak, ia disebut **graf tak-planar**.

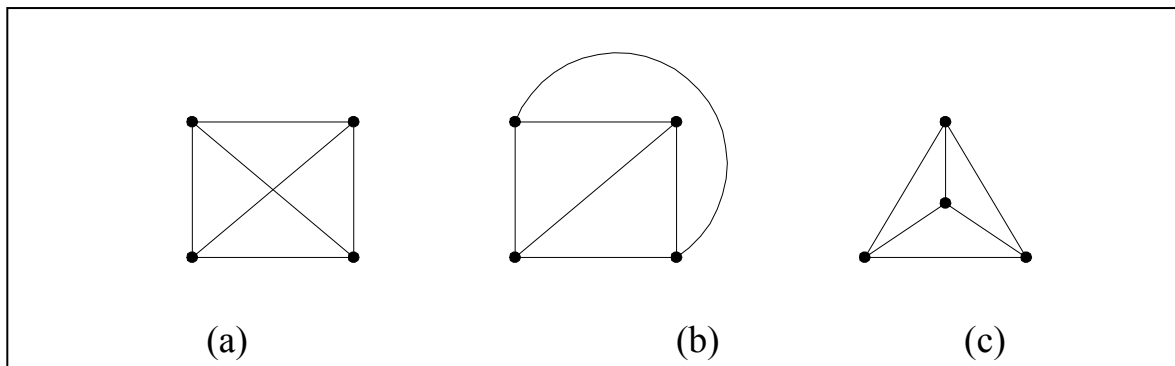


Gambar 6.40 K_4 adalah graf planar



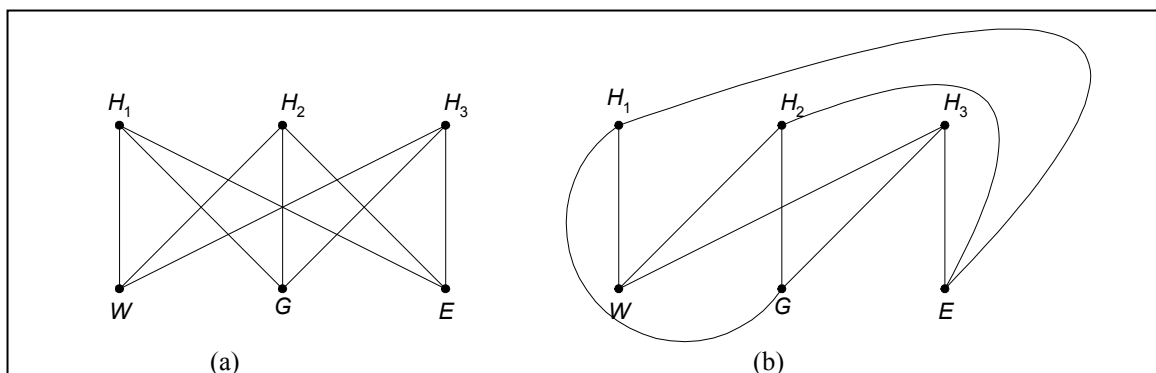
Gambar 6.41 K_5 bukan graf planar

Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*).



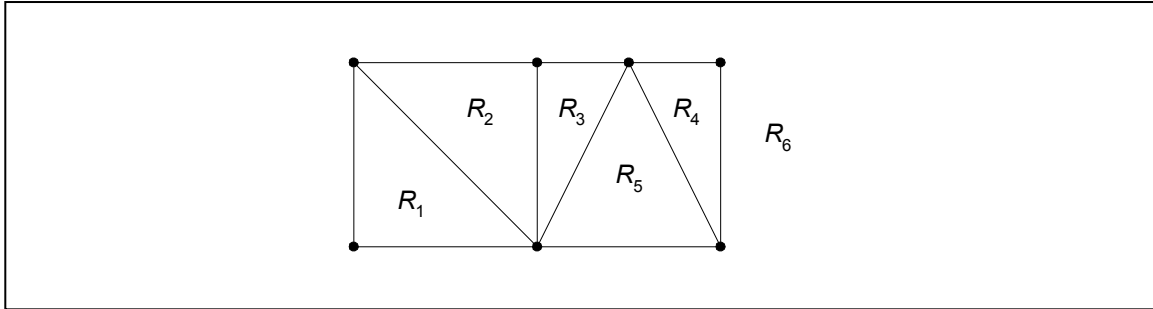
Gambar 6.42 Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

Contoh 6.26. Persoalan utilitas (*utility problem*)



Gambar 6.43 (a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

Sisi-sisi pada graf planar membagi bidang menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*). Jumlah wilayah pada graf planar dapat dihitung dengan mudah.



Gambar 6.44 Graf planar yang terdiri atas 4 wilayah

Rumus Euler

$$n - e + f = 2 \quad (6.5)$$

yang dalam hal ini,

f = jumlah wilayah

e = jumlah sisi

n = jumlah simpul

Contoh 6.27. Pada Gambar 6.44, $e = 11$ dan $n = 7$, maka $f = 11 - 7 + 2 = 6$.

Pada graf planar sederhana terhubung dengan f wilayah, n buah simpul, dan e buah sisi (dengan $e > 2$) selalu berlaku ketidaksamaan berikut:

$$e \geq 3f/2$$

dan

$$e \leq 3n - 6$$

Contoh 6.28. Pada Gambar 6.44 di atas, $6 \geq 3(4)/2$ dan $6 \leq 3(4) - 2$.

Ketidaksamaan

$$e \leq 3n - 6$$

tidak berlaku untuk graf $K_{3,3}$

karena

$$e = 9, n = 6$$

$$9 \leq (3)(6) - 6 = 12 \text{ (jadi, } e \leq 3n - 6)$$

padahal graf $K_{3,3}$ bukan graf planar!

Buat asumsi baru: setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh paling sedikit empat buah sisi,

Dari penurunan rumus diperoleh

$$e \leq 2n - 4$$

Contoh 6.29. Graf $K_{3,3}$ pada Gambar 6.43(a) memenuhi ketidaksamaan $e \leq 2n - 6$, karena

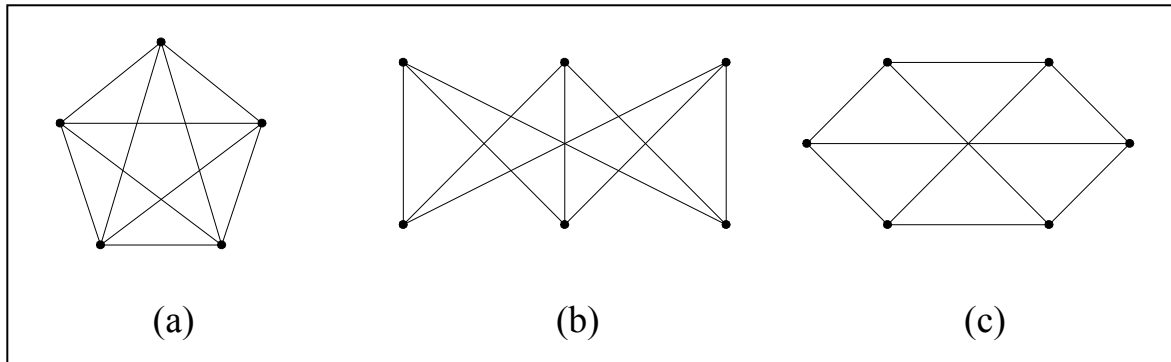
$$e = 9, n = 6$$

$$9 \leq (2)(6) - 4 = 8 \quad (\text{salah})$$

yang berarti $K_{3,3}$ bukan graf planar.

Teorema Kuratowski

Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran suatu graf.

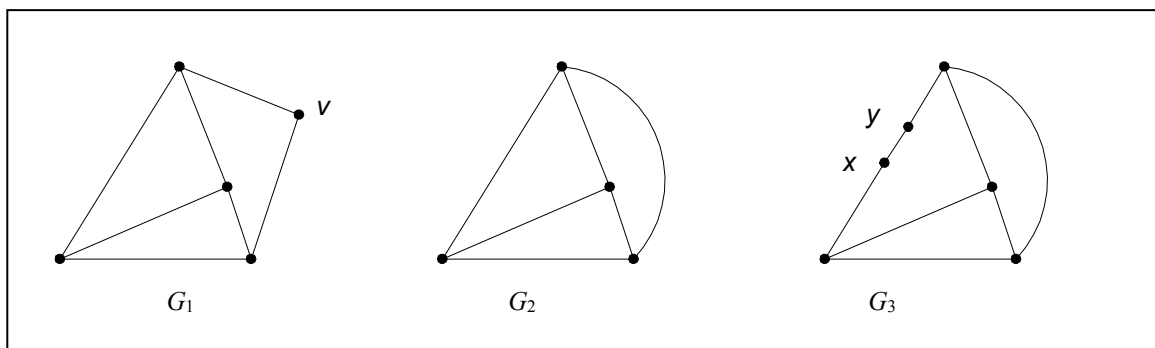


Gambar 6.45 (a) Graf Kuratowski pertama
(b) dan (c) Graf Kuratowski kedua (keduanya isomorfik)

Sifat graf Kuratowski adalah:

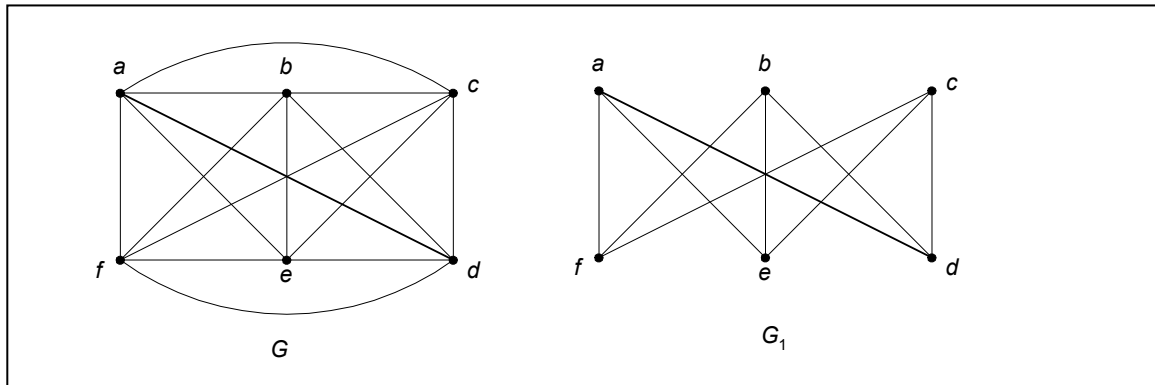
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

TEOREMA Kuratowski. Graf G bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang sama dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



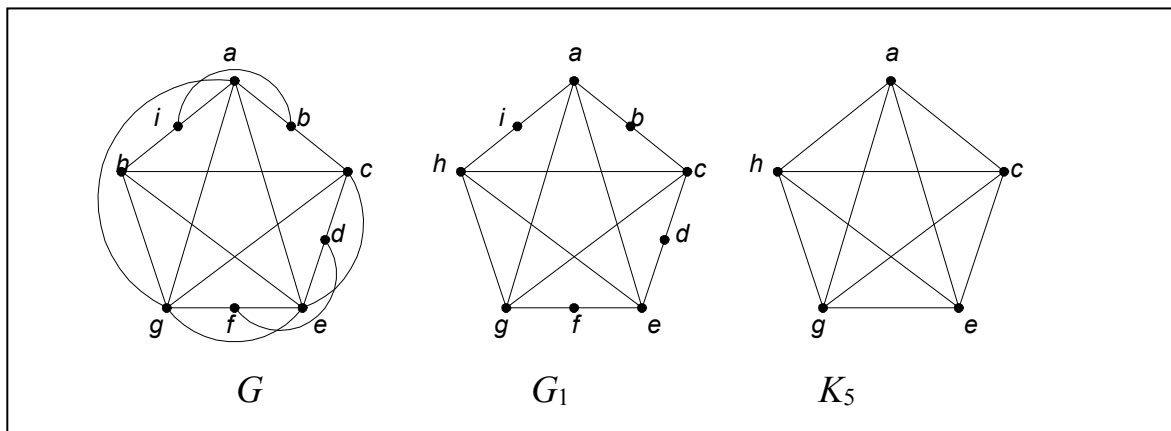
Gambar 6.46 Tiga buah graf yang homomorfik satu sama lain.

Contoh 6.30. Sekarang kita menggunakan Teorema Kuratowski untuk memeriksa keplanaran graf. Graf G pada Gambar 6.47 bukan graf planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang sama dengan $K_{3,3}$.



Gambar 6.47 Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf yang sama dengan $K_{3,3}$.

Pada Gambar 6.48, G tidak planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari G_1 , diperoleh K_5).



Gambar 6.48 Graf G , upagraf G_1 dari G yang homeomorfik dengan K_5 .

Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan Euler ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Euler ialah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali..

Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*).

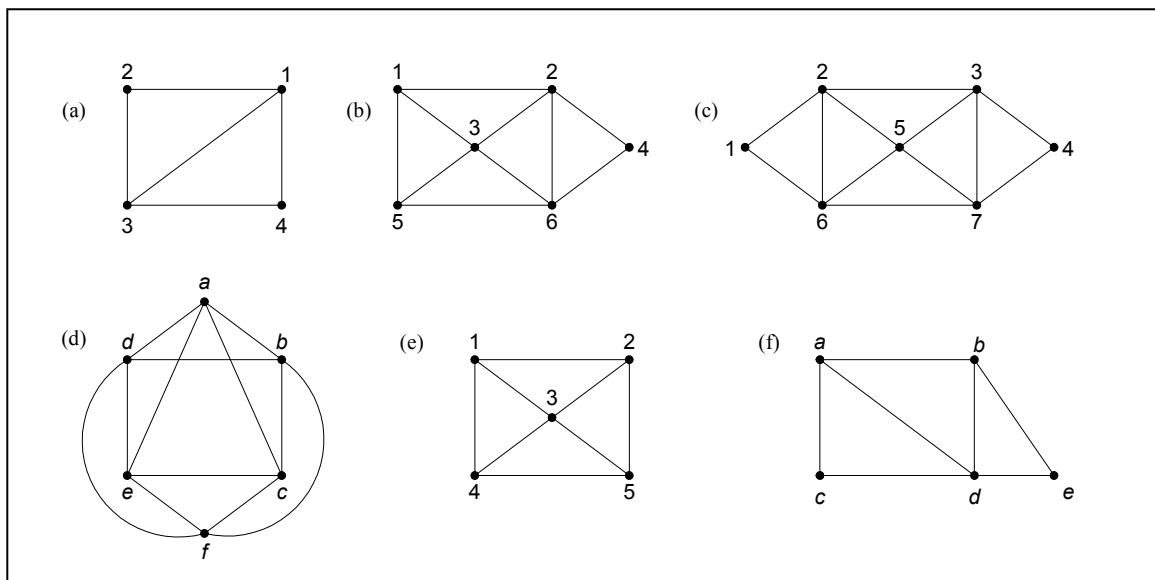
Contoh 6.31. Lintasan Euler pada graf Gambar 6.42(a) : 3, 1, 2, 3, 4, 1

Lintasan Euler pada graf Gambar 5.42(b) : 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3

Sirkuit Euler pada graf Gambar 6.42(c) : 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1

Sirkuit Euler pada graf Gambar 6.42(d) : $a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a$

Graf (e) dan (f) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler



Gambar 6.42 (a) dan (b) graf semi-Euler

(c) dan (d) graf Euler

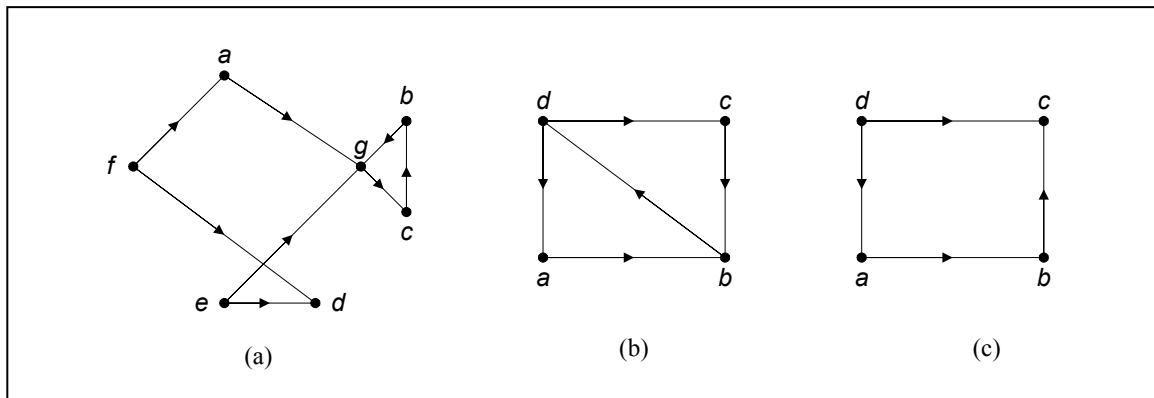
(e) dan (f) bukan graf semi-Euler atau graf Euler

TEOREMA 6.2. Graf tidak berarah memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali.

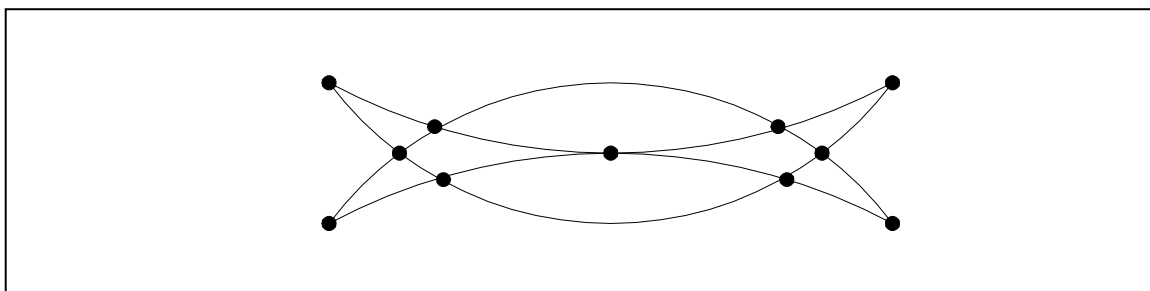
TEOREMA 6.3. Graf tidak berarah G adalah graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul berderajat genap.

(Catatlah bahwa graf yang memiliki sirkuit Euler pasti mempunyai lintasan Euler, tetapi tidak sebaliknya)

TEOREMA 6.4. Graf berarah G memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama. G memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.



Gambar 6.43 (a) Graf berarah Euler ($a, g, c, b, g, e, d, f, a$)
 (b) Graf berarah semi-Euler (d, a, b, d, c, b)
 (c) Graf berarah bukan Euler maupun semi-Euler



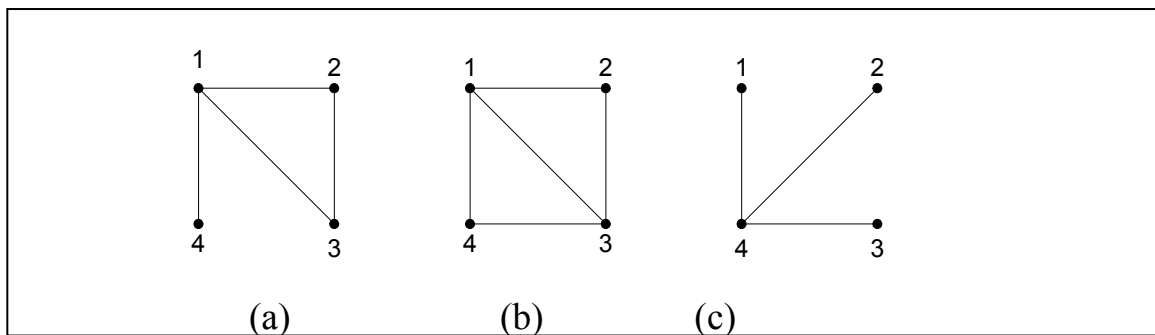
Gambar 6.44 Bulan sabit Muhammad

Lintasan dan Sirkuit Hamilton

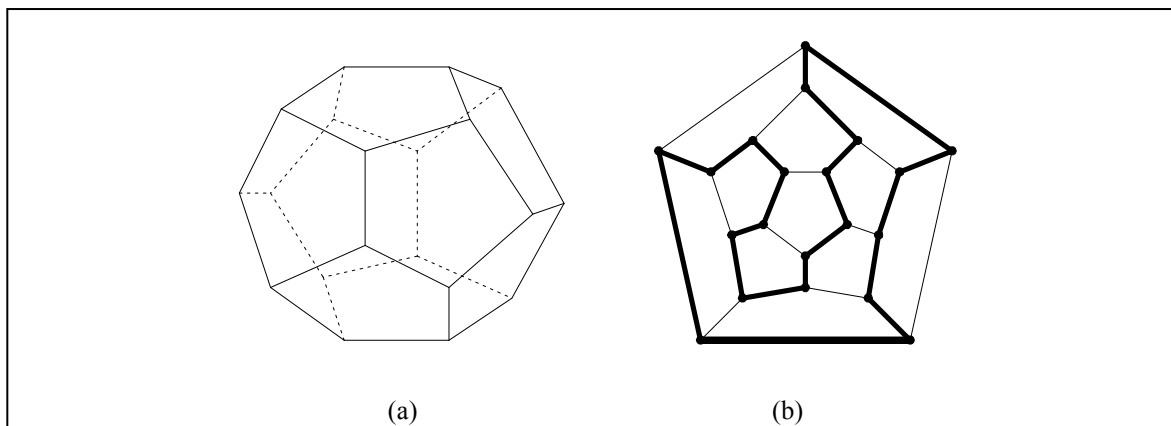
Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Hamilton ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekalius simpul akhir) yang dilalui dua kali.

Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan **graf Hamilton**, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton**.



Gambar 6.45 (a) graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4)
(b) graf yang memiliki lintasan Hamilton (1, 2, 3, 4, 1)
(c) graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton



Gambar 6.46 (a) *Dodecahedron* Hamilton, dan (b) graf yang mengandung sirkuit Hamilton

TEOREMA 6.5. Syarat cukup (jadi bukan syarat perlu) supaya graf sederhana G dengan n (≥ 3) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit $n/2$ (yaitu, $d(v) \geq n/2$ untuk setiap simpul v di G).

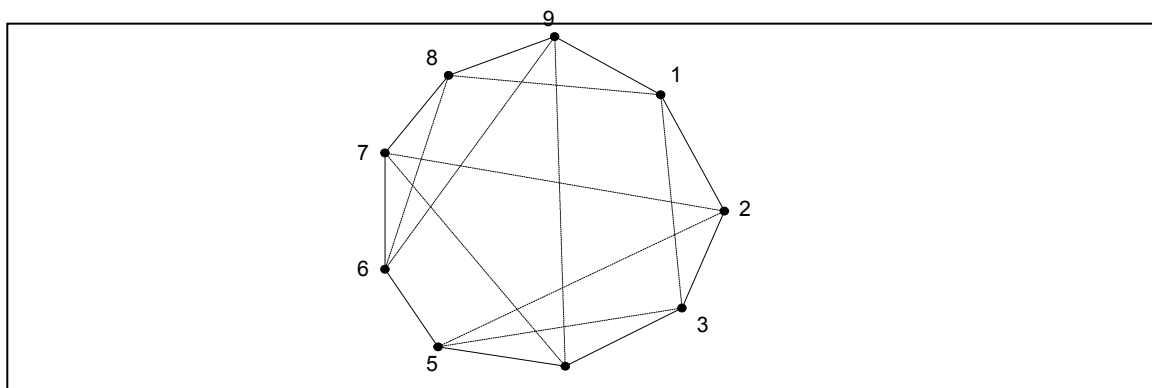
TEOREMA 6.6. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

TEOREMA 6.7. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $(n - 1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

TEOREMA 6.8. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $(n - 2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

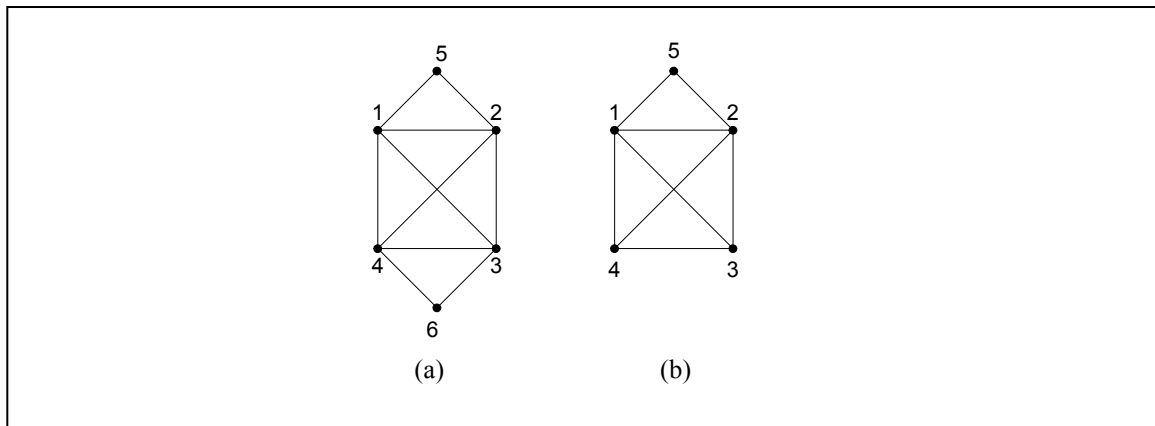
Contoh 6.33. (Persoalan pengaturan tempat duduk). Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah $(9 - 1)/2 = 4$.



Gambar 6.47 Graf yang merepresentasikan persoalan pengaturan tempat duduk.

Beberapa graf dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, mengandung sirkuit Euler dan lintasan Hamilton, mengandung lintasan Euler maupun lintasan Hamilton, tidak mengandung lintasan Euler namun mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya. Graf pada Gambar (a) mengandung sirkuit Hamilton maupun sirkuit Euler, sedangkan graf pada Gambar 6.48(b) mengandung sirkuit Hamilton dan lintasan Euler (periksa!).



Gambar 6.48 (a) Graf Hamilton sekaligus graf Euler
(b) Graf Hamilton sekaligus graf semi-Euler