第4章（pp. 43）

# 確率分布

## （１）確率分布の種類

# 確率分布の種類

- 確率分布
  - 離散確率分布
    - ベルヌーイ分布
    - 二項分布
    - その他
      - ポアソン分布
      - 超幾何分布
      - 多項分布
  - 連続確率分布
    - 次回紹介

## （２）ベルヌーイ分布

# ①ベルヌーイ分布

- ベルヌーイ分布
  - 事象Aが起こったときにX=1
  - 事象Aが起こらなかったときにX=0

- ベルヌーイ分布（Bernoulli distribution）

$$X = \begin{cases} 1 \ldots \Pr(X = 1) = \pi \\ 0 \ldots \Pr(X = 0) = 1 - \pi \end{cases}$$

  - コインを1回投げたときに関する確率分布
    - コイン投げの表が出る(事象Aが起こる)確率は先験確率より $\frac{1}{2}$ なので、$\pi = \frac{1}{2}$ のベルヌーイ分布
    - 離散確率分布のもっとも基本的な分布

# ①ベルヌーイ分布

- ベルヌーイ分布
  - 事象Aが起こったときにX=1
  - 事象Aが起こらなかったときにX=0

**ベルヌーイ分布**

| 確率変数 $X$ | 確率 $\Pr(X)$ |
|---|---|
| 1 | $\pi$ |
| 0 | $1-\pi$ |

※　コイン投げ1回の場合

| 確率変数 $X$ | 確率 $\Pr(X)$ |
|---|---|
| 1 | 0.5 |
| 0 | 0.5 |

確率分布

確率変数の値（$X$）に、確率（$\Pr(X)$）が定められた場合＝**確率分布**

（３）二項分布

# ②二項分布

- 二項分布
  - 試行をn回行ったとき、事象Aが起こった回数を確率変数Xとする

- 二項分布（binomial distribution）

$$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

  - 事象が1回も起こらない　　$X = 0$
  - すべての回で事象が起こる　　$X = n$

- 確率変数Xに対応する確率

$$\mathbf{Pr}(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

# 組み合わせの計算

- 組み合わせ（combination）
  - n個からx個を取り出す組み合わせの数

## 組み合わせ

$$ {}_{n}C_{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \frac{(\text{全部の回})}{(x\text{回}) \times (x\text{以外の回})} $$

**階乗**：nから1までを全部かける

$$ n! = (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (3) \times (2) \times (1) $$

例：$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

ゼロの階乗は1と定義されている

$$ 0! = 1 $$

# 組み合わせの計算

- 組み合わせ（combination）
  - n個からx個を取り出す組み合わせの数

- コインを3回投げて、表が2回出る組み合わせ

- ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!}$

# 組み合わせの計算

- 組み合わせ（combination）
  - n個からx個を取り出す組み合わせの数

- コインを3回投げて、表が2回出る組み合わせ

- $_{3}C_{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{(3\times2\times1)}{(2\times1)\times(1)} = 3$
  - 考えられるパターンとして
    - 表、表、裏
    - 表、裏、表
    - 裏、表、表

    の3パターンなので、計算結果と合致

# 確率の計算

$$\Pr(X = x) =_n C_x \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

- コインを3回投げて、表が2回出る確率
  - 組み合わせの数は ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$
  - 表の出る確率は先験確率より $\pi = \frac{1}{2}$

# 確率の計算

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

- コインを3回投げて、表が2回出る確率
  - 組み合わせの数は ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$
  - 表の出る確率は先験確率より $\pi = \frac{1}{2}$

$$\Pr(X = 2) = {}_3 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

# 確率の計算

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

- コインを3回投げて、表が2回出る確率
  - 組み合わせの数は ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$
  - 表の出る確率は先験確率より $\pi = \frac{1}{2}$

$$\Pr(X = 2) = {}_3 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 0.375$$

# ②二項分布

- 二項分布
  - 試行をn回行ったとき、事象Aが起こった回数を確率変数Xとする

- 二項分布の確率は
  「試行回数$n$」と
  「事象Aが起こる確率$\pi$」で決まる

$$\mathbf{Pr}(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

  - $n$と$\pi$がわかれば計算できる！

- 確率変数Xの分布が二項分布であるとき
  確率変数Xは二項分布$B(n, \pi)$に従うといい
  $X \sim B(n, \pi)$と表す

# 練習問題

サイコロを10個投げて、1の目が3個出る確率は？

# 練習問題

サイコロを10個投げて、1の目が3個出る確率は？

- $\Pr(X = 3) = {}_{10}C_3 \pi^3 (1-\pi)^{10-3} = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$

$$= 120 \times \left(\frac{1}{216}\right) \times \left(\frac{78125}{279936}\right)$$

$$= 0.15504536 \ldots \approx 0.155$$

大体15.5%くらい

## （４）二項分布の例

# 二項分布の例

- 標本：　　　N人の常連客を抽出して調査
- 事象A：　　5段階評価の満足度において4以上を記入

- 確率変数X　：$X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$
- $x$　：$n$人の調査で満足度4以上の人数
- $\pi$　：満足度が4人以上である母集団の比率

- 離散確率変数Xに対応する確率$\Pr(X = x)$

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

  - 母集団の比率$\pi$がわかれば計算できそう

# 例題4-1

- 標本として10人を無作為抽出
- 母集団での比率$\pi$を0.6とする
- 想定される二項分布 $B(10, 0.6)$

p. 49 問題4-1もやってみよう

| 確率変数 $X$ | 標本比率 $\frac{x}{n}$ | 確率 $\Pr(X = x)$ | 参考 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 組み合わせ ${}_nC_x$ | $\pi^x(1-\pi)^{n-x}$ |
| 0 | 0.00 | 0.0001 | 1 | 0.0001048576 |
| 1 | 0.10 | 0.0016 | 10 | 0.0001572864 |
| 2 | 0.20 | 0.0106 | 45 | 0.0002359296 |
| 3 | 0.30 | 0.0425 | 120 | 0.0003538944 |
| 4 | 0.40 | 0.1115 | 210 | 0.0005308416 |
| 5 | 0.50 | 0.2007 | 252 | 0.0007962624 |
| 6 | 0.60 | 0.2508 | 210 | 0.0011943936 |
| 7 | 0.70 | 0.2150 | 120 | 0.0017915904 |
| 8 | 0.80 | 0.1209 | 45 | 0.0026873856 |
| 9 | 0.90 | 0.0403 | 10 | 0.0040310784 |
| 10 | 1.00 | 0.0060 | 1 | 0.0060466176 |

標本比率が、
母集団での比率(0.6)と
大きく変わらない
0.5以上0.7以下になる確率は？

それぞれの事象は独立なので
それぞれの確率を足せばＯＫ

## （５）その他の二項分布

# その他の二項分布

- 超幾何分布
  - 母集団が有限母集団のとき
  - 母集団の大きさNが大きいときは
    超幾何分布の確率分布は二項分布と同じ
- ポアソン分布
  - 二項分布における確率$\pi$が小さくなり
    **$n\pi$は一定とみなせる**とき
  - 事象がめったに起こらない場合

第5章で取り扱います
（教科書には未記載）

- 多項分布
  - 二項分布の拡張（事象を3つ以上に分類した場合）

# 練習問題①

- 赤球2個と白球3個が入った壺がある。
- この壺から1回に1つの球を取り出し、色を記録した後、球を壺に戻す。
- 球は色以外では区別がつかず、壺の中は見えない。

１．この操作を2回繰り返したとき、
　　2回とも白球を取り出す確率は？（分数で解答）

２．以下のパターンで壺の中の球の数を変えたとき、
　　赤球を取り出す確率は？

- Ａ．赤球を1つ増やし、白球も1つ増やす
- Ｂ．赤球を1つ減らし、白球を2つ減らす

# 練習問題①

- 赤球2個と白球3個が入った壺がある。
- この壺から1回に1つの球を取り出し、色を記録した後、球を壺に戻す。
- 球は色以外では区別がつかず、壺の中は見えない。

1．この操作を2回繰り返したとき、
2回とも白球を取り出す確率は？（分数で解答）

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

2．以下のパターンで壺の中の球の数を変えたとき、
赤球を取り出す確率は？

- A．赤球を1つ増やし、白球も1つ増やす
  - 大きくなる　$\frac{2}{5} = 40\% \Rightarrow \frac{3}{7} = 42.9\%$
- B．赤球を1つ減らし、白球を2つ減らす
  - 大きくなる　$\frac{2}{5} = 40\% \Rightarrow \frac{1}{2} = 50\%$

# 練習問題②

- 袋の中に赤のボールが7個、白のボールが3個入っている
- Aさんが１つ取り出したあと、Bさんが１つ取り出した
- 二人のボールの色が同じになる確率は？（分数で解答）

- ヒント
  - 【同じ色になる】⇒二人とも赤のときと、二人とも白のときがある
  - Aさんが取り出したあと、袋の中のボールの数は？

# 練習問題②

- 袋の中に赤のボールが7個、白のボールが3個入っている
- Aさんが１つ取り出したあと、Bさんが１つ取り出した
- 二人のボールの色が同じになる確率は？（分数で解答）

- ヒント
  - 【同じ色になる】⇒二人とも赤のときと、二人とも白のときがある
  - Aさんが取り出したあと、袋の中のボールの数は？

- どちらも赤

$$\left(\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{6}{9}\right)$$

- どちらも白

$$\left(\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)$$

- ２つのパターンは独立なので

$$\left(\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{8}{15}$$

# 練習問題③

- サイコロを5回投げたとき、6の目が3回出る確率は？（小数点以下3桁程度）

# 練習問題③

- サイコロを5回投げたとき、6の目が3回出る確率は？（小数点以下3桁程度）

$$ {}_5C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{(5-3)} $$

$$ = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{216}\right)\left(\frac{25}{36}\right) = \frac{250}{7776} $$

$$ = 0.0321502\ldots \approx 0.032 $$

# 第4章(前半)のまとめ

- 確率変数
  - 確率が（事象を通じて）付与された変数
- 確率分布
  - 確率変数の分布は母集団の分布と考えることができる
- 離散確率分布
  - 二項分布
    - 確率変数が事象の起こる回数を表す確率分布
  - ベルヌーイ分布
    - N=1のときの二項分布
  - その他の離散確率分布
    - ポアソン分布
    - 超幾何分布
    - 多項分布