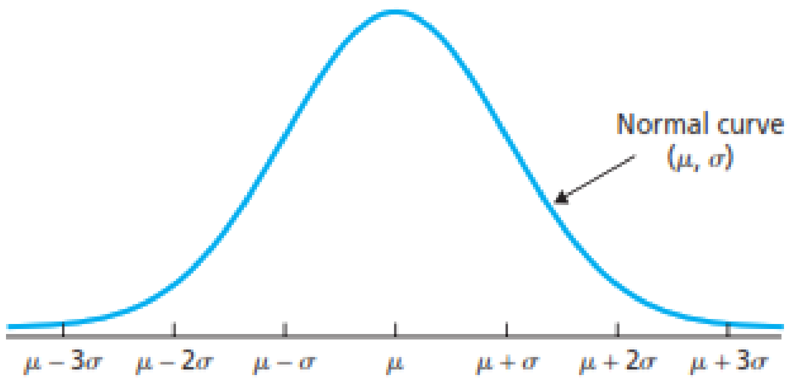
Statistika

Kurva Normal

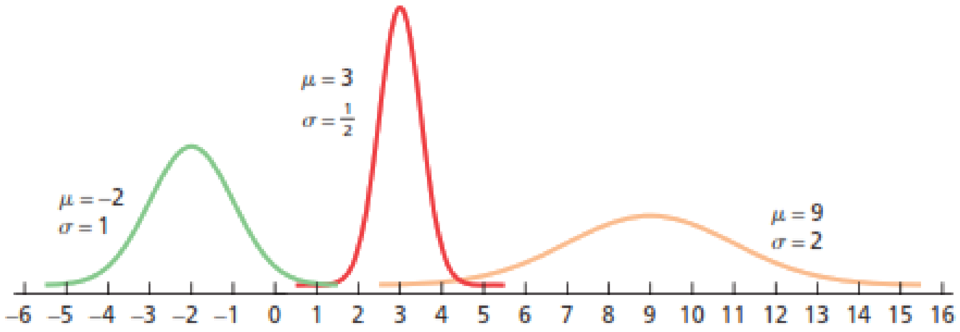
Definisi Kurva Normal,
Bila X adalah suatu peubah acak normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2, maka persamaan kurva normalnya adalah

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x-\mu}{\sigma}}, \text{untuk } -\infty < x < \infty$$



Sifat-sifat Kurva Normal

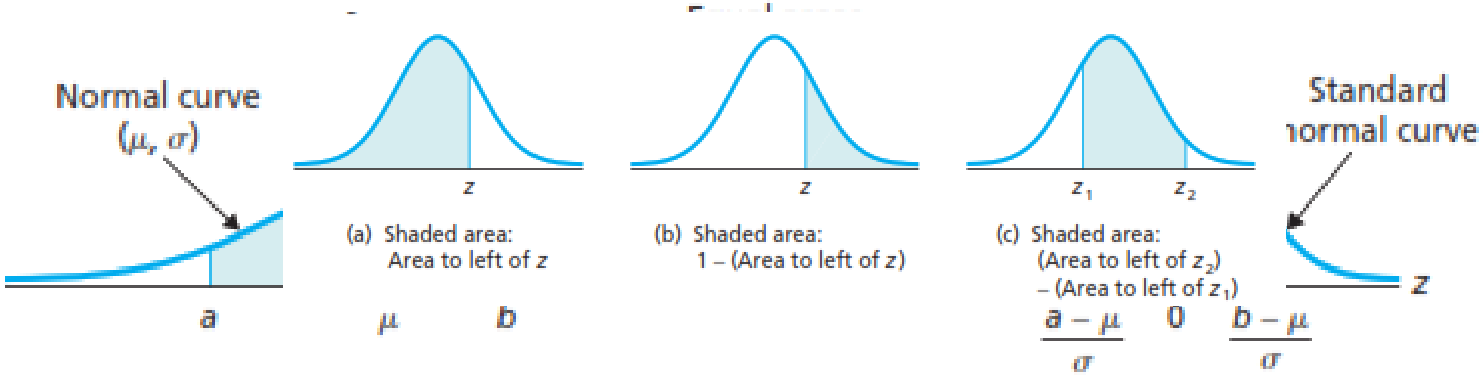
1. *Modusnya*, yaitu terletak pada titik sumbu mendatar yang membuat fungsi mencapai **maksimum.** Terjadi saat $\boldsymbol{x = \mu}$
2. Kurvanya setangkup terhadap suatu garis tegak yang melalui nilai tengah μ.
3. Kurva mendekati sumbu mendatar secara **asimtotik** dalam kedua arah
4. Luas daerah yang terletak di bawah kurva tetapi di atas sumbu mendatar **sama dengan 1.**



Kurva Normal

Untuk dapat mentransformasikan setiap pengamatan yang berasal dari sembarang peubah acak normal X menjadi suatu nilai peubah acak normal Z dengan nilai tengah nol dan ragam 1, dapat dilakukan melalui **transformasi** berikut:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$



Akibatnya, untuk variabel terdistribusi normal, kita dapat menemukan persentase dari semua kemungkinan pengamatan yang terletak dalam rentang tertentu dengan

1. menyatakan kisaran dalam hal skor-z, dan
2. menentukan luas yang sesuai di bawah kurva normal standar.

Kurva Normal

Contoh:

Suatu jenis aki dapat mencapai umur rata-rata 3.0 tahun dengan simpangan baku 0.5 tahun. Bila umur aki itu menyebar secara normal, berapakah peluang bahwa sebuah aki akan mencapai umur kurang dari 2.3 tahun?

Jawab:

Kurva Normal

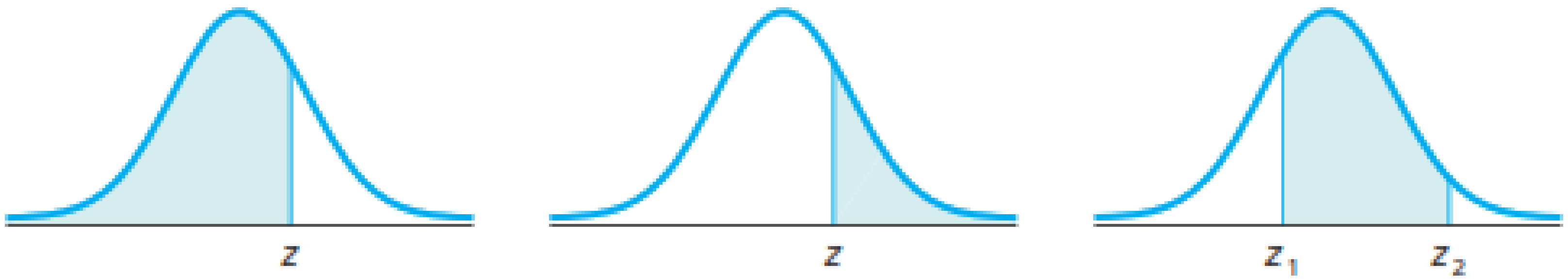
Contoh:
Untuk sebaran normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$ hitunglah peluang bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62?

Jawab:

Contoh:
Untuk sebaran normal dengan $\mu = 300$ dan $\sigma = 50$ hitunglah peluang bahwa X mengambil sebuah nilai yang lebih besar dari 362?

Jawab:

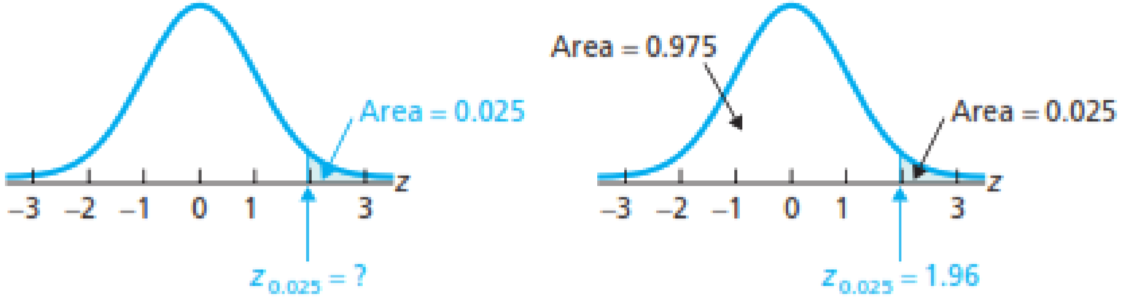
Kurva Normal



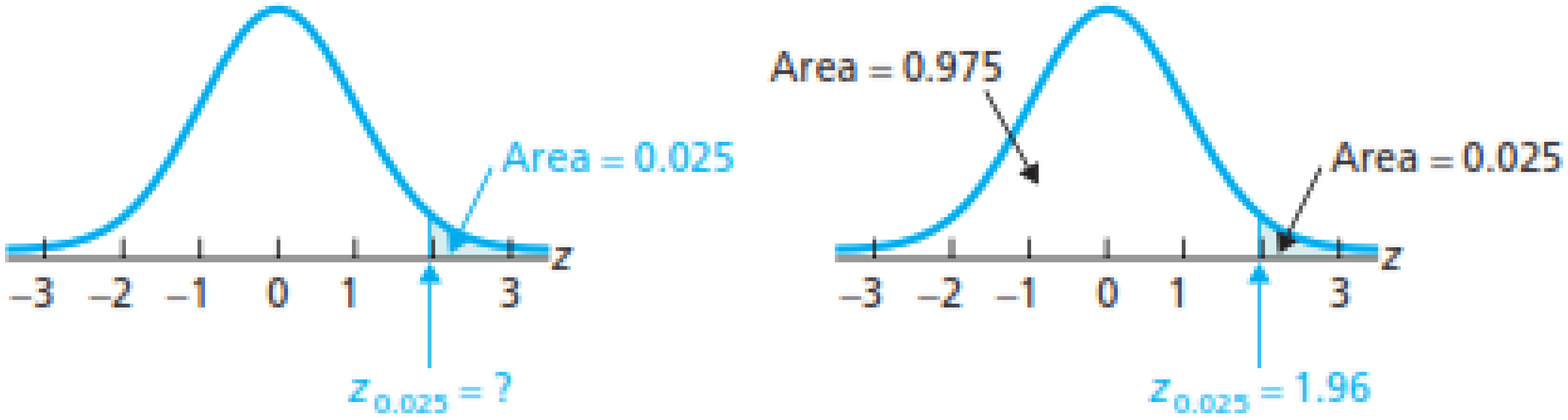
(a) Shaded area:
Area to left of z

(b) Shaded area:
1 – (Area to left of z)

(c) Shaded area:
(Area to left of z_2)
– (Area to left of z_1)



Kurva Normal



Latihan

1. Diberikan sebuah sebaran normal dengan $\mu = 40$ dan $\sigma = 6$. Berapakah nilai luas daerah di bawah 32?
2. Sebuah perusahaan alat listrik memproduksi bohlam yang umurnya menyebar normal dengan nilaitengah 800 jam dan simpangan baku 40 jam. Berapakah peluang sebuah bohlam hasil produksi akan mencapai umur antara 778 dan 834?
3. Rata-rata tinggi anjing pudel jenis tertentu adalah 30 cm dan simpangan bakunya 4.1 cm. Berapa presentase banyaknya anjing pudel jenis tersebut yang tingginya melebihi 35 cm? (bila ketinggian anjing tersebut berdistribusi normal dan dapat diukur sampai ketelitian tertentu)

Kasus (Pengantar)

Misalkan kamu bertanya pada 10 orang dari satu kelas terkait nilai statistik mereka. Ternyata rata-rata nilai mereka adalah 80. Selanjutnya kamu memperkirakan bahwa rata-rata nilai statistic di kelas adalah 75-85.

Kasus tersebut dapat diasumsikan sebagai berikut:

Populasi: nilai seluruh mahasiswa statistic di kelas

Sampel: nilai 10 orang teman

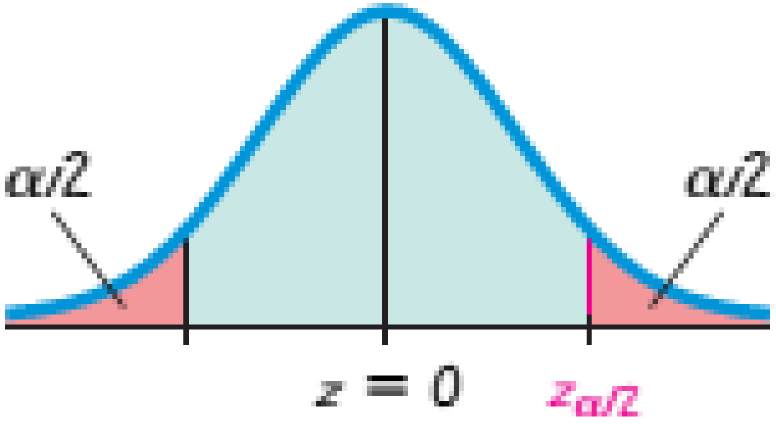
$\bar{x} = 80$

Estimasi $\mu = 75.5 - 85$

Rata-rata sampel biasanya **tidak sama** dengan rata-rata populasi; umumnya terjadi kesalahan sampling. Oleh karena itu, kita harus melengkapi setiap estimasi titik dengan informasi yang **menunjukkan keakuratan estimasi** tersebut. Informasi ini disebut **penduga interval kepercayaan**

Interval Konfidensi Rata-rata

Suatu interval estimasi rata-rata populasi (μ) dari rata-rata sampel $(\bar{x})$ dengan suatu level konfidensi $(1-\alpha)$ tertentu.



Level konfidensi: tingkat keakuratan

Biasanya $90\%, 95\%, 99\%$ $(\alpha = 10\%, 5\%, 1\%)$

100% berarti data populasi

Menginterpretasikan peluang atau daerah pada distribusi normal

Estimasi Rata-rata Populasi ($\boldsymbol{\sigma}$ diketahui)

Selang Kepercayaan bagi $\boldsymbol{\mu}$: $\boldsymbol{\sigma\ diketahui}$

Bila $\bar{\boldsymbol{x}}$ adalah nilai tengah acak yang berukuran n yang diambil dari suatu populasi dengan σ yang diketahui, maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \ (z_{-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}})$$

Hal yang perlu diperhatikan:

Distribusi normal

Akan baik jika banyak sampel, $n > 30$

σ diketahui

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- $z_{-\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$
- $\Leftrightarrow \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \ (z_{-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}})$

Menentukan Estimasi

Tentukan $\sigma, \bar{x}, n, \alpha$ (diketahui)

Hitung $z_{\alpha/2}$

Hitung $\mathrm{E} = z_{-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Estimasi: $\bar{x} - E \leq \mu \leq \bar{x} + E$

Contoh

Diketahui rata-rata data dari 40 sampel tinggi badan pemain basket adalah $172{,}55$. Jika diketahui $\sigma = 26$ dan taraf konfidensi 95%, tentukan estimasi dari rata-rata populasi tinggi badan pemain basket!

Penyelesaian:

$n = 40, \bar{x} = 172{,}55\,, \sigma = 26, \alpha = 5\%$

$z_{0.025} = 1{,}96$

$\mathrm{E} = z_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\,\frac{26}{\sqrt{40}} = 8{,}06$

Estimasi: $\bar{x} - E \leq \mu \leq \bar{x} + E$

$$172{,}55 - 8{,}06 \leq \mu \leq 172{,}55 + 8{,}06$$
$$164{,}49 \leq \mu \leq 180{,}61$$

Estimasi Rata-rata Populasi (σ tak diketahui)

Hal yang perlu diperhatikan:

Distribusi t

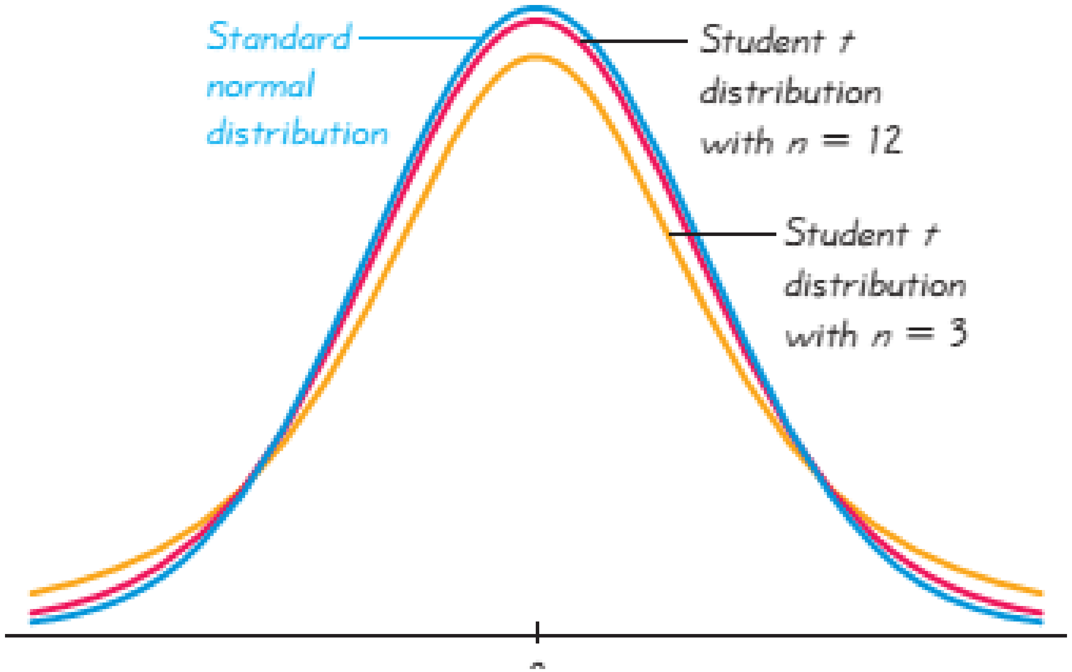
Akan baik jika banyak sampel, $n > 30$

σ tak diketahui maka gunakan s

$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$

- $t_{-\frac{\alpha}{2}} \leq t < t_{-\frac{\alpha}{2}}$
- $\Leftrightarrow \bar{x} - t_{-\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} - t_{-\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}}$

Hubungan t dan z



Menentukan Estimasi

Tentukan $\sigma, \bar{x}, n, \alpha$ (diketahui)

Derajat kebebasan $n - 1$

Hitung $t_{\alpha/2}$

Hitung $\mathrm{E} = t_{-\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}}$

Estimasi: $\bar{x} - E \leq \mu \leq \bar{x} - E$

Contoh

Diketahui data pengaruh bawang terhadap perubahan kolesterol LDL adalah sebagai berikut: $n = 49, \bar{x} = 0.4, s = 21$. Dengan taraf konfidensi 95%, tentukan estimasi dari rata-rata populasi pengaruh bawang terhadap perubahan kolesterol LDL!

Penyelesaian:

$n = 49, \bar{x} = 0.4, s = 21, \alpha = 5\%$

Derajat kebebasan $= 49 - 1 = 48$. (Karena tidakada pada tabel, dipilih 50)

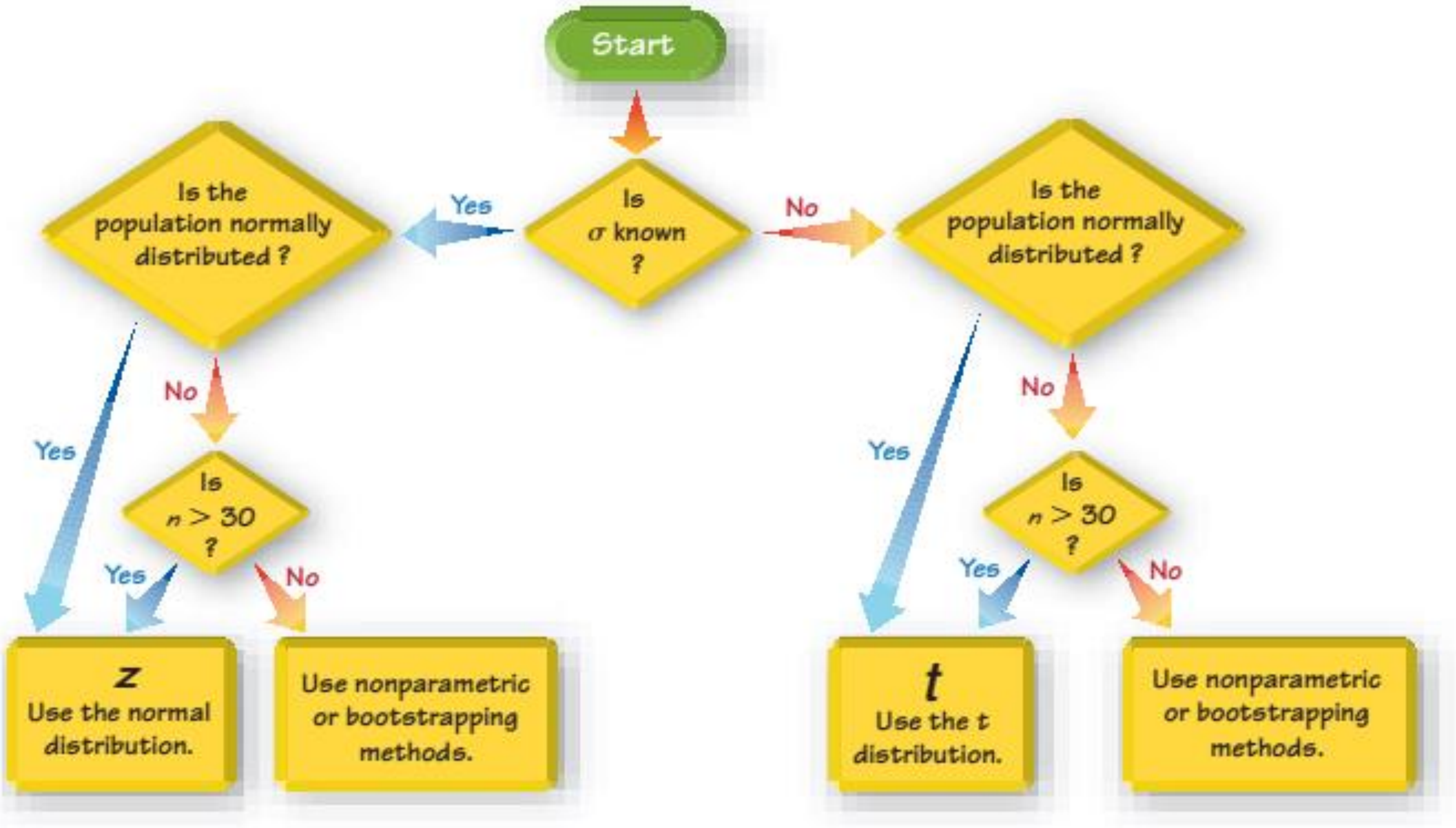
$t_{0.025} = 2{,}01$

$\mathrm{E} = t_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.01 \frac{21}{\sqrt{49}} = 6.03$

Estimasi: $\bar{x} - E \leq \mu \leq \bar{x} + E$

$$0{,}4 - 6{,}03 \leq \mu \leq 0{,}4 + 6{,}03$$
$$-5{,}63 \leq \mu \leq 6{,}43$$

Estimasi dengan z atau t?



Latihan

1. Lampu jenis P oleh suatu perusahaan dinyatakan dapat bertahan hidup dengan standar deviasi $0{,}5$ tahun. Suatu saat, 100 lampu P diuji, diperoleh rata-rata hidup $3{,}25$ tahun. Tentukan estimasi μ dengan:
   a. Taraf konfidensi 95%
   b. Taraf konfidensi 99%
2. Dari 49 lampu P yang diuji oleh produsen lampu tersebut, diperoleh rata-rata hidup 3.5 tahun dengan standar deviasi $0{,}5$ tahun. Tentukan estimasi μ dengan taraf konfidensi 95%!