

NKPC16题解

南开大学ACM算法协会

May 24, 2020

绝对精度

将一个无限循环小数化简为分数

绝对精度

- 现在只截取循环部分的小数 $n = 0.q_1q_2q_3q_4\dots q_m\dots q_1q_2q_3q_4\dots q_m$
- 假设这个分数的循环节长度为 m ，所以满足方程

$$10^m * n - \overline{q_1q_2q_3q_4\dots q_m} = n$$

- 然后用分数解方程就行，主要用Python，并且处理好行末\n字符

无限空间

计算 n 个平面在空间中最多能划分出几个无限大的空间

无限空间

- 二维找找规律，并且拓展一下到三维，通项公式为

$$a_n = n * (n - 1) + 2$$

- 证明：
- 考虑 $g(n)$ 为二维平面 n 条交点不同的直线形成的无限区域个数
每一条新增直线最多产生两个无限区域，故 $g(n) = 2n$ 。
- 对于新的一个平面，
原有的 $n - 1$ 个平面与之形成的交线在这个平面上
最多形成 $g(n - 1)$ 个无限平面区域
每个无限平面区域与新增的无限空间区域一一对应，
 $f(n) = f(n - 1) + g(n - 1)$

无限空间

- 平面区域到新增空间区域是双射的证明：
- 首先所有无限平面两侧的两个空间一定是无界的，因此肯定有一个新增的无限空间，因此是单射
- 任意一个有限平面区域，如果对应了两个无限区域，那么围成这个有限平面区域的几条线对应的平面，在空间中构成了一个棱柱侧面状，这一定不是最优解，所以最优解中新增的无限空间区域一定对应无限平面区域，因此是满射

FLAG之王2

给出一个DAG，问有多少种拓扑排序

FLAG之王2

- 经典的拓扑计数问题
- NPC的问题，每次枚举入度为0的点拆下来，状压dp转移一下，拆的时候判断一下合法性，每个状态表示当前被拆剩下的点的方案数
- 时间复杂度 $O(n * 2^n)$

能赢吗

给出 n 堆麦子，每堆有 a_i 个麦粒，两人轮流取麦粒，谁先取完谁赢，后手可以先将一粒麦子从一个谷堆转移到另一个谷堆，他有必胜策略吗

能赢吗

- Nim游戏魔改，就是转移之后能不能使得 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$
- 增加或减少1个谷粒会使得二进制的后k位发生变化，
那移动一个谷粒会使n个谷堆数的异或二进制数的连续几个数位变化，
b赢需要n个谷堆异或值二进制数中只能有符合条件的一串连续的1

虫洞

给出一个图，每个顶点有物品，物品有质量，体积，价值，自己的背包有容量限制，通过边时有质量限制，从点1到点n能获得的最大价值。

虫洞

- 图论+背包的题一般都是指数时间复杂度
- 也是用状态压缩表示当前已经拿到的物品，然后用dfs或者bfs在图上遍历搜索，每次更新检测是否合法就行，注意重复状态的检查和自己的大常数
- 时间复杂度 $O(n * 2^n)$

物资分配

需要 n 个物资，有四种资源A,B,C,D可以拿，其中C,D需要拿偶数件，问有多少种方案

物资分配

- 由生成函数的思想，答案为母函数 x^n 项系数
- 4种物资里两种无限制，它们的对应函数为

$$1 + x + (x^2/2!) + \dots = e^x$$

其余两种个数限制为偶数，对应的函数为

$$1 + (x^2/2!) + (x^4/4!) + \dots = (e^x + e^{-x})/2$$

把它们对应的函数乘起来，得到本题的生成函数：

$$\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{4}$$

答案为 x^n 的系数乘以 $n!$ ，为

$$\frac{4^n + 2^{n+1}}{4}$$

- 注意高精度

魔法匹配

给定一个模板串 s ，对每个查询串求 s 上有多少个等长的子串满足本题设定的匹配规则

魔法匹配

- 我们离线处理，对每种查询串的长度分别考虑，首先可以通过滑动窗 $O(n)$ 求出模板串 s 每个该长度的哈希值，然后和每个该长度的查询串比较，得出答案。
- 设查询串长度总和为 L ，可以得出查询串长度的种类是 $O(\sqrt{L})$
- 哈希比较根据不同的方法有 $O(1)$ 和 $O(\log n)$
- 总时间复杂度 $O(n * \sqrt{L} * \log n)$

地下通道的规划

两个排列之间连线，所连接的数字之差的绝对值不能超过4，并且连线不能交叉，端点也不能相交

地下通道的规划

- 先是二维dp
- $f[i][j]$ 表示A的前i和B的前j个点最大连接数量 转移方程

$$f[i][j] = \max(f[i-1][j], f[i-1][j-1], f[i-1][j-1]+1 \text{ if } |A_i - B_j| \leq 4)$$

- 优化之后将 $f[i][j]$ 定义为 A_i, B_j 之间有连线的连线数
- 然后转移公式类似，用线段树或树状数组处理一下即可

我要成为传奇小白

给定一系列字符串，可以将它们首尾相接拼起来，
并且当A串的后缀和B串的前缀相同时，可以自行选择重叠长度

我要成为传奇小白

- 考虑到要拼接的字符串数很小，可以用dp来求解，
因为要每个串都选一次且只选一次，可以看作一个TSP问题，
利用状压dp来求解
- 那么接下来的问题是怎么让拼接的长度最小且不包含负面效果的串，
也就是我们需要知道任意两个串拼起来的花费是多少，
知道了这项就可以直接进行dp求解

我要成为传奇小白

为了进行多字符串匹配，我们需要构建一个AC自动机，要用所有给定的初始字符串与负面效果串构建自动机，但是负面效果的串要做标记。而后在寻找两个串拼起来的花费时利用spfa在构建好的Trie上求解即可
这时要注意把做过标记的负面效果匹配结果筛掉。