

Sommaire

Introduction aux problèmes de lot-sizing

Uncapacitated Lot-Sizing

Lot-sizing avec contraintes environnementales

Motivations et modèles

Problèmes de lot-sizing mono-produit avec contrainte d'émission carbone variable

Le problème ULS avec contrainte d'émission carbone périodique

Problème ULS avec contrainte d'émission carbone cumulative

Problème ULS avec contraintes d'émission carbone globale et glissante

Application

Planification de production avec contraintes environnementales

Safia Kedad-Sidhoum

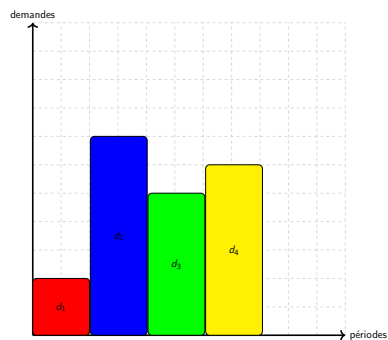
CEDRIC, CNAM

RODD

safia.kedad_sidhoum@cnam.fr

Question

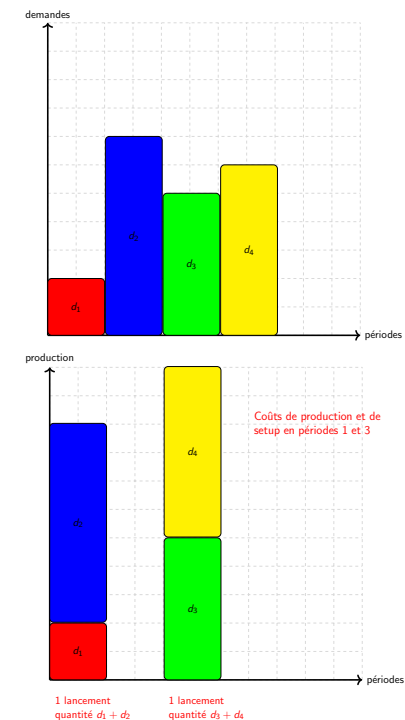
Cas mono-produit



Comment satisfaire cette demande ?

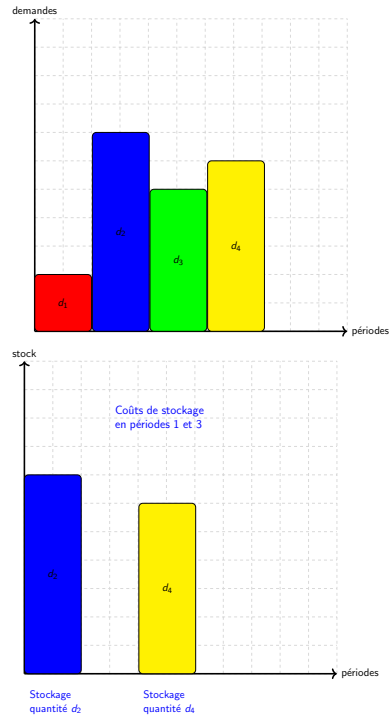
Production

Cas mono-produit



Stock

Cas mono-produit



Objectif

Meilleur **compromis** entre **coûts de production** (fixe et variable) et **coûts de stockage** pour satisfaire la demande.

Uncapacitated Lot-Sizing Problem ULS

Wagner and Whitin, 1958

Article fondateur considéré comme "l'un des 10 articles les plus influents" par les membres d'INFORMS dans le numéro spécial des 50 ans de la revue *Management Science* (2004)

Problème central: Uncapacitated Lot-Sizing (ULS)

Instance

- ▶ d_t demande à la période t .
- ▶ p_t coût unitaire de production à la période t .
- ▶ f_t coût fixe de production à la période t .
- ▶ h_t coût unitaire de stockage à la période t .

Objectif

Calculer un **plan de production** pour un horizon discret à T périodes minimisant le coût total de production et de stockage.

Modélisation ULS - Formulation agrégée (1)

Variables de décision

- ▶ x_t quantité produite à la période t .
- ▶ s_t valeur du stock à la fin de la période t .
- ▶ y_t variable binaire qui vaut 1 s'il y a lancement de production à la période t , 0 sinon.

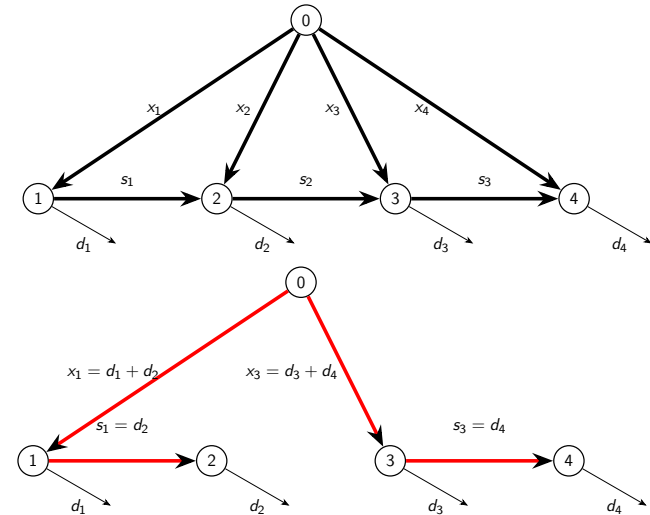
Modélisation ULS - Formulation agrégée (2)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T p_t x_t + \sum_{t=1}^T h_t s_t + \sum_{t=1}^T f_t y_t \\ & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & x_t, s_t \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

► Borne sur x_t : $x_t \leq (\sum_{i=t}^T d_i) y_t$

Réseau de transport à coût fixe

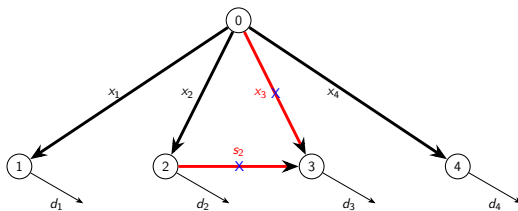
Exemple introductif



Propriété structurelle

Flot extrémal

- Le problème consiste à minimiser une **fonction de coût concave** des flots circulant dans le réseau.
- Une solution optimale correspondant à un point extrême existe.
- Les points extrêmes sont des **arbre-solutions**, ils ne contiennent aucun cycle.



Zero-Inventory-Ordering, ZIO

Algorithme de programmation dynamique (1)

Wagner and Whitin, 1958

- Toute production couvre **un nombre entier** de périodes de demandes.
- Une période de lancement est appelée **point de régénération** (stock entrant nul).
- Toute solution sera définie par un vecteur de points de régénération.

Algorithme de programmation dynamique (2)

Wagner and Whitin, 1958

- Soient t_i et t_{i+1} deux points de régénération consécutifs.

- Coût associé à l'intervalle de régénération $[t_i, t_{i+1}[$

$$g(t_i, t_{i+1}) = \underbrace{f_{t_i}}_{\text{coût de setup}} + \underbrace{p_{t_i} \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} d_j}_{\text{coût de production}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{t_{i+1}-t_i-1} h_{t_i+j-1} \sum_{l=t_i+j}^{t_{i+1}-1} d_l}_{\text{coût de stockage}}$$

- $G(t)$ coût minimum d'un plan de production pour les périodes de t à T .

Récurrance arrière

$$G(t) = \min_{j=t+1, \dots, T+1} \{g(t, j) + G(j)\}$$

Valeur optimale

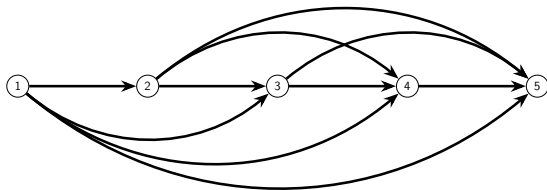
$$G(1)$$

Complexité

$$O(T^2)$$

Autre représentation: plus courts chemins

Exemple introductif



- Coût d'un arc (i, j) : coût fixe à la période i + coût production pour la demande de l'intervalle $[i, j - 1]$ + coût de stockage induit.
- Le problème revient à calculer **plus court chemin** dans le graphe.

Exemple - Programmation Dynamique ULS

- $T = 4$,
- $d = (2, 4, 5, 1)$,
- $p = (3, 3, 3, 3)$,
- $h = (1, 2, 1, 1)$,
- $f = (12, 20, 16, 8)$.

Reformulation (1)

Élimination des variables de stock

- Stock $s_t = \sum_{i=1}^t x_i - \sum_{i=1}^t d_i$
- La fonction objectif peut alors s'écrire:

$$\min \sum_{t=1}^T c_t x_t + \sum_{t=1}^T f_t y_t - K$$

$$c_t = p_t + \sum_{i=t}^T h_i$$

$$K = \sum_{t=1}^T d_t \left(\sum_{i=t}^T h_i \right)$$

Reformulation (2)

Élimination des variables de stock

$$\begin{aligned} \min & \sum_{t=1}^T c_t x_t + \sum_{t=1}^T f_t y_t \\ & \sum_{i=t}^T x_i \geq \sum_{i=t}^T d_i, \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & x_t \leq \left(\sum_{i=t}^T d_i \right) y_t, \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & x_t \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (2)$$

Formulation Facility Location (1)

Idée

On s'intéresse à la **date à laquelle la quantité produite sera consommée** pour satisfaire une demande.

Variables de décision

- ▶ w_{ti} **proportion** de la demande en période i produite à la période t .
- ▶ y_t variable binaire qui vaut 1 s'il y a lancement de production à la période t , 0 sinon.
- ▶ Lien avec les variables agrégées $x_t = \sum_{i=t}^T d_i w_{ti}$

Algorithme de programmation dynamique

... plus rapide

Wagelmans et al., 1992

Reformulation

- ▶ Coût intervalle de régénération $g(t, j) = f_t + c_t \sum_{i=t}^{j-1} d_i$.
- ▶ On pose $G(t) = H(t) + f_t$.

Récurrance arrière

$$H(t) = \min_{j=t+1, \dots, T+1} \left\{ c_t \sum_{i=t}^{j-1} d_i + G(j) \right\}$$

Calcul de $H(t)$

- ▶ Argument géométrique: calcul du minimum à partir de l'enveloppe convexe inférieure des points définis par (demande cumulée, coût G associé).
- ▶ T itérations de coût $\log(T)$ (recherche dichotomique).
- ▶ Algorithme en $O(T \log T)$.
- ▶ Même complexité pour les algorithmes de [Aggarwal and Park, 1990](#) et [Federgruen et Tzur, 1991](#).

Formulation Facility Location (2)

Fonction objectif

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=t}^T c_{ti} w_{ti} + \sum_{t=1}^T f_t y_t$$

Paramètre de coût: $c_{ti} = c_t d_i$

Contraintes

- ▶ Satisfaction de la demande pour toute période t : $\sum_{i=t}^T w_{ti} = 1$
- ▶ Contraintes de bornes: $w_{ti} \leq y_t, \forall i, t, t \leq i$
- ▶ Variables mixtes: $w_{ti} \geq 0, \forall i, t, t \leq i, y_t \in \{0, 1\}, \forall t$

Formulation Facility Location (3)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=t}^T c_{ti} w_{it} + \sum_{t=1}^T f_t y_t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^T w_{ti} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, T \\ & w_{ti} \leq y_t, \quad \forall i, t, t \leq i \\ & w_{ti} \geq 0, \quad \forall i, t, t \leq i \\ & y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Ce que nous avons appris...

- Problème de base ULS
- Formulations ULS
 - Agrégée
 - Localisation (**idéale**)
- Propriété structurelle: dominance des solutions **ZIO**
- Algorithme de programmation dynamique $O(T \log T)$: **problème polynomial**

Formulation idéale (4)

Propriété

La **relaxation linéaire** résout à l'optimum la formulation PLNE précédente.

Idée de la preuve

- **Relaxation Lagrangienne** des contraintes couplant w_{ti} et y_t .
- La solution optimale du dual lagrangien est réalisable pour le problème de départ.
- La solution est donc optimale pour ce dernier.

Sommaire

Introduction aux problèmes de lot-sizing

Uncapacitated Lot-Sizing

Lot-sizing avec contraintes environnementales

Motivations et modèles

Problèmes de lot-sizing mono-produit avec contrainte d'émission carbone variable

Le problème ULS avec contrainte d'émission carbone périodique

Problème ULS avec contrainte d'émission carbone cumulative

Problème ULS avec contraintes d'émission carbone globale et glissante

Application

Introduction

Motivations

Prise en compte **d'aspects environnementaux** dans l'étude des problèmes de planification de production

- ▶ Les législations évoluent pour imposer le contrôle d'émissions carbone dans les activités de production.
- ▶ Les entreprises sont confrontées à de nouvelles contraintes qui les obligent à réduire leurs émissions de gaz à effet de serre.
- ▶ (Nouveau) domaine d'application: **la logistique verte**.
- ▶ (Nouveaux) problèmes de lot-sizing: **green lot-sizing**.

Incidence dans les modèles de lot-sizing

- ▶ Carbon **cap**: contraintes d'émission carbone.
- ▶ Carbon **tax**: composante de coût dans la fonction objectif.
- ▶ Carbon **cap-and-trade**: contraintes d'émission carbone + composante de coût dans la fonction objectif.
- ▶ Carbon **offset**: contraintes d'émission carbone + composante de coût dans la fonction objectif.

Prise en compte d'aspects environnementaux

Différents **modèles** sont proposés:

- ▶ Carbon **cap**: Les émissions sont plafonnées.
- ▶ Carbon **tax**: Une taxe est imposée par unité de CO₂ émise.
- ▶ Carbon **cap-and-trade**: Une taxe est appliquée au delà d'un plafond fixé. Si la consommation est inférieure à ce plafond, les unités de CO₂ peuvent être vendues.
- ▶ Carbon **offset**: Les unités de CO₂ peuvent être achetées auprès de fournisseurs indépendants et/ou en investissant dans des projets visant à réduire les émissions.

Focus: Carbon Cap

- ▶ Nouveaux modèles de lot-sizing intégrant une contrainte limitant la consommation **variable** d'émission carbone.
 - ▶ Analyse de complexité
 - ▶ Propriétés structurelles
 - ▶ Algorithmes polynomiaux
- ▶ Analyse de contraintes d'émission **fixe** pour le cas périodique.

Problèmes de lot-sizing multi-source

- Problèmes de lot-sizing mono-produit **multi-source** sans contrainte de capacité avec **contraintes d'émission carbone**

- Horizon de planification de T périodes.
- M correspond à la combinaison d'un centre de production et d'un mode de transport.
- **Quatre types** of contraintes d'émission carbone.

- **Contraintes d'émission carbone**

- **Périodique**: une limite d'émission carbone est fixée à chaque période.
- **Cumulative**: la quantité d'émissions carbone non utilisée à une période peut être réutilisée à la période suivante.
- **Globale**: étend la contrainte cumulative sur l'horizon de planification.
- **Glissante/Rolling**: la compensation d'émission carbone entre périodes est autorisée sur un horizon glissant de longueur fixe.

Les contraintes périodique et globale sont des cas particuliers de a contrainte d'émission carbone glissante.

Green Lot-sizing

Paramètre **d'émission carbone variable**

Formulations mathématiques

Paramètres

- d_t : demande à la période t .
- $h_t(s)$: coût de stockage de s unités de produit à la période t .
- p_t^m : coût d'approvisionnement unitaire du mode m à la période t .
- f_t^m : coût d'approvisionnement fixe du mode m à la période t .
- e_t^m : Impact environnemental (émission carbone) lié à l'approvisionnement d'une unité de produit avec le mode m à la période t .
- E_t^{\max} : Impact environnemental maximum autorisé à la période t .

Un mode m est dit **écologique** à la période t si $e_t^m \leq E_t^{\max}$.

Variables

- x_t^m : Quantité approvisionnée à la période t avec le mode m .
- y_t^m : Variable binaire égale à 1 si le mode m est utilisé à la période t , 0 sinon.
- s_t : Stock disponible à la fin de la période t pour la période $t + 1$.

Modèle mathématique

Problème ULS mono-produit **multi-source** sans contraintes d'émission carbone

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T (p_t^m x_t^m + f_t^m y_t^m) + \sum_{t=1}^T h_t(s_t) \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{m=1}^M x_t^m - s_t + s_{t-1} = d_t, \quad t = 1, \dots, T \\ & x_t^m \leq \left(\sum_{t'=t}^T d_{t'} \right) y_t^m, \quad t = 1, \dots, T, m = 1, \dots, M \\ & x_t^m \in \mathbb{R}^+, y_t^m \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, m = 1, \dots, M \\ & s_t \in \mathbb{R}^+, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Contraintes d'émission carbone

► Périodique

$$\frac{\sum_{m=1}^M e_t^m x_t^m}{\sum_{m=1}^M x_t^m} \leq E_t^{\max}, \quad t = 1, \dots, T.$$

$$\sum_{m=1}^M (e_t^m - E_t^{\max}) x_t^m \leq 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

► Cumulative

$$\sum_{t'=1}^t \sum_{m=1}^M (e_{t'}^m - E_{t'}^{\max}) x_{t'}^m \leq 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

► Globale

$$\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M (e_t^m - E^{\max}) x_t^m \leq 0.$$

► Glissante/Rolling

Application

Propriétés structurelles des solutions optimales du problème ULS-PC (1)

Théorème 1

Il existe une solution optimale du problème ULS-PC pour laquelle **au plus deux modes** sont utilisés à chaque période: un mode écologique et éventuellement un mode non-écologique.

Schéma de la preuve

- Décomposition de Benders: problème maître (MP) et T sous-problèmes indépendants $IP_t(X_t)$ avec $X_t = \sum_m x_t^m$.
- F_t est l'ensemble des modes écologiques à la période t .

Problème ULS avec contrainte d'émission carbone périodique ULS-PC

$$\sum_{m=1}^M (e^m - E_t^{\max}) x_t^m \leq 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

► Observations préliminaires:

- Si $p_t^{m_1} \leq p_t^{m_2}$ et $e_t^{m_1} \leq e_t^{m_2}$, le **mode m_1 domine le mode m_2** .
- Toute solution du problème ULS-PC utilise **au moins un mode écologique** pour toute période de production.

$$(MP) \left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{t=1}^T z_t^*(X_t) + \sum_{t=1}^T h_t(s_t) \\ \text{s.t.} & X_t - s_t + s_{t-1} = d_t \quad t = 1, \dots, T \\ & X_t = 0 \quad t = 1, \dots, T \text{ tel que } F_t = \emptyset \\ & X_t \in \mathbb{R}^+ \quad t = 1, \dots, T \end{array} \right.$$

avec $z_t^*(X_t)$ valeur optimale du problème $IP_t(X_t)$ fournie par la formulation:

$$(IP_t(X_t)) \left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{m=1}^M (p_t^m x_t^m + f_t^m y_t^m) \\ \text{s.t.} & \sum_{m=1}^M x_t^m = X_t \\ & \sum_{m=1}^M (e_t^m - E_t^{\max}) x_t^m \leq 0 \\ & x_t^m \leq X_t y_t^m \quad m = 1, \dots, M \\ & x_t^m \in \mathbb{Z}^+, y_t^m \in \{0, 1\} \quad m = 1, \dots, M \end{array} \right.$$

Le problème $IP_t(X_t)$ consiste en l'approvisionnement de X_t à la période t au moindre coût tout en garantissant la satisfaction de la contrainte d'émission carbone.

- ▶ Le problème $IP_t(X_t)$ est réalisable si et seulement si au moins un mode écologique est disponible (Contrainte ($F_t = \emptyset \Rightarrow X_t = 0$) dans (MP)).
- ▶ Deux cas doivent être considérés:
 - ▶ Pas de coût de setup:
Relaxation dans $IP_t(X_t)$ de $x_t^m \leq X_t y_t^m$:
Le problème est un PL sur les variables x^m avec uniquement deux contraintes.
Au plus 2 variables seront donc non nulles, une correspondant à un mode écologique et une autre à un mode non-écologique.
 - ▶ Coûts de setup: On peut facilement transformer la solution courante en une solution réalisable de coût inférieur utilisant au plus 2 modes à chaque période en résolvant le problème IP_t avec un sous-ensemble restreint de modes.

Analyse de complexité

Corollaire

- ▶ Le problème de lot-sizing avec contraintes d'émission carbone périodique est polynomial si et seulement si le problème de lot-sizing associé sans contrainte d'émission carbone périodique est polynomial.
- ▶ La complexité algorithmique est accrue d'un facteur M^2 .
- ▶ Restriction: coût d'approvisionnement est une fonction affine.

Propriétés structurelles des solutions optimales du problème ULS-PC (2)

Théorème 2

Le problème ULS-PC peut être reformulé comme un problème de lot-sizing multi-source sans contraintes de capacité avec M^2 modes en $O(M^2 T)$ opérations.

Résolution du problème ULS-PC (1)

Algorithme de programmation dynamique pour le problème ULS-PC

Hypothèse: $h_t(s_t) = h_t s_t$

Théorème 3

Il existe une solution optimale (\hat{x}, \hat{s}) du problème ULS-PC qui satisfait la propriété zero inventory ordering (ZIO) (i.e. $\hat{s}_{t-1} \cdot \sum_{m=1}^M \hat{x}_t^m = 0$ pour $t = 1, \dots, T$).

Principe de l'algorithme

- ▶ Chaque demande est intégralement approvisionnée sur une période,
- ▶ A chaque période t et pour chaque paire de modes m_1 and m_2 , une solution dominante $X_t^{m_1} + X_t^{m_2}$ satisfait la demande $d_{tt'} = \sum_{k=t}^{t'} d_k$,
- ▶ Au plus deux modes sont utilisés à une période donnée.

Résolution du problème ULS-PC (2)

- ▶ Algorithme de **programmation dynamique**, récurrence arrière
 - ▶ $G(t)$: valeur de la solution optimale d'une instance du problème ULS-PC pour l'horizon de planification de t à T avec $t = 1, \dots, T$ ($G(T+1) = 0$).
 - ▶ $H(t, t')$: meilleur coût pour approvisionner $d_{tt'}$ à la période t .
- ▶ $H(t, t')$ peut être calculée en $O(TM^2 \log M + T^2)$ (arguments géométriques).
- ▶ $G(t)$ peut être calculée en $O(T)$ si $H(t, t')$ sont pré-calculés.
- ▶ $G(1)$ (valeur optimale) peut être calculée en $O(T^2)$.
- ▶ La complexité de l'algorithme de programmation dynamique est en $O(TM^2 \log M + T^2)$.

Problème ULS avec contrainte d'émission carbone cumulative ULS-CC

$$\sum_{t'=1}^t \sum_{m=1}^M (e_t^m - E_{t'}^{\max}) x_{t'}^m \leq 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

Théorème 4

Il existe une solution optimale qui utilise **au plus deux modes à chaque période**: un mode écologique et éventuellement un mode non-écologique.

Propriété ZIO

Le **coût de la meilleure solution ZIO** peut être **arbitrairement grand** par rapport au coût d'une solution optimale.

Analyse de complexité du problème ULS-CC

Théorème 5

- ▶ Le problème **ULS-CC** avec paramètres carbone stationnaires et demande unitaires est **NP-difficile**.

Preuve

- ▶ Réduction à partir d'une variante du problème **SubSetSum problem** avec contrainte additionnelle de cardinalité sur la taille de l'ensemble sélectionné.

Soient n objets, chacun de poids w_i , une capacité W et un entier k . Le problème consiste à sélectionner au plus k objets, en autorisant des copies multiples des objets, de façon à ce que le poids total ne dépasse pas W et soit maximisé.

Problème ULS avec contraintes d'émission carbone globale et glissante

Problème ULS-GC (Contrainte globale)

- ▶ ULS-GC est **NP-difficile** (relaxation of the ULS-CC).

Problème ULS-RC (Contrainte glissante)

- ▶ Si $R = 1$, alors le problème ULS-RC correspond au problème ULS-P qui est **polynomial**.
- ▶ Si $R = T$, alors le problème ULS-RC correspond au problème ULS-GC qui est **NP-difficile**.

Application

- ▶ Modélisation de la contrainte **intervalle glissant** (Rolling).
- ▶ A partir de l'instance suivante:
 - ▶ $T = 12$ et $M = 4$.
 - ▶ $E_t^{\max} = 3$.
 - ▶ d_t est générée selon une loi uniforme dans l'intervalle $[20, 70]$.
 - ▶ Les coûts et paramètres d'émission carbone sont stationnaires:
 $f = (10, 30, 60, 90)$, $e = (8, 6, 4, 2)$.
 - ▶ $h_t = 1$ et $p_t^m = 0$ pour tout t .
- ▶ Représenter sur une même figure l'évolution du coût total en fonction de la longueur de l'intervalle ainsi que la valeur de l'émission carbone moyenne en fonction de la longueur de l'intervalle.
- ▶ Analyser les résultats obtenus.
- ▶ Analyser l'impact de l'augmentation de la limite carbone imposée d'une unité sur les résultats précédents.
- ▶ Les conclusions restent-elles valides si le nombre de modes augmente ? si la longueur de l'horizon augmente ?