第8章（pp. 94）

母数の点推定

母数と統計量

母数と統計量

母数：μ_X , σ_X^2

母集団　X

大きさ　不明

母平均　$\mu_X = \sum x \Pr(X = x)$
母分散　$\sigma_X^2 = \sum (x - \mu_X)^2 \Pr(X = x)$

期待値　$E(X) = \mu_X$
分散　$Var(X) = \sigma_X^2$

無作為抽出

統計量：$\bar{X}$

標本　$\bar{X}$

大きさ　n

標本平均　$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$
標本分散　$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$

期待値　$E(\bar{X}) = \mu_X$
分散　$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n}$

母数と統計量

母数：μ_X , σ_X^2

母集団　X

大きさ　不明

無作為抽出

統計量：$\bar{X}$

標本　$\bar{X}$

大きさ　n

母数は確率変数でない

値は不変

1つしかない

標本平均は確率変数

無作為抽出の度に

標本平均の値は変わる

母数と統計量

母数：μ_X , σ_X^2

母集団　X

大きさ　不明

無作為抽出

統計量：$\bar{X}$

標本　$\bar{X}$

大きさ　n

母平均　$\mu_X = \sum x \Pr(X = x)$

母分散　$\sigma_X^2 = \sum (x - \mu_X)^2 \Pr(X = x)$

期待値　$E(X) = \mu_X$

分散　$Var(X) = \sigma_X^2$

標本平均は
正規分布にしたがう
$\Rightarrow$　中心極限定理

母数と統計量

母数：μ_X , σ_X^2

母集団　X

大きさ　不明

母平均　$\mu_X = \sum x \Pr(X = x)$
母分散　$\sigma_X^2 = \sum (x - \mu_X)^2 \Pr(X = x)$

期待値　$E(X) = \mu_X$
分散　$Var(X) = \sigma_X^2$

無作為抽出

統計量：$\bar{X}$

標本　$\bar{X}$

大きさ　n

標本の大きさnが大きいとき

統計量は母数に近づく

⇒　大数の法則

統計的推測における点推定と区間推定

（１）推定量と推定値

推定量と推定値

- 推定量
  - 母数を推定するための統計量

- 推定値
  - 統計データを代入して計算した値

（２）推定量の確率分布

推定量の確率分布

推定量は確率変数であるため、確率分布を考えることができる

- 最も良い推定量

$$E(\hat{\theta}) = \theta \text{ かつ } Var(\hat{\theta}) = 0$$

  - 母数　　　：θ
  - 推定量　　：$\hat{\theta}$

– $Var(\hat{\theta}) = 0$を満たす推定量は存在しない
  - 推定量の確率分布に散らばりが全くない状況は標本抽出においてはほぼ起こらないため
    – 推定量の確率分布に散らばりが全くないのなら「推定」は不要

（３）点推定と区間推定

点推定と区間推定

- 点推定
  - 推定量の分布における1つの値をもって母数を推定すること
    - 推定結果は1つの値
- 区間推定
  - 推定量の確率分布における区間を用いて母数を推定すること
    - 推定結果は区間（○○以上●●以下）
    - 来週以降の内容（第9章、第10章）

点推定量

（１）不偏性の性質

不偏性の性質

- 推定量として望ましい性質
  - 不偏性
    - 母数θに対する推定量$\hat{\theta}$が$E(\hat{\theta}) = \theta$を満たすとき
    - 推定量の期待値　＝　母数
  - 有効性
  - 一致性

- 不偏推定量（unbiased estimator）
  - 不偏性をもつ推定量$\hat{\theta}$
  - 偏り（バイアス）のない推定量

（２）母平均の点推定量

母平均の点推定量

- 母平均μ_Xの不偏推定量は標本平均$\bar{X}$

$$E(\bar{X}) = \mu_X$$

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) \\ &= \frac{1}{n}E\left(\sum X_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum E(X_i) \\ &= \frac{1}{n}n\mu_X \\ &= \mu_X \end{aligned}$$

母平均μ_Xの推定量

$$\widehat{\mu_X} = \bar{X}$$

（３）母分散の点推定量

母分散の点推定量

- 標本分散S_x^2は
母分散σ_X^2の不偏推定量にはならない
  - 標本分散S_x^2の期待値$E(S_x^2)$は母分散に一致しないため
  - もし母分散σ_X^2の推定量として
$\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu_X)^2$を用いることができるなら
$$E\left[\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu_X)^2\right]=\frac{1}{n}\sum E[(X_i-\mu_X)^2]=\frac{1}{n}n\sigma_X^2=\sigma_X^2$$
となるため不偏推定量になる
  - しかし母平均μ_Xは未知であるため
母平均μ_Xを推定量$\widehat{\mu_X}=\bar{X}$で置き換える必要がある

母分散の点推定量

- 標本不偏分散
  - 母分散σ_X^2の不偏推定量

$$\widehat{\sigma_X^2} = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$$

- 標本分散S_x^2の分母はnだったが
  標本不偏分散の分母は$n-1$であることに注意

母分散の点推定量

- 標本不偏分散の導出
  - 平方和の分解（詳細はpp. 91）
    » $\sum(X_i-\mu_X)^2=\sum(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu_X)^2$
  - 移項
    » $\sum(X_i-\bar{X})^2=\sum(X_i-\mu_X)^2-n(\bar{X}-\mu_X)^2$
  - 期待値をとる
    - X_iの分散$E[(X_i-\mu_X)^2]=\sigma_X^2$
      $\bar{X}$の分散$E[(\bar{X}-\mu_X)^2]=\frac{\sigma_X^2}{n}$ を利用するため

    » $E[\sum(X_i-\bar{X})^2]=E[\sum(X_i-\mu_X)^2]-E[n(\bar{X}-\mu_X)^2]$

    $=\sum E[(X_i-\mu_X)^2]-nE[(\bar{X}-\mu_X)^2]=n\sigma_X^2-n\dfrac{\sigma_X^2}{n}$

    $=(n-1)\sigma_X^2$
  - $n-1$を移項
    » $E\left[\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2\right]=\sigma_X^2$

標本不偏分散を用いた標本平均の標準化

（１）標本平均の標準化

標本平均の標準化

- 標本平均$\bar{X}$を標準化した確率変数Z
  - 標準正規分布にしたがう

$$Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

  - Zには母数（母平均、母分散）が含まれている
  - 母数は未知
    - 母分散の代わりに標本不偏分散を用いると
その統計量は標準正規分布にはしたがわない
      - » 別物になる

標本平均の標準化

- 母分散σ_X^2の代わりに
  標本不偏分散$\widehat{\sigma_X^2}$を用いた確率変数T

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$$

- 自由度$n-1$のt分布にしたがう

（２）t分布の定義

t分布の定義

- t分布（t-distribution）
  - 確率変数Zが標準正規分布$N(0,1)$にしたがい
確率変数Uが
自由度νのカイ二乗分布$\chi^2(\nu)$にしたがうとき
確率変数Tは自由度νのt分布$t(\nu)$にしたがう

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}} \sim t(\nu)$$

t分布の定義

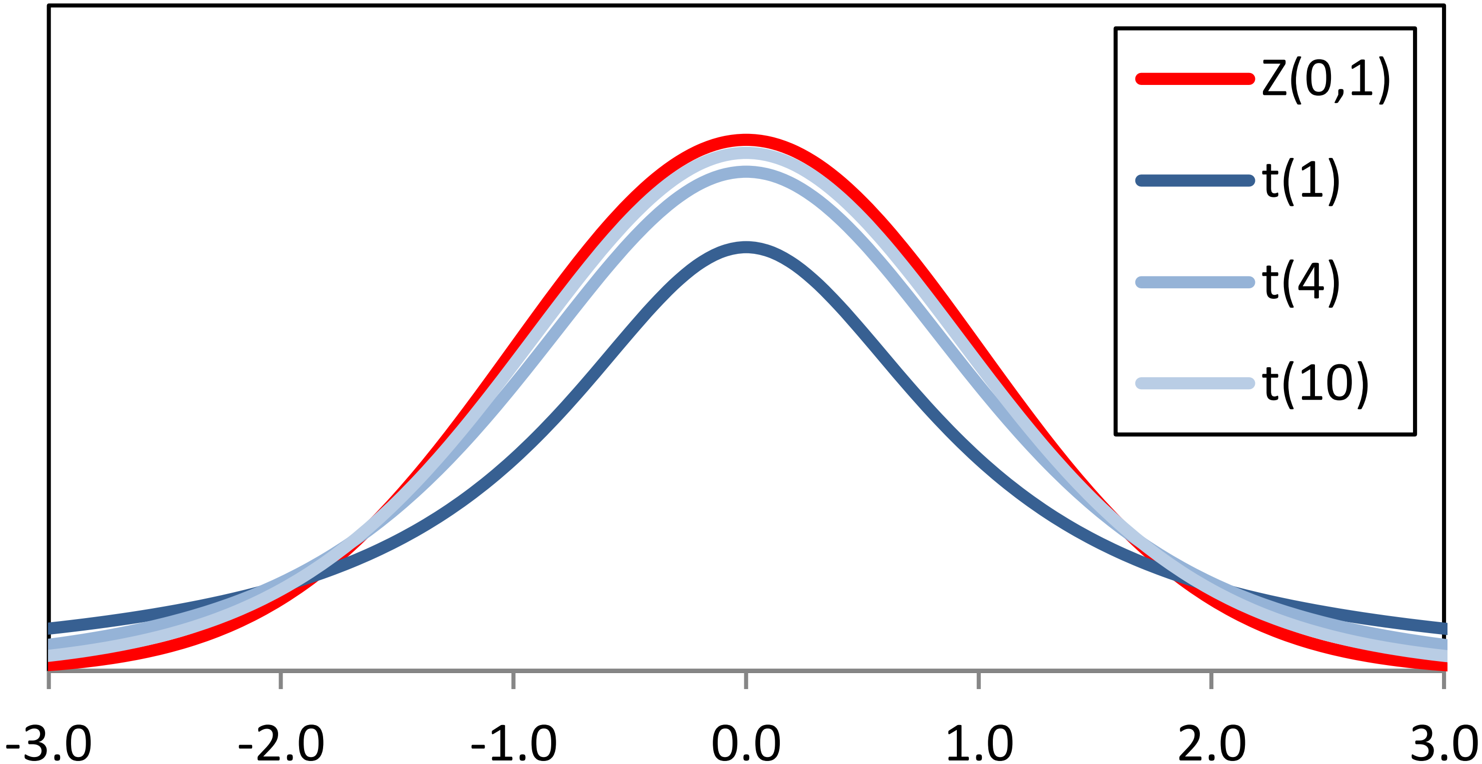
母分散σ_X^2の代わりに標本不偏分散$\widehat{\sigma_X^2}$を用いる

標準正規分布	t分布
$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0, 1)$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\dfrac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$

（４）t分布の性質

t分布の性質

- t分布
  - 左右対称の確率分布
  - 自由度νの値により形状が変化
  - 自由度νの値が大きいときに**標準正規分布に近似**する



（５）t分布表の見方

t分布表の見方

！超重要！

- t分布表
  - 教科書pp.163（付録3）
  - 表側（縦）　自由度ν
  - 表頭（横）　上側確率α
  - 表中　自由度ν、上側確率αに対応した統計量Tのパーセント点

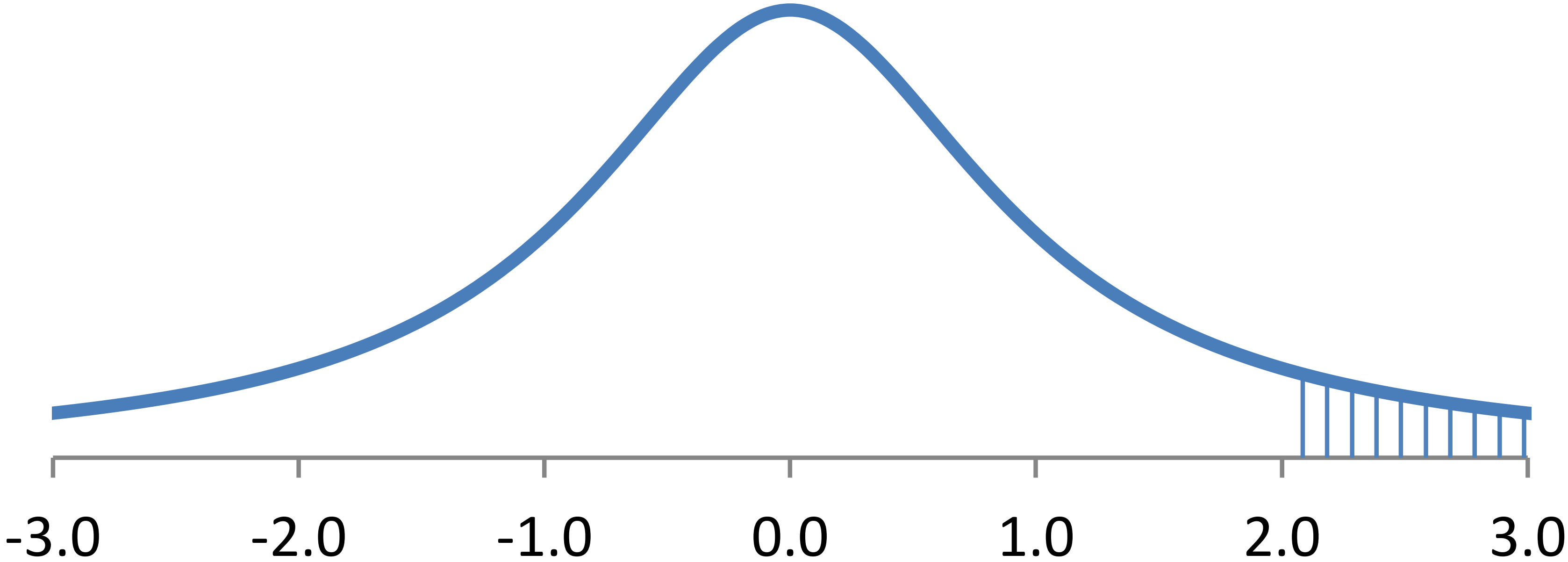
$$t_\alpha(\nu)$$

t分布表の見方

自由度 $\nu = 20$
上側確率 $\alpha = 0.025$

$\rightarrow$

$t_{0.025}(20)$

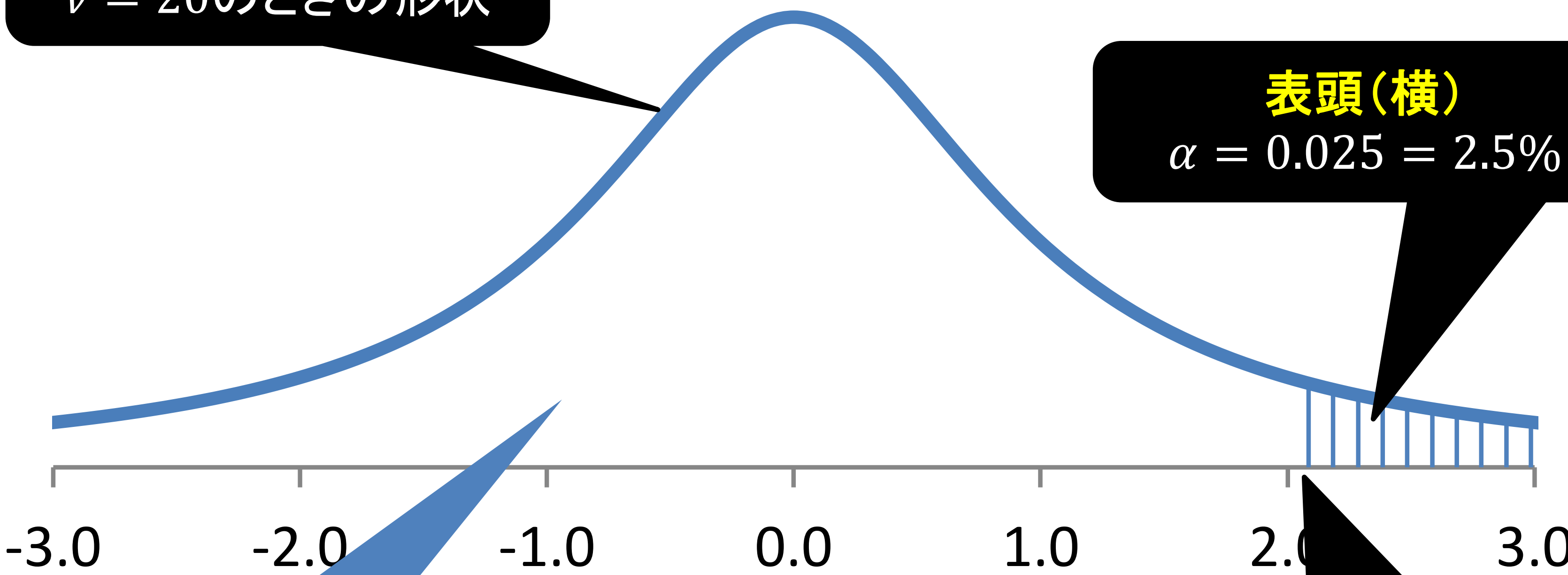


t分布表の見方

自由度 $\nu = 20$
上側確率 $\alpha = 0.025$

→ $t_{0.025}(20)$

表側（縦）
$\nu = 20$のときの形状



表頭（横）
$\alpha = 0.025 = 2.5\%$

確率なので
全体の面積は１

表中
$t_{0.025}(20) = 2.0860$

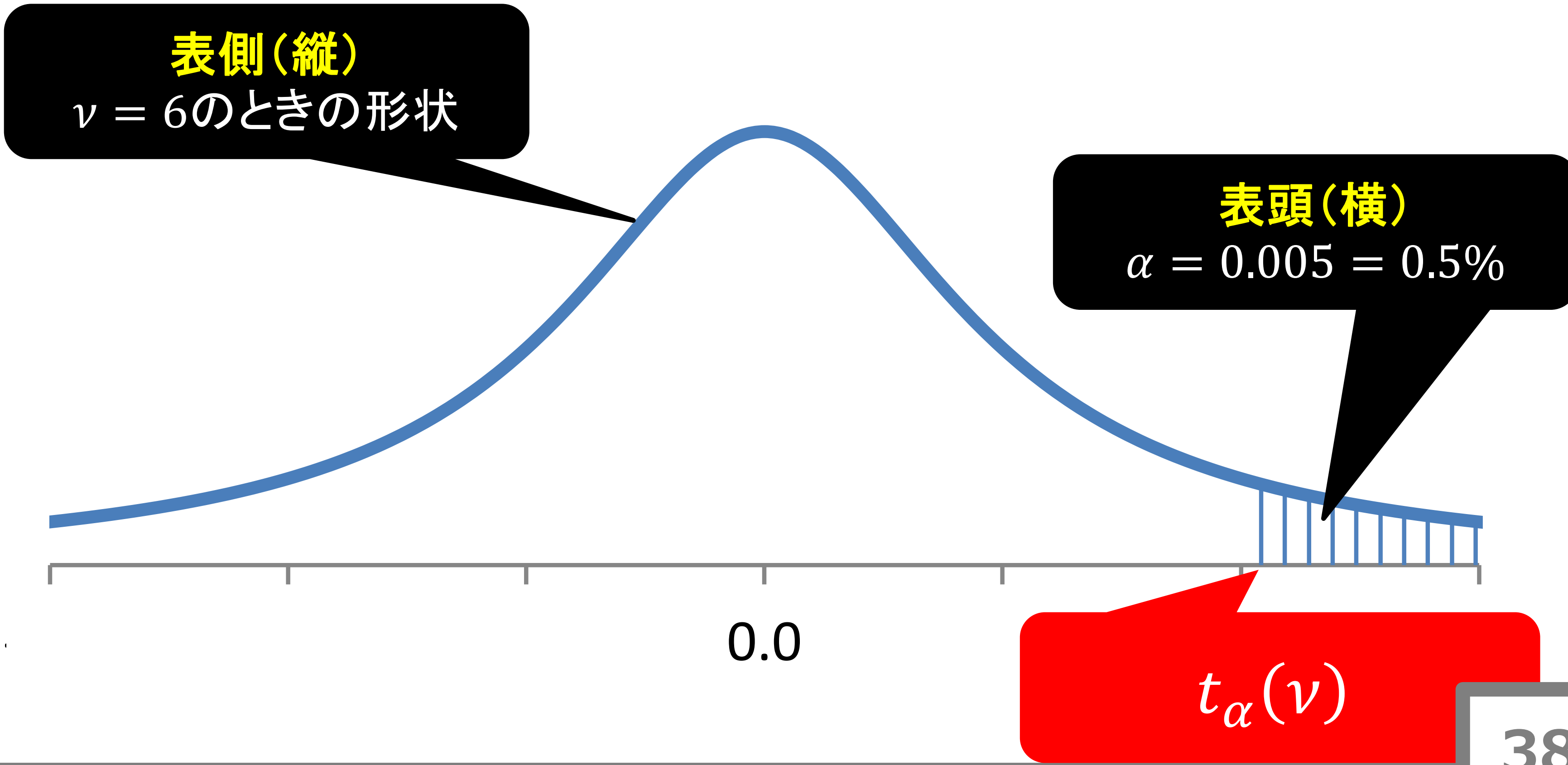
t分布表の見方

α	0.250	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0
v (2α)	0.500	0.400	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	0.
1	1.0000	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6
2	0.8165	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5
3	0.7649	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9
4	0.7407	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6
5	0.7267	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8
6	0.7176	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9
7	0.7111	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4
18	0.6884	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.9
19	0.6876	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.8
20	0.6870	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.8

（６）t分布表に基づく確率計算

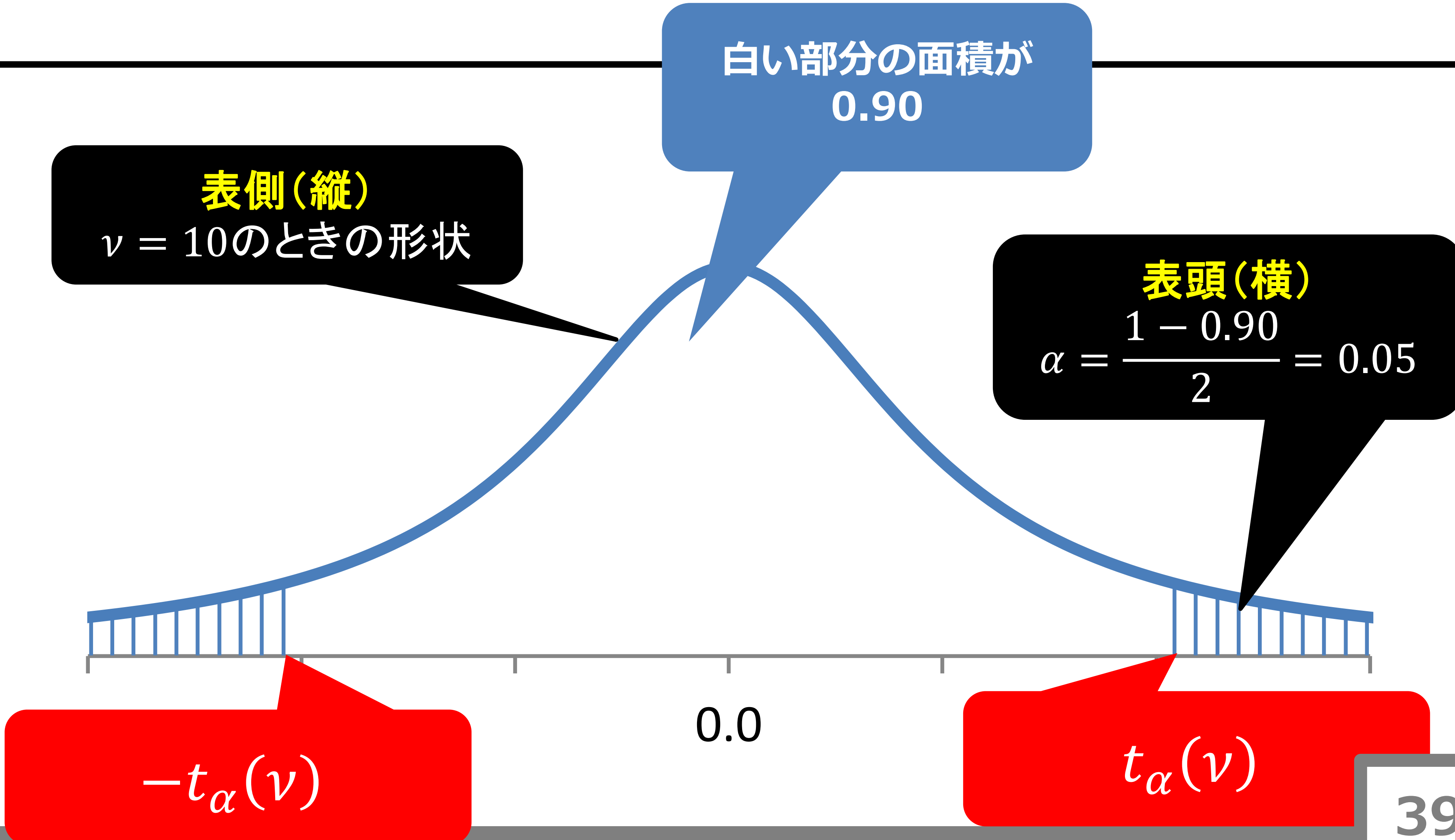
t分布表に基づく確率計算

自由度$\nu = 6$のとき　$\Pr\left(T > t_\alpha(\nu)\right) = 0.005$となる$t_\alpha(\nu)$の値



t分布表に基づく確率計算

自由度$\nu = 10$のとき　$\Pr\left(-t_\alpha(\nu) < T < t_\alpha(\nu)\right) = 0.90$となる$t_\alpha(\nu)$の値



第8章のまとめ

- 母数の推測
  - 推定量　母数を推定するための統計量
  - 推定値　推定量に統計データを代入して計算した値
- 点推定
  - 1つの値をもって母数を推定すること
- 不偏推定量
  - 母平均μ_Xの不偏推定量　$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$
  - 母分散σ_X^2の不偏推定量　$\widehat{\sigma_X^2} = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$
- 標本不偏分散を用いた統計量Tはt分布にしたがう
- t分布
  - 左右対称の確率分布
  - 形状は自由度の値によって変化
  - 自由度が大きくなると標準正規分布に近似