Licence 3 - Mathématiques Générales et Applications
Université Claude Bernard Lyon 1

Yohan POSÉ (p1907211)
30 juin 2023

Mesure de Hausdorff et applications

Projet de recherche (MAT3120L)

Résumé

La mesure de Hausdorff s-dimensionnel dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ est une notion importante en mathématiques, notamment en théorie géométrique de la mesure et en géométrie différentielle (notamment pour définir la notion de volume d'une variété différentielle ou intégré sur une variété). Elle permet de quantifier la taille et la structure d'une partie de $\mathbb{R}^d$, les classifier par rapport à d'autres mesures ou encore de définir une notion géométrique de la dimension compatible avec des constructions fractales souvent pathologiques pour la dimension topologique.

Les applications de cette notion sont nombreuses, notamment en géométrie fractale, en analyse d'images et en théorie des probabilités. Parmi les exemples d'applications, on peut citer l'étude de la rugosité des surfaces, la modélisation de la croissance de cristaux, la prédiction de la formation de fissures dans les matériaux, la classification d'objets dans les images numériques et l'étude des propriétés de convergence des distributions de probabilité.

Table des matières

Introduction

Cadre de travail et notations

Soit d un entier naturel non nul. On travaillera sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ munit de sa structure euclidienne usuel, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $x = (x_j)_{1 \le j \le d}$ et $y = (y_j)_{1 \le j \le d}$, on définit le produit scalaire usuelle de $\mathbb{R}^d$,

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j \quad \text{et} \quad |x| := \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right)^{1/2} \tag{0.1}$$

On définit une distance $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+, (x, y) \longmapsto |x - y|$ dite distance euclidienne qui permet de définir le diamètre d'une partie A de $\mathbb{R}^d$ comme

$$\operatorname{diam}(\mathrm{A}) := \sup_{x,y \in \mathrm{A}} d(x, y) \tag{0.2}$$

(avec la convention naturelle que le diamètre du vide est nul). Une partie A de $\mathbb{R}^d$ est dite bornée si et seulement si $\operatorname{diam}(\mathrm{A}) < +\infty$.

Nous définissons également la distance entre $x \in \mathbb{R}^d$ (resp. $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$) et une partie $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ comme

$$d(x, \mathrm{B}) := \inf_{y \in \mathrm{B}} d(x, y) \quad \text{resp. } d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) := \inf_{x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B}} d(x, y) \tag{0.3}$$

Soit $n \le d$. Pour toute application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\mathrm{d}f_{x_0}$ sa différentielle en x_0 et $\mathrm{J}_f(x_0) \in \mathcal{M}_{n \times d}(\mathbb{R})$ sa matrice jacobienne en x_0. On définit également le coefficient jacobien en x_0 de f comme la racine carrée de la valeur absolue du déterminant de ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{J}_f(x_0)\mathrm{J}_f(x_0)$, que l'on note $\left|\mathrm{J}_f(x_0)\right|$, en d'autres termes :

$$\left|\mathrm{J}_f(x_0)\right| := \sqrt{\left|\det({}^{\mathrm{T}}\mathrm{J}_f(x_0)\mathrm{J}_f(x_0))\right|} \tag{0.4}$$

En particulier si $d = n$, le coefficient jacobien en x_0 de f se réduit à être la valeur absolue du déterminant de $\mathrm{J}_f(x_0)$. Cette « définition » provient essentiellement du fait que ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{J}_f(x_0)\mathrm{J}_f(x_0)$ est une matrice symétrique donc admet une « racine carrée » matriciel on pourra se référer au chapitre 3 de [EG15].

Parlons brièvement de recouvrement d'ensemble qui joue un rôle principal dans ce rapport. Soit J un ensemble d'indices quelconques. Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. On dit qu'une famille de partie $(\mathrm{A}_j)_{j \in \mathrm{J}} \subseteq \mathbb{R}^d$ est :

(i) Un recouvrement de A si,

$$\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j \tag{0.5}$$

(ii) Un recouvrement au plus dénombrable [(1)] de A si,

$$\mathrm{J} \text{ est a.p.d. et } \mathrm{A} \subseteq \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j \tag{0.6}$$

(1). On abrégera a.p.d. pour désigner une partie au plus dénombrable.

On peut améliorer la notion de recouvrement en disant qu'une famille de partie $(\mathrm{A}_j)_{j\in \mathrm{J}} \subseteq \mathbb{R}^d$ est :

(i) Un δ-recouvrement de A pour tout $\delta > 0$, si,

$$(\forall j \in \mathrm{J}) \quad \mathrm{diam}(\mathrm{A}_j) < \delta, \text{ et } \mathrm{A} \subseteq \bigcup_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j \tag{0.7}$$

(ii) Un recouvrement fin de A si chaque point de A est inclus dans au moins un A_j de diamètre suffisamment petit, en d'autres termes,

$$(\forall x \in \mathrm{A})(\forall \varepsilon > 0)(\exists j \in \mathrm{J}) \quad x \in \mathrm{A}_j,\ \mathrm{diam}(\mathrm{A}_j) < \varepsilon, \text{ et } \mathrm{A} \subseteq \bigcup_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j \tag{0.8}$$

De surcroît un recouvrement de A est dit ouvert, fermé, compact, etc... si chacune des parties A_j du recouvrement est un ouvert, fermé, compact, etc... de $\mathbb{R}^d$.

Voici un premier exemple de recouvrement, d'un intervalle I. Soit $a < b$. On considère l'intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$ réel. On peut le recouvrir de nombreuses manières, par exemple on peut considérer un recouvrement mixte (fini) de boule de rayon distinct et de pavé :

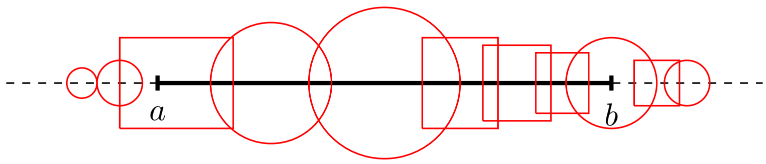


Figure 0.1 : Recouvrement mixte de $[a, b]$ avec $a < b$

Puis on peut également considérer un δ-recouvrement de boule de rayon égaux R (inférieure strictement à δ) :

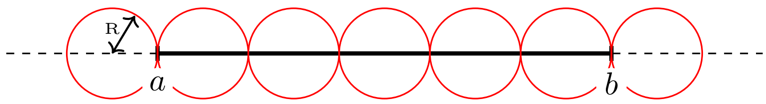


Figure 0.2 : δ-recouvrement de $[a, b]$ avec $a < b$

Considérons maintenant un carré de $\mathbb{R}^2$. Soit $a < b$. On considère $\mathcal{C} = [a, b]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. On peut recouvrir $\mathcal{C}$ par un disque tel que $\mathcal{C}$ est inscrit dans ce disque, quatre disques tels que chaque quart du carré $\mathcal{C}$ est inscrit dans chacun des disques, seize disques tels que chaque quart de chaque quart du carré $\mathcal{C}$ est inscrit dans chacun des disques et etc.

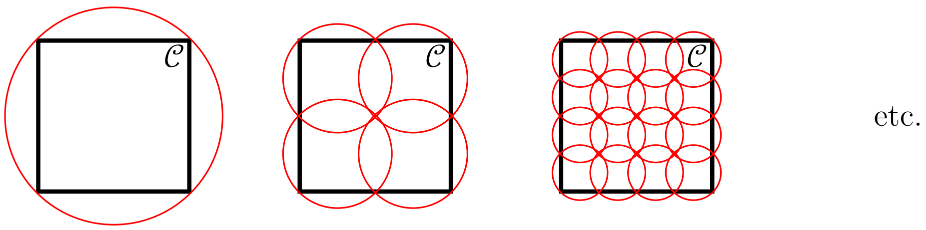


Figure 0.3 : Recouvrement par des boules de rayon qui décroissent de $[a, b]^2$ avec $a < b$

Objectifs

Notre objectif consistera à définir et construire un cadre rigoureux pour définir et manipuler la mesure de Hausdorff s-dimensionnel que l'on notera H^s, ainsi que sa dimension associée, que l'on notera dimH et faire quelques applications de ces concepts.

Nous ferons également le lien entre le paramètre s et certaines valeurs remarquables ($s = 0, 1, 2$, ou d ; ces valeurs correspondront à la mesure de comptage, la longueur d'une courbe, l'aire d'une surface et la mesure de Lebesgue d-dimensionnel). Nous nous contenterons de montrer l'analogie entre la longueur d'une courbe (resp. surface) de classe $\mathcal{C}^1$ et H^1 (resp. H^2) dans $\mathbb{R}^d$. Nous montrerons également que la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ est égale à la mesure de Hausdorff d-dimensionnel, pour ce faire nous montrerons l'inégalité isodiamétrique de Bieberbach et appliquerons le principe de symétrisation de Steiner.

Chapitre 1
Théorie géométrique de la mesure

Soit (X, d) un espace métrique, où X est un ensemble non vide.

1.1 Mesures extérieures et ensembles mesurables

Définition 1.1. (Mesure extérieure) On dit que l'application $\mu^* : \wp(\mathrm{X}) \longrightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure si μ^* vérifie les axiomes suivants :

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \tag{1.1}$$

$$\mu^* \text{ est croissante : } \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \implies \mu^*(\mathrm{A}) \leq \mu^*(\mathrm{B}), \tag{1.2}$$

$$\mu^* \text{ est sous-}\sigma\text{-additive : } (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{X} \implies \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n) \tag{1.3}$$

Remarque 1.1. Pour montrer qu'une application est une mesure extérieure, il suffit de montrer (1.1) et que pour tout recouvrement dénombrable $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{X}$ de A,

$$\mu^*(\mathrm{A}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n) \tag{1.4}$$

Exemple 1.1. La mesure de comptage est un premier exemple de mesure extérieure.

Nous allons donner un premier constructeur de mesure extérieure,

Définition-Proposition 1.2. On définit la restriction de μ^* à A comme l'application

$$\begin{aligned} \mu^*_{\mathrm{A}} : \wp(\mathrm{X}) &\longrightarrow [0, +\infty], \\ \mathrm{B} &\longmapsto \mu^*(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \end{aligned}$$

cette application est une mesure extérieure sur X.

Remarque 1.2. Ainsi pour une mesure extérieure donnée μ^*, on peut créer énormément de mesures extérieures, en restreignant μ^* à une partie de X. Naturellement $\mu^* = \mu^*_{\mathrm{X}}$.

Démonstration (de la proposition 1.2)**.** Comme $\mathrm{A} \cap \emptyset = \emptyset$, (1.1) est évident, on considère un recouvrement dénombrable $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B pour tout $\mathrm{B} \in \wp(\mathrm{X})$, alors $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement dénombrable de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, d'où

$$\mu^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}_n)$$

Ce qui montre (1.4) ∎

Définition 1.3. Soit μ^* une mesure extérieure. On dit qu'une partie A est μ^*-négligeable, si A est de mesure nulle par rapport à μ^*.

Exemple 1.2. Soit $a \in \mathrm{X}$. La masse de Dirac en a que l'on note

$$\delta_a : \wp(\mathrm{X}) \longrightarrow \{0, 1\}, \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(a)$$

est une mesure extérieure. Toute partie A ne contenant pas le point a, est δ_a-négligeable.

Définition-Théorème 1.4. (d'extension de Carathéodory) Soit μ^* une mesure extérieure sur X, on dit que A une partie de X est μ^*-mesurable au sens de Carathéodory si, pour tout $B \subseteq X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A) \tag{1.5}$$

On définit également,

$$\mathcal{A}(\mu^*) := \{A \subseteq X : A \text{ est } \mu^*\text{-mesurable au sens de Carathéodory}\} \tag{1.6}$$

$\mathcal{A}(\mu^*)$ est une tribu sur X et $\mu := \mu^*_{\restriction \mathcal{A}(\mu^*)}$ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A}(\mu^*))$.

Démonstration. cf. Annexe A.1. ■

Remarque 1.3. Intuitivement lorsque l'on souhaite mesurer un ensemble A au sens de Carathéodory, on procède ainsi : on commence par considérer une partie B quelconque de X puis on « découpe » B en deux morceaux disjoints : $B = (B \cap A) \amalg (B - A)$ qui se comportent bien pour la mesure extérieure μ^* dès lors que A est mesurable au sens de Carathéodory. Voici un exemple

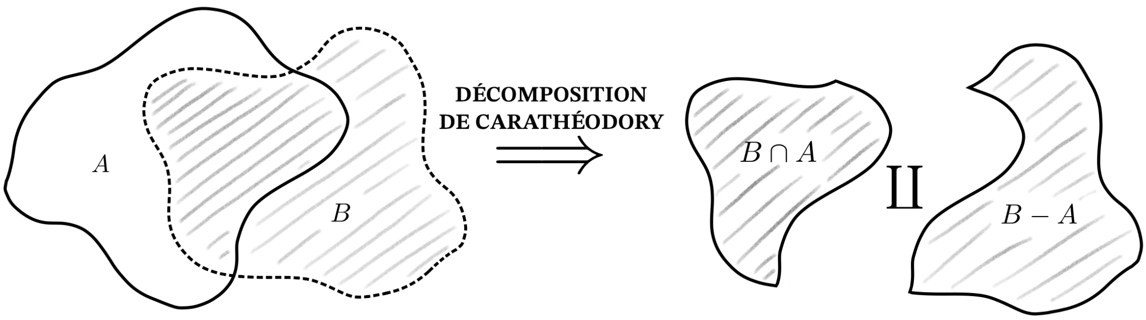


Figure 1.4 : Décomposition d'une partie mesurable au sens de Carathéodory

La figure suggère que le « bord de A dans B » est supposé n'être pas trop « irrégulier » pour que μ^* ne compte aucune masse qui pourrait créer du bruit le long de la découpe de B faite par A et A^C.

Remarque 1.4. Dans la construction « classique » de la théorie de la mesure, on commence par se donner un ensemble X que l'on munit d'une tribu $\mathcal{A}$ puis on construit une mesure μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, ce qui finalement nous donnera un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. De plus, lorsque l'on construit l'intégrale de Lebesgue par rapport à une mesure μ, on est amené à compléter la tribu des boréliens par les parties Borel/Lebesgue-négligeable et alors il n'est pas trivial de définir la tribu de Lebesgue.

Tandis que lorsque l'on construit la théorie géométrique de la mesure, on se donne un ensemble X et on définit une mesure extérieure notons la μ^* sur $(X, \wp(X))$ puis la définition-théorème 1.4 nous fournit une tribu et nous obtiendrons finalement un espace mesuré $(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu)$ où μ est la mesure extérieure μ^* restreinte à la tribu $\mathcal{A}(\mu^*)$ (sous cette forme la construction de la tribu de Lebesgue est alors triviale. On verra cela dans ce qui va suivre).

Lemme 1.1. Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Une partie A de X est mesurable si et seulement si pour tout $B \subseteq X$

$$\mu^*(B) \geq \mu^*_A(B) + \mu^*_{A^C}(B) \tag{1.7}$$

Démonstration. Soit $A \subseteq X$. ($\Rightarrow$) Par définition de la régularité.
($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $B \subseteq X$, on a : $\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A)$. D'autre part par

sous-σ-additivité de μ^*,

$$\mu^*(\mathrm{B}) = \mu^*(\mathrm{B} \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{A}^{\mathrm{C}})) = \mu^*((\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^{\mathrm{C}})) \leq \mu^*(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) + \mu^*(\mathrm{B} - \mathrm{A})$$

Ce qui permet d'affirmer que A est mesurable. ■

Proposition 1.1. Toute partie A de X, μ^*-négligeable est mesurable au sens de Carathéodory.

Démonstration. Soit $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$, alors par monotonie de μ,

$$\mu^*(\mathrm{B}) \leq \mu^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + \mu^*_{\mathrm{A}^{\mathrm{C}}}(\mathrm{B}) \leq \mu^*(\mathrm{A}) + \mu^*(\mathrm{B}) = \mu^*(\mathrm{B})$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque 1.5. Remarquons que comparer à la théorie « habituelle » de la mesure (principalement lors de la construction de la mesure de Lebesgue), on construisait la tribu à l'aide d'un générateur (dans le cas de la mesure de Lebesgue 1-dimensionnel, on considérait les intervalles ouverts), on peut trouver des ensembles A vérifiant $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ avec B qui est négligeable mais A qui n'est pas mesurable (on peut en extraire une tel partie non mesurable du tri-adique de Cantor). On introduisait alors la tribu complétée (ainsi $\mathcal{L}_d$ est le complété de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$). Dans notre nouvelle construction, ce problème n'existe pas en effet d'après la proposition précédente, tous les ensembles négligeables sont mesurables.

Définition 1.5. (Régularité) On dit qu'une mesure extérieure μ^* est régulière, si et seulement si, pour tout $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, il existe une partie B mesurable de X telle que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ et $\mu^*(\mathrm{A}) = \mu^*(\mathrm{B})$.

Remarque 1.6. La partie A n'est pas supposée mesurable.

Notation. Pour toute suite partie $(\mathrm{A}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et une partie A de X, on note $\mathrm{A}_j \nearrow \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{A}_j \searrow \mathrm{A}$) si $\mathrm{A}_j \subseteq \mathrm{A}_{j+1}$ (resp. $\mathrm{A}_{j+1} \subseteq \mathrm{A}_j$) et $\mathrm{A} = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \mathrm{A}_j$ (resp. $\mathrm{A} = \bigcap_{j=0}^{+\infty} \mathrm{A}_j$).

Proposition 1.2. (Parties croissantes) Soit μ^* une mesure extérieure régulière sur X et $\mathrm{A}_n \nearrow \mathrm{A}$ (qui ne sont pas nécessairement mesurables). Alors

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n) \tag{1.8}$$

Démonstration. Par hypothèse, μ^* est régulière et $\mathrm{A}_n \nearrow \mathrm{A}$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe C_n mesurable tel que $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{C}_n$ et $\mu^*(\mathrm{A}_n) = \mu^*(\mathrm{C}_n)$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\mathrm{B}_n := \bigcap_{k=n}^{+\infty} \mathrm{A}_k$, qui est mesurable. D'une part, $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{B}_n \subseteq \mathrm{C}_n$ et donc $\mu^*(\mathrm{A}_n) = \mu^*(\mathrm{B}_n)$. D'autre part, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, tel que $i < j$, $\mathrm{B}_i = \bigcap_{k=i}^{+\infty} \mathrm{A}_k \subseteq \bigcap_{k=j}^{+\infty} \mathrm{A}_k = \mathrm{B}_j$, donc $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*(\mathrm{B}_n) = \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right)$$

Finalement, comme $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{A}$, on obtient l'égalité souhaités par monotonie. ■

Nous allons maintenant nous restreindre au cas des espaces euclidiens $\mathrm{X} = \mathbb{R}^d$, mais ce qui va suivre dans cette section reste vrai dans un espace métrique (séparable).

Définition 1.6. Soit μ^* une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$, alors :

(i) On définit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$, c'est à dire, la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Tout élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ est appelé borélien.

(ii) On dit que μ^* est borélienne si et seulement si tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est mesurable.

(iii) μ^* est Borel-régulière, si pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^d$, il existe un Borélien B tel que $A \subseteq B$ et $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

(iv) μ^* est dite de Radon , si elle est Borel-régulière et si, tout compact K de $\mathbb{R}^d$ est de mesure finie.

Proposition 1.3. Soit μ^* une mesure extérieure Borel-régulière et $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable de mesure finie. Alors la mesure extérieure μ^*_A est une mesure (extérieure) de Radon.

Démonstration. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable de mesure finie. Par hypothèse tous boréliens sont μ^*-mesurables, par application du lemme A.5, ils sont également μ^*_A-mesurables. De plus pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu^*_A(K) \leq \mu^*(A) < +\infty$. Montrons que μ^* est Borel-régulière. Comme μ^* est Borel-régulière, il existe un borélien B tel que $A \subseteq B$ et $\mu^*(A) = \mu^*(B)$, comme A est mesurable on a :

$$\mu^*(A) = \mu^*(B) = \mu^*_A(B) + \mu^*_{A^c}(A) = \mu^*(A) + \mu^*_{A^c}(B)$$

Donc $\mu^*_{A^c}(B) = 0$. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$, on a alors

$$\mu^*_B(C) = \mu^*_B(C \cap A) + \mu^*_B(C - A) \leq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C - A) = \mu^*_A(C) \leq \mu^*_B(C)$$

Donc $\mu^*_A = \mu^*_B$. Ainsi on peut supposer que A est borélien. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$, comme μ^* est Borel-régulière, il existe D borélien tel que $C \cap A \subseteq D$ et $\mu^*_A(C) = \mu^*(D)$. Soit alors $E = D \cup A^\complement$. E est borélien et $C \subseteq (C \cap A) \cup A^\complement \subseteq E$ et $\mu^*_A(E) = \mu^*(D \cap A) \leq \mu^*(D) = \mu^*_A(C) \leq \mu^*_A(E)$. Donc $\mu^*_A(C) = \mu^*_A(E)$ ■

Théorème 1.1. (de Carathéodory) Soit μ^* une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour toutes parties A et B de X tel que $d(A, B) > 0$ on a :

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{1.9}$$

alors μ^* est borélienne.

Démonstration. On admettra ce théorème, cette démonstration sort légèrement de notre cadre d'étude et ce résultat se trouve dans les références suivantes : [EG15], [Tay06] et [Fed69]. ■

Théorème 1.2. (de Besicovitch) Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$, qui est fini sur un cube Q. Alors il existe une suite $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$ de boule ouverte disjointe incluse dans Q tel que

$$\mu\left(Q - \bigcup_{j\in J} B_j\right) = 0 \tag{1.10}$$

Démonstration. Ce résultat sera admis, il est nécessaire pour montrer que la mesure de Hausdorff d-dimensionnel coïncide avec la mesure de Lebesgue d-dimensionnel, c'est un cas particulier du théorème de Besicovitch cf. [EG15] section 1.5, théorème 1.27 ■

1.2 Construction de Carathéodory

Intéressons nous à la construction de mesures extérieures. Pour ce faire, considérons X un ensemble quelconque, on définit $\mathcal{R}$ la famille de partie de X telle que, $\emptyset \in \mathcal{R}$ et $X \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$ pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$. Supposons qu'il existe une application $\rho : \mathcal{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que $\rho(\emptyset) = 0$. Alors on construit l'application $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$, définit pour toute partie $A \subseteq X$ par,

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \rho(A_n) : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ un recouvrement de A par des éléments de } \mathcal{R} \right\} \tag{1.11}$$

Alors μ^* est une mesure extérieure, en effet par construction $\rho(\emptyset) = 0$ donc $\mu^*(\emptyset) = 0$. On suppose $A \subseteq B$ pour deux parties A et B de X, pour tout recouvrement $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B par des éléments de $\mathcal{R}$, on a également $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de A, ainsi

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \rho(B_n)$$

Au passage à la borne inférieure, on a :

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

Par suite, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de partie d'éléments de X. Montrons la sous-σ-additivité de μ^*. Notons $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Soient $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère un sous-recouvrement $(A_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de A_n tel que $\rho(A_{n,j}) \leq \delta$ et

$$\left| \mu^*(A_n) - \sum_{j=0}^{+\infty} \rho(A_{n,j}) \right| \leq 2^{-n}\delta$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par suite $(A_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement au plus dénombrable de A en effet $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{n,j}$ et par hypothèse $\rho(A_{n,j}) \leq \delta$. Pour tout $(n, j) \in \mathbb{N}^2$, on obtient alors,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \rho(A_{n,j}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu^*(A_n) + 2^{-n}\delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) + 2\delta$$

Lorsque $\delta \to 0$,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

Corollaire 1.3. La mesure de Lebesgue λ_d est une mesure extérieure, définit pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^d$ par :

$$\lambda_d(A) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{diam}(Q_n) : (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un recouvrement par des cubes de A} \right\} \tag{1.12}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $\mathcal{R} = \{Q \subseteq \mathbb{R}^d : Q \text{ est un cube de } \mathbb{R}^d\}$ et $\rho = \operatorname{diam}$. ■

Chapitre 2

Mesures de Hausdorff

2.1 Définitions et premières propriétés

On définit pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, tous réels $s \geq 0$ et $\delta > 0$, la δ-mesure de Hausdorff s-dimensionnel comme :

$$\mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A}) := \inf \left\{ 2^{-s}\alpha(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n))^s : (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un } \delta-\text{recouvrement de A} \right\} \tag{2.1}$$

où $\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} > 0$ (voir l'annexe A.2 pour plus de détails sur cette constante qui représente le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^s$ si et seulement si s est un entier naturel). L'application H^s_δ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$. En effet cela résulte immédiatement de la construction de Carathéodory, il suffit de prendre

$$\mathcal{R}(\delta) = \{\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^d : \mathrm{diam}(\mathrm{U}) \leq \delta\} \quad \text{et} \quad \rho^s_\delta : \mathcal{R}(\delta) \to [0, +\infty], \mathrm{U} \mapsto \mathrm{diam}(\mathrm{U})^s$$

dans cette construction.

Lemme 2.1. Pour tous $s \geq 0$, l'application $\delta \mapsto \mathrm{H}^s_\delta$ est décroissante.

Démonstration. Soit $s \geq 0$, on considère $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. Soit $(\mathrm{A}_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ un δ_1-recouvrement de A alors $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_{1,n}$ et $\mathrm{diam}(\mathrm{A}_{1,n}) < \delta_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne $\mathrm{diam}(\mathrm{A}_{1,n}) < \delta_2$ donc $(\mathrm{A}_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un δ_2-recouvrement de A. D'où

$$\mathrm{H}^s_{\delta_2}(\mathrm{A}) \leq 2^{-s}\alpha(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{diam}(\mathrm{A}_{1,n}))^s$$

Au passage à la borne inférieure sur les δ_1-recouvrement de A on a : $\mathrm{H}^s_{\delta_2}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{H}^s_{\delta_1}(\mathrm{A})$ ■

Définition-Théorème 2.1. (Mesures de Hausdorff) Pour tout réel $s \geq 0$, on appelle mesure de Hausdorff s-dimensionnel,

$$\mathrm{H}^s := \lim_{\delta\to 0} \mathrm{H}^s_\delta \tag{2.2}$$

L'application H^s est une mesure extérieure borélienne et régulière.

Lemme 2.2. Pour tout réel $s \geq 0$, tout $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{H}^s(\mathrm{A}) = \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ 2^{-s}\alpha(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{diam}(\mathrm{F}_n))^s : (\mathrm{F}_n)_n \text{ est un } \delta-\text{rec. de fermé de A} \right\} \tag{2.3}$$

Démonstration (du lemme 2.2)**.** Il suffit de remarquer que d'une part pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on a : $\mathrm{diam}(\mathrm{A}) = \mathrm{diam}(\overline{\mathrm{A}})$. D'autre part pour tout δ-recouvrement de A disons $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(\overline{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est δ-recouvrement de fermé de A, montrons ce dernier point, comme $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est δ-recouvrement de A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{diam}(\overline{\mathrm{A}_n}) \leq \delta$ et

$$\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_n}$$

Ce qui permet de conclure. ■

Démonstration (du théorème 2.1)**.** Montrons que l'application H^s est bien définie, d'après le lemme 2.1, soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ fixé, l'application $\delta \mapsto H^s_\delta(A)$ est décroissante et minorée par 0, qui admet donc une limite en 0. Ainsi $H^s(A)$ est bien définie pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^d$, de plus étant donné que H^s_δ est une mesure extérieure, on a lorsque δ tend vers 0 on obtient les inégalités de monotonie et de sous-σ-additivité, ce qui permet d'affirmer la mesure de Hausdorff s-dimensionnel est une mesure extérieure.

Montrons que H^s est borélienne, nous allons appliquer le théorème 1.1 de Carathéodory. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ tels que

$$d(A,B) > 0 \text{ et } 0 < \delta < \frac{d(A,B)}{2}$$

On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement de $A \cup B$, remarquons d'ores et déjà que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvre également A et B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $x \in A_n \cap A$ et $y \in A_n \cap B$, on a $2\delta < d(A,B) \leq |x-y| \leq \mathrm{diam}(A_n) \leq \delta$, ce qui est absurde donc A_n ne peut pas rencontrer simultanément A et B. Notons $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}^* : A_n \cap A \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}^* : A_n \cap B \neq \emptyset\}$ deux parties de $\mathbb{N}$, qui sont au plus dénombrable, il est clair que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{A}} A_n$ et $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}} A_n$, par suite,

$$H^s_\delta(A)+H^s_\delta(B) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n\in\mathcal{A}}(\mathrm{diam}(A_n))^s+2^{-s}\alpha(s)\sum_{n\in\mathcal{B}}(\mathrm{diam}(A_n))^s \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(A_n))^s$$

Au passage à la borne inférieure dans l'inégalité précédente on trouve que :

$$H^s_\delta(A) + H^s_\delta(B) \leq H^s_\delta(A \cup B)$$

Puis au passage à la limite, lorsque $\delta \to 0$, on a : $H^s(A) + H^s(B) \leq H^s(A \cup B)$. Finalement comme H^s est sous-σ-additive, on trouve l'autre inégalité, d'où : $H^s(A) + H^s(B) = H^s(A \cup B)$. Donc H^s est borélienne.

Montrons que H^s Borel-régulière. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ avec $H^s(A) < +\infty$. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $(A_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant,

$$\mathrm{diam}(A_{i,j}) < 2^{-i} \quad \text{et} \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{i,j}$$

et tels que,

$$H^s_{2^{-i}}(A) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(A_{i,n}))^s \leq H^s_{2^{-i}}(A) + 2^{-i}$$

En vertu du lemme 2.2, on peut supposer $(A_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ est un δ-recouvrement de fermés. On pose $B = \bigcap_{i=0}^{+\infty}\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{i,j}$. Il est clair que B est borélien et $A \subseteq B$, de surcroît, $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{i,j}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par suite,

$$H^s_{2^{-i}}(B) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(A_{i,n}))^s \leq H^s_{2^{-i}}(A) + 2^{-i}$$

Lorsque $i \to +\infty$, on en déduit que $H^s(B) \leq H^s(A)$. D'où $H^s(B) = H^s(A)$. ■

Proposition 2.1. H^0 est la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}^d, \wp(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $\delta > 0$ on a : $a \in B(a,\delta)$ tel que $H^0_\delta(\{a\}) \leq \alpha(0) = 1$, lorsque $\delta \to 0$, $H^0(\{a\}) \leq 1$. D'autre part, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un δ-recouvrement de $\{a\}$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a \in \mathrm{A}_{n_0}$ d'où,

$$\alpha(0)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n))^0 \geq \alpha(0)(\mathrm{diam}(\mathrm{A}_{n_0}))^0 = 1$$

Au passage à la borne supérieure sur les δ-recouvrement de $\{a\}$, $\mathrm{H}^0_\delta(\{a\}) \geq 1$ donc lorsque $\delta \to 0$, $\mathrm{H}^0(\{a\}) = 1 = \mathrm{card}(\{a\})$. Soit $\mathrm{A} = \{a_k : 1 \leq k \leq n\}$ un ensemble fini dont tous les éléments sont distincts[(2)],

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{A}) = \mathrm{H}^0\left(\coprod_{k=1}^{n}\{a_k\}\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{H}^0(\{a_k\}) = n = \mathrm{card}(\mathrm{A})$$

Considérons A est une partie infinie dénombrable de $\mathbb{R}^d$, alors $\mathrm{H}^0(\mathrm{A}) = +\infty$, en effet

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{A}) = \mathrm{H}^0\left(\coprod_{n=0}^{+\infty}\{a_n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{H}^0(\{a_n\}) = +\infty = \mathrm{card}(\mathrm{A})$$

Considérons A un ensemble infini non dénombrable alors il existe un ensemble

$$\{a_k \in \mathrm{A} : k \in \mathbb{N}\} \subsetneq \mathrm{A}$$

ainsi par monotonie de la mesure de Hausdorff 0-dimensionnel,

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{A}) \geq \mathrm{H}^0(\{a_k \in \mathrm{A} : k \in \mathbb{N}\}) = +\infty$$

D'où $\mathrm{H}^0(\mathrm{A}) = +\infty = \mathrm{card}(\mathrm{A})$. ■

Proposition 2.2. La mesure de Hausdorff est invariante par translation autrement dit

$$\mathrm{H}^s(\mathrm{A} + x) = \mathrm{H}^s(\mathrm{A}) \tag{2.4}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. Pour tout $\delta > 0$, on considère un δ-recouvrement de A, que l'on note $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il est clair que $(\mathrm{A}_n + x)_{n\in\mathbb{N}}$ est un δ-recouvrement de $\mathrm{A} + x$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{diam}(\mathrm{A}_n + x)$, en effet

$$\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n + x) = \sup_{(y,z)\in(\mathrm{A}_n+x)^2}|y - z| = \sup_{(y,z)\in(\mathrm{A}_n)^2}|(y - x) - (z - x)| = \mathrm{diam}(\mathrm{A}_n)$$

D'où

$$2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n + x))^s = 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n))^s$$

Comme il existe également une bijection : $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \leftrightarrow (\mathrm{A}_n + x)_{n\in\mathbb{N}}$, la borne inférieure sur les δ-recouvrement de $\mathrm{A} + x$ est égale à la borne inférieure sur les δ-recouvrement de A donc $\mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A} + x) = \mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A})$, au passage à la limite, $\mathrm{H}^s(\mathrm{A} + x) = \mathrm{H}^s(\mathrm{A})$. ■

Proposition 2.3. La mesure de Hausdorff est invariante par isométrie affine de $\mathbb{R}^d$ autrement dit

$$\mathrm{H}^s(\Phi(\mathrm{A})) = \mathrm{H}^s(\mathrm{A}) \tag{2.5}$$

pour tous $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$, pour toute isométrie affine Φ.

(2). Si ce n'est pas le cas on peut considérer $\widetilde{\mathrm{A}} = \{a_{k_i} : 1 \leq i \leq m_n\}$ où $m_n \leq n$ qui est un ensemble fini dont tous les éléments sont distincts où l'on a extrait les éléments distincts de A.

Démonstration. Soit Φ, une isométrie affine alors $|\Phi(x)| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$, considérons $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement de A, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{diam}(\Phi(\mathrm{A}_n)) = \sup_{(x,y)\in \mathrm{A}_n^2} |\Phi(x) - \Phi(y)| = \sup_{(x,y)\in \mathrm{A}_n^2} |x - y| = \operatorname{diam}(\mathrm{A}_n)$$

Ainsi $\operatorname{diam}(\Phi(\mathrm{A}_n)) \leq \delta$, de plus $(\Phi(\mathrm{A}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ recouvre $\Phi(\mathrm{A})$. Il vient,

$$\mathrm{H}^s_\delta(\Phi(\mathrm{A})) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{diam}(\Phi(\mathrm{A}_n)))^s = 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{diam}(\mathrm{A}_n))^s$$

D'où $\mathrm{H}^s_\delta(\Phi(\mathrm{A})) \leq \mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A})$. Donc $\mathrm{H}^s(\Phi(\mathrm{A})) \leq \mathrm{H}^s(\mathrm{A})$. D'autre part on a :

$$\mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A}) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{diam}(\mathrm{A}_n))^s = 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{diam}(\Phi(\mathrm{A}_n)))^s$$

Par suite, $\mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A}) \leq \mathrm{H}^s_\delta(\Phi(\mathrm{A}))$, d'où $\mathrm{H}^s(\mathrm{A}) \leq \mathrm{H}^s(\Phi(\mathrm{A}))$. Ce qui conclut la preuve. ■

Proposition 2.4. Pour tout $s \geq 0$. La mesure de Hausdorff s-dimensionnel est s-homogène autrement dit

$$\mathrm{H}^s(\varepsilon \cdot \mathrm{A}) = \varepsilon^s\, \mathrm{H}^s(\mathrm{A}) \tag{2.6}$$

pour tous $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$, où $\varepsilon \cdot \mathrm{A} \coloneqq \{\varepsilon \cdot a : a \in \mathrm{A}\}$.

Démonstration. Soient $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$, on considère $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\frac{\delta}{\varepsilon}$-recouvrement de A, avec $\delta > 0$, ainsi $\operatorname{diam}(\mathrm{A}_n) \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$ et $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$. Remarquons que pour tout $x \in \varepsilon \cdot \mathrm{A}$, il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $x = \varepsilon a$, comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $a \in \mathrm{A}_{n_0}$ (par hypothèse) on obtient $x \in \varepsilon \cdot \mathrm{A}_{n_0}$ d'où $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \varepsilon \cdot \mathrm{A}_n$, de plus $\operatorname{diam}(\varepsilon \cdot \mathrm{A}_n) = \varepsilon \operatorname{diam}(\mathrm{A}_n) \leq \delta$, donc $(\varepsilon \cdot \mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est δ-recouvrement de $\varepsilon \cdot \mathrm{A}$. D'une part,

$$\mathrm{H}^s_\delta(\varepsilon \cdot \mathrm{A}) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^s(\operatorname{diam}(\mathrm{A}_n))^s = \varepsilon^s 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{diam}(\mathrm{A}_n))^s$$

Au passage à la borne inférieure on a : $\mathrm{H}^s_\delta(\varepsilon \cdot \mathrm{A}) \leq \varepsilon^s\, \mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A})$, d'où lorsque $\delta \to 0$,

$$\mathrm{H}^s(\varepsilon \cdot \mathrm{A}) \leq \varepsilon^s\, \mathrm{H}^s(\mathrm{A})$$

D'autre part, $\mathrm{A} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\varepsilon \cdot \mathrm{A})$

$$\varepsilon^s\, \mathrm{H}^s(\mathrm{A}) = \varepsilon^s\, \mathrm{H}^s\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot (\varepsilon \cdot \mathrm{A})\right) \leq \mathrm{H}^s(\varepsilon \cdot \mathrm{A})$$

Ce qui conclut la preuve. ■

Proposition 2.5. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne et $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$, on a $\mathrm{H}^s(f(\mathrm{A})) \leq \operatorname{Lip}(f)^s\, \mathrm{H}^s(\mathrm{A})$.

Démonstration. Soient $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$, soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ une application lipschitzienne. Notons $\operatorname{Lip}(f)$ sa constante de Lipschitz. Pour tout $\delta > 0$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \operatorname{Lip}(f)\,|x - y|$ ainsi au passage à la borne supérieure on a :

$$\operatorname{diam}(f(\mathrm{A})) \leq \operatorname{Lip}(f) \operatorname{diam}(\mathrm{A})$$

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\frac{\delta}{\mathrm{Lip}(f)}$-recouvrement de A, alors $(f(\mathrm{A}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un δ-recouvrement de $f(\mathrm{A})$. Par suite,

$$\mathrm{H}^s_\delta(f(\mathrm{A})) \leq 2^{-s}\alpha(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(f(\mathrm{A}_n)))^s \leq 2^{-s}\alpha(s)\mathrm{Lip}(f)^s\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n))^s$$

Au passage à la borne inférieure on a :

$$\mathrm{H}^s_\delta(f(\mathrm{A})) \leq \mathrm{Lip}(f)^s\,\mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A}) \leq \mathrm{Lip}(f)^s\,\mathrm{H}^s(\mathrm{A})$$

Lorsque $\delta \to 0$, on a :

$$\mathrm{H}^s(f(\mathrm{A})) \leq \mathrm{Lip}(f)^s\,\mathrm{H}^s(\mathrm{A})$$

■

2.2 Relation entre la mesure de Lebesgue et de Hausdorff

2.2.1 Cas unidimensionnel

Définition 2.2. On définit la mesure de Lebesgue unidimensionnel pour tout $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$:

$$\lambda(\mathrm{A}) := \inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{diam}(\mathrm{I}_n) : (\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{un recouvrement par des intervalles de A}\right\} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1. On admettra que la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ est unique.

Proposition 2.6. Si μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que μ est invariante par translations et $[0,1[$ est de mesure finie par rapport à μ. Alors μ est un multiple de la mesure de λ.

Démonstration. Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu(\mathrm{A}+x)$ pour tous $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante C telle que $\mu([0,1[) = \mathrm{C} < +\infty$. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[0,1[= \coprod_{k=0}^{n-1}[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}[= \coprod_{k=0}^{n-1}([0,\tfrac{1}{n}[+\tfrac{k}{n}) \quad \text{donc,} \quad \mathrm{C} = \mu(\coprod_{k=0}^{n-1}([0,\tfrac{1}{n}[+\tfrac{k}{n})) = \sum_{k=0}^{n-1}\mu([0,\tfrac{1}{n}[) = n\mu([0,\tfrac{1}{n}[)$$

D'où $\mu([0,\frac{1}{n}[) = \frac{\mathrm{C}}{n}$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\kappa_n = \sup\{k \geq 0 : \frac{k}{n} \leq x\}$ donc $\frac{\kappa(n)}{n} \to x$ quand $n \to +\infty$, comme $\frac{\kappa(n)}{n} < x$, cela montre que $\bigcup_{n=0}^{+\infty}[0,\frac{\kappa_n}{n}] = [0,x[$. Par suite par construction, $([0,\frac{\kappa_n}{n}])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc,

$$\mu([0,x[) = \lim_{n\to+\infty}\mu([0,\tfrac{\kappa_n}{n}]) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{C}\kappa_n}{n} = \mathrm{C}x = \mathrm{C}\lambda([0,x[)$$

Le fait que μ soit invariante par translation, nous permet d'affirmer que $\mu(\mathrm{I}) = \mathrm{C}\lambda(\mathrm{I})$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$. Donc $\mu = \mathrm{C}\lambda$. Ce qu'il fallait démontrer. ■

Proposition 2.7. La mesure de Hausdorff unidimensionnel coïncide avec la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

Démonstration. On commence par calculer $\mathrm{H}^1([0,1[)$. Soit $\delta_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $([j\delta_n,(j+1)\delta_n[)_{j\in[\![0,n-1]\!]}$, il est clair que $[0,1[\subseteq \bigcup_{j=0}^{n-1}[j\delta_n,(j+1)\delta_n[$ et comme,

$\mathrm{diam}([j\delta_n,(j+1)\delta_n[) = (j+1)\delta_n - j\delta_n = \delta_n$, $([j\delta_n,(j+1)\delta_n[)_{j\in[\![0,n-1]\!]}$ constitue un δ-recouvrement (fini) de $[0,1[$, donc

$$\mathrm{H}^1_{\delta_n}([0,1[) \leq \frac{\alpha(1)}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{diam}([j\delta_n,(j+1)\delta_n[) = n\delta_n = 1$$

En effet $\Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\alpha(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$. Réciproquement, on constate que si $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement par des intervalles de $[0,1[$, alors $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de $[0,1[$. Ainsi,

$$\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{diam}(\mathrm{I}_n) : (\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \delta - \text{un recouvrement par des intervalles de A}\right\}$$
$$\subseteq \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{diam}(\mathrm{I}_n) : (\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{un recouvrement par des intervalles de A}\right\}$$

Au passage à la borne inférieure, d'après (2.7), on a :

$$1 = \lambda([0,1[) \leq \mathrm{H}^1_\delta([0,1[) \leq \mathrm{H}^1([0,1[)$$

Donc $\mathrm{H}^1([0,1[) = 1$. On en déduit par application de la proposition 2.2 et de la proposition 2.6, donc $\mathrm{H}^1 = \mathrm{C}\lambda$. D'où $\mathrm{H}^1([0,1[) = \mathrm{C}\lambda([0,1[)$ ce qui équivaut à $\mathrm{C} = 1$. Donc la mesure de Hausdorff H^1 coïncide avec la mesure de Lebesgue λ sur l'intervalle $[0,1[$, par translation, la mesure de Hausdorff H^1 coïncide avec la mesure de Lebesgue λ sur toutes intervalles de $\mathbb{R}$, donc par unicité de la mesure de Lebesgue, le résultat énoncé est démontré. ■

2.2.2 Généralisation

Définition 2.3. On définit la mesure de Lebesgue d-dimensionnel pour tout $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\lambda_d(\mathrm{A}) := \inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{diam}(\mathrm{Q}_n) : (\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{un recouvrement par des cubes de A}\right\} \tag{2.8}$$

On admettra que $\lambda_d = \lambda_1^{\otimes d} = \bigotimes_{n=1}^d \lambda_1$ et que toute mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ invariante par translation est un multiple de la mesure de Lebesgue d-dimensionnel.

Le but de cette section est de montrer l'inégalité isodiamétrique suivante :

Théorème 2.1. (Inégalité isodiamétrique de Bieberbach) Pour tout borélien A, la mesure de A (par rapport à λ_d) est inférieure à celle de la boule euclidienne de même diamètre que A. Autrement dit

$$\lambda_d(\mathrm{A}) \leq \alpha(d)2^{-d}\,\mathrm{diam}(\mathrm{A})^d \tag{2.9}$$

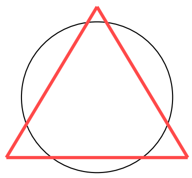
on dira qu'à diamètre fixé, les boules maximisent le volume.

Remarque 2.2.

(i) On constate que $\lambda_d(\mathrm{B}(0,\frac{\mathrm{diam(A)}}{2})) = \lambda_d(\mathrm{B}(0,1))2^{-d}\,\mathrm{diam}(\mathrm{A})^d = \alpha(d)2^{-d}\,\mathrm{diam}(\mathrm{A})^d$, ce fait est prouvé en annexe A.2.

(ii) On peut comparer cet énoncé à celui de l'inégalité isopérimétrique, qui énonce qu'à surface fixée, les boules maximisent le volume.

(iii) L'inégalité isodiamétrique peut paraître évidente à première vue, mais elle ne l'est pas, car un ensemble de diamètre $2\mathrm{R}$ ne peut pas, en général, être inclus dans une boule de rayon R. Par exemple un triangle équilatéral « ne rentre pas » dans un disque de même diamètre.



Notation. Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ des vecteurs, tel que a est unitaire, alors

$$\Lambda_{a,b} := \mathrm{Vect}(a) + b = \{ta + b : t \in \mathbb{R}\} \tag{2.10}$$

$$\Pi_a := a^\perp = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot a = 0\} \tag{2.11}$$

Remarque 2.3. L'ensemble $\Lambda_{a,b}$ représente la droite engendrée par a passant par b dans l'espace $\mathbb{R}^d$. Tandis que Π_a représente l'hyperplan dont la normale est le vecteur a.

Définition 2.4. (Symétrisation de Steiner) Soit $a \in \mathbb{R}^d$ un vecteur unitaire et $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. On appelle symétrisation de Steiner de A par rapport à Π_a l'ensemble :

$$\mathfrak{S}_a(\mathrm{A}) := \bigcup_{\substack{b \in \Pi_a \\ \mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b} \neq \emptyset}} \left\{ ta + b : |t| \leq \frac{1}{2}\mathrm{H}^1(\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}) \right\} = \bigcup_{\substack{b \in \Pi_a \\ \mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b} \neq \emptyset}} \left\{ ta + b : |t| \leq \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}) \right\} \tag{2.12}$$

Remarque 2.4. En d'autres termes, la définition ci-dessus, suggère que lorsque A peut s'écrire comme réunion des $\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}$ (pour tout $b \in \Pi_a$) et $\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}$ est non vide.

On considère la mesure de Hausdorff unidimensionnel de cette union et on le « remplace » par le segment centré en b, de même direction que $\Lambda_{a,b}$, de longueur totale égale à la mesure de Hausdorff unidimensionnel de $\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}$.

Proposition 2.8. Soit $a, b \in \mathbb{R}^d$ des vecteurs, tel que a est unitaire, alors

(i) $\mathrm{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{A})$

(ii) Si A est λ_d-mesurable, alors $\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})$ l'est également. De plus $\lambda_d(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) = \lambda_d(\mathrm{A})$.

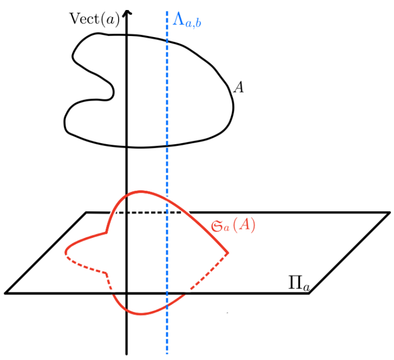


Figure 2.5 : Illustration de la symétrisation de Steiner

Lemme 2.3. Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, +\infty]$, une fonction λ_d-mesurable, alors l'hypographe positif de f est λ_{d+1}-mesurable, autrement dit,

$$\mathrm{Hyp}_f^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{2.13}$$

est λ_{d+1}-mesurable.

Démonstration (du lemme 2.3)**.** Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, +\infty]$, une fonction λ_d-mesurable. On pose

$$g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty], (x, y) \longmapsto f(x) - y$$

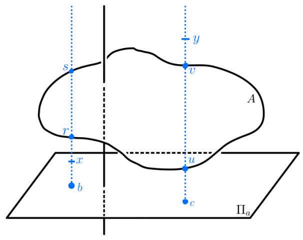
qui est λ_{d+1}-mesurable, en effet, f est λ_d-mesurable et l'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto x - y \in \mathbb{R}$ est λ-mesurable (comme fonction continue), ainsi par composition de fonction mesurable g est λ_{d+1}-mesurable. Par suite,

$$\mathrm{Hyp}_f^+ = g^{-1}\{0\} \cap (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$$

Donc Hyp_f^+ est λ_{d+1}-mesurable. ■

Démonstration (de la proposition 2.8).

(i) Soient $a \in \mathbb{R}^d$ unitaire fixé et $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. Si $\operatorname{diam}(\mathrm{A}) = +\infty$, le résultat est évident. Supposons $\operatorname{diam}(\mathrm{A}) < +\infty$ donc A est borné, donc il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{A} \subseteq \overline{\mathrm{B}}(0, \mathrm{R})$. Si $\operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) = 0$, alors il n'y a rien à montrer. Supposons donc $\operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) \neq 0$. Soit $0 < \varepsilon \leq \operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A}))$ fixé. Soient $x, y \in \mathfrak{S}_a(\mathrm{A})$ tel que $\operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) \leq |x - y| + \varepsilon$ [(3)].



Posons $b := x - (x \cdot a)a$ et $c := y - (y \cdot a)a$ les projections orthogonales de x et y sur Π_a, ainsi $b \cdot a = 0$ (resp. $c \cdot a = 0$) d'où $b, c \in \Pi_a$. Posons

$$\begin{array}{lllclll}
i_{a,b} & := & \inf\{t \in \mathbb{R} : b + ta \in \mathrm{A}\}, & & r & := & b + i_{a,b}a, \\
s_{a,b} & := & \sup\{t \in \mathbb{R} : b + ta \in \mathrm{A}\}, & & s & := & b + s_{a,b}a, \\
i_{a,c} & := & \inf\{t \in \mathbb{R} : c + ta \in \mathrm{A}\}, & & u & := & c + i_{a,c}a, \\
s_{a,c} & := & \sup\{t \in \mathbb{R} : c + ta \in \mathrm{A}\} & \text{et} & v & := & c + s_{a,c}a
\end{array}$$

Par suite, on peut supposer sans perte de généralité que $|s_{a,c} - i_{a,b}| \geq |s_{a,b} - i_{a,c}|$. Il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\mathrm{H}^1(\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}) + \mathrm{H}^1(\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,c})\right) &\leq \frac{s_{a,b} - i_{a,b}}{2} + \frac{s_{a,c} - i_{a,c}}{2} \\
&= \frac{s_{a,c} - i_{a,b}}{2} + \frac{s_{a,b} - i_{a,c}}{2} \\
&\leq |s_{a,c} - i_{a,b}|
\end{aligned}$$

Étant donné que $x, y \in \mathfrak{S}_a(\mathrm{A})$, on a

$$|x \cdot a| \leq \frac{1}{2}\mathrm{H}^1(\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,b}) \quad \text{et} \quad |y \cdot a| \leq \frac{1}{2}\mathrm{H}^1(\mathrm{A} \cap \Lambda_{a,c})$$

Par suite, du fait que $(b - c) \perp (x \cdot a - y \cdot a)a$, on a

$$\begin{aligned}
(\operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) - \varepsilon)^2 &\leq |x - y|^2 = |(b - c) + (x \cdot a - y \cdot a)a|^2 = |b - c|^2 + |x \cdot a - y \cdot a|^2 \\
&\leq |b - c|^2 + (s_{a,c} - i_{a,b})^2 = |b|^2 - 2b \cdot c + |c|^2 + s_{a,c}^2 - 2s_{a,c}i_{a,b} + i_{a,b}^2 \\
&= (|b|^2 + s_{a,c}^2|a|^2) + (|c|^2 + i_{a,b}^2|a|^2) - 2(b \cdot c + s_{a,c}i_{a,b}|a|^2) \\
&= |b + s_{a,c}a|^2 + |c + i_{a,b}a|^2 - 2((b + s_{a,c}a) \cdot (c + i_{a,b}a)) \\
&= |b + s_{a,c}a - (c + i_{a,b}a)|^2 = |r - v|^2
\end{aligned}$$

Étant donné que $r = b + i_{a,b}a$ (resp. $v = c + s_{a,c}a$), il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{A}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{A}$), tel que $r_n \to r$ (resp. $v_n \to v$) quand $n \to +\infty$. Par suite,

$$(\operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) - \varepsilon)^2 \leq |r - v|^2 = \lim_{n\to+\infty} |r_n - v_n|^2 \leq \operatorname{diam}(\mathrm{A})^2$$

Quand $\varepsilon \to 0$, $\operatorname{diam}(\mathfrak{S}_a(\mathrm{A})) \leq \operatorname{diam}(\mathrm{A})$.

(ii) Comme H^1 est invariante par isométrie donc en particulier par rotation et par invariance par translation, il suffit de prendre $a = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$. Ainsi

$$\Pi_a = \Pi_{e_1} = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot e_1 = 0\} = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d : (x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}\} \simeq \mathbb{R}^{d-1}$$

(3). L'existence de x, y vient de la caractérisation « epsilonesque » de la borne supérieure

Le théorème de Tonelli appliqué à la mesure de Lebesgue et à l'application φ, affirme que si $\varphi(b) := \mathrm{H}^1(\mathrm{A} \cap \Lambda_{e_1,b})$ pour tout $b \in \mathbb{R}^{d-1}$, alors φ est λ_{d-1}-mesurable et

$$\lambda_d(\mathrm{A}) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(b)\,\mathrm{d}b$$

Étant donné que

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{e_1}(\mathrm{A}) &= \bigcup_{\substack{b\in\mathbb{R}^{d-1}\\ \mathrm{A}\cap\Lambda_{e_1,b}\neq\emptyset}} \left\{(t,b) \in \mathbb{R}^d : |t| \leq \frac{1}{2}\varphi(b)\right\}\\ &= \left\{(t,b) \in \mathbb{R}^d : |t| \leq \frac{1}{2}\varphi(b)\right\} - \{(b,0) : \mathrm{A} \cap \Lambda_{e_1,b} = \emptyset\}\end{aligned}$$

Le lemme 2.3, affirme que l'hypographe positif de φ est mesurable, ce qui permet d'affirmer que $\mathfrak{S}_{e_1}(\mathrm{A})$ est mesurable et on a :

$$\begin{aligned}\lambda_d(\mathfrak{S}_{e_1}(\mathrm{A})) &= \lambda_d\left(\left\{(t,b) \in \mathbb{R}^d : |t| \leq \frac{1}{2}\varphi(b)\right\}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|t|\leq\frac{1}{2}\varphi(b)\}}(t,b)\,\mathrm{d}(t,b)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{t=-\frac{1}{2}\varphi(b)}^{\frac{1}{2}\varphi(b)} t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}b = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(b)\,\mathrm{d}b = \lambda_d(\mathrm{A})\end{aligned}$$

D'où le résultat.

■

Remarque 2.5. Avant de démontrer le théorème 2.1, de l'inégalité isodiamétrique, donnons une approche plus conviviale de la preuve. Nous allons montrer que si A est inclus dans $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ de même diamètre que A (c'est à dire que $\mathrm{R} = \frac{\operatorname{diam}(\mathrm{A})}{2}$), la conclusion sera immédiate. Ceci n'étant pas vérifié en général, nous allons appliquer plusieurs symétrisations de Steiner à A pour le rendre symétrique par rapport à 0, ce qui permettra de diminuer son diamètre sans changer sa mesure (en vertu de la proposition 2.8), et on pourra conclure ainsi. En effet, l'ensemble obtenu par ces transformations sera inclus dans $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ de même diamètre que A.

Démonstration (du théorème 2.1, de l'inégalité isodiamétrique)**.** Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$. On considère $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$. Si $\operatorname{diam}(\mathrm{A}) = +\infty$, l'inégalité (2.9) est évidente. On peut supposer que A est de diamètre fini. On définit $\mathrm{A}_1 = \mathfrak{S}_{e_1}(\mathrm{A})$, $\mathrm{A}_2 = \mathfrak{S}_{e_2}(\mathrm{A}_1)$, ..., $\mathrm{A}_d = \mathfrak{S}_{e_d}(\mathrm{A}_{d-1})$. Notons $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}_d$. Le diamètre de A^* est alors inférieur ou égal à celui de A et la mesure de Lebesgue de A^* est égale à celle de A, par application itérée de la proposition 2.8 et par construction A^* est symétrique par rapport à Π_{e_j} pour tout $j \in [\![1, d]\!]$. Par suite, $x \in \mathrm{A}^*$ et $-x \in \mathrm{A}^*$ donc $2\,|x| \leq \operatorname{diam}(\mathrm{A}^*)$, ainsi $\mathrm{A}^* \subseteq \mathrm{B}(0, \operatorname{diam}(\mathrm{A}^*)/2)$.

$$\begin{aligned}\lambda_d(\mathrm{A}) = \lambda_d(\mathrm{A}^*) &\leq \lambda_d(\mathrm{B}(0, \operatorname{diam}(\mathrm{A}^*)/2)) = \operatorname{diam}(\mathrm{A}^*)^d 2^{-d} \lambda_d(\mathrm{B}(0,1))\\ &= \alpha(d) \operatorname{diam}(\mathrm{A}^*)^d 2^{-d} \leq \alpha(d) \operatorname{diam}(\mathrm{A})^d 2^{-d}\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration. ■

Remarque 2.6. On peut énoncer une inégalité isodiamétrique plus générale en ne supposant plus que A est un borélien, en effet comme $\lambda_d(\mathrm{A}) = \lambda_d(\overline{\mathrm{A}})$ et que pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, l'adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ est un fermé donc borélien. La principale utilisation de l'inégalité isodiamétrique n'est autre que l'égalité entre la mesure de Hausdorff et la mesure de Lebesgue d-dimensionnel :

Théorème 2.2. Pour toute partie borélienne $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\lambda_d(A) = H^d(A) \tag{2.14}$$

Lemme 2.4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Alors $H^s_\delta(A) = 0$ si et seulement si $H^s(A) = 0$.

Démonstration (du lemme 2.4)**.** Soient $s > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement de A tels que

$$\alpha(s)2^{-s}\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{diam}(A_n)^s \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\operatorname{diam}(A_n) \leq 2(\frac{\varepsilon}{\alpha(s)})^{1/s}$. Comme $2(\frac{\varepsilon}{\alpha(s)})^{1/s} \to 0$, quand $\varepsilon \to 0$ et donc, $H^s_{2(\frac{\varepsilon}{\alpha(s)})^{1/s}}(A) \leq \varepsilon$. D'où $H^s(A) = 0$. Réciproquement si $H^s(A) = 0$, comme nous avons $0 \leq H^s_\delta(A) \leq H^s(A)$, la conclusion est immédiate. ■

Démonstration (du théorème 2.2)**.** Procédons par étape, nous savons d'ores et déjà qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, tel que $H^d(A) = C\lambda_d(A)$. Remarquons que

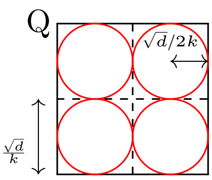
$$H^d([0,1[^d) = C\lambda_d([0,1[^d) = C$$

- **<u>Étape n°1. ($H^d \geq \lambda_d$).</u>** Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un borélien. Soit $\delta > 0$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement de A. Alors par application de l'inégalité isodiamétrique (2.9),

$$\lambda_d(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_d(A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha(d)2^{-d}\operatorname{diam}(A_n)^d$$

  Au passage à la borne inférieure, $\lambda_d(A) \leq H^d(A)$. De ce qui précède on en déduit que $C \geq 1$.

- **<u>Étape n°2. ($H^d \leq \lambda_d$).</u>** Il suffit de montrer que $H^d([0,1[^d) \leq 1$.



Notons $Q = [0,1[^d$. Soit $\delta, \varepsilon > 0$, il existe des cubes $(Q_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ qui constitue un δ-recouvrement ouvert pour tout $k \geq 1$, par des cubes de $[0,1[^d$ telle que $\operatorname{diam}(Q_{n,k}) \leq \delta$, $\frac{\sqrt{d}}{k} < \delta$ et

$$1 = \lambda_d(Q) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_d(Q_{n,k}) \leq \lambda_d(Q) + \varepsilon = 1 + \varepsilon$$ [4]

Le théorème de Besicovitch 1.2 sur chacun des cubes $Q_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$ entraîne qu'il existe une suite $(B_{n,k,j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$ de boules disjointes ouvertes. $B_{n,k,j} \subseteq Q_{n,k}$, d'où $\operatorname{diam}(B_{n,k,j}) \leq \delta$ et

$$\lambda_d\left(Q_{n,k} - \bigcup_{j=0}^{+\infty}B_{n,k,j}\right) = 0$$

Donc

$$H^d\left(Q_{n,k} - \bigcup_{j=0}^{+\infty}B_{n,k,j}\right) = C\lambda_d\left(Q_{n,k} - \bigcup_{j=0}^{+\infty}B_{n,k,j}\right) = 0$$

Par suite, $H^d_\delta\left(Q_{n,k} - \bigcup_{j=0}^{+\infty}B_{n,k,j}\right) = 0$, donc

$$H^d_\delta(Q_{n,k}) \leq \sum_{j=0}^{+\infty}H^d_\delta(B_{n,k,j}) + H^d_\delta\left(Q_{n,k} - \bigcup_{j=0}^{+\infty}B_{n,k,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}H^d_\delta(B_{n,k,j})$$

(4). L'existence d'un tel recouvrement vient de la caractérisation « epsilonesque » de la borne inférieure.

Il vient,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^d_\delta(\mathrm{Q}) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^d_\delta(\mathrm{Q}_{n,k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^d_\delta\left(\coprod_{j=0}^{+\infty} \mathrm{B}_{n,k,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{H}^d_\delta\left(\mathrm{B}_{n,k,j}\right) \\
&\leq \alpha(d)2^{-d}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{diam}\left(\mathrm{B}_{n,k,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_d(\mathrm{B}_{n,k,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_d\left(\coprod_{j=0}^{+\infty} \mathrm{B}_{n,k,j}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_d\left(\mathrm{Q}_n\right) \leq \lambda_d(\mathrm{Q}) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient $\mathrm{C} \leq 1$. Ce qui fallait démontrer.

■

2.3 Dimension de Hausdorff

Lemme 2.5. Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^d$ et $0 \leq s < t < +\infty$. Alors

(i) Si $\mathrm{H}^s(\mathrm{A}) < +\infty$, alors $\mathrm{H}^t(\mathrm{A}) = 0$.

(ii) Si $\mathrm{H}^t(\mathrm{A}) > 0$, alors $\mathrm{H}^s(\mathrm{A}) = +\infty$.

Démonstration. Montrons (i). On suppose que $\mathrm{H}^s(\mathrm{A}) < +\infty$. Soit $\delta > 0$, il existe un δ-recouvrement de A tel que,

$$\mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A}) \leq \mathrm{H}^s_\delta(\mathrm{A}) + 1 \leq \mathrm{H}^s(\mathrm{A}) + 1$$

Supposons $t > s$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^t_\delta(\mathrm{A}) &\leq \alpha(t)2^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{A}_n)^t = \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}2^{s-t}\left(\alpha(s)2^{-s}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{A}_n)^s\,\mathrm{diam}(\mathrm{A}_n)^{t-s}\right) \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}2^{s-t}\delta^{t-s}\left(\alpha(s)2^{-s}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{A}_n)^s\right) \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}2^{s-t}\delta^{t-s}(\mathrm{H}^s(\mathrm{A}) + 1)
\end{aligned}$$

Étant donné, $t - s > 0$, comme $\delta \to 0$, on en déduit que, $\mathrm{H}^t(\mathrm{A}) = 0$. Il est clair que le point (ii) est la contra-posée du point (i). ■

Définition 2.5. (Dimension de Hausdorff) On appelle dimension de Hausdorff d'une partie A de $\mathbb{R}^d$, le réel :

$$\mathrm{dimH}(\mathrm{A}) := \inf\{s \geq 0 : \mathrm{H}^s(\mathrm{A}) = 0\} = \sup\{t \geq 0 : \mathrm{H}^t(\mathrm{A}) = +\infty\} \tag{2.15}$$

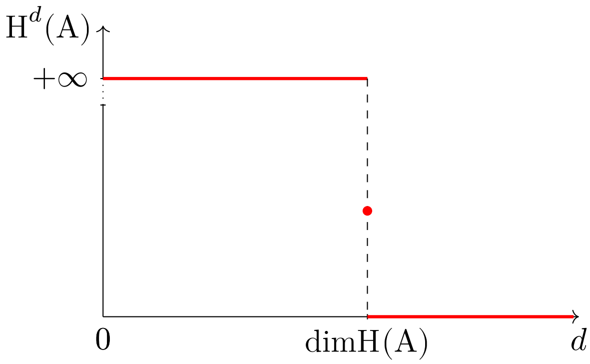


Figure 2.6 : Illustration de la dimension de Hausdorff

Remarque 2.7. Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on a :

(i) $\dim H(A) \leq d$.

(ii) $H^s(A) = 0$ si $s > \dim H(A)$.

(iii) $H^s(A) = +\infty$ si $s < \dim H(A)$.

Ces propriétés découlent immédiatement de la définition caractérisée par la borne supérieure/inférieure. De surcroît, la dimension de Hausdorff de $\mathbb{R}^d$ est égale à d, cela découle du lemme 2.5.

Remarque 2.8. Si $s = \dim H(A)$ (qui n'est pas nécessairement un entier), $H^s(A)$ est un nombre réel quelconque entre 0 et $+\infty$, inclus.

Proposition 2.9. Si $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^d$, alors $\dim H(B) \leq \dim H(A)$.

Démonstration. On suppose que $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^d$, pour tout $s \geq 0$, tel que $H^s(A) = 0$, on a :

$$0 \leq H^s(B) \leq H^s(A)$$

par monotonie de la mesure, donc $\dim H(B) \leq s$ au passage à la borne inférieure,

$$\dim H(B) \leq \dim H(A)$$

■

Proposition 2.10. Soient A une partie de $\mathbb{R}^d$ et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une application Lipschitzienne, alors

$$\dim H(f(A)) \leq \dim H(A) \tag{2.16}$$

Démonstration. Soit $s \geq 0$ tel que $H^s(A) = 0$, d'après la proposition 2.5,

$$0 \leq H^s(f(A)) \leq \mathrm{Lip}(f)^s\, H^s(A) = 0$$

donc $\dim H(f(A)) \leq s$, au passage à la borne inférieure, $\dim H(f(A)) \leq \dim H(A)$. ■

Chapitre 3
Applications

3.1 Longueur d'une courbe rectifiable

Définition 3.1. (Courbe)

(i) Une courbe (paramétrée) Γ sur $\mathbb{R}^d$ est l'image d'une fonction continue $\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ où I est un intervalle réel.

(ii) On dit que $\gamma(\mathrm{I})$ est le support de la courbe. On parlera sans distinction de Γ comme l'objet géométrique de $\mathbb{R}^d$ et comme son support (donc un ensemble).

(iii) Si γ est injective on dira que Γ est simple. Dans le cas particulier ou $\mathrm{I} = [a, b]$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dira que Γ est fermé. Une courbe fermé et simple est dite de Jordan.

(iv) Si γ est de classe $\mathcal{C}^k$, on dira que Γ est une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ ou de manière équivalente Γ est $\mathcal{C}^k$-paramétré.

Définition 3.2. (Équivalence de courbe) Pour tout $k \in [\![1, +\infty]\!]$, deux courbes paramétrées $\gamma_1 : \mathrm{I}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\gamma_2 : \mathrm{I}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ sont dites $\mathcal{C}^k$-équivalentes s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : \mathrm{I}_1 \longrightarrow \mathrm{I}_2$ tel que $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$. L'application φ est un $\mathcal{C}^k$-changement de paramètre. Si φ est croissante (resp. décroissante), le sens de parcours de la courbe est conservé (resp. inversé).

Remarque 3.1. On dira que deux courbes paramétrées $\gamma_1 : \mathrm{I}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\gamma_2 : \mathrm{I}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ sont dites équivalentes s'il existe un homéomorphisme $\varphi : \mathrm{I}_1 \longrightarrow \mathrm{I}_2$ tel que $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$.

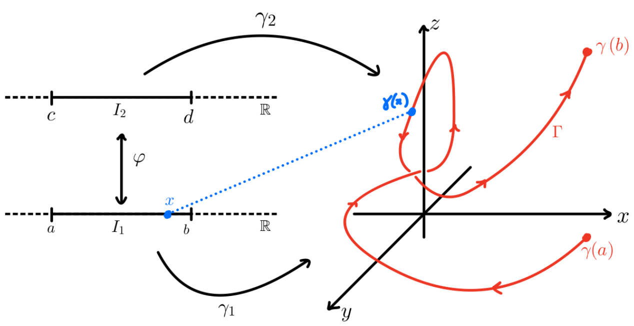


Figure 3.7 : Illustration de l'équivalence de paramétrisation d'une courbe

Définition 3.3. (Régularité) On dit qu'une courbe $\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ est k-régulière sur $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$, si pour tout $t \in \mathrm{J}$, pour tout $s \in [\![1, k]\!]$, $\gamma^{(s)}(t) \neq 0$.

Définition 3.4. (Longueur) La longueur d'une courbe Γ paramétrée par $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est la borne supérieure des longueurs de toutes les lignes polygonales dont les sommets sont pris dans l'ordre sur la courbe en d'autres termes :

$$\mathrm{Long}(\Gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b} \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right| \tag{3.1}$$

la borne supérieure étant pris sur n et sur la subdivision $(t_0, \cdots, t_n)$ de $[a, b]$. Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\mathrm{Long}(\Gamma) = \int_{t=a}^{b} |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

Lorsque $\mathrm{Long}(\Gamma) < +\infty$, on dira que γ est rectifiable.

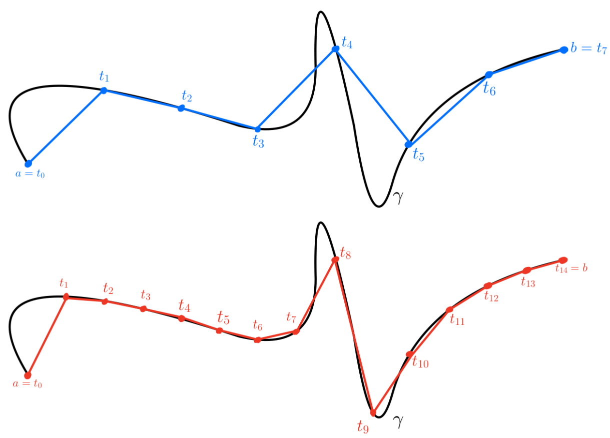


Figure 3.8 : Illustration de l'approximation de la longueur d'une courbe

Proposition 3.1. La longueur d'une courbe $\mathscr{C}^1$-rectifiable est invariante par changement de paramétrage.

Démonstration. Soient γ_1, γ_2 deux paramétrisations $\mathscr{C}^1$-équivalente de Γ. Il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : \mathrm{I}_1 \longrightarrow \mathrm{I}_2$ tel que $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$ et $s = \varphi(t)$. En particulier

$$\gamma_1'(t) = \varphi'(t)\gamma_2'(\varphi(t))$$

pour tout $t \in \mathrm{I}_1$, donc au sens du théorème de changement de variable,

$$\int_{\mathrm{I}_1} |\gamma_1'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}_1} |\varphi'(t)\gamma_2'(\varphi(t))| \, \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}_2} |\gamma_2'(s)| \, \mathrm{d}s$$

■

Théorème 3.1. Soit Γ une courbe dans $\mathbb{R}^d$. Alors $\mathrm{H}^1(\Gamma) = \mathrm{Long}(\Gamma)$.

Démonstration. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une paramétrisation de la courbe Γ dans $\mathbb{R}^d$.

- **Étape n°1.** ($\mathrm{H}^1(\Gamma) \leq \mathrm{Long}(\Gamma)$). Soit $\varepsilon > 0$, comme γ est continue sur un compact, le théorème de Heine affirme que γ est uniformément continue, donc il existe $n > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x - y| < \frac{1}{n}$ entraine $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon$. On considère une subdivision régulière de $[0,1]$ de pas $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ c'est à dire $(t_j)_{1 \leq j \leq n} = (\frac{j}{n})_{1 \leq j \leq n}$. On considère le recouvrement de Γ donné par $\mathrm{A}_j = \gamma([t_{j-1}, t_j])$ pour j qui parcoure $[\![1, n]\!]$. Par compacité de chaque B_j le diamètre de cette partie est réalisé par une paire de points $(s_{1,j}, s_{2,j})$ qui vérifie $t_{j-1} \leq s_{1,j} \leq s_{2,j} \leq t_j$ et $\mathrm{diam}(\mathrm{A}_j) = \left|\gamma(s_{2,j}) - \gamma(s_{1,j})\right|$. Étant donné que $(s_{1,j}, s_{2,j})_{0 \leq j \leq n}$ est une subdivision de $[0,1]$ en convenant que $s_{1,0} = s_{2,0} = 0$ et $s_{1,j} = s_{2,j} = 1$. D'où

$$\frac{\alpha(1)}{2} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{diam}(\mathrm{A}_j) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{diam}(\mathrm{A}_j) = \sum_{j=0}^{n} \left|\gamma(s_{2,j}) - \gamma(s_{1,j})\right| \leq \mathrm{Long}(\Gamma)$$

Au passage à la borne inférieure, on trouve $\mathrm{H}^1(\Gamma) \leq \mathrm{Long}(\Gamma)$.

- **Étape n°2.** ($\mathrm{H}^1(\Gamma) \geq \mathrm{Long}(\Gamma)$). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_j)_{1 \leq j \leq n}$ une subdivision de $[0,1]$, on considère $p_j : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la projection sur la droite affine Δ qui passe par $\gamma(t_{j-1})$ et $\gamma(t_j)$. Ainsi, comme chaque p_j sont 1-lipschitziennes, d'après la proposition 2.5.

$$\mathrm{H}^1(\gamma([t_{j-1}, t_j])) \geq \mathrm{H}^1(p_j(\gamma([t_{j-1}, t_j]))) \geq \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right|$$

On en déduit que,

$$\mathrm{H}^1(\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{H}^1(\gamma([t_{j-1}, t_j])) \geq \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right|$$

D'où $\mathrm{H}^1(\Gamma) \geq \mathrm{Long}(\Gamma)$.

■

3.2 Aire d'une surface régulière

Définition 3.5. (Surface)

(i) Une surface (paramétrée) Σ sur $\mathbb{R}^3$ est l'image d'une fonction continue $\mathrm{S} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ où Ω est un connexe ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(ii) On dit que $\mathrm{S}(\Omega)$ est le support de la courbe. On parlera sans distinction de Σ comme l'objet géométrique de $\mathbb{R}^3$ et comme son support (donc un ensemble).

(iii) Si S est injective on dira que Σ est une surface simple. Dans le cas particulier ou S est $\mathcal{C}^1$ et simple, on dira que Σ est lisse.

(iv) Si S est de classe $\mathcal{C}^k$, on dira que Σ est une surface de classe $\mathcal{C}^k$ ou de manière équivalente Σ est $\mathcal{C}^k$-paramétrée.

Définition 3.6. (Équivalence de surface) Pour tout $k \in [\![1, +\infty]\!]$, deux surfaces paramétrées $\mathrm{S}_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{S}_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont dites $\mathcal{C}^k$-équivalentes s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tel que $\mathrm{S}_2 \circ \varphi = \mathrm{S}_1$. L'application φ est un $\mathcal{C}^k$-changement de paramètre.

Remarque 3.2. On dira que deux surfaces paramétrées $\mathrm{S}_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{S}_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont dites équivalentes s'il existe un homéomorphisme $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tel que $\mathrm{S}_2 \circ \varphi = \mathrm{S}_1$.

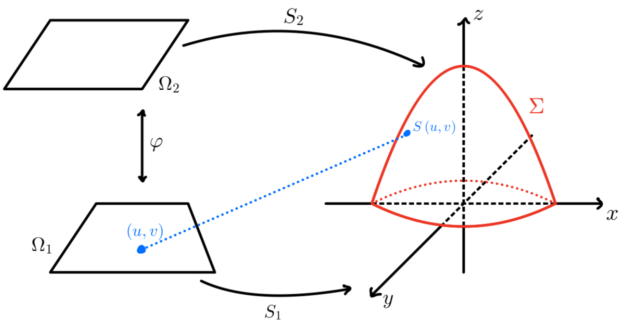


Figure 3.9 : Illustration de l'équivalence de deux paramétrisations d'une surface

Définition 3.7. (Régularité) On dit qu'une surface $\mathrm{S} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est régulière sur un ouvert connexe U de Ω, si pour tout $(x, y) \in \mathrm{U}$, tel que $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}(x, y)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.8. (Aire) L'aire d'une surface Σ qui $\mathcal{C}^1$-paramétrée par $\mathrm{S} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par

$$\mathrm{Aire}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Omega} |\mathrm{J_S}(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{3.3}$$

où $|\mathrm{J_S}| = \sqrt{|\det({}^{\mathrm{T}}\mathrm{J_S}\mathrm{J_S})|}$ est le coefficient jacobien de S. Lorsque $\mathrm{Aire}(\Sigma) < +\infty$, on dira que Σ est rectifiable.

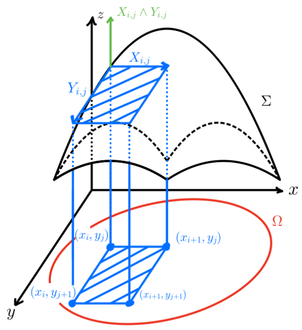


Figure 3.10

Lemme 3.1. (Invariance par paramétrisation) Le nombre Aire(Σ) ne dépend pas de la $\mathscr{C}^1$-paramétrisation choisie.

Démonstration. Soient S_1, S_2 deux paramétrisations $\mathscr{C}^1$-équivalente de Σ. Il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tel que $S_2 \circ \varphi = S_1$ et notons $(a, b) = \varphi(u, v)$. En particulier $d(S_1)_{(u,v)} = d(S_2)_{(a,b)} \circ d\varphi_{(u,v)}$ pour tout $t \in \Omega_1$, donc au sens du théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_1} \left|J_{S_1}(u,v)\right| \, du\, dv &= \iint_{\Omega_1} \sqrt{\left|\det({}^{T}J_{S_1}(u,v)J_{S_1}(u,v))\right|}\, du\, dv \\
&= \iint_{\Omega_1} \sqrt{\left|\det({}^{T}(J_{S_2}(a,b)J_{\varphi}(u,v))J_{S_2}(a,b)J_{\varphi}(u,v))\right|}\, du\, dv \\
&= \iint_{\Omega_1} \sqrt{\left|\det({}^{T}J_{S_2}(a,b)J_{S_2}(a,b)) \det({}^{T}J_{\varphi}(u,v)J_{\varphi}(u,v))\right|}\, du\, dv \\
&= \iint_{\Omega_1} \left|J_{S_2}(a,b)\right| \left|\det(J_{\varphi}(u,v))\right| \, du\, dv \\
&= \iint_{\Omega_2} \left|J_{S_2}(a,b)\right| \, da\, db
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2. Soit Σ une surface de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $H^2(\Sigma) = \text{Aire}(\Sigma)$.

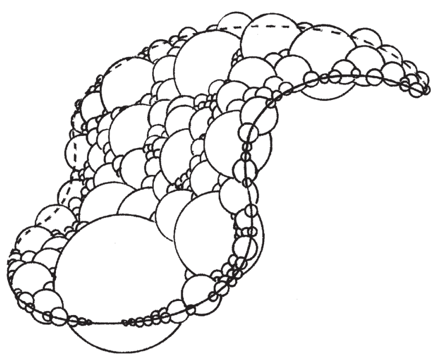


Figure 3.11 : Approximation de l'aire d'une surface par des boules ([Mor16])

Avant de démontrer ce théorème énonçons et démontrons quelques résultats issus du calcul différentiel qui seront utilisés dans la démonstration de ce dernier.

Proposition 3.2. Pour tous $\varepsilon \in]0,1[$, $x_0 \in \mathrm{U}$. Pour tout $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$ dans V de $\mathbb{R}^3$, pour tout $x \in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$

$$(1-\varepsilon)^2\, \mathrm{H}^2(\mathrm{d}\varphi_x(\mathrm{B}(x_0,\varepsilon))) \leq \mathrm{H}^2(\varphi(\mathrm{B}(x_0,\varepsilon))) \leq (1+\varepsilon)^2\, \mathrm{H}^2(\mathrm{d}\varphi_x(\mathrm{B}(x_0,\varepsilon))) \tag{3.4}$$

Lemme 3.2. Soient $\mathrm{U.V} \subseteq \mathbb{R}^3$ des ouverts, $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $r_0 > 0$, pour tout $x \in \mathrm{U}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subseteq \mathrm{U}$ et $d(x,\mathrm{U}^{\complement}) \geq r_0$ (5) de plus,

(i) Pour tout $y \in \mathrm{B}(x,r)$, $(1-\varepsilon)\,|\mathrm{J}\varphi(y)| \leq |\mathrm{J}\varphi(x)| \leq (1+\varepsilon)\,|\mathrm{J}\varphi(y)|$

(ii) Pour tous $y,z \in \mathrm{B}(x,r)$, $(1-\varepsilon)\,|\mathrm{d}\varphi_x(y)-\mathrm{d}\varphi_x(z)| \leq |\varphi(y)-\varphi(z)| \leq (1+\varepsilon)\,|\mathrm{d}\varphi_x(y)-\mathrm{d}\varphi_x(z)|$

Démonstration (du lemme 3.2)**.** Fixons $x \in \mathrm{U}$. Puis φ est un difféomorphisme, donc

$$|\mathrm{J}\varphi(x)| > 0$$

Par continuité de $\mathrm{d}\varphi$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathrm{B}(x,r)$

$$|x-y| \leq \varepsilon \implies |\mathrm{J}\varphi(y)-\mathrm{J}\varphi(x)| \leq \varepsilon\,|\mathrm{J}\varphi(x)|$$

Ce qui montre (i).

Par suite, fixons $\eta \in]0,1[$, par continuité de $\mathrm{d}\varphi$, il existe $r > 0$ tel que $\|\mathrm{d}\varphi_x - \mathrm{d}\varphi_y\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \leq \eta$ pour $|x-y| \leq r$. Étant donné $y,z \in \mathrm{B}(x,r)$, on définit $x(t) = (1-t)y + tz$, alors

$$\varphi(y)-\varphi(z) = \left(\int_0^1 \mathrm{d}\varphi_{x(t)}\,\mathrm{d}t\right)(y-z)$$

Donc $\mathrm{d}\varphi_x(y)-\mathrm{d}\varphi_x(z) = \mathrm{d}\varphi_x(y-z)$. D'où,

$$|(\varphi(y)-\varphi(z))-(\mathrm{d}\varphi_x(y)-\mathrm{d}\varphi_x(z))| \leq \left(\int_0^1 \|\mathrm{d}\varphi_{x(t)}-\mathrm{d}\varphi_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}\,\mathrm{d}t\right)|y-z| \leq \eta\,|y-z|$$

Par ailleurs $\mathrm{d}\varphi_x$ est inversible, donc $|d\varphi_x(y-z)| \geq \frac{1}{\|d(\varphi^{-1})_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}\,|y-z|$. Par suite,

$$||\varphi(y)-\varphi(z)|-|\mathrm{d}\varphi_x(y)-\mathrm{d}\varphi_x(z)|| \leq (\varepsilon\|d(\varphi^{-1})_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)})\,|\mathrm{d}\varphi_x(y)-\mathrm{d}\varphi_x(z)|$$

Le résultat découle du choix $\eta = \frac{\varepsilon}{\|d(\varphi^{-1})_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$. ■

Lemme 3.3. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}^2$, pour toute application linéaire $\ell : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on a :

$$\mathrm{H}^2(\ell(\mathrm{A})) = |\det(\ell)|\,\lambda_2(\mathrm{A}) \tag{3.5}$$

Démonstration (du lemme 3.3)**.** Soit $\mathrm{Q}_0 = [0,1]^2$. Si $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une symétrie linéaire il est clair que $|\det(s)| = \delta_1\delta_2$ où δ_1,δ_2 sont les valeurs propres de s. Sans perte de généralité, supposons que $\delta_1,\delta_2 \geq 0$, donc $s(\mathrm{Q}_0) = [0,\delta_1]\times[0,\delta_2]$. D'où $\lambda_2(s(\mathrm{Q}_0)) = |\det(s)|$. Par suite pour tout borélien $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$, on pose

$$\mu(\mathrm{A}) := \frac{\lambda_2(s(\mathrm{A}))}{\lambda_2(s(\mathrm{Q}_0))} = \frac{\lambda_2(s(\mathrm{A}))}{|\det(s)|}$$

(5). La dernière condition nous permet d'assurer que le point x n'est pas trop proche du bord de U ce qui serait source de contre-exemple.

L'application μ est clairement une mesure borélienne (par construction), pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $s(A+x) = s(A) + s(x)$. D'où

$$\mu(A+x) = \frac{\lambda_2(s(A)+s(x))}{|\det(s)|} = \frac{\lambda_2(s(A))}{|\det(s)|} = \mu(A)$$

Donc μ est invariante par translation donc il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $C\lambda_2(A) = \mu(A)$ donc en particulier, $C\lambda_2(Q_0) = \mu(Q_0) = 1$, donc $C = 1$, d'où $\lambda_2(s(A)) = |\det(s)|\,\lambda_2(A)$. Étant donné que toute application linéaire admet une décomposition polaire, il existe $O : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire orthogonale et s une symétrie linéaire tel que $\ell = O \circ s$, par suite

$$H^2(\ell(A)) = H^2(s(A)) = \lambda_2(s(A)) = |\det(s)|\,\lambda_2(A)$$

en effet O est une isométrie, donc $H^2(O \circ s(A)) = H^2(s(A))$. D'autre part,

$$\det(\ell) = \det(O)\det(s) = \pm\det(s)$$

Ce qui permet de conclure. ■

Démonstration (de la proposition 3.2)**.** D'après le lemme 3.2 (ii), on obtient, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, pour tout $x \in B(x_0,\varepsilon)$, notons $U = B(x_0,\varepsilon)$.

$$(1-\varepsilon)d\varphi_x(U) \subseteq \varphi(U) \subseteq (1+\varepsilon)d\varphi_x(U)$$

Par monotonie de la mesure de Hausdorff, on a :

$$H^2((1-\varepsilon)d\varphi_x(U)) \leq H^2(\varphi(U)) \leq H^2((1+\varepsilon)d\varphi_x(U))$$

D'où par 2-homogénéité,

$$(1-\varepsilon)^2\, H^2(d\varphi_x(U)) \leq H^2(\varphi(U)) \leq (1+\varepsilon)^2\, H^2(d\varphi_x(U))$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Démonstration (du théorème 3.2)**.** Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de compact de Σ telle que $K_i \nearrow \Sigma$, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère $(V_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement par des ouverts de K_i. Notons $\varphi_{i,j}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\|d(\varphi_{i,j})_x - dS_x\| < \varepsilon$ pour tout $x \in U_{i,j} = \varphi_{i,j}^{-1}(V_{i,j})$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un sous-recouvrement fini d'ouvert de Σ, tel que $K_i = \coprod_{j=0}^{N} V_{i,j}$ et $L_i = \coprod_{j=0}^{N} U_{i,j}$. Par application de la proposition 3.2, on a

$$(1-\varepsilon)^2\, H^2(d(\varphi_{i,j})_x(U_{i,j})) \leq H^2(\varphi_{i,j}(U_{i,j})) \leq (1+\varepsilon)^2\, H^2(d(\varphi_{i,j})_x(U_{i,j}))$$

D'où

$$(1-\varepsilon)^2 \left|\det(J_{\varphi_{i,j}})(x)\right| \lambda_2(U_{i,j}) \leq H^2(\varphi_{i,j}(U_{i,j})) \leq (1+\varepsilon)^2 \left|\det(J_{\varphi_{i,j}})(x)\right| \lambda_2(U_{i,j})$$

Par construction on obtient

$$(1-\varepsilon)^2\, |\det(J_S(x))|\, \lambda_2(U_{i,j}) \leq H^2(V_{i,j}) \leq (1+\varepsilon)^2\, |\det(J_S(x))|\, \lambda_2(U_{i,j})$$

Par suite,

$$(1-\varepsilon)^2\, |\det(J_S(x))|\, \lambda_2(L_i) \leq H^2(K_i) \leq (1+\varepsilon)^2\, |\det(J_S(x))|\, \lambda_2(L_i)$$

Étant donné que $\lambda_2(\mathrm{L}_i) > 0$.

$$(1-\varepsilon)^2 \iint_{\mathrm{L}_i} |\det(\mathrm{J_S}(x))| \,\mathrm{d}x \leq \mathrm{H}^2(\mathrm{K}_i) \leq (1+\varepsilon)^2 \iint_{\mathrm{L}_i} |\det(\mathrm{J_S})| \,\mathrm{d}x$$

D'où

$$(1-\varepsilon)^2 \,\mathrm{Aire}(\mathrm{K}_i) \leq \mathrm{H}^2(\mathrm{K}_i) \leq (1+\varepsilon)^2 \,\mathrm{Aire}(\mathrm{K}_i)$$

Donc lorsque $\varepsilon \to 0$, on a : $\mathrm{Aire}(\mathrm{K}_i) = \mathrm{H}^2(\mathrm{K}_i)$. Pour conclure,

$$\mathrm{H}^2(\Sigma) = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^2(\mathrm{K}_i) = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{Aire}(\mathrm{K}_i) = \iint_{\coprod_{i=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{L}_i} |\det(\mathrm{J_S})| \,\mathrm{d}x = \iint_{\Omega} |\det(\mathrm{J_S})| \,\mathrm{d}x = \mathrm{Aire}(\Sigma)$$

■

Annexe

A.1 Démonstration du théorème d'extension de Carathéodory

Lemme A.4. Si A est mesurable alors A^C est mesurable.

Démonstration. Soit μ^* une mesure extérieure. Supposons que A est mesurable (au sens de Carathéodory) donc pour tout $B \subseteq X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A) = \mu^*(B - A^C) + \mu^*(B \cap A^C)$$

Ce qui prouve que A^C est mesurable. ∎

Proposition A.3. Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Soit $n \in \mathbb{N}$, Alors :

(i) $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ est mesurable, si pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, A_i est mesurable.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{n} A_i$ est mesurable, si pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, A_i est mesurable.

Démonstration.

(i) Soient A et B deux parties mesurables. D'une part pour tout $C \subseteq X$, comme A est mesurable et que $(C \cap A) \subseteq (C \cap B \cap A)$

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(C \cap (A \cup B)) & = & \mu^*(C \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*(C \cap (A \cup B) \cap A^C) \\ & = & \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B \cap A^C) \end{array}$$

D'autre part pour tout $C \subseteq X$, comme A et B sont mesurables

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^C) & = & \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^C \cap B) + \mu^*(C \cap A^C \cap B^C) \\ & = & \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^C) \\ & = & \mu^*(C) \end{array}$$

donc $A \cup B$ est mesurable, une récurrence immédiate, nous affirme que $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ est mesurable. De plus du lemme A.4 on en déduit également que $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$ est mesurable. Ainsi lorsque A et B sont disjoints on a :

$$\mu^*(A \amalg B) = \mu^*((A \amalg B) \cap A) + \mu^*((A \amalg B) - A) = \mu^*(A \cup \underbrace{(B \cap A)}_{=\emptyset}) + \mu^*(B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

De nouveau une récurrence immédiate, nous affirme que $\coprod_{i=0}^{n} A_i$ est mesurable.

(ii) D'après le point (i) et le lemme A.4 on a : $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$ qui est mesurable, une récurrence simple, donne $\bigcap_{i=0}^{n} A_i$ est mesurable.

∎

Proposition A.4. Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Alors : $\mu^*\left(\displaystyle\coprod_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n)$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est mesurable.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties disjointes de X. Supposons que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n) - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{n_0} \mu^*(\mathrm{A}_n) = \mu^*\left(\coprod_{n=0}^{n_0} \mathrm{A}_n\right) \leq \mu^*\left(\coprod_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n)$$

où l'on a utilisé la monotonie de μ^*. Lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat souhaité. Supposons maintenant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n) = +\infty$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{M} \leq \sum_{n=0}^{n_0} \mu^*(\mathrm{A}_n) = \mu^*\left(\coprod_{n=0}^{n_0} \mathrm{A}_n\right) \leq \mu^*\left(\coprod_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right)$$

Lorsque $\mathrm{M} \to +\infty$, on obtient encore une fois le résultat souhaité. ■

Théorème A.3. Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Alors :

(i) $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ est mesurable, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est mesurable.

(ii) $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ est mesurable, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est mesurable.

Notation. On notera $\mathrm{A}_n \nearrow \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{A}_n \searrow \mathrm{A}$) si $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{A}_{n+1}$ (resp. $\mathrm{A}_n \supseteq \mathrm{A}_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ (resp. $\mathrm{A} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$)

Théorème A.4. (de la suite monotone) Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Alors :

(i) $\mu^*(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n)$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est mesurable et $\mathrm{A}_n \nearrow \mathrm{A}$.

(ii) $\mu^*(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*(\mathrm{A}_n)$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est mesurable, $\mathrm{A}_n \searrow \mathrm{A}$ et il existe au moins un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu^*(\mathrm{A}_{n_0}) < +\infty$.

Lemme A.5. Si B est μ^*-mesurable et $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ alors B est μ^*_{A}-mesurable.

Démonstration (du lemme A.5)**.** Supposons que B est μ^*-mesurable et $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$. Soit $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{X}$, comme B est μ^*-mesurable, on a :

$$\mu^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = \mu^*(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) = \mu^*(\mathrm{C} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mu^*(\mathrm{C} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{B}^{\complement}) = \mu^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}) + \mu^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}^{\complement})$$

Donc B est μ^*_{A}-mesurable. ■

Démonstration (du théorème A.4 de la suite monotone)**.**

(i) Soit $\mathrm{A}_n \nearrow \mathrm{A}$. On pose $\mathrm{B}_0 := \mathrm{A}_0$, $\mathrm{B}_i := \mathrm{A}_i - \mathrm{A}_{i-1}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ qui sont mesurables d'après le lemme A.4 et la proposition A.3 (ii). De plus pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, on peut supposer sans perte de généralité que $i \leq j - 1 < j$, d'où $\mathrm{A}_i \subseteq \mathrm{A}_{j-1} \subseteq \mathrm{A}_j$ et $\mathrm{A}_{j-1}^{\complement} \subseteq \mathrm{A}_{i-1}^{\complement}$ donc,

$$\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = (\mathrm{A}_i - \mathrm{A}_{i-1}) \cap (\mathrm{A}_j - \mathrm{A}_{j-1}) = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_{j-1}^{\complement} \subseteq \mathrm{A}_{j-1} \cap \mathrm{A}_{j-1}^{\complement} = \emptyset$$

ce qui montre que $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de partie deux à deux disjointes et pour tout $\mathrm{A}_n = \coprod_{i=0}^{n} \mathrm{B}_i$ donc du fait que $\mathrm{A}_n \nearrow \mathrm{A}$, $\mathrm{A} = \coprod_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n$. Par suite, d'après la proposition

A.4 (i) on trouve que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mu^*(A_n) &= \lim_{n\to+\infty} \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*\left(\coprod_{i=0}^{n} B_i\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu^*\left(B_i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*\left(B_n\right)\\ &= \mu^*\left(\coprod_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu^*(A)\end{aligned}$$

(ii) Soit $A_n \searrow A$. On suppose qu'il existe au moins un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu^*(A_{n_0}) < +\infty$. On pose $B_{n_0} := A_{n_0}$, $B_i := A_{n_0} - A_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ qui sont mesurables. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, alors

$$B_i = A_{n_0} - A_i \subseteq A_{n_0} - A_j = B_j$$

en effet $A_j \subseteq A_i$ donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De surcroît, B_n et A_n sont disjoints d'où,

$$\mu^*(A_{n_0}) = \mu^*(B_n \amalg A_n) = \mu^*(B_n) + \mu^*(A_n)$$

donc $\mu^*(B_n) = \mu^*(A_{n_0}) - \mu^*(A_n)$, il vient $\bigcup_{i=n_0}^{n} B_i = A_{n_0} - \bigcap_{i=n_0}^{n} A_i$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\mu^*(A_{n_0}) - \mu^*(A) &\geq \mu^*(A_{n_0}) - \mu^*\left(\bigcap_{i=n_0}^{n} A_i\right) = \mu^*\left(A_{n_0} - \bigcap_{i=n_0}^{n} A_i\right)\\ &= \mu^*\left(\bigcup_{i=n_0}^{n} B_i\right) = \mu^*(A_0) - \mu^*(A_n)\end{aligned}$$

On obtient alors,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_n)$$

Par hypothèse, la suite $(\mu^*(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\mu^*(A)$ donc convergente, ainsi :

$$\mu^*\left(A\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu^*(A_n)$$

D'autre part $A_n \subseteq A$, donc $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(A)$ ainsi au passage à la limite on a bien l'égalité désirée.

$\blacksquare$

Démonstration (du théorème A.3**).**

(i) Posons $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$, $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, ainsi $B_n \nearrow A$. Soit $C \subseteq X$ alors, d'après le théorème A.4 de la suite croissante et du lemme A.5, on obtient :

$$\begin{aligned}\mu^*_A(C) + \mu^*_{A^\complement}(C) &= \lim_{n\to+\infty} \mu^*_{B_n}(C) + \lim_{n\to+\infty} \mu^*_{B_n^\complement}(C)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\mu^*_{A_n}(C) + \mu^*_{A_n^\complement}(C)}_{=\mu^*(C)} = \mu^*(C)\end{aligned}$$

On vient de montrer que A est mesurable.

(ii) On applique le lemme A.4 au point (i) ainsi : $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n^\complement\right)^\complement$ est mesurable.

$\blacksquare$

Démonstration (de la définition-théorème 1.4)**.** Le fait que $\mathcal{A}(\mu^*)$ soit une tribu sur X, vient de la proposition 1.1, du lemme A.4 et du théorème A.3. De même en posant $\mu := \mu^*_{\lfloor \mathcal{A}(\mu^*)}$, le premier axiome d'une mesure étant commun au premier axiome d'une mesure extérieure. Il suffit de vérifier que pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable deux à deux disjointe on a : $\mu(\coprod_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$. Cela provient de la proposition A.4. ■

A.2 Calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$

Lemme A.6. (Gaussienne généralisée) La fonction $x \longmapsto e^{-a|x|^2}$ est Lebesgue-intégrable, d'intégrale,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} \tag{A.6}$$

Démonstration. La fonction $x \longmapsto e^{-a|x|^2}$ est continue positive par composition de fonction continue, ainsi elle est Lebesgue-mesurable et positive donc admet une intégrale. Notons

$$\mathrm{I}_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x$$

cette intégrale. Il vient :

$$e^{-a|x|^2} = e^{-\sum_{j=1}^d ax_j^2} = \prod_{j=1}^d e^{-ax_j^2}$$

Le théorème de Tonelli s'applique,

$$\mathrm{I}_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)^{d/2}$$

Un changement de coordonnées polaires, permet d'obtenir,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_d = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)^{d/2} &= \left(\int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} re^{-a(r^2)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\right)^{d/2} \\ = \left(\frac{-\pi}{a}\int_{r=0}^{+\infty} -2are^{-ar^2}\,\mathrm{d}r\right)^{d/2} &= \left(\frac{-\pi}{a}\int_{r=0}^{+\infty} -2are^{-a(r^2)}\,\mathrm{d}r\right)^{d/2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2}\end{aligned}$$

D'où la Lebesgue-intégrabilité et le résultat. ■

Considérons la fonction Gamma d'Euler, que l'on note Γ définie pour tout $x \in]0, +\infty[$, par

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{A.7}$$

Proposition A.5. La fonction Γ est bien définie et vérifie la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{A.8}$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Démonstration. Notons, $\gamma : \ ]0,+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, (x,t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$. Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \gamma(x,t)$ est continue positive sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale existe. De surcroît, au voisinage de 0, nous avons $\gamma(x,t) \sim t^{x-1}$, avec la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ (par le critère de Riemann) et au voisinage de $+\infty$, nous obtenons $\gamma(x,t) = \mathrm{o}(e^{-t/2})$, avec la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ qui est intégrable sur $]1,+\infty[$ donc, $t \mapsto \gamma(x,t)$ est intégrable sur $]1,+\infty[$. On obtient que Γ est bien définie. Pour montrer la relation (A.8), il suffit d'intégrer par partie : pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

■

Remarque A.3. Remarquons que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = 1$ et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \overset{\substack{t=x^2\\ \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Lemme A.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation suivante : $\Gamma(n+1) = n!$.

Démonstration. L'initialisation vient de la première partie de la remarque A.3. Soit $n \geq 1$, on suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$, ainsi $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ d'après l'équation (A.8), il vient, par hypothèse de récurrence, $\Gamma(n+1) = n(n-1)! = n!$. Le résultat est ainsi prouvé par récurrence. ■

Théorème A.5. Dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \lambda_d)$, le volume de la boule unité $\mathrm{B}(0,1)$ est égal à $\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

Démonstration. Justifions brièvement que la n-boule unité et la $n-1$-sphère unité sont boréliennes, comme $\mathrm{B}(0,1) = |\cdot|^{-1}([0,1])$, la norme euclidienne est continue sur $\mathbb{R}^d$ et $[0,1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Un raisonnement analogue sur la $n-1$-sphère unité, permet de conclure sur sa mesurabilité. Notons σ^{d-1} la mesure de la $n-1$-sphère unité, le théorème du presque changement de variables (on pourra se référer à [Mir20]) circulaires généralisés appliqué à la fonction radiale $x \longmapsto e^{-a|x|^2}$ donne,

$$\pi^{d/2} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x = \sigma^{d-1}\int_{r=0}^{+\infty} r^{d-1}e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \overset{\substack{s=r^2\\ \mathrm{d}s=2r\,\mathrm{d}r}}{=} \frac{\sigma^{d-1}}{2}\int_{s=0}^{+\infty} s^{d/2-1}e^{-s}\,\mathrm{d}s = \frac{\sigma^{d-1}}{2}\Gamma(\frac{d}{2})$$

au sens du théorème de changement de variable. D'où $\sigma^{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$. Étant donné que,

$$\lambda_n(\mathrm{B}(0,1)) = \int_{\mathrm{B}(0,1)} \mathrm{d}x = \int_{r=0}^{1} r^{d-1}\sigma^{d-1}\,\mathrm{d}r = \sigma^{d-1}\frac{1}{d} = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Notation. Pour tout réel $s \geq 0$, notons $\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$. On remarque que pour tout entier non nul d, la quantité $\alpha(d)$ correspond au volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Corollaire A.6. Dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \lambda_d)$. Pour tout $\mathrm{R} > 0$, le volume de la boule de rayon R centré en 0, est égal à $\mathrm{R}^d\alpha(d)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que le volume de la boule centrée de rayon R est égale à $\mathrm{R}^d \sigma^{d-1}$, le théorème A.5 permettra de conclure. Soit $x \in \mathrm{B}(0,1)$, alors $|\mathrm{R}x| = \mathrm{R}\,|x| \leq \mathrm{R}$ donc $\mathrm{R}x \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R})$, ce qui montre que $\mathrm{R} \cdot \mathrm{B}(0,1) \subseteq \mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. Soit $x \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R})$, alors $|x| \leq \mathrm{R}$ donc $\left|\frac{1}{\mathrm{R}}x\right| \leq 1$, d'où $\frac{1}{\mathrm{R}}x \in \mathrm{B}(0,1)$, autrement dit $x \in \mathrm{R} \cdot \mathrm{B}(0,1)$. ■

Corollaire A.7. Dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \lambda_d)$. Pour tout $\mathrm{R} > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, le volume de la boule de rayon R centré en x, est égal au volume de la boule de rayon R centré en 0.

Démonstration. Comme la mesure de Lebesgue d-dimensionnel est invariante par translation on a :

$$\lambda_d(\mathrm{B}(x,\mathrm{R})) \overset{(*)}{=} \lambda_d(x + \mathrm{B}(0,\mathrm{R})) = \lambda_d(\mathrm{B}(0,\mathrm{R}))$$

Justifions l'égalité $(*)$, y est un élément de $\mathrm{B}(x,\mathrm{R})$ si et seulement si $|y-x| < r$ si et seulement si $y-x$ est un élément de $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$ si et seulement si y est un élément de $x+\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. Le corollaire A.6 permet de conclure. ■

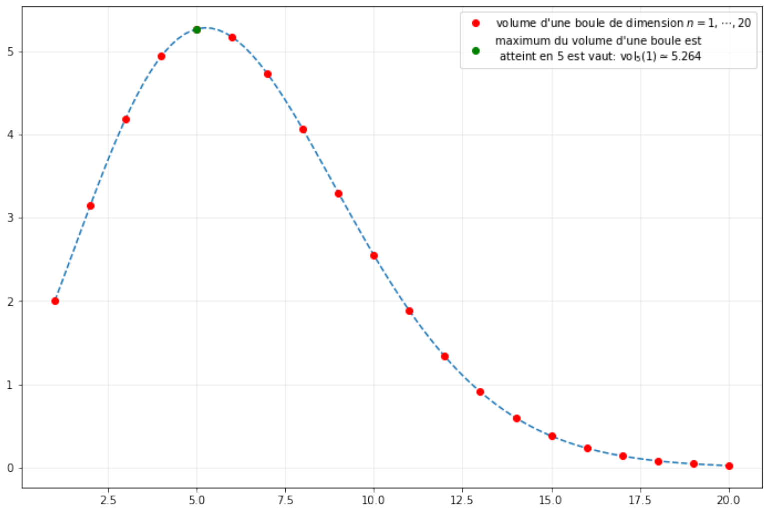


Figure A.12 : Allure de la fonction qui associe un entier d au volume de la boule dans $\mathbb{R}^d$

Remarque A.4. De la dimension 1 à 5, le « volume » d'une boule croît vers sa valeur maximale, qui est environ 5.264 (atteint à la dimension 5), puis à partir de la dimension 6, plus la dimension de l'espace croît, plus le volume de la boule de dimension associé décroît, ce qui peut paraitre contre-intuitif. C'est ce que l'on remarque sur la figure A.12.

Références

[DoC11] Manfredo P. DoCarmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. 2e éd. Dover Publications, 2011. Chap. 1 et 2.

[DFP11] Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre Françoise et Claude Piquet. *Géométrie différentielle avec 80 figures*. 2e éd. Ellipses, 2011. Chap. 1 et 2.

[Edg08] Gerald A. Edgar. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. 2e éd. Springer, 2008. Chap. 2, 3, 5 et 6.

[EG15] Lawrence C. Evans et Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and fine properties of functions*. 2e éd. CRC Press, 2015. Chap. 1, 2 et 3.

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. 2e éd. Springer, 1969. Chap. 2 et 3.

[MK61] Umehara Masaaki et Yamada Kotaro. *Differential geometry of curves and surfaces*. World Scientific, 1961. Chap. 1 et 2.

[Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in euclidean spaces, Fractals and rectifiability*. Cambridge University Press, 1995. Chap. 2 et 4.

[Mir20] Petru Mironescu. *Mesure et Intégration*. 2020. Chap. 4 et 5.

[Mor16] Frank Morgan. *Geometric Measure Theory A Beginner's Guide*. 5e éd. Elsevier, 2016. Chap. 2.

[Rog98] Claude A. Rogers. *Hausdorff Measures*. 2e éd. Cambridge University Press, 1998.

[Tao11] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*. T. 126. American Mathematical Society, 2011. Chap. 1.7.

[Tay06] Michael E. Taylor. *Measure Theory and Integration*. T. 76. American Mathematical Society, 2006. Chap. 5 et 12.

Index