

# Mesure de Hausdorff et applications

## Projet de recherche (MAT3120L)

Yohan POSÉ (p1907211)

Licence 3 - Mathématiques Générales et Applications,  
Université Claude Bernard Lyon 1

30 juin 2023

# Tables des matières

## 1 Introduction

- Présentation du sujet
- Objectifs

## 2 Problématique

## 3 Méthodologie de recherche

## 4 Résultats importants et retour critique

- Relation entre la mesure de Lebesgue et de Hausdorff
- Relation entre la longueur (resp. l'aire) d'une courbe (resp. surface) et de  $H^1$  (resp.  $H^2$ ) sur  $\mathbb{R}^d$

## 5 Conclusion

## 6 Références

## 7 Questions

# Introduction

## Présentation du sujet

- Définition d'une mesure extérieure.
- Construction de Carathéodory.
- Définition de la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnel.

# Introduction

## Objectifs

- Développer un cadre rigoureux pour définir et manipuler la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnel.
- Définir une notion de dimension géométrique d'une partie.
- Faire le lien entre le paramètre  $s$  de la mesure de Hausdorff et les différentes mesures “usuelles”.

- Comment la mesure de Hausdorff peut-elle être utilisée pour définir la longueur d'une courbe, l'aire d'une surface dans  $\mathbb{R}^d$  ?
- Quelle relation existe entre la mesure de Lebesgue et la mesure de Hausdorff dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  ?

## Quatre axes principaux de ma méthodologie

- ① Lecture des différentes références autour du sujet.
- ② Comparaison des différentes notions utilisées dans chacune des références lues.
- ③ Rédaction des résultats principaux selon mon appréhension de la notion.
- ④ Correction, discussions et amélioration auprès de Mr. Mironescu lors de rendez-vous hebdomadaires.

# Résultats importants

Relation entre la mesure de Lebesgue et de Hausdorff

- Inégalité isodiamétrique de Bieberbach, pour tout borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$\lambda_d(A) \leq \alpha(d) 2^{-d} \text{diam}(A)^d \quad (1)$$

- Égalité isodiamétrique, pour tout borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$\lambda_d(A) = H^d(A) \quad (2)$$

# Résultats importants

Relation entre la longueur (resp. l'aire) d'une courbe (resp. surface) et de  $H^1$  (resp.  $H^2$ ) sur  $\mathbb{R}^d$

- La longueur d'une courbe  $\Gamma$  qui est  $\mathcal{C}^1$ -rectifiable est égale à  $H^1(\Gamma)$ .
- L'aire d'une surface  $\Sigma$  qui est  $\mathcal{C}^1$ -régulière est égale à  $H^2(\Sigma)$ .



# Références I

- [DoC11]   Manfredo P. DoCarmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. 2<sup>e</sup> éd. Dover Publications, 2011. Chap. 1 et 2.
- [DFP11]   Catherine DOSS-BACHELET, Jean-Pierre FRANÇOISE et Claude PIQUET. *Géométrie différentielle avec 80 figures*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 2011. Chap. 1 et 2.
- [Edg08]   Gerald A. EDGAR. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. 2<sup>e</sup> éd. Springer, 2008. Chap. 2, 3, 5 et 6.
- [EG15]   Lawrence C. EVANS et Ronald F. GARIEPY. *Measure Theory and fine properties of functions*. 2<sup>e</sup> éd. CRC Press, 2015. Chap. 1, 2 et 3.
- [Fed69]   Herbert FEDERER. *Geometric Measure Theory*. 2<sup>e</sup> éd. Springer, 1969. Chap. 2 et 3.

# Références II

- [MK61] Umehara MASAAKI et Yamada KOTARO. *Differential geometry of curves and surfaces*. World Scientific, 1961. Chap. 1 et 2.
- [Mat95] Pertti MATTILA. *Geometry of sets and measures in euclidean spaces, Fractals and rectifiability*. Cambridge University Press, 1995. Chap. 2 et 4.
- [Mir20] Petru MIRONESCU. *Mesure et Intégration*. 2020. Chap. 4 et 5.
- [Mor16] Frank MORGAN. *Geometric Measure Theory A Beginner's Guide*. 5<sup>e</sup> éd. Elsevier, 2016. Chap. 2.
- [Rog98] Claude A. ROGERS. *Hausdorff Measures*. 2<sup>e</sup> éd. Cambridge University Press, 1998.

# Références III

- [Tao11] Terence TAO. *An Introduction to Measure Theory*. T. 126. American Mathematical Society, 2011. Chap. 1.7.
- [Tay06] Michael E. TAYLOR. *Measure Theory and Integration*. T. 76. American Mathematical Society, 2006. Chap. 5 et 12.

**Merci pour votre attention.  
Avez-vous des questions ?**