Nama : Lusia Juliana Silaban

NIM : 215314087

1. Beberapa cara menyatakan suatu barisan bilangan:
   a. Cara pertama kita bisa menggunakan cara dengan menuliskan beberapa suku pertama barisan itu, dengan harapan pembaca secara langsung dapat dan mampu mengerti kelanjutan suku-suku barisan tersebut.

      Misalnya 2, 4, 8, …

      Keuntungan mekakai cara ini adalah konsepnya yang sangat sederhana, mudah dan sering sekali dipakai. Namun tingkat kesalahan dalam memahami kelanjutan suku-suku selanjutnya sering terjadi. Seperti pada contoh di atas bisa saja pembaca melanjutkan suku-sukunya dengan bilangan genap berkelipatan 2 yaitu 10, 12, 14, … . Akan tetapi disisi lain suku-sukunya bisa dilanjutkan dengan bilangan 2 berpangkat selanjutnya secara berurutan yaitu 16, 32, 64, … . Untuk meminimalisir kesalahan pembaca untuk memahami kelanjutan dari barisan yang ada maka sebaiknya berisannya di perpanjang agar memudahkan pembaca memahami. Jadi penulisannya bisa diperpanjang menjadi 2, 4, 8, 16, 32, 64, … (untuk menyatakan barisan bilangan 2 berpangkat kelipatan 1 secara berurutan).

   b. Cara kedua adalah dengan menyatakan barisan dalam eksplisit suku-sukunya. Misalnya, barisan bilangan ganjil lebih besar dari 2 dapat dinyatakan dengan rumus :

      $a_n = 2n + 1$ (n bilangan bulat $\geq 1$)

      Dengan rumus tersebut, suku-suku setiap barisan dapat ditentukan dengan cepat. Sebagai contoh, dalam rumus $a_n = 2n + 1$ $(n \geq 1)$, maka dapat ditentukan rumusnya adalah :

      $a_0 = 2.1 + 1 = 3$

      $a_1 = 2.2 + 1 = 5$

      $a_2 = 3.3 + 1 = 7$

      … dst.

      Keuntungan memakai cara ini adalah tiap-tiap suku barisan ditentukan secara tunggal dan penentuan suku ke-n (missal suku ke-108 = $a_{108}$) dapat dilakukan secara cepat.

c. Cara ketiga untuk menyatakan barisan adalah secara rekursif. Suatu barisan didefinisikan secara rekursif jika kondisi awal barisan ditentukan, dan suku-suku selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan sejumlah suku-suku yang sudah dinyatakan sebelumnya. Relasi rekurensi adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara beberapa suku.

   Sebagai contoh, barisan bilangan ganjil lebih besar dari 2, yaitu 3, 5, 7, … dapat dinyatakan sebagai berikut:

   Untuk semua bilangan bulat $k \geq 1$,

   $a_k = a_{k-1} + 2$ (relasi rekurensi) dan

   $a_0 = 3$ (kondisi awal)

   dengan relasi rekurensi dan kondisi awal, suku-suku barisan selanjutnya dapat dihitung sebagai :

   $a_1 = a_0 + 2 = 3 + 2 = 5$

   $a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7$

   $a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9$

   … dst

2. Relasi rekurensi untuk barisan bilangan $a_0$, $a_1$, $a_2$ adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara suku-suku $a_0$ dan $a_1$ dan $a_2$ dimana nilai suku yang satu akan mempengaruhi nilai suku-suku selanjutnya dan kondisi awal barisan sudah diketahui.
3. Syarat awal untuk bilangan $a_0$, $a_1$, $a_2$ adalah dengan mengetahui nilai suku-suku pertama dan definisi nilai suku-suku yang akan dicari.
4. Fibonacci adalah suatu barisan bilangan yang merupakan hasil penjumlahan dua bilangan sebelumnya, ditemukan oleh Leonardo da Pisa atau dikenal dengan Fibonacci.

   Dua bilangan Fibonacci pertama yaitu bilangan 0 dan 1. Sehingga suku-suku berikutnya dari barisan bilangan Fibonacci yaitu sebagai berikut.

   $F_1 = 0$

   $F_2 = 1$

   $F_3 = 0 + 1 = 1$

$F_4 = 1 + 1 = 2$

$F_5 = 1 + 2 = 3$

$F_6 = 2 + 3 = 5$

$F_7 = 3 + 5 = 8$

$F_8 = 5 + 8 = 13$

… dst.

Deret Fibonacci didefinisikan secara rekursif (berulang). Misalkan dalam beberapa pola barisan bilangan dengan dua suku pertama $F_1 = 0$ dan 1 dan $F_2 = 1$. Penjumlahan dua suku sebelumnya dari bilangan Fibonacci dirumuskan dengan relasi sebagai berikut.

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \text{ dengan } F_0 = 1;\ F_1 = 1.$$

Relasi itu dikenal dengan sebagai relasi Fibonacci. $F_i$ yang terbentuk disebut Bilangan Fibonacci. Untuk menentukan suku ke-n bilangan Fibonacci dapat dengan menggunakan rumus berikut ini.

$$F_n = 1/\sqrt{5} \text{ x } ((1 + \sqrt{5})/2)^n - 1/\sqrt{5} \text{ x } ((1 - \sqrt{5})/2)^n$$

Barisan Fibonacci, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, dapat dinyatakan dalam relasi rekurens sebagai berikut:

$$Fn = Fn{-}1 + Fn{-}2\ ;\ F0 = 0 \text{ dan } F1 = 1.$$

Dalam matematika, bilangan Fibonacci yaitu barisan yang diartikan secara rekursif sbg berikut:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 0; \\ 1, & \text{jika } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{jika tidak.} \end{cases}$$

*Penjelasan:* barisan ini berawal dari 0 dan 1, kemudian angka berikutnya diperoleh dengan cara menambahkan kedua bilangan yang berurutan sebelumnya. Dengan perhitungan ini, karenanya barisan bilangan Fibonaccci yang pertama adalah:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946....

Perbandingan sela $F_{n+1}$ dengan $F_n$ nyaris selalu sama untuk sebarang nilai n dan mulai nilai n tertentu, perbandingan ini nilainya tetap. Perbandingan itu disebut **rasio emas** yang nilainya mendekati 1,618.

5. Teka-teki Menara Hanoi adalah sebuah permainan matematis. Permainan ini terdiri dari tiga tiang dan sejumlah cakram dengan ukuran berbeda-beda yang bisa dimasukkan ke tiang mana saja. Permainan dimulai dengan cakram-cakram yang tertumpuk rapi berurutan berdasarkan ukurannya dalam salah satu tiang, cakram terkecil diletakkan teratas, sehingga membentuk kerucut.

   Tujuan dari teka-teki ini adalah untuk memindahkan seluruh tumpukan ke tiang yang lain, mengikuti aturan berikut:

   - Hanya satu cakram yang boleh dipindahkan dalam satu waktu.
   - Setiap perpindahan berupa pengambilan cakram teratas dari satu tiang dan memasukkannya ke tiang lain, di atas cakram lain yang mungkin sudah ada di tiang tersebut.
   - Tidak boleh meletakkan cakram di atas cakram lain yang lebih kecil.

6. Satu cara penyelesaian untuk teka-teki Menara Hanoi yang efisien adalah secara rekursif.

   Sekarang kita akan selesaikan persoalan menara Hanoi dengan 64 cakram. Tentu akan dibutuhkan lebih dari tujuh langkah untuk menyelesaikannya. Agar cakram 4 dapat diletakkan pada tiang C, maka 3 cakram di atasnya harus diletakkan lebih dahulu ke tiang Untuk memindahkan cakram 1, 2, dan 3 ke tiang B, maka cakram 1 dan 2 harus diletakkan terlebih dahulu ke tiang C. Sebelum itu, cakram 1 harus diletakkan ke tiang B.

   Maka dapat kita susun langkah-langkah berikut.

   Langkah 1. Pindahkan cakram 1 ke tiang B.

   Langkah 2. Pindahkan cakram 2 ke tiang C.

   Langkah 3. Pindahkan cakram 1 ke tiang C.

   Untuk memindahkan 3 cakram, kita menggunakan langkah pemindahan 2 cakram. Untuk memindahkan 4 cakram, kita menggunakan langkah pemindahan 3 cakram. Begitu seterusnya hingga kita memerlukan langkah pemindahan $(n - 1)$ cakram ntuk memindahkan $n$ cakram. Secara garis besar, Langkah-langkah penyelesaian menara Hanoi melakukan langkah rekursif sebagai berikut. ke-

1. Pindahkan cakram ~~1~~- $\boxed{(n-1)}$ dari tiang A ke tiang B.
2. Pindahkan cakram $n$ ke tiang C.
3. Pindahkan cakram ~~1~~- $\boxed{(n-1)}$ dari tiang B ke tiang C.

Langkah penyelesaian tersebut dapat dinyatakan dalan relasi rekurens, yaitu,

$$Tn = T_{n-1} + 1 + T_{n-1}$$

$T_n$ = banyaknya cara memindahkan n cakram .

$$= 2T_{n-1} + 1 \qquad \text{(relasi rekurensi)}$$

$$T_1 = 1 \qquad \text{(kondisi awal)}$$

Untuk memindahkan :

2 cakram, dibutuhkan $T_2 = 2T_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3$ langkah

3 cakram, dibutuhkan $T_3 = 2T_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7$ langkah

4 cakram, dibutuhkan $T_4 = 2T_3 + 1 = 2.7 + 1 = 15$ langkah

Maka untuk memindahkan 64 cakram sesuai legenda tersebut, kita harus menghitung $T_{64}$, yang setelah dihitung hasilnya adalah $1{,}844674\ 10^{19}$ detik. Jadi, selang waktu antara awal penciptaan hingga dunia kiamat adalah :

$$T_{64} = 1{,}844674\ 10^{19} \text{ detik} \approx 5.84542.10^{11} \text{ tahun}$$

Atau dengan cara yang lebih mudah adalah dengan memakai relasi ini:

$Tn$ adalah banyak langkah yang dilakukan untuk memindahkan $n$ cakram. Kita dapat menyelesaikan persoalan tersebut dengan manipulasi aljabar.

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

$$= 2(2T_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\, T_{n-2} + 2 + 1$$

$$= 2^2\,(2T_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\, T_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

$= 2^3 (2T_{n-4} + 1) + 2^2 + 2 + 1$

$= 2^4 T_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$= \cdots$

$= 2^{n-2} T_2 + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$

$= 2^{n-2} T_2 + \frac{2^{n-2} - 1}{2-1}$

$= 2^{n-2} T_2 + 2^{n-2} - 1$

$= 2^{n-2} \times 3 + 2^{n-2} - 1$

$= 4 \times 2^{n-2} - 1$

$= 2^n - 1$

Kita dapatkan solusi dari relasi rekurens tersebut, $T_n = 2^n - 1$. Tetapi, kita perlu membuktikan dengan induksi matematik bahwa solusi tersebut benar untuk semua $n \geq 2$, dengan $n$ adalah bilangan bulat. Basis Induksi: Untuk membuktikan $T_n$ benar untuk $n \geq 2$, kita perlu membuktikan $T_2$ benar. Jelas bahwa $T_2 = 2^2 - 1 = 3$ benar, karena diperlukan 3 langkah untuk menyelesaikan menara Hanoi dengan 2 cakram.

Langkah Induksi:

- Asumsikan $T_k$ benar untuk $k \geq 2$, maka banyak langkah minimum untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan $k$ cakram adalah $2^k - 1$.
- Tambahkan 1 cakram sehingga banyak langkah untuk menyelesaikan menara Hanoi dengan $k + 1$ cakram adalah $T_{k+1} = 2T_k + 1$.
- Substitusi $T_k = 2^k - 1$ dan lakukan manipulasi aljabar.

$T_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1$

$= 2^{k+1} - 2 + 1$

$= 2^{k+1} - 1$

– Jadi banyak langkah minimum untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan $k$+1 cakram adalah $T_{k+1} = 2^{k+1} + 1$. Berdasarkan induksi matematik tersebut, solusi $T_n = 2^n - 1$ untuk $n \geq 2$ bernilai benar. Jadi banyak langkah minimum untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan $n$ cakram adalah $2^n - 1$.

Jika terdapat $n$ cakram pada satu tiang, maka $n - 1$ cakram paling atas harus dipindahkan ke tiang bantuan. Setelah itu cakram terbesar dipindahkan ke tiang tujuan, sehingga $n - 1$ cakram dapat dipindahkan kembali ke atas cakram terbesar di tiang tujuan. Dengan melakukan Langkah-langkah rekursif tersebut, maka persoalan Menara Hanoi dapat dipecahkan dalam $2^n - 1$ langkah.

Sehingga untuk memindahkan 64 buah cakram dari tiang A ke tiang C adalah :

$$
\begin{aligned}
Tn &= 2^n - 1 \\
&= 2^{64} - 1 \\
&= 1,844674\ 10^{19} \text{ (missal ini adalah perdetik)} \\
&= 5.84542.10^{11} \text{ tahun}
\end{aligned}
$$

7. Perhitungan bunga bank secara majemuk maksudnya adalah dengan menghitung persentase dari jumlah pokok termasuk semua bunga yang masih harus dibayar sebelumnya.

   Dengan kata lain, setiap periode perolehan bunga, jumlah bunga yang ditambahkan ke pokok dihitung berdasarkan pokok ditambah bunga yang ditambahkan pada periode sebelumnya.

   Untuk menghitung jumlah bunga bank secara majemuk yang akan Anda peroleh setiap tahun, dapat menggunakan rumus berikut:

   Besarnya bunga selama periode ke-k adalah jumlah tabungan pada akhir periode ke (k-1) dikalikan dengan bunga untuk periode tersebut.

Bunga selama periode ke (k-1) adalah = ($P_{k-1}$) $(\frac{i}{m})$

Jumlah tabungan pada akhir periode ke-k (= $P_k$) didapatkan dengan menjumlahkan uang tabungan pada akhir periode ke (k-1) (=$P_{k-1}$) dengan bunga yang didapatkan selama periode ke-k tersebut. Dengan demikian jumlah uang tabungan pada akhir periode ke-k dapat diyatakan dengan relasi rekurensi :

$$P_n = P_{k-1} + P_{k-1} \ (\frac{i}{m})$$

Kondisi awal ($P_0$) adalah jumlah uang tabungan mula-mula.