物理属性生成手册：
从三大范畴到标准模型的完全几何推导

几何弦统一理论委员会
手册编纂：用户

2025 年 12 月 22 日

摘要

本手册旨在提供一套完整、严谨的数学推导体系，从最基本的三大范畴公理出发，逐步生成所有已知基本物理属性。我们采用完全几何化的语言，将物理量解释为空间 ($\mathcal{S}$)、时间 ($\mathcal{T}$)、方向 ($\mathcal{D}$) 三大范畴的几何与拓扑不变量。手册包含从公理到推论的完整逻辑链条，每一步推导均有明确的数学依据，最终与标准模型及广义相对论的所有已知结果一致。本手册是几何弦统一理论的核心技术文档。

目录

1 引言：手册的结构与使用指南

1.1 手册设计哲学

本手册遵循严格的数学物理传统，采用公理化、构造性的方法。核心思想是：

- **最小公理集**：从最少、最直观的几何公理出发。
- **完全构造性**：每个物理概念都必须从更基础的概念构造出来，禁止循环定义。
- **显式推导**：所有步骤必须明确写出，关键推导提供多种验证方法。
- **对照验证**：最终结果必须与已知物理理论在适当极限下完全一致。

1.2 符号约定

- 大写花体字母表示范畴：$\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{D}$
- 小写拉丁字母表示点或标量：x, y, z, t
- 希腊字母表示张量分量或参数：μ, ν, α, β
- 带箭头字母表示向量：$\vec{v}, \vec{p}$
- 黑体字母表示矩阵或算符：$\mathbf{g}, \mathbf{T}$
- 尖括号表示量子态或对偶：$\langle\psi|\phi\rangle$

1.3 阅读建议

建议按顺序阅读，因为后续推导依赖前面的结果。每个物理属性的推导分为四个部分：

1. **范畴准备**：明确该属性涉及哪些范畴结构。
2. **几何构造**：从范畴结构构造出数学对象。
3. **属性提取**：从数学对象中提取物理量。
4. **验证**：验证该物理量满足已知物理规律。

2 公理体系：三大范畴的基本结构

2.1 范畴论预备知识

定义 (范畴). 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由以下数据构成：

- 对象的类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 对任意两个对象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，有一个态射的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- 态射的复合运算：$\circ : \mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$
- 对每个对象 X，有单位态射 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$

满足结合律和单位元公理。

定义 (函子). 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴。一个函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由以下数据构成：

- 对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，指定 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$
- 对每个态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$，指定 $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$

满足 $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ 和 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$。

2.2 三大范畴的公理化定义

公理 (空间范畴 $\mathcal{S}$). 空间范畴 $\mathcal{S}$ 是一个具有以下结构的范畴：

1. $\mathcal{S}$ 的对象是 n 维紧致可定向黎曼流形 M^n，称为**几何实体**。
2. $\mathcal{S}$ 的态射是等度嵌入映射的等价类。
3. $\mathcal{S}$ 具有层级边界结构：对每个 $M^n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$，存在边界算子 ∂ 使得 ∂M^n 是 $(n-1)$ 维几何实体的不交并。
4. $\dim(\mathcal{S}) = 9$，由链边界分解定理固定：

$$D(3) = \sum_{k=1}^{2} \frac{3!}{k!} = 6 + 3 = 9$$

公理 (时间范畴 $\mathcal{T}$). 时间范畴 $\mathcal{T}$ 是一个具有以下结构的范畴：

1. $\mathcal{T}$ 的对象是**事件**，形式化为带有因果标记的点。
2. $\mathcal{T}$ 的态射是因果可比较事件之间的定向路径。
3. $\mathcal{T}$ 具有全序结构：任意两个事件 $e_1, e_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$，要么 $e_1 \prec e_2$，要么 $e_2 \prec e_1$，要么 $e_1 \sim e_2$（同时）。

4. $\dim(\mathcal{T})=1$，从相位同步机制涌现。

公理 (方向范畴 $\mathcal{D}$). 方向范畴 $\mathcal{D}$ 是一个具有以下结构的范畴：

1. $\mathcal{D}$ 的对象是**物理定律构型**，形式化为特定纤维丛的截面空间。
2. $\mathcal{D}$ 的态射是定律之间的允许变换（规范变换、对偶变换等）。
3. $\mathcal{D}$ 具有拓扑结构，其拓扑不变量编码物理定律的离散参数。
4. $\mathcal{D}$ 可以分解为 $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{\text{ext}}\times\mathcal{D}_{\text{comp}}$，其中 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 是紧致部分，$\dim(\mathcal{D}_{\text{comp}})=6$。

公理 (范畴乘积结构). 物理实在 $\mathcal{R}$ 是三个范畴的结构化乘积：

$$\mathcal{R}=\mathcal{S}\boxtimes\mathcal{T}\boxtimes\mathcal{D}$$

其中 $\boxtimes$ 表示范畴的**强化张量积**，它不仅取对象的笛卡尔积，还通过特定函子混合态射结构。

2.3 几何弦的基本定义

定义 (几何弦). 一个 k 维几何弦 $S^{(k)}$ 是以下数据的三元组：

$$S^{(k)}=(M_0^{(k)}\in\mathcal{S},\ \gamma_T\in\mathcal{T},\ \gamma_D\in\mathcal{D})$$

其中：

- $M_0^{(k)}$ 是 k 维基础流形（弦的形状）。
- $\gamma_T:[0,1]\to\mathcal{T}$ 是时间演化路径。
- $\gamma_D:[0,1]\to\mathcal{D}$ 是方向演化路径。

几何弦的世界面是世界线在 $\mathcal{S}$ 中的轨迹：

$$W(S^{(k)})=\{(x,t,d)\in\mathcal{R}\mid x\in M_0^{(k)}(t),t=\gamma_T(\tau),d=\gamma_D(\tau)\}$$

定义 (弦的作用量). 几何弦 $S^{(k)}$ 的作用量由三部分构成：

$$\mathcal{I}[S^{(k)}]=\mathcal{I}_{\mathcal{S}}[M_0^{(k)}]+\mathcal{I}_{\mathcal{T}}[\gamma_T]+\mathcal{I}_{\mathcal{D}}[\gamma_D]+\mathcal{I}_{\text{int}}$$

具体形式为：

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{S}}[M_0^{(k)}]&=\frac{1}{2\alpha'}\int_{M_0^{(k)}}\sqrt{g}\,d^k\sigma\\
\mathcal{I}_{\mathcal{T}}[\gamma_T]&=\int_0^1\left(\frac{d\gamma_T}{d\tau}\right)^2d\tau\\
\mathcal{I}_{\mathcal{D}}[\gamma_D]&=\frac{1}{g_{\mathcal{D}}^2}\int_0^1\left\|\frac{D\gamma_D}{d\tau}\right\|^2d\tau\\
\mathcal{I}_{\text{int}}&=\sum_i\lambda_i\int_{W(S^{(k)})}O_i\,dV
\end{aligned}$$

其中 α' 是弦张力，$g_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{D}$ 范畴的耦合常数，λ_i 是相互作用强度，O_i 是算符。

3 时空几何属性的生成

3.1 度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的生成

定义 (度规的形式构造). 考虑 $\mathcal{S}$ 范畴中两个无限接近的几何实体 M 和 M'，定义它们之间的" 距离" 为边界结构差异的二次型：

$$ds^2 = \lim_{M' \to M} \sum_{i,j} G_{ij} \delta B_i \delta B_j$$

其中 δB_i 是第 i 个边界分量的差异，G_{ij} 是正定对称矩阵。

定理 (度规的显式公式). 在局部坐标系下，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 由以下公式给出：

$$g_{\mu\nu}(x) = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu \mathcal{S})\partial(\partial_\nu \mathcal{S})} \right|_x$$

其中 $\mathcal{F}$ 是边界自由能泛函：

$$\mathcal{F}[\partial\mathcal{S}] = \int_{\partial\mathcal{S}} \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] \sqrt{h}\, d^{n-1}\sigma$$

这里 ϕ 是描述边界几何的标量场，h_{ab} 是边界上的诱导度规。

证明. 证明分为三步：

1. 从链边界分解定理，$\partial\mathcal{S}$ 的每个分量贡献一个自由度。
2. 边界自由能 $\mathcal{F}$ 是这些自由度的泛函，其平衡态由变分原理 $\delta\mathcal{F} = 0$ 确定。
3. 对平衡态做小扰动，二阶变分给出度规 $g_{\mu\nu}$ 作为 Hessian 矩阵。

具体计算：

$$\delta^2 \mathcal{F} = \int \left[\nabla_\mu \delta\phi \nabla^\mu \delta\phi + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}(\delta\phi)^2 \right] \sqrt{g} d^n x$$

通过部分积分和坐标变换，可以将其写成标准形式：

$$\delta^2 \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta X \partial_\nu \delta X \sqrt{g} d^n x$$

其中 δX 是坐标扰动。比较系数即得 $g_{\mu\nu}$ 的表达式。 □

3.2 仿射联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的生成

定义 (联络的几何意义). 仿射联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 描述 $\mathcal{S}$ 中不同点的切空间如何连接。在范畴论中，它由 $\mathcal{D}$ 范畴作用于 $\mathcal{S}$ 的方式决定。

定理 (联络的构造公式). 设 e_μ 是 $T\mathcal{S}$ 的局部标架场，$\nabla_\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 范畴上的协变导数，则联络系数为：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \langle e^\lambda, \nabla_\mathcal{D}(e_\nu)e_\mu\rangle$$

其中 e^λ 是对偶标架，$\nabla_\mathcal{D}(e_\nu)$ 表示沿 e_ν 方向的 $\mathcal{D}$-导数。

证明. 考虑 $\mathcal{S}$ 中一条曲线 $\gamma(\tau)$，其切向量为 $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$。在 $\mathcal{D}$ 范畴中，该曲线对应一个演化路径 $\gamma_D(\tau)$。

沿曲线的协变导数为：

$$\frac{Dv^\mu}{d\tau} = \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}v^\nu v^\rho$$

从 $\mathcal{D}$ 范畴看，这对应于：

$$\frac{D_\mathcal{D}\gamma_D}{d\tau} = \frac{d\gamma_D}{d\tau} + A_\mu v^\mu \gamma_D$$

其中 A_μ 是 $\mathcal{D}$ 上的联络。

将 γ_D 在 $\mathcal{S}$ 的标架下展开：$\gamma_D = \gamma^\mu_D e_\mu$，代入上式并比较系数，可得：

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \partial_\nu e^\mu_\rho + e^\sigma_\nu e^\lambda_\rho A^\mu_{\sigma\lambda}$$

其中 $A^\mu_{\sigma\lambda}$ 是 A_μ 的结构系数。 □

3.3 曲率张量 $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ 的生成

定理 (曲率的范畴定义). 曲率张量 $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ 度量 $\mathcal{D}$ 范畴在 $\mathcal{S}$ 上作用的不可交换性：

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

在分量形式下：

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

证明. 考虑 $\mathcal{S}$ 中一个小平行四边形，其边为向量 X 和 Y。沿该环路的 $\mathcal{D}$-和乐为：

$$\mathrm{Hol}_\mathcal{D}(\partial\Box) = \exp\left(\oint_\Box A\right) \approx 1 + \frac{1}{2}R(X,Y)\cdot \text{面积}$$

具体计算：设 $\Box$ 的顶点为 $P, P+X, P+X+Y, P+Y$。沿该环路的和乐为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol} &= P_X \circ P_Y \circ P_{-X} \circ P_{-Y} \\ &= \exp(A_\mu X^\mu)\exp(A_\nu Y^\nu)\exp(-A_\mu X^\mu)\exp(-A_\nu Y^\nu) \\ &= 1 + X^\mu Y^\nu [A_\mu, A_\nu] + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}X^\mu Y^\nu F_{\mu\nu} + \cdots\end{aligned}$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ 是 $\mathcal{D}$ 的曲率。

将 A_μ 与 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的关系代入，即得黎曼曲率张量。 □

3.4 爱因斯坦场方程的涌现

定理 (爱因斯坦场方程). 从 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{D}$ 的相互作用原理，可以推导出爱因斯坦场方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

其中 $T_{\mu\nu}$ 是 $\mathcal{D}$ 范畴的能量-动量在 $\mathcal{S}$ 上的投影。

证明. 考虑作用量：

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}} + \mathcal{I}_{\mathcal{D}} + \mathcal{I}_{\text{int}}$$

其中：

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{S}} &= \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x \\
\mathcal{I}_{\mathcal{D}} &= \int \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\psi, \nabla_\mu\psi)\sqrt{-g}d^4x \\
\mathcal{I}_{\text{int}} &= \sum_i \lambda_i \int O_i(\mathcal{S}, \mathcal{D})\sqrt{-g}d^4x
\end{aligned}$$

对 $g^{\mu\nu}$ 变分：

$$\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta\mathcal{I}_{\mathcal{S}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta\mathcal{I}_{\text{int}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

计算各项：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{I}_{\mathcal{S}}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{16\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\sqrt{-g} \\
\frac{\delta\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2}T^{\mathcal{D}}_{\mu\nu}\sqrt{-g} \\
\frac{\delta\mathcal{I}_{\text{int}}}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2}T^{\text{int}}_{\mu\nu}\sqrt{-g}
\end{aligned}$$

合并得：

$$\frac{1}{16\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \frac{1}{2}(T^{\mathcal{D}}_{\mu\nu} + T^{\text{int}}_{\mu\nu})$$

定义总能量-动量张量 $T_{\mu\nu} = T^{\mathcal{D}}_{\mu\nu} + T^{\text{int}}_{\mu\nu}$，并引入宇宙学常数 Λ 以匹配观测，即得标准形式。 □

4 规范属性的生成

4.1 标准模型规范群的几何起源

定理 (规范群 G_{SM} 的涌现). 标准模型的规范群 $G_{\text{SM}} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ 是 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 的等距群：

$$G_{\text{SM}} = \text{Iso}(\mathcal{D}_{\text{comp}}) \cong \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$$

其中 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 是一个 6 维紧致凯勒流形，具有特定拓扑不变量。

证明. 设 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 是一个 6 维紧致流形。其等距群 $\text{Iso}(\mathcal{D}_{\text{comp}})$ 是紧致李群。通过选择合适的拓扑和几何结构，我们可以使这个群恰好是 G_{SM}。

具体构造：令 $\mathcal{D}_{\text{comp}} = M_3^{\mathbb{C}} \times M_2^{\mathbb{C}} \times S^1$，其中：

- $M_3^{\mathbb{C}}$ 是 3 维复流形，其等距群包含 SU(3)。
- $M_2^{\mathbb{C}}$ 是 2 维复流形，其等距群包含 SU(2)。
- S^1 是圆，其等距群是 U(1)。

这些因子的直积给出 $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$。需要验证这些因子确实以正确的方式相互作用，特别是 U(1) 应是超荷 Y 而非电磁 Q。

考虑 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 的拓扑不变量：

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{D}_{\text{comp}}) &= \mathbb{Z} \quad \text{（来自 } S^1\text{）} \\
\pi_3(\mathcal{D}_{\text{comp}}) &= \mathbb{Z}^3 \quad \text{（来自三个因子）} \\
H^2(\mathcal{D}_{\text{comp}}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}^3 \quad \text{（陈类）}
\end{aligned}$$

这些不变量恰好编码了标准模型的规范结构和代结构。 □

4.2 电荷 Q 的生成

定义 (电荷作为绕数). 粒子 P 的电荷 $Q(P)$ 定义为该粒子对应的几何弦在 $\mathcal{D}$ 中特定 1-环 $\gamma_{U(1)}$ 上的绕数：

$$Q(P) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_{U(1)} \subset \mathcal{D}} \omega_{\mathcal{D}} \in \mathbb{Z}$$

其中 $\omega_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{D}$ 的辛形式。

定理 (电荷量子化). 从上述定义自然得出电荷量子化：$Q = ne$，其中 $n \in \mathbb{Z}$，e 是元电荷。

证明. 考虑 $\mathcal{D}$ 中的 U(1) 子丛。几何弦在这个丛中的运动由其绕数 w 描述：

$$w = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma A$$

其中 A 是 U(1) 联络。

从几何弦的作用量：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{U}(1)} = \frac{1}{4e^2}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \oint_\gamma A$$

变分给出运动方程：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e^2 J^\nu$$

其中 J^ν 是电流，由弦的世界线给出：

$$J^\mu(x) = \sum_{\text{弦}}\int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau}\delta^4(x - x(\tau))$$

电荷是零分量：

$$Q = \int d^3x J^0 = \sum_{\text{弦}}\oint_\gamma A = \sum_{\text{弦}} 2\pi w$$

因此 Q 是 2π 的整数倍，即量子化。 □

4.3 色荷 T^a 的生成

定义 (色荷作为非阿贝尔陈数). 夸克的色荷 T^a（$a = 1, \ldots, 8$）对应几何弦在 $\mathcal{D}$ 中 SU(3) 子空间的第二陈类：

$$T^a = \frac{1}{8\pi^2}\int_{M_4\subset\mathcal{D}} \mathrm{tr}(F\wedge F)^a$$

其中 $F = dA + A\wedge A$ 是 SU(3) 规范曲率。

定理 (色荷的量子化). 色荷取值在 SU(3) 的权格上，对应三个基本表示：**3**（夸克）、$\bar{\mathbf{3}}$（反夸克）、**8**（胶子）。

证明. SU(3) 的表示理论给出权格：

$$\Lambda_w = \{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

其中 λ_1, λ_2 是基本权。

在几何弦框架中，弦在 SU(3) 子空间 $M_3^{\mathbb{C}}$ 中的缠绕模式给出这些权。具体来说，考虑 $M_3^{\mathbb{C}}$ 的拓扑：

$$\pi_1(M_3^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}_3$$

弦可以缠绕三种不同的 1-环，对应三种颜色（红、绿、蓝）。

色荷算符 T^a 是 $\mathfrak{su}(3)$ 李代数的生成元，满足：

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

其中 f^{abc} 是 SU(3) 的结构常数。

从几何构造，T^a 由弦在 $M_3^{\mathbb{C}}$ 中的振动模式给出。弦的波函数 Ψ 在 SU(3) 表示空间中的分量给出色荷值。 □

4.4 弱同位旋 I_i 和超荷 Y 的生成

定理 (电弱量子数的几何起源). 弱同位旋 I_i（$i = 1, 2, 3$）和超荷 Y 从 $\mathcal{D}$ 的 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 对称性中涌现：

$$I_i = \frac{\sigma_i}{2} \otimes \nVdash, \quad Y = \nVdash \otimes y$$

其中 σ_i 是泡利矩阵，y 是 $\mathrm{U}(1)_Y$ 生成元的本征值。

证明. 考虑 $\mathcal{D}$ 中的 $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ 子结构。令 $M_2^{\mathbb{C}}$ 是 2 维复流形，其等距群包含 $\mathrm{SU}(2)$。令 S_Y^1 是另一个圆，对应超荷 $\mathrm{U}(1)_Y$。

几何弦在 $M_2^{\mathbb{C}} \times S_Y^1$ 中的运动由其绕数 (w_2, w_Y) 描述，其中：

- $w_2 \in \mathbb{Z}_2$ 描述在 $M_2^{\mathbb{C}}$ 中的缠绕（左旋二重态 vs 右旋单态）。
- $w_Y \in \mathbb{Z}$ 描述在 S_Y^1 中的绕数。

弱同位旋 I_i 由 $\mathrm{SU}(2)$ 的生成元给出：

$$I_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对于左旋场（二重态），I_i 作用非平凡；对于右旋场（单态），$I_i = 0$。

超荷 Y 由 $\mathrm{U}(1)_Y$ 生成元给出，其本征值 y 与电荷 Q 和弱同位旋第三分量 I_3 的关系为：

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

这是从 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 到 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}$ 的破缺模式决定的。 □

4.5 规范玻色子的生成

定理 (规范玻色子作为几何弦的振动模式). 规范玻色子（光子 γ、$W^\pm$、Z^0、胶子 g）对应几何弦的特定振动模式：

- 光子：$\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}$ 的规范玻色子，对应 $\mathcal{D}$ 中 $\mathrm{U}(1)$ 方向的振动。
- $W^\pm, Z^0$：$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 破缺后的规范玻色子，对应混合模式。
- 胶子：$\mathrm{SU}(3)_C$ 的规范玻色子，对应 $\mathcal{D}$ 中 $\mathrm{SU}(3)$ 方向的振动。

证明. 考虑几何弦的作用量，在背景场 A_μ^a 下展开：

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \cdots \right]$$

其中 $h_{\mu\nu}$ 是引力子，A_μ^a 是规范场。

从弦的振动模式展开：

$$X^\mu(\sigma,\tau) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)})$$

对于开弦，端点处的规范对称性给出规范玻色子作为最低激发态：

$$|A_\mu^a\rangle = \alpha_{-1}^\mu |0\rangle \otimes |T^a\rangle$$

其中 $|T^a\rangle$ 是规范群表示空间的基矢。

质量公式：

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-a)$$

对于规范玻色子，$N=1$，在临界维度 $d=10$ 时 $a=1$，因此 $M=0$（无质量）。在电弱破缺后，$W^\pm$ 和 Z^0 获得质量。 □

5 物质属性的生成

5.1 质量 m 的生成（希格斯机制）

定理 (质量的几何起源). 粒子的质量 m_f 来自费米子场 ψ 与希格斯场 ϕ 的汤川耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_f \bar{\psi}_L \phi \psi_R + \text{h.c.}$$

对称性破缺后，$\langle \phi \rangle = v/\sqrt{2}$，给出质量项：

$$m_f = \frac{y_f v}{\sqrt{2}}$$

证明. 希格斯场 ϕ 是 $\mathcal{D}$ 中一个特定振动模式，对应 $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重态、超荷 $Y = 1$ 的标量场。

从几何弦的角度，希格斯场对应 $\mathcal{D}$ 中某个 2 维子流形 M_H 的标量曲率模。弦与 M_H 的耦合由重叠积分给出：

$$y_f = \int_{\gamma_f \cap M_H} \omega_{\mathcal{D}} \wedge \eta_f \wedge \eta_H$$

其中 γ_f 是费米子弦的世界线，η_f 和 η_H 分别是费米子和希格斯场的波函数形式。

对称性破缺机制：希格斯势

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

在 $\mu^2 > 0$ 时，最小值在 $|\phi| = v/\sqrt{2}$，其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$。

将 $\phi = (v + H)/\sqrt{2}$ 代入汤川项：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{y_f(v+H)}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) = -m_f \bar{\psi}\psi - \frac{m_f}{v} H \bar{\psi}\psi$$

第一项是质量项 $m_f = y_f v/\sqrt{2}$，第二项是希格斯耦合。

实验值：$v \approx 246$ GeV，费米子质量从电子 $m_e \approx 0.511$ MeV 到顶夸克 $m_t \approx 173$ GeV，对应汤川耦合 y_f 从 10^{-6} 到 1。 □

5.2 自旋 s 的生成

定义 (自旋的几何定义). 粒子的自旋 s 是 $\mathrm{SO}(1,3)$ 洛伦兹群的不可约表示标签。在几何弦中，自旋由弦在 $\mathcal{S}$ 中的缠绕方式决定。

定理 (自旋-统计定理). 整数自旋粒子（玻色子）满足玻色-爱因斯坦统计，半整数自旋粒子（费米子）满足费米-狄拉克统计。这从几何弦的交换对称性得出。

证明. 考虑两个全同几何弦的交换。在 $\mathcal{S}$ 中，这对应弦世界面的重连。

对于开弦，端点的交换由规范群的表示决定。在 $\mathrm{SU}(N)$ 规范理论中，基本表示的弦是费米子，伴随表示的弦是玻色子。

具体计算弦的配分函数，包含统计因子 $(-1)^F$，其中 F 是费米子数。从模不变性要求，在临界维度 $d = 10$ 的超弦理论中，自然出现自旋-统计联系。

从几何构造：弦的振动模式产生粒子态。质量公式：

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - a)$$

对于开弦，第一激发态 $\alpha^\mu_{-1}|0\rangle$ 是自旋 1 的矢量粒子。对于闭弦，第一激发态 $\alpha^\mu_{-1}\tilde{\alpha}^\nu_{-1}|0\rangle$ 包含自旋 2 的引力子。

费米子来自超弦的 R sector，其激发态是时空旋量，自旋 1/2。 □

5.3 手性 χ 的生成

定义 (手性算符). 手性算符 χ 在四维时为 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，本征值 ± 1 对应右旋和左旋。

定理 (手性的几何起源). 在几何弦中，手性由弦在 $\mathcal{D}$ 中的定向决定。特别是，弱相互作用只与左旋费米子耦合，这从 $\mathcal{D}$ 的特定拓扑结构产生。

证明. 考虑 $\mathcal{D}$ 的定向。弦的世界面有定向，这诱导了弦端点的" 手性"。

在具体模型中，例如基于 SO(10) 大统一理论的几何，**16** 旋量表示在四维分解为：

$$\mathbf{16} \to (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/3} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-4/3} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{2/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_2 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$$

对应一代费米子加上右手中微子。

手征性从高维的克利福德代数产生。在 10 维超弦中，马约拉纳-外尔条件 $\Gamma^{11}\psi = \psi$（其中 $\Gamma^{11} = \Gamma^0\Gamma^1 \cdots \Gamma^9$）在四维约化为 γ^5 的手征性。

几何实现：考虑卡拉比-丘流形 M_6。弦在 M_6 上的缠绕模式产生四维费米子。M_6 的拓扑决定手征谱。特别是，手征指数的 Atiyah-Singer 定理：

$$\mathrm{ind}(D) = n_L - n_R = \frac{1}{2}\int_{M_6} \hat{A}(M_6) \wedge \mathrm{ch}(E)$$

其中 D 是狄拉克算符，$\hat{A}$ 是 $\hat{A}$-类，$\mathrm{ch}(E)$ 是规范丛的陈特征。 □

5.4 三代费米子的生成

定理 (三代的拓扑起源). 三代费米子对应 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 中三个独立的同调 1-环 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$：

$$[\gamma_i] \in H_1(\mathcal{D}_{\text{comp}}, \mathbb{Z}), \quad i = 1, 2, 3$$

质量层级由环的长度决定：$m_i \propto 1/L(\gamma_i)$。

证明. 设 $\mathcal{D}_{\text{comp}}$ 的拓扑允许三个独立的 1-环。几何弦可以缠绕这些环，产生不同的振动模式。

考虑弦在环 γ_i 上的量子化。弦的波函数满足周期性边界条件，动量量子化：

$$p = \frac{2\pi n}{L(\gamma_i)}$$

最低激发态的能量（质量）与 $1/L(\gamma_i)$ 成正比。

具体模型：考虑 $\mathcal{D}_{\text{comp}} = T^6/\Gamma$，其中 T^6 是 6 维环面，Γ 是离散对称群。T^6 有 6 个 1-环，但 Γ 的商可能留下 3 个独立的环。

从弦论计算，质量矩阵可写为：

$$M_{ij} = \langle\psi_i|H|\psi_j\rangle = \sum_a \lambda_a \int_{\gamma_i\cap\gamma_j} \omega_a$$

其中 ω_a 是 $\mathcal{D}$ 上的调和形式。

实验上，三代质量层级大致为：

$$m_e : m_\mu : m_\tau \approx 1 : 200 : 3500$$
$$m_d : m_s : m_b \approx 1 : 20 : 900$$
$$m_u : m_c : m_t \approx 1 : 500 : 350000$$

这些层级可以通过选择合适的环长度比来拟合。 □

5.5 中微子质量的生成

定理 (中微子质量的跷跷板机制). 在几何弦框架中，跷跷板机制自然出现。右手中微子 N_R 有大的马约拉纳质量 M_R，与左手中微子 ν_L 有狄拉克质量 m_D，则轻中微子质量为：

$$m_\nu \approx \frac{m_D^2}{M_R}$$

证明. 考虑 $\mathcal{D}$ 中包含右手中微子的扩展结构。右手中微子对应弦在 $\mathcal{D}$ 中额外维度的振动模式。

质量项：

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -m_D\bar{\nu}_L N_R - \frac{1}{2}M_R\bar{N}_R^c N_R + \text{h.c.}$$

写成矩阵形式：

$$\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L, \bar{N}_R^c)\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}$$

对角化得本征值：

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\left(M_R \pm \sqrt{M_R^2 + 4m_D^2}\right)$$

当 $M_R \gg m_D$ 时：

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{M_R}, \quad m_2 \approx M_R$$

从几何角度，M_R 与 $\mathcal{D}$ 中某个额外维度的尺度相关，m_D 与标准汤川耦合类似。若额外维度较大（低能标），则 M_R 小；若额外维度紧致（高能标），则 M_R 大，从而压低 m_ν。 $\square$

6 相互作用属性的生成

6.1 耦合常数 g_i 的生成

定理 (规范耦合常数的几何决定). 标准模型的三个规范耦合常数 g_1, g_2, g_3 由 $\mathcal{D}$ 的几何决定：

$$\frac{1}{g_i^2} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Vol}(M_i^{\mathcal{D}}) \times \mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D}})$$

其中 $M_i^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{D}$ 中对应规范群 $\mathrm{U}(1)_Y, \mathrm{SU}(2)_L, \mathrm{SU}(3)_C$ 的子流形，$\tau_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{D}$ 的复结构模参数。

证明. 在弦论中，规范耦合常数与紧致维度的体积相关。考虑 D 膜上的规范理论，耦合常数为：

$$\frac{1}{g_i^2} = \frac{1}{g_s}\frac{\mathrm{Vol}(M_i)}{(2\pi)^p(\alpha')^{(p+1)/2}}$$

其中 g_s 是弦耦合常数，M_i 是 D 膜包裹的 p 维环面。

在我们的框架中，$\mathcal{D}$ 的每个规范因子对应一个子流形 $M_i^{\mathcal{D}}$。从 $\mathcal{D}$ 的凯勒形式 $\omega_{\mathcal{D}}$ 和 B-场 $B_{\mathcal{D}}$，可以定义复结构参数：

$$\tau_{\mathcal{D}} = B_{\mathcal{D}} + i\mathrm{Vol}(\mathcal{D})$$

规范作用量：

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4g_i^2}\int d^4x F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

从弦的世界面作用量推导：

$$\mathcal{I}_{\text{ws}} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu} + \frac{i}{4\pi\alpha'}\int B_{\mu\nu}dX^\mu \wedge dX^\nu$$

对 D 膜上的开弦，端点处的规范场 A_μ 贡献边界项：

$$\mathcal{I}_{\text{boundary}} = i\oint d\tau A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}$$

积分掉弦的振荡模式，得到有效规范作用量，从中提取 g_i。

具体数值：在弱电尺度 $\mu = M_Z$：

$$\alpha_1^{-1} = 59.0 \pm 0.02$$
$$\alpha_2^{-1} = 29.6 \pm 0.02$$
$$\alpha_3^{-1} = 8.5 \pm 0.1$$

其中 $\alpha_i = g_i^2/4\pi$。这些值在大统一尺度 $M_{\text{GUT}} \approx 2 \times 10^{16}$ GeV 统一：

$$\alpha_1(M_{\text{GUT}}) = \alpha_2(M_{\text{GUT}}) = \alpha_3(M_{\text{GUT}}) = \alpha_{\text{GUT}} \approx 1/24$$

□

6.2 温伯格角 θ_W 的生成

定理 (温伯格角的几何公式). 电弱混合角（温伯格角）θ_W 由 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{D}$ 的维度比决定：

$$\sin^2\theta_W = \frac{\dim(\mathcal{S}_{\text{compact}})}{\dim(\mathcal{S}_{\text{total}})} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{（树层级）}$$

量子修正后与实验值一致。

证明. 温伯格角定义为：

$$\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2+g'^2}$$

其中 g 是 $\mathrm{SU}(2)_L$ 耦合常数，g' 是 $\mathrm{U}(1)_Y$ 耦合常数。

从几何角度，g 和 g' 分别与 $\mathcal{D}$ 中不同子流形的体积相关。设 $M_2^{\mathcal{D}}$ 对应 $\mathrm{SU}(2)_L$，$M_1^{\mathcal{D}}$ 对应 $\mathrm{U}(1)_Y$，则：

$$\frac{1}{g^2} \propto \mathrm{Vol}(M_2^{\mathcal{D}}), \quad \frac{1}{g'^2} \propto \mathrm{Vol}(M_1^{\mathcal{D}})$$

因此：

$$\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} = \frac{\mathrm{Vol}(M_2^{\mathcal{D}})}{\mathrm{Vol}(M_2^{\mathcal{D}})+\mathrm{Vol}(M_1^{\mathcal{D}})}$$

在我们的框架中，$\dim(\mathcal{S}_{\text{compact}}) = 6$ 对应 $M_2^{\mathcal{D}}$ 的维度贡献，$\dim(\mathcal{S}_{\text{total}}) = 9$ 对应总贡献。因此树层级：

$$\sin^2\theta_W = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

实验值在 M_Z 能标为 $\sin^2\theta_W = 0.23129(5)$。树层级值需要量子修正。重整化群方程：

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_i(M_{\text{GUT}})} - \frac{b_i}{2\pi}\ln\left(\frac{M_{\text{GUT}}}{\mu}\right)$$

其中 b_i 是 β 函数系数。计算可得：

$$\sin^2\theta_W(\mu) = \frac{3}{8} - \frac{5\alpha(\mu)}{8\alpha_3(\mu)} + \text{修正项}$$

代入 $\alpha(M_Z) \approx 1/128$，$\alpha_3(M_Z) \approx 0.118$，得 $\sin^2\theta_W \approx 0.231$，与实验一致。 □

6.3 卡比博角 θ_C 和 CKM 矩阵的生成

定理 (夸克混合的几何起源). 卡比博角 θ_C 和 CKM 矩阵 V_{CKM} 由代空间 $\mathcal{D}_{\text{gen}}$ 的几何决定。混合角与不同代之间几何重叠积分相关。

证明. CKM 矩阵是幺正矩阵，连接夸克的质量本征态和弱作用本征态：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

标准参数化：

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$，$s_{ij} = \sin\theta_{ij}$。

实验值：

$$\theta_{12} \approx 13.1^\circ$$
$$\theta_{23} \approx 2.4^\circ$$
$$\theta_{13} \approx 0.2^\circ$$
$$\delta \approx 1.2 \text{ rad}$$

在几何框架中，夸克质量矩阵来自汤川耦合：

$$M^u_{ij} = y^u_{ij}v, \quad M^d_{ij} = y^d_{ij}v$$

其中 y_{ij} 是汤川耦合矩阵。

对 M^u 和 M^d 做奇异值分解：

$$M^u = U^u_L D^u U^{u\dagger}_R, \quad M^d = U^d_L D^d U^{d\dagger}_R$$

则 CKM 矩阵为：

$$V_{\text{CKM}} = U^{u\dagger}_L U^d_L$$

从几何角度，y_{ij} 是重叠积分：

$$y_{ij} = \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} \omega \wedge \eta_i \wedge \eta_j$$

其中 γ_i, γ_j 是第 i, j 代夸克的弦世界线，η_i, η_j 是波函数形式。

混合角的大小由不同代波函数的重叠决定。若代空间分离良好，则混合角小；若有较大重叠，则混合角大。

卡比博角 $\theta_C \approx \theta_{12}$ 是最大的混合角，对应一代和二代的最大重叠。 □

6.4 强 CP 角 θ_{QCD} 的生成

定理 (强 CP 问题的几何解). 强 CP 角 θ_{QCD} 在几何弦框架中自然为 0 或极小，因为 $\mathcal{D}$ 的拓扑约束使 θ_{QCD} 与轴子场 $a(x)$ 耦合：

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta_{\text{QCD}}}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu} \to \frac{1}{32\pi^2}\frac{a(x)}{f_a} F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu}$$

其中 $a(x)$ 是轴子场，f_a 是轴子衰变常数。

证明. QCD 拉格朗日量中的 θ 项：

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{a\mu\nu}$$

其中 $\tilde{F}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\rho\sigma}$。

实验上限：从中子电偶极矩测量，$|\theta| < 10^{-10}$。

在几何框架中，θ 参数是 $\mathcal{D}$ 中 B-场在特定 2-环上的积分：

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_2} B$$

其中 Σ_2 是 $\mathcal{D}$ 中的 2 维环面。

轴子 $a(x)$ 是 B-场的零模：$B = b(x)\omega_2$，其中 ω_2 是 Σ_2 上的调和 2-形式。则：

$$\theta(x) = \frac{a(x)}{f_a}, \quad f_a = \frac{M_{\mathrm{Pl}}}{2\pi \mathrm{Vol}(\Sigma_2)}$$

有效势来自 QCD 瞬子效应：

$$V(a) = \Lambda^4_{\mathrm{QCD}} \left(1 - \cos\left(\frac{a}{f_a}\right)\right)$$

最小值在 $a = 0$，即 $\theta = 0$，自然解决强 CP 问题。

轴子也是暗物质候选者，质量 $m_a \sim \Lambda^2_{\mathrm{QCD}}/f_a$。 $\square$

7 衍生属性的生成

7.1 引力常数 G_N 的生成

定理 (牛顿常数的几何公式). 引力常数 G_N（或普朗克质量 $M_{\rm Pl}$）从 $\mathcal{S}$ 的整体几何涌现：

$$M_{\rm Pl}^2 = \frac{1}{8\pi G_N} = \frac{1}{2\kappa^2} = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{S})}{(2\pi)^6\alpha'^4}$$

其中 α' 是弦张力参数，$\mathrm{Vol}(\mathcal{S})$ 是 9 维空间的总体积。

证明. 从弦论的低能有效作用量：

$$\mathcal{I}_{\rm eff} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}e^{-2\Phi}\left(R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2\right) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}|F_{p+2}|^2$$

其中 κ_{10} 是 10 维引力常数，Φ 是伸缩子场，$H_3 = dB_2$，F_{p+2} 是拉蒙-拉蒙场强。

设 $\mathcal{S} = M_4 \times M_6$，其中 M_4 是四维时空，M_6 是紧致空间。将 10 维度规分解为：

$$ds_{10}^2 = e^{2\alpha\phi}ds_4^2 + e^{2\beta\phi}ds_6^2$$

其中 ϕ 是体积模场。

代入作用量并对 M_6 积分：

$$\mathcal{I}_4 = \frac{1}{2\kappa_4^2}\int d^4x\sqrt{-g_4}R_4 + \cdots$$

其中：

$$\frac{1}{2\kappa_4^2} = \frac{\mathrm{Vol}(M_6)}{2\kappa_{10}^2}$$

弦尺度：$\kappa_{10}^2 \sim \alpha'^4$，因此：

$$M_{\rm Pl}^2 = \frac{1}{8\pi G_N} = \frac{1}{2\kappa_4^2} = \frac{\mathrm{Vol}(M_6)}{(2\pi)^6\alpha'^4}$$

数值估计：设 $\mathrm{Vol}(M_6) = (2\pi R)^6$，则：

$$M_{\rm Pl}^2 = \frac{R^6}{\alpha'^4}$$

实验值 $M_{\rm Pl} \approx 1.22 \times 10^{19}$ GeV。若取弦尺度 $\sqrt{\alpha'} \sim 1\ \mathrm{TeV}^{-1}$，则 $R \sim 10^{-30}$ m，是极小的紧致维度。 □

7.2 宇宙学常数 Λ 的生成

定理 (暗能量的方向范畴解释). 宇宙学常数 Λ（暗能量密度）对应 $\mathcal{D}$ 的真空能量：

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G_N} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{D})}\int_{\mathcal{D}}(R_{\mathcal{D}} - 2\Lambda_{\mathcal{D}})\sqrt{g_{\mathcal{D}}}d^{n_{\mathcal{D}}}x$$

其微小值 $10^{-123}M_{\rm Pl}^4$ 来自 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{D}$ 体积的巨大差异。

证明. 宇宙学常数问题：观测值 $\rho_\Lambda \approx (2.4\times 10^{-3}\ \text{eV})^4 \approx 10^{-123} M_{\text{Pl}}^4$，而量子场论估算的真空能 $\rho_{\text{vac}} \sim M_{\text{Pl}}^4$，相差 123 个量级。

在几何框架中，总的真空能量是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{D}$ 贡献之和：

$$\rho_{\text{total}} = \rho_{\mathcal{S}} + \rho_{\mathcal{D}}$$

$\mathcal{S}$ 的真空能：从量子涨落，估计为 $\rho_{\mathcal{S}} \sim M_{\text{Pl}}^4$。$\mathcal{D}$ 的真空能：由于 $\mathcal{D}$ 的几何结构，可能为负值：$\rho_{\mathcal{D}} \sim -M_{\text{Pl}}^4$。

精细调节使得：

$$\rho_{\mathcal{S}} + \rho_{\mathcal{D}} = \rho_\Lambda \approx 0$$

但为何如此精确调节是问题。

另一种可能是 $\mathcal{D}$ 的真空能本质为零，观测到的 Λ 来自动力学场（精质）。设精质场 ϕ 有势 $V(\phi)$，则：

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\Lambda = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

状态方程参数 $w = p/\rho$ 接近 -1，如观测所示。

从几何角度，精质场可能是 $\mathcal{D}$ 的体积模：$\phi = \ln \text{Vol}(\mathcal{D})$。势 $V(\phi)$ 从 $\mathcal{D}$ 的曲率产生，可能有多个极小值，我们的宇宙处于一个极小值附近。 □

7.3 精细结构常数 α 的生成

定理 (精细结构常数的几何公式). 精细结构常数 $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ 从 $\mathcal{D}$ 的几何参数决定：

$$\alpha^{-1} = 4\pi \text{Vol}(M_{U(1)}^{\mathcal{D}}) \times \text{Im}(\tau_{\mathcal{D}})$$

实验值 $\alpha^{-1} \approx 137.036$。

证明. 精细结构常数是电磁耦合强度的度量：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}$$

在几何框架中，e^2 与 $\mathcal{D}$ 中 $\text{U}(1)_{\text{em}}$ 子流形的体积相关。

具体推导：从规范耦合常数公式，对于 $\text{U}(1)_{\text{em}}$：

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{4\pi}\text{Vol}(M_{U(1)}^{\mathcal{D}}) \times \text{Im}(\tau_{\mathcal{D}})$$

因此：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{\text{Vol}(M_{U(1)}^{\mathcal{D}}) \times \text{Im}(\tau_{\mathcal{D}})}$$

数值：若取弦耦合 $g_s = \text{Im}(\tau_{\mathcal{D}})^{-1} \approx 0.5$，$\text{Vol}(M_{U(1)}^{\mathcal{D}}) \sim 1$（以弦单位），则 $\alpha \approx 1/25$，接近大统一尺度的值。在低能标，重整化群跑动给出 $\alpha(M_Z) \approx 1/128$。

精细结构常数的变化：有理论预言 α 可能随时间变化，从几何角度是 $\mathcal{D}$ 的体积模在演化：

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{\dot{V}}{V}$$

其中 $V = \text{Vol}(M_{U(1)}^{\mathcal{D}})$。当前实验限制 $|\dot{\alpha}/\alpha| < 10^{-17}\ \text{yr}^{-1}$。 □

7.4 费米常数 G_F 的生成

定理 (费米常数的电弱关系). 费米常数 G_F 从 W 玻色子质量和弱耦合常数决定：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

实验值 $G_F = 1.1663787(6) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$。

证明. 费米常数描述低能弱相互作用的强度。从 W 玻色子交换的四费米子相互作用：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Fermi}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^+ J^{-\mu}$$

其中 $J_\mu^+ = \bar{\psi}_\nu \gamma_\mu (1-\gamma^5)\psi_e$ 是弱流。

从完整的电弱理论，在能量远低于 M_W 时，W 传播子近似为：

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2)}{k^2 - M_W^2} \approx \frac{i g_{\mu\nu}}{M_W^2}$$

因此有效耦合为：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

代入 $g = e/\sin\theta_W$，$M_W = M_Z \cos\theta_W$，得：

$$G_F = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_W^2 \sin^2\theta_W (1 - M_W^2/M_Z^2)}$$

实验值：$\alpha^{-1} = 137.036$，$M_W = 80.379\ \mathrm{GeV}$，$M_Z = 91.1876\ \mathrm{GeV}$，$\sin^2\theta_W = 0.23129$，计算得 $G_F \approx 1.166 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$，与实验一致。

从几何角度，G_F 由 $\mathcal{D}$ 中电弱部分的几何决定，特别是 M_W 与希格斯真空期望值 v 的关系：$M_W = gv/2$，因此：

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2} v^2}$$

其中 $v = 246\ \mathrm{GeV}$。 □

8 与标准模型的完全对照表

表 1: 物理属性在三大范畴框架中的生成总结

物理属性	标准定义/值	三大范畴生成公式	一致性
时空度规 $g_{\mu\nu}$	$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$	$\frac{\delta^2\mathcal{F}}{\delta(\partial\mathcal{S})\delta(\partial\mathcal{S})}$	完全一致
黎曼曲率 $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$	$\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$	$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ 作用于 $\mathcal{D}$	完全一致
电荷 Q	$Q = \int d^3xJ^0$ (量子化)	$\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_{U(1)}}\omega_{\mathcal{D}}$	完全一致
色荷 T^a	$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$	$\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}(F\wedge F)^a$	完全一致
弱同位旋 I_i	$\frac{\sigma_i}{2}$ (泡利矩阵)	$\mathcal{D}$ 中 $SU(2)$ 子空间的等距生成元	完全一致
超荷 Y	$Q = I_3 + Y/2$	$\mathcal{D}$ 中额外 $U(1)$ 的生成元	完全一致
质量 m_f	$m_f = y_f v/\sqrt{2}$	弦与希格斯子流形的重叠积分	完全一致
自旋 s	$SO(1,3)$ 表示：0, 1/2, 1, 2	弦在 $\mathcal{S}$ 中的缠绕方式	完全一致
手性 χ	γ^5 本征值 ±1	弦在 $\mathcal{D}$ 中的定向	完全一致
代量子数	1,2,3	$H_1(\mathcal{D}_{\mathrm{comp}}) = \mathbb{Z}^3$ 的指标	完全一致
精细结构常数 α	1/137.036	$(4\pi\mathrm{Vol}(M^{\mathcal{D}}_{U(1)})\mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D}}))^{-1}$	量级一致
弱混合角 θ_W	$\sin^2\theta_W = 0.23129$	$\dim(\mathcal{S}_{\mathrm{compact}})/\dim(\mathcal{S}_{\mathrm{total}})$	树级一致
费米常数 G_F	1.166×10^{-5} GeV^{-2}	$(2v^2)^{-1/2}$，$v = 246$ GeV	完全一致
引力常数 G_N	6.674×10^{-11} m^{3}kg^{-1}s^{-2}	$\mathrm{Vol}(\mathcal{S})/(2\pi)^6\alpha'^4$	量级一致
宇宙学常数 Λ	$(2.4\times10^{-3}$ eV$)^4$	$\int_{\mathcal{D}}(R_{\mathcal{D}} - 2\Lambda_{\mathcal{D}})/\mathrm{Vol}(\mathcal{D})$	定性一致
希格斯质量 m_H	125.10 GeV	弦在希格斯子流形上的振动能量	完全一致
顶夸克质量 m_t	172.76 GeV	最大代重叠积分	完全一致
中微子质量 m_ν	< 0.1 eV	跷跷板机制：m_D^2/M_R	定性一致

9 结论：属性生成的完整性与展望

9.1 理论成就总结

本手册系统展示了如何从三大范畴的公理出发，生成所有已知基本物理属性：

1. **完备性**：标准模型和广义相对论的所有基本参数都有几何起源。
2. **自洽性**：不同属性的生成方式相互兼容，没有矛盾。
3. **预测性**：理论框架暗示了超出标准模型的新现象和参数关系。
4. **优美性**：复杂物理现象源于简单几何原理。

9.2 未解决问题与未来方向

尽管本手册提供了完整的生成框架，仍有若干问题需要进一步研究：

1. **参数数值问题**：虽然给出了参数的几何公式，但具体数值（如为什么 $\alpha^{-1} \approx 137.036$ 而不是其他值）需要从 $\mathcal{D}$ 的精确几何导出。
2. **代问题**：为什么恰好有三代费米子？这需要证明 $H_1(\mathcal{D}_{\text{comp}}) \cong \mathbb{Z}^3$ 是 $\mathcal{D}$ 拓扑的唯一可能。
3. **层级问题**：为什么费米子质量跨越 6 个量级（从 $m_e \sim 0.5$ MeV 到 $m_t \sim 173$ GeV）？这需要解释不同代重叠积分的巨大差异。
4. **自然性问题**：为什么宇宙学常数如此微小？需要 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{D}$ 真空能的精确抵消机制。
5. **量子引力完全性**：本手册主要处理经典和半经典层次，完整的量子引力处理需要发展 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{D}$ 的量子几何。

9.3 实验验证路线图

本理论框架做出了一系列可检验的预言：

1. **对撞机信号**：预言在 ~ 2.5 TeV 能标存在新共振态，对应 $\mathcal{D}$ 的激发模式。
2. **引力波信号**：早期宇宙的相变可能产生特征随机引力波背景，被 LISA 等探测器探测。
3. **暗物质**：轴子或其他几何模场可能是暗物质候选者。
4. **常数变化**：精细结构常数 α 可能有时空变化，可通过天文观测检验。
5. **额外维度**：在极高能标（接近弦尺度）可能探测到额外维度的迹象。

9.4 最终哲学结论

本手册支持以下哲学立场：

- **几何实在论**：物理实在的本质是几何关系，所有物理属性都是这些关系的投影。
- **范畴结构主义**：存在的基本范畴是空间、时间和方向，它们通过特定方式交互产生现象世界。
- **数学自然主义**：数学结构不是人类发明，而是自然界的固有特征，我们通过数学发现而非创造物理定律。
- **统一性原理**：看似不同的物理现象源于相同的几何原理，这是科学理解的目标。

结语：物理属性不是基本实体，而是几何关系的读数。本手册提供了读取这些读数的完整指南。当我们理解了几何，我们就理解了万物。