

RODD : Résolution d'un problème ULS avec contraintes d'émission carbone globale et glissante (Compte-Rendu)

Yohan BORNACHOT, Quentin RAPILLY

March 13, 2022

Abstract

Ce document rend compte de la démarche mise en place pour résoudre le problème posé lors du TP de RODD le mercredi 09 Mars 2022. Pour résoudre ce programme linéaire, nous avons utilisé le langage Julia. Nous avons ensuite étudié l'évolution de l'émission carbone et du coût total en fonction de la longueur d'un intervalle de temps caractéristique du problème (période pour la contrainte glissante). Enfin, après une analyse des résultats, nous avons étudié l'impact de la modification de certains paramètres sur les évolutions des quantités citées précédemment.

1 Rappel du problème

Le problème étudié est un problème de "green lot-sizing", autrement appelé problème ULS avec contraintes d'émission carbone glissante. Ce problème dérive d'un problème de lot-sizing, il en reprend les principaux enjeux, à savoir réaliser le meilleur compromis entre coûts de production et coûts fixes d'une part, et coûts de stockages d'autre part pour satisfaire la demande, tout en rajoutant des considérations écologiques et environnementales sous forme de contraintes.

Tout d'abord, introduisons les différentes variables et paramètres du problème :

- Paramètres :
 - T Horizon de temps, durée de la simulation
 - M Nombre de modes de production différents disponibles
 - d_t Demande à la période t .
 - $h_t(s)$ Coût de stockage de s unités de produits à la période t
 - p_t^m Coût unitaire de production à la période t pour le mode de production m .
 - f_t^m Coût fixe de production à la période t pour le mode m .
 - E_t^{max} Les émissions à la période t sont plafonnées (carbon cap)
 - e_t^m : Impact environnemental (émission carbone) lié à l'approvisionnement d'une unité de produit avec le mode m à la période t .
 - P : La taille de la période glissante.
- Variables de décision :
 - x_t quantité produite à la période t .
 - s_t valeur du stock à la fin de la période t .
 - y_t variable binaire qui vaut 1 s'il y a lancement de production à la période t , 0 sinon.

Le problème se met donc sous la forme suivante, si l'on ne tient pas compte pour le moment de la contrainte d'intervalle glissante :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T (p_t^m x_t^m + f_t^m y_t^m) + \sum_{t=1}^T h_t(s_t) \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{m=1}^M x_t^m - s_t + s_{t-1} = d_t, \quad t = 1, \dots, T \\ & x_t^m \leq \left(\sum_{t'=t}^T d_{t'} \right) y_t^m, \quad t = 1, \dots, T, m = 1, \dots, M \\ & x_t^m \in R^+, y_t^m \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, m = 1, \dots, M \\ & s_t \in R^+, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \tag{1}$$

2 Modélisation de la contrainte d'intervalle glissante (Rolling)

Restent à modéliser les contraintes liées aux enjeux environnementaux, à savoir que les émissions carbone ne doivent pas dépasser E_t^{max} tout au long de la période glissante.

Ainsi, on rajoute la contrainte suivante au problème :

$$\sum_{t'=t}^{\min(T, t+P)} \sum_{m=1}^M (e_{t'}^m - E_{t'}^m) \cdot x_{t'}^m \leq 0 \quad (2)$$

La quantité $\min(T, t+P)$ permet que la période soit tronquée à l'horizon maximal si celle ci dépasse. Ainsi la période glissante rétrécit à l'approche de la fin de l'horizon d'étude.

3 Instance du problème étudiée

Dans notre cas d'application, certaines simplifications ont été effectuées par rapport au problème général. Par soucis de généralité, nous avons fait en sorte que le code résolve n'importe quelle instance de ce problème (donc sans les simplifications explicitées ci-après).

- $T = 12$
- $M = 4$
- $E_t^{max} = 3$
- d_t est générée selon une loi uniforme dans l'intervalle $[20, 70]$.
- Les coûts et paramètres d'émission carbone sont stationnaires: $f = (10, 30, 60, 90)$, $e = (8, 6, 4, 2)$
- $h_t = 1$ et $p_t^m = 0$ pour tout t

4 Evolution du coût total et de l'émission carbone en fonction de la taille de l'intervalle

On affiche ci-après la courbe présentant sur un même graphique l'évolution du coût total en fonction de la taille de la période glissante d'une part, et celle de l'émission carbone moyenne tout au long des étapes de l'autre.

Pour calculer l'émission carbone moyenne, ainsi que le coût total correctement, nous effectuons à chaque fois 100 résolutions du problème en tirant aléatoirement la demande sur les T périodes (la demande suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20;70]$) : nous prenons ensuite la valeur moyenne des deux quantités mesurées sur ces 100 itérations.

Le graphique 1 présente les résultats obtenus en fonction de la taille de la période glissante.

On remarque pour cette instance que le coût total décroît tandis que les émissions carbone moyennes tendent à augmenter à mesure que la taille de la période glissante augmente : cela semble correspondre à ce à quoi nous pourrions nous attendre. Une période plus longue au cours de laquelle les émissions peuvent se compenser permet de mieux adapter la production et donc de mieux répartir les coûts, ce qui tend à expliquer leur plus faible valeur à mesure que la période augmente. L'augmentation de la pollution provient du fait qu'une période glissante plus grande offre plus de flexibilité pour gérer les contraintes de pollution et donc polluer beaucoup plus par moment en le compensant plus tard. Dans le cas où la période glissante est faible on est contraint de moins polluer tout au long de la période mais le fait de devoir répondre à la demande oblige à employer les méthodes moins polluantes quitte à payer plus cher.

On remarque de plus que la pollution moyenne comme le coût total atteint un palier à partir de périodes glissantes de taille 9. En effet, pour des périodes glissantes plus grande, et puisque l'on est borné à un horizon $T=12$, on ne fait que très peu glisser la fenêtre tout au long de la période, ce qui explique que l'on obtienne peu à peu des valeurs similaires lorsque la période devient comparable à l'horizon de temps.

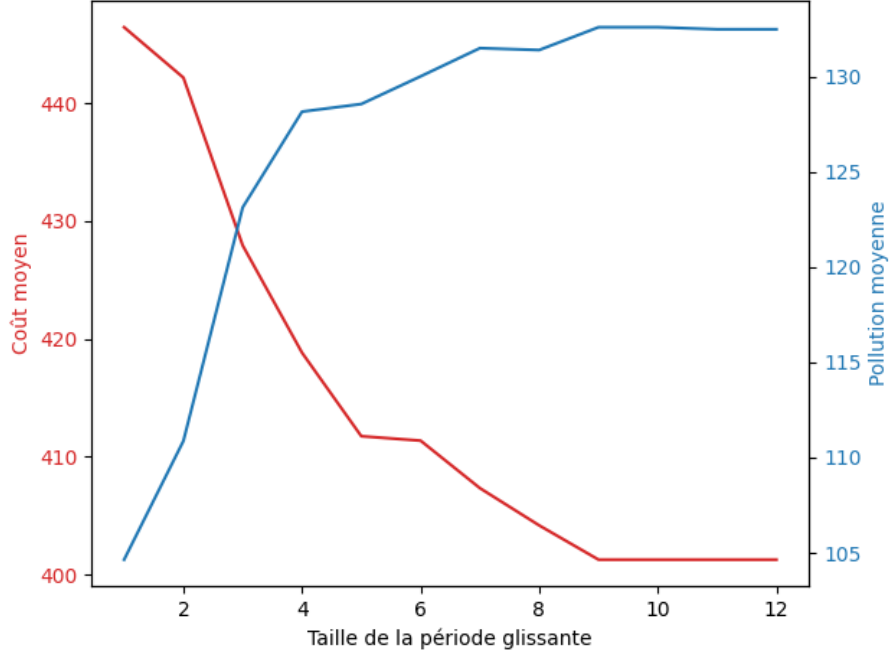


Figure 1: Evolution des coûts et des émissions carbone (instance de base)

5 Impact de l'augmentation de la limite carbone

Dans cette section, nous étudions les mêmes quantités que précédemment, mais en faisant varier la limite maximale d'émission carbone acceptable par jour $E_t^{max} = E$. Dans notre cas, cette valeur est toujours stationnaire. Nous avons effectué des tests pour $E=4$, $E=5$, $E=6$ et finalement $E=7$, les figures 2, 3, 4 et 5 présentant l'évolution des courbes sont affichées ci-après.

On observe de manière générale, à part pour la courbe $E=6$ que nous ne pouvons expliquer, que la tendance est globalement similaire à celle de la courbe précédente pour $E=3$. En effet, les valeurs évoluent comme on pourrait s'y attendre, quand la limite de pollution est moins restrictive, la pollution globale augmente et le coût total diminue.

6 Variations du nombre de modes, de l'horizon de temps

6.0.1 Variation du nombre de modes

Dans cette sous-partie, nous étudions l'influence du nombre de modes de production disponibles sur les quantités étudiées. Nous avons effectué des tests avec $M=2$, $M=4$ (figure disponible dans la section 4), $M=10$ et $M=20$. Nous avons gardés tous les autres paramètres égaux par ailleurs. Il est à noter que les valeurs des vecteurs f (coûts fixes de production pour les différents modes) et e (impact environnemental lié à l'approvisionnement d'une unité via les différents modes de production) influent grandement sur les résultats des tests effectués. Nous les avons fixé sur le schéma type de l'instance proposée pour le cas de base, à savoir que pour des moyens de production dont les coûts fixes sont faibles, la pollution associée est relativement élevée, bref que la pollution est inversement proportionnelle aux coûts fixes des moyens de production proposés.

Dans le cas de figure **M=2**, nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les vecteurs f (coûts fixes des modes de production) et e (impact environnementaux des modes de production) :

- $f = [10, 90]$
- $e = [8, 2]$

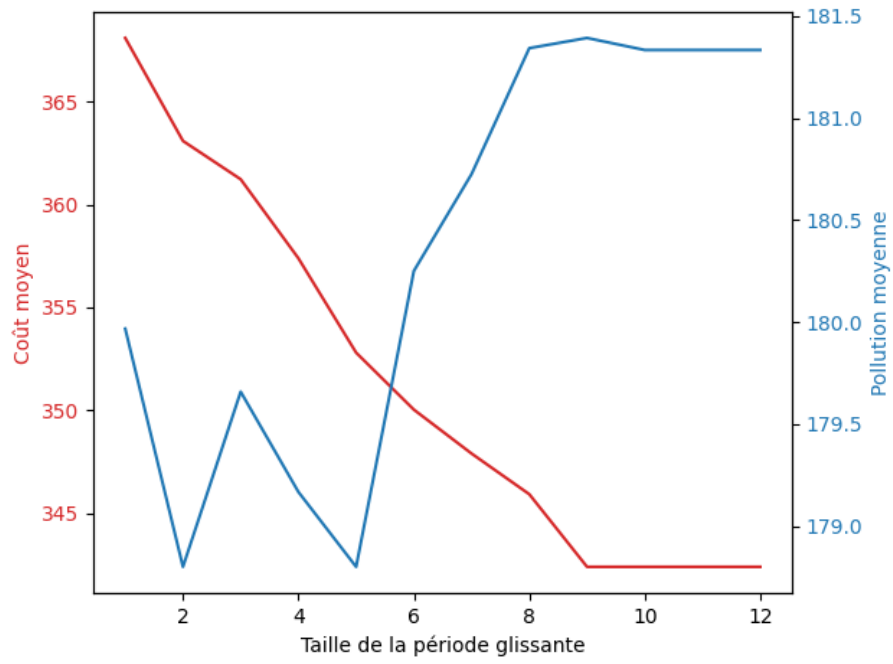


Figure 2: Evolution des coûts et des émissions carbonees (E=4)

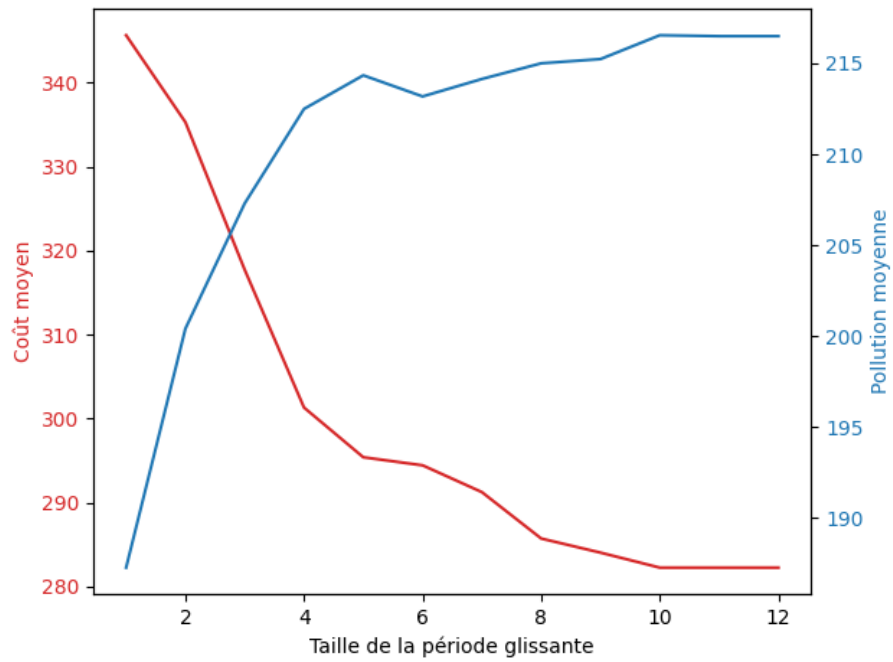


Figure 3: Evolution des coûts et des émissions carbonees (E=5)

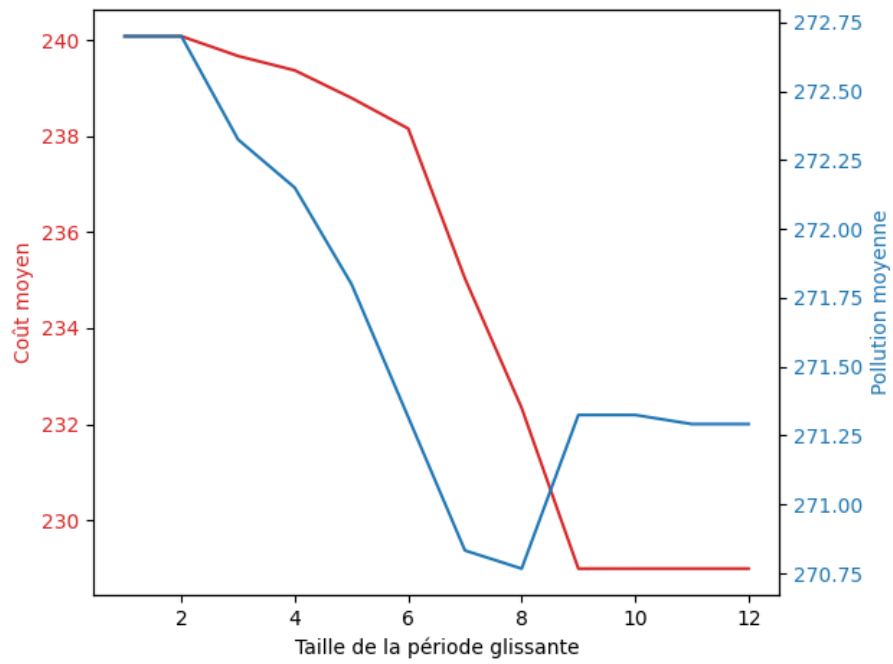


Figure 4: Evolution des coûts et des émissions carbone (E=6)

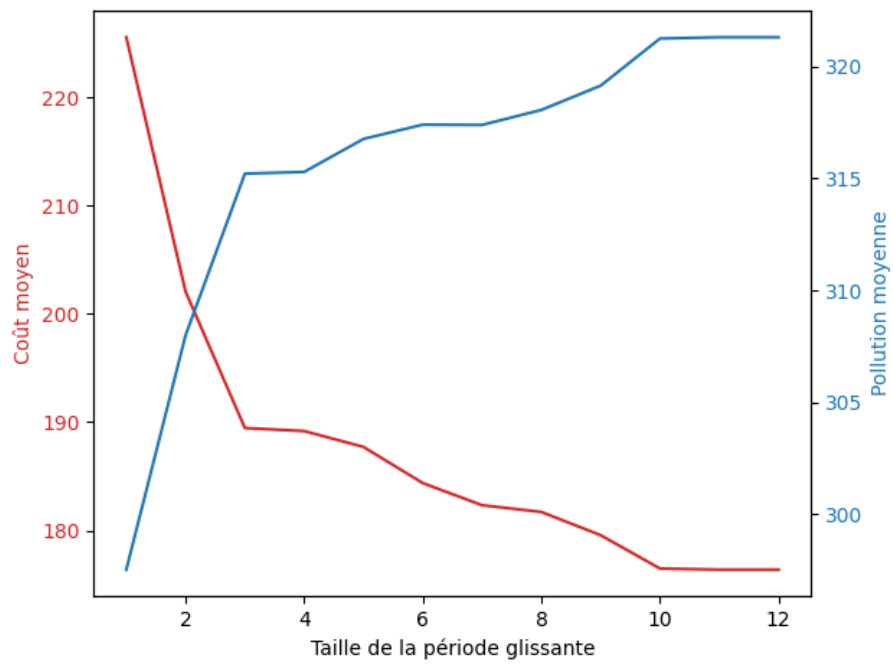


Figure 5: Evolution des coûts et des émissions carbone (E=7)

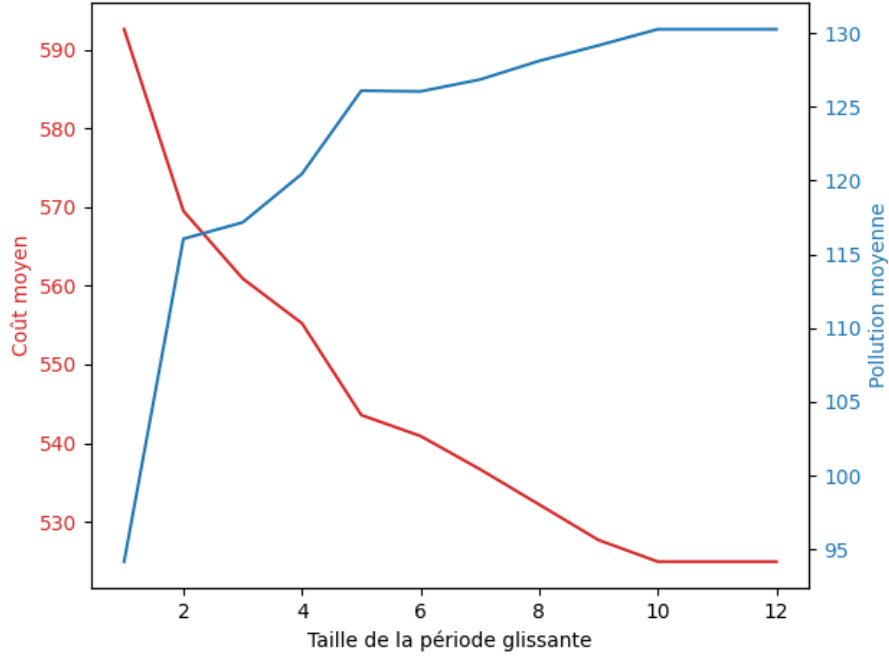


Figure 6: Evolution des coûts et des émissions carbone (M=2)

Les résultats sont disponibles figure 6.

Dans le cas de figure **M=4**, se référer à la figure 1

Dans le cas de figure **M=6**, nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les vecteurs f et e :

- $f = [5, 10, 30, 60, 90, 100]$
- $e = [10, 8, 6, 4, 2, 1]$

Les résultats sont disponibles figure 7.

Dans le cas de figure **M=10**, nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les vecteurs f et e :

- $f = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100]$
- $e = [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$

Les résultats sont disponibles figure 8.

Dans ce cas nous observons à nouveau une tendance très similaire à celle observée dans les précédent. Cependant plus le nombre de moyen de production est grand plus le coût total diminue. Pourtant quelque soit le nombre de moyen de production la production émise reste dans le même ordre de grandeur (valeur qui avoisine les 130 unités en général). Seule la courbe pour $M=10$ est assez chaotique et ne respecte pas cette règle mais son aspect assez désordonnée semble traduire un cas particulier. On peut donc dire qu'augmenter le nombre de moyen de production diminue le coût total et affecte très peu la pollution émise.

6.0.2 Variation de l'horizon de temps

Dans cette sous-partie, nous étudions l'influence de la longueur de l'horizon de temps sur les coûts et la pollution moyenne. Nous avons effectués des tests avec $T=5$, $T=12$ (figure disponible dans la section 4), $T=20$ et $T=30$.

On remarque que les trois courbes ont globalement la même allure, à un facteur d'échelle près. En effet, lorsque l'on augmente l'horizon de temps, on constate que la valeur des coûts totaux est plus conséquente, ce qui peut apparaître logique vu que l'on somme les coûts sur plus de temps. Les coûts

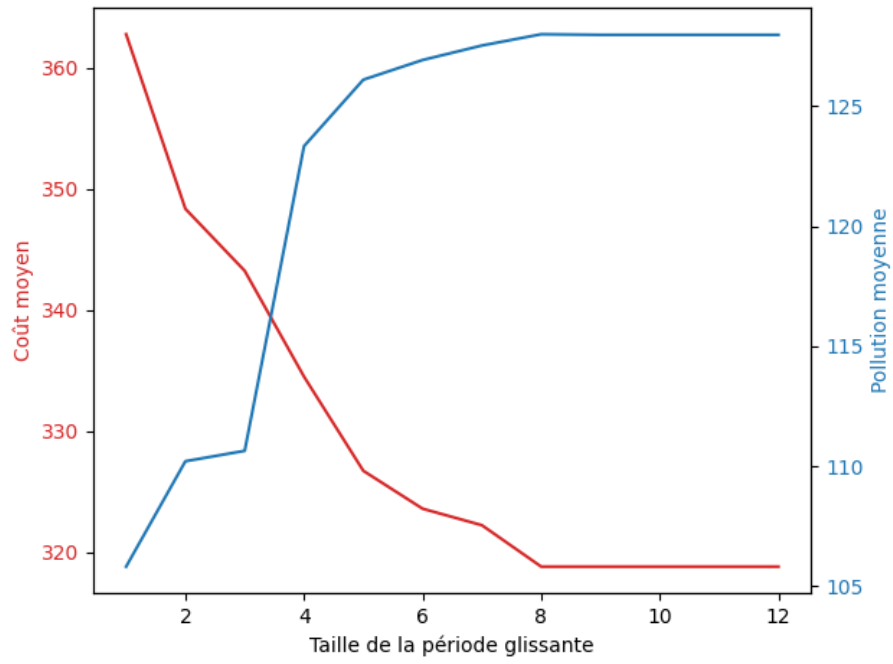


Figure 7: Evolution des coûts et des émissions carbone (M=6)

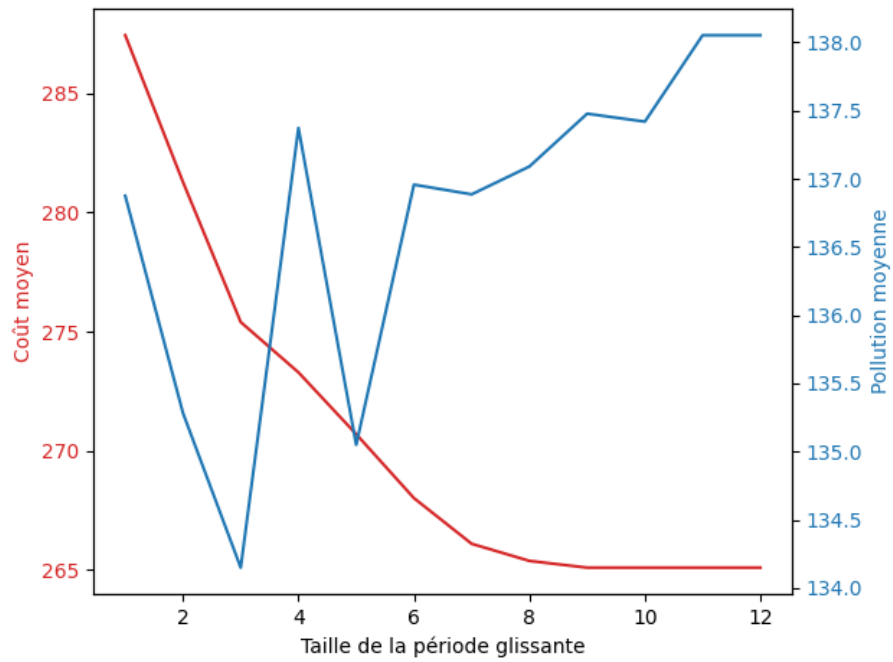


Figure 8: Evolution des coûts et des émissions carbone (M=10)

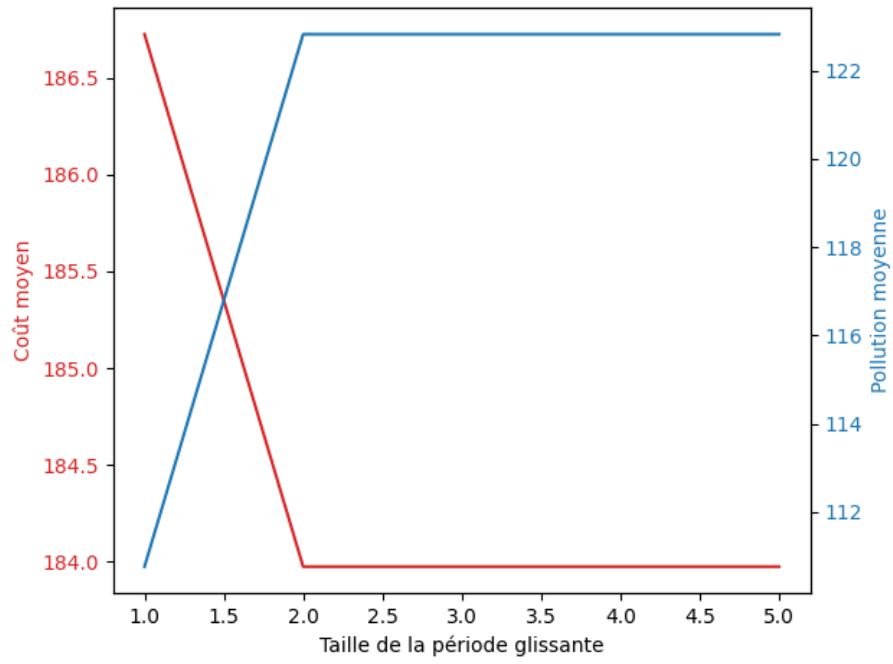


Figure 9: Evolution des coûts et des émissions carbone (T=5)

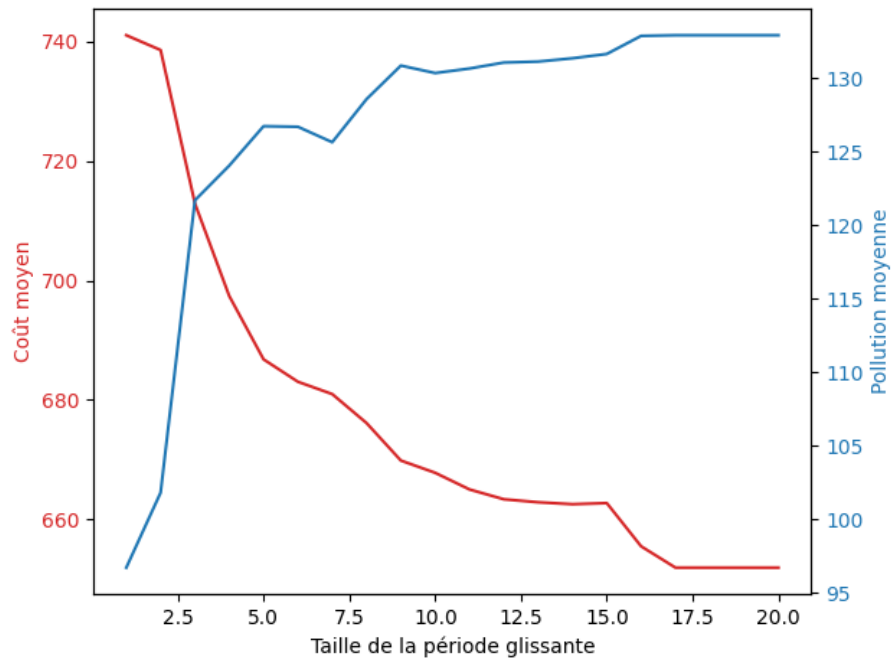


Figure 10: Evolution des coûts et des émissions carbone (T=20)

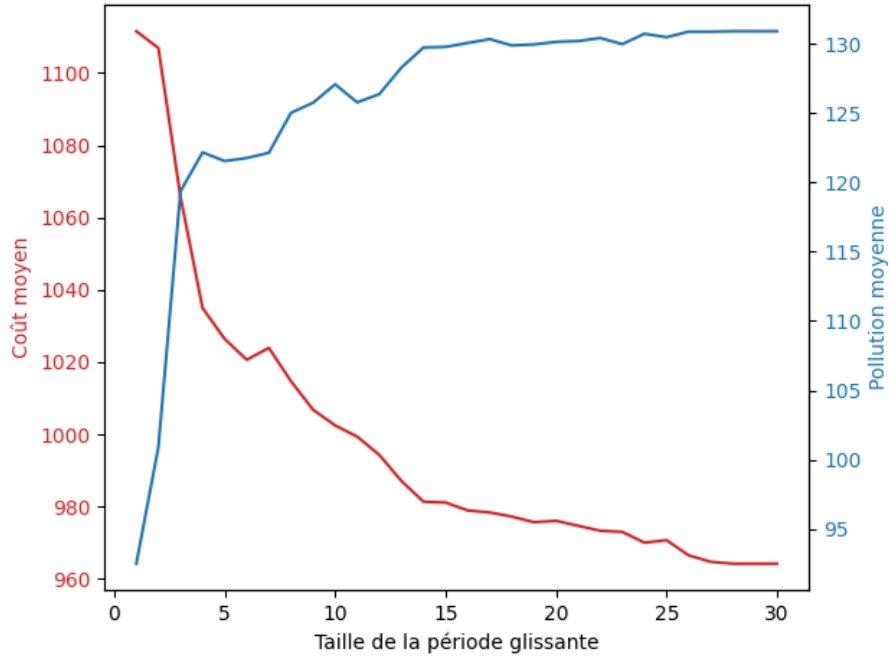


Figure 11: Evolution des coûts et des émissions carbone (T=30)

affichés ne sont donc pas vraiment comparable. En revanche, on peut revenir à l'expression d'un coût moyen unitaire par pas de temps en divisant les valeurs des coûts totaux par le nombre de pas de temps (T). On obtient toujours environ 37 en prenant la valeur extrême du coût total (pour une période glissante de 1 pas de temps). De plus, la pollution moyenne est sensiblement la même (dans une plage de valeurs similaire). On remarque que l'on tend vers une valeur limite de la pollution moyenne à environ 130. On peut donc affirmer que la modification de l'horizon de temps a peu d'influence sur le résultat de la simulation.

7 Conclusion

On observe tout au long de ce compte rendu que le coût décroît avec la taille de la période glissante tandis que la pollution croît. Ainsi, selon si l'on se trouve à la place d'une entreprise qui souhaite réduire ses coûts ou d'une organisation qui veut réduire les émissions, notre intérêt est différent concernant la taille de cette période. (On pourrait espérer vivre dans un monde où toutes les entreprises cherchent avant tout à minimiser leur impact carbone ou du moins le réduire, ce qui tend à devenir l'une des préoccupations majeures de certaines) De même, la quantité E de pollution maximale journalière joue un rôle antagoniste en fonction de la situation depuis laquelle on se place.

En revanche, un nombre de moyen de production important semble réduire les coûts d'une entreprise sans augmenter l'impact environnemental. Cela peut donc être une bonne solution. Cependant, mettre en place plus de moyens de production a également un coût (de recherche et développement, de maintenance, ...) et une étude supplémentaire est nécessaire pour conclure sur le potentiel de cette option. Toutefois, un organisme qui souhaite réduire les impacts environnementaux d'une entreprise peut donc l'inciter à varier ses moyens de production. Les gains obtenus par ce moyen pourront être réinvestis par la suite pour polluer moins si les mesures deviennent plus sévères.

Finalement, l'horizon de temps ne semble pas avoir d'importance à première vue selon notre étude sur les deux grandeurs que nous avons observées.