第9章（pp. 105）

母平均の区間推定

確率分布の復習（pp.105；クイズ９）

色つきの部分は確率変数（それ以外は固定値）

- 正規分布： $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0, 1)$

- χ^2分布： $U = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$

- t分布： $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\dfrac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$

- 正規分布： $Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0,1)$

母平均μ_x，母分散σ_X^2の
両方が既知なら計算可能

- χ^2分布： $U =$ … σ_X

- t分布： $T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$

確率分布の復習（pp.105；クイズ９）

- 正規分布： $Z = \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}}$

母分散σ_X^2が既知なら計算可能

- χ^2分布： $U = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$

- t分布： $T = \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$

確率分布の復習（pp.105；クイズ９）

- 正規分布： $Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0, 1)$
- χ^2分布： $U =$
- t分布： $T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$

母平均μ_xが既知なら計算可能

母平均の区間推定

区間推定の考え方

- 区間推定
  - 推定量の確率分布における区間を用いて母数を推定
  - ある区間内に母数が含まれることを信頼度で示す

- 推定した区間
  - 信頼係数$100(1-\alpha)\%$の信頼区間
    - 信頼係数　confidence coefficient
    - 信頼区間　confidence interval
  - 信頼係数95%の信頼区間のことを95%信頼区間ともいう
  - 信頼区間は（下限値，上限値）で表す

信頼区間

！超重要！

- 母平均μ_Xの95%信頼区間
  - ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って信頼区間を100回計算するとき区間内に母平均μ_Xを含むものは100回のうち95回程度になるような区間

$$\left(\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}\right)$$

信頼区間

！超重要！

- 母平均μ_Xの95%信頼区間
  - ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って信頼区間を100回計算するとき区間内に母平均μ_Xを含むものは100回のうち95回程度になるような区間

$$\left(\underbrace{\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}}_{\text{下限値}}, \underbrace{\bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}}_{\text{上限値}}\right)$$

信頼区間

$$\left(\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}\right)$$

⬇

$$\left(\text{標本平均} - t\text{分布のパーセント点}\sqrt{\frac{\text{標本不偏分散}}{\text{標本数}}}, \text{標本平均} + t\text{分布のパーセント点}\sqrt{\frac{\text{標本不偏分散}}{\text{標本数}}}\right)$$

母平均の区間推定に関する計算

pp. 111 例題９－１

例題9-1

ポイントカード所有者
2万人の母集団から
50人を無作為抽出

標本数	50
標本平均	1.98
標本分散	2.6196

母平均の
95%信頼区間を求める

例題9-1

ポイントカード所有者
2万人の母集団から
50人を無作為抽出

標本数	50
標本平均	1.98
標本分散	2.6196

母平均の
95%信頼区間を求める

①　標本不偏分散を求める

- $\widehat{\sigma_X^2} = \frac{n}{n-1} S_x^2 = \frac{50}{49} \times 2.6196$
  - 教科書 pp. 98 定義16

- 標本不偏分散

$$\widehat{\sigma_X^2} = 2.6731$$

例題9-1

ポイントカード所有者
2万人の母集団から
50人を無作為抽出

標本数	50
標本平均	1.98
標本分散	2.6196

母平均の
95%信頼区間を求める

② t分布表から t分布の%点を求める

- 今回は95%信頼区間なので

$$\left(\frac{1-0.95}{2}\right)=\frac{0.05}{2}=0.025\text{より}$$

2.5%点を求める

- 今回の例では以下を利用

- t分布の2.5%点

$$t_{0.025}(49)=2.0096$$

例題9-1

ポイントカード所有者
2万人の母集団から
50人を無作為抽出

標本数	50
標本平均	1.98
標本分散	2.6196

母平均の
95%信頼区間を求める

③　t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入

- $t_\alpha(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}$

- 今まで計算した以下を代入
- $t_\alpha(n-1) = t_{0.025}(49) = 2.0096$
- $\widehat{\sigma_X^2} = 2.6731$
- $n = 50$

ポイントカード所有者
2万人の母集団から
50人を無作為抽出

標本数	50
標本平均	1.98
標本分散	2.6196

母平均の
95%信頼区間を求める

③ t分布の%点、
標本不偏分散、
標本数を代入

- $t_\alpha(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}$

$$= 2.0096 \times \sqrt{\frac{2.6731}{50}} \approx 0.46466$$

- 今まで計算した以下を代入
- $t_\alpha(n-1) = t_{0.025}(49) = 2.0096$
- $\widehat{\sigma_X^2} = 2.6731$
- $n = 50$

例題9-1

ポイントカード所有者2万人の母集団から50人を無作為抽出

標本数	50
標本平均	1.98
標本分散	2.6196

母平均の95%信頼区間を求める

④ 標本平均から±して信頼区間を計算

- 上限値

$$\bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}$$
$$= 1.98 + 0.46466$$

- 下限値

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}$$
$$= 1.98 - 0.46466$$

以上より求める信頼区間は

$(1.54, 2.44)$

第9章のまとめ

- 母平均μ_Xの区間推定
    - 母平均μ_Xを含む統計量に基づいて行う
  - 信頼係数
  - 信頼区間
    - （下限，上限）
- 95%信頼区間
  - 信頼係数95%の信頼区間を、95%信頼区間ともいう
    - ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って
      信頼区間を100回計算するとき
      区間内に母平均μ_Xを含むものは100回中95回程度になる区間

$$\left(\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}\right)$$

    - 標本平均　：$\bar{x}$
    - 標本不偏分散　：$\widehat{\sigma_X^2}$
    - t分布のパーセント点　：$t_{0.025}(n-1)$