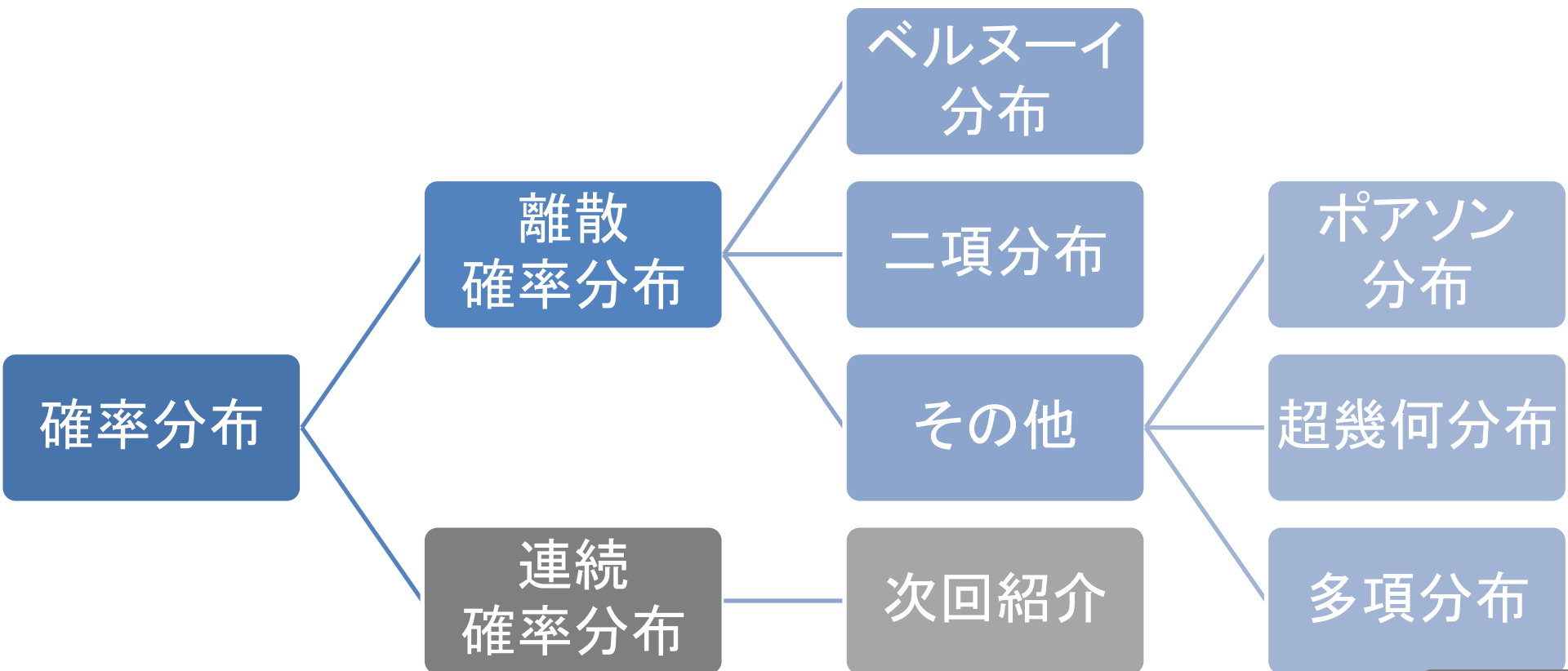


第4章 (pp. 43)

確率分布

(1) 確率分布の種類

確率分布の種類



(2) ベルヌーイ分布

①ベルヌーイ分布

- ベルヌーイ分布

- 事象Aが起こったときに $X=1$
- 事象Aが起こらなかったときに $X=0$

- ベルヌーイ分布 (Bernoulli distribution)

$$X = \begin{cases} 1 \dots \Pr(X = 1) = \pi \\ 0 \dots \Pr(X = 0) = 1 - \pi \end{cases}$$

- コインを1回投げたときに関する確率分布

- コイン投げの表が出る(事象Aが起こる)確率は

先験確率より $\frac{1}{2}$ なので、 $\pi = \frac{1}{2}$ のベルヌーイ分布

- 離散確率分布のもっとも基本的な分布

①ベルヌーイ分布

- ベルヌーイ分布
 - 事象Aが起こったときに $X=1$
 - 事象Aが起こらなかったときに $X=0$

ベルヌーイ分布

確率変数 X	確率 $\Pr(X)$
1	π
0	$1 - \pi$

※ コイン投げ1回の場合

確率変数 X	確率 $\Pr(X)$
1	0.5
0	0.5

確率分布

確率変数の値 (X) に、確率 ($\Pr(X)$) が定められた場合 = **確率分布**

(3) 二項分布

②二項分布

- 二項分布
 - 試行を n 回行ったとき、事象 A が起こった回数を確率変数 X とする

- 二項分布 (binomial distribution)

$$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- 事象が1回も起こらない $X = 0$
 - すべての回で事象が起こる $X = n$
- 確率変数 X に対応する確率

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

組み合わせの計算

- 組み合わせ (combination)
 - n 個から x 個を取り出す組み合わせの数

組み合わせ

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{\text{(全部の回)}}{\text{(}x\text{回)} \times \text{(}x\text{以外の回)}}$$

階乗 : n から1までを全部かける

$$n! = (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (3) \times (2) \times (1)$$

例 : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

ゼロの階乗は1と定義されている
 $0! = 1$

組み合わせの計算

- 組み合わせ (combination)
 - n 個から x 個を取り出す組み合わせの数
- コインを3回投げて、表が2回出る組み合わせ
- $${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!}$$

組み合わせの計算

- 組み合わせ (combination)
 - n個からx個を取り出す組み合わせの数
 - コインを3回投げて、表が2回出る組み合わせ
 - $${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{(3 \times 2 \times 1)}{(2 \times 1) \times (1)} = 3$$
 - 考えられるパターンとして
 - 表、表、裏
 - 表、裏、表
 - 裏、表、表
- の3パターンなので、計算結果と合致

確率の計算

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

- コインを3回投げて、表が2回出る確率
 - 組み合わせの数は ${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$
 - 表の出る確率は先験確率より $\pi = \frac{1}{2}$

確率の計算

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

- コインを3回投げて、表が2回出る確率

- 組み合わせの数は ${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

- 表の出る確率は先験確率より $\pi = \frac{1}{2}$

$$\Pr(X = 2) = {}_3 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

確率の計算

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

- コインを3回投げて、表が2回出る確率

- 組み合わせの数は ${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

- 表の出る確率は先験確率より $\pi = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 2) &= {}_3 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 0.375\end{aligned}$$

②二項分布

- 二項分布
 - 試行を n 回行ったとき、事象 A が起こった回数を確率変数 X とする
- 二項分布の確率は「試行回数 n 」と「事象 A が起こる確率 π 」で決まる
$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$
 - n と π がわかれば計算できる！
- 確率変数 X の分布が二項分布であるとき確率変数 X は二項分布 $B(n, \pi)$ に従うといい $X \sim B(n, \pi)$ と表す

練習問題

サイコロを10個投げて、1の目が3個出る確率は？

練習問題

サイコロを10個投げて、1の目が3個出る確率は？

$$\begin{aligned} \bullet \Pr(X = 3) &= {}_{10}C_3 \pi^3 (1 - \pi)^{10-3} = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= 120 \times \left(\frac{1}{216}\right) \times \left(\frac{78125}{279936}\right) \\ &= 0.15504536 \dots \approx 0.155 \\ &\quad \text{大体15.5\%くらい} \end{aligned}$$

(4) 二項分布の例

二項分布の例

- 標本 : N人の常連客を抽出して調査
 - 事象A : 5段階評価の満足度において4以上を記入
-
- 確率変数 X : $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$
 - x : n 人の調査で満足度4以上の人数
 - π : 満足度が4人以上である母集団の比率
-
- 離散確率変数 X に対応する確率 $\Pr(X = x)$
$$\Pr(X = x) = {}_n C_x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$
 - 母集団の比率 π がわかれば計算できそう

例題4-1

- 標本として10人を無作為抽出
- 母集団での比率 π を0.6とする
- 想定される二項分布 $B(10, 0.6)$

p. 49 問題4-1もやってみよう

確率変数 X	標本比率 $\frac{x}{n}$	確率 $\Pr(X = x)$	参考	
			組み合わせ ${}_nC_x$	$\pi^x(1-\pi)^{n-x}$
0	0.00	0.0001	1	0.0001048576
1	0.10	0.0016	10	0.0001572864
2	0.20	0.0106	45	0.0002359296
3	0.30	0.0425	120	0.0003538944
4	0.40	0.1115	210	0.0005308416
5	0.50	0.2007	252	0.0007962624
6	0.60	0.2508	210	0.0011943936
7	0.70	0.2150	120	0.0017915904
8	0.80	0.1209	45	0.0026873856
9	0.90	0.0403	10	0.0040310784
10	1.00	0.0060	1	0.0060466176

標本比率が、
母集団での比率(0.6)と
大きく変わらない
0.5以上0.7以下になる確率は？

それぞれの事象は独立なので
それぞれの確率を足せばOK

(5) その他の二項分布

その他の二項分布

- 超幾何分布
 - 母集団が有限母集団のとき
 - 母集団の大きさ N が大きいときは
超幾何分布の確率分布は二項分布と同じ
- ポアソン分布
 - 二項分布における確率 π が小さくなり
 $n\pi$ は一定とみなせるとき
 - 事象がめったに起こらない場合
- 多項分布
 - 二項分布の拡張（事象を3つ以上に分類した場合）

第5章で取り扱います
(教科書には未記載)

練習問題①

- 赤球2個と白球3個が入った壺がある。
- この壺から1回に1つの球を取り出し、色を記録した後、球を壺に戻す。
- 球は色以外では区別がつかず、壺の中は見えない。

1. この操作を2回繰り返したとき、
2回とも白球を取り出す確率は？（分数で解答）

2. 以下のパターンで壺の中の球の数を変えたとき、
赤球を取り出す確率は？

- A. 赤球を1つ増やし、白球も1つ増やす
- B. 赤球を1つ減らし、白球を2つ減らす

練習問題①

- 赤球2個と白球3個が入った壺がある。
- この壺から1回に1つの球を取り出し、色を記録した後、球を壺に戻す。
- 球は色以外では区別がつかず、壺の中は見えない。

1. この操作を2回繰り返したとき、
2回とも白球を取り出す確率は？（分数で解答）

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

2. 以下のパターンで壺の中の球の数を変えたとき、
赤球を取り出す確率は？

- A. 赤球を1つ増やし、白球も1つ増やす
 - 大きくなる $\frac{2}{5} = 40\% \Rightarrow \frac{3}{7} = 42.9\%$
- B. 赤球を1つ減らし、白球を2つ減らす
 - 大きくなる $\frac{2}{5} = 40\% \Rightarrow \frac{1}{2} = 50\%$

練習問題②

- 袋の中に赤のボールが7個、白のボールが3個入っている
 - Aさんが1つ取り出したあと、Bさんが1つ取り出した
 - 二人のボールの色が同じになる確率は？（分数で解答）
-
- ヒント
 - 【同じ色になる】 \Rightarrow 二人とも赤のときと、二人とも白のときがある
 - Aさんが取り出したあと、袋の中のボールの数は？

練習問題②

- 袋の中に赤のボールが7個、白のボールが3個入っている
- Aさんが1つ取り出したあと、Bさんが1つ取り出した
- 二人のボールの色が同じになる確率は？（分数で解答）

- ヒント
 - 【同じ色になる】⇒二人とも赤のときと、二人とも白のときがある
 - Aさんが取り出したあと、袋の中のボールの数は？

- どちらも赤

$$\left(\frac{7}{10}\right) \times \left(\frac{6}{9}\right)$$

- どちらも白

$$\left(\frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{2}{9}\right)$$

- 2つのパターンは独立なので

$$\left(\frac{7}{10} \times \frac{6}{9}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{8}{15}$$

練習問題③

- サイコロを5回投げたとき、6の目が3回出る確率は？（小数点以下3桁程度）

練習問題③

- サイコロを5回投げたとき、6の目が3回出る確率は？（小数点以下3桁程度）

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{(5-3)}$$

$$= \frac{5!}{3! 2!} \left(\frac{1}{216}\right) \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{250}{7776}$$

$$= 0.0321502 \dots \approx 0.032$$

第4章(前半)のまとめ

- 確率変数
 - 確率が（事象を通じて）付与された変数
- 確率分布
 - 確率変数の分布は母集団の分布と考えることができる
- 離散確率分布
 - 二項分布
 - 確率変数が事象の起こる回数を表す確率分布
 - ベルヌーイ分布
 - $N=1$ のときの二項分布
 - その他の離散確率分布
 - ポアソン分布
 - 超幾何分布
 - 多項分布