第5章（pp. 57）

大数の法則

確率変数の期待値

（１）確率変数の関数

確率変数の関数

- 確率変数は、関数の形式をとる場合も

- 標本での比率 $\frac{x}{n}$ = 確率変数X × 係数 $\frac{1}{n}$

  – 確率変数Xの関数を$g(X)$とすると

    - $g(X) = \frac{X}{n}$

      – $n = 10$のとき

        » $g(X) = \frac{X}{10}$

（２）期待値の定義

- 確率変数の期待値

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x} x \Pr(X = x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx \end{cases}$$

  - 確率変数Xの観測値xに確率$\Pr(X = x)$または確率密度関数$f(x)$を乗じたものの総和
  - **確率変数と確率の積和**（確率分布の平均値と同じ）

確率変数の分散

- 確率変数の関数として$g(X) = (X - \mu_x)^2$とすると

$$E\big(g(X)\big) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x g(x)\Pr(X = x) = \sum_x (X - \mu_x)^2 \Pr(X = x) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_x)^2\, f(x) dx \end{cases}$$

  - 確率分布の分散と同じ
  - 確率分布の平均値と分散は**期待値の特別な形式**

（３）期待値の基本的な性質

期待値の基本的な性質①

- XとY　　：確率変数
- aとb　　：定数

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

- 定数（aとb）は確率変数ではないので対応する確率は存在しない

期待値の基本的な性質②

- XとY　　：確率変数
- aとb　　：定数

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

- 確率変数の和の期待値は
  期待値の和と同じ
- XとYが独立でなくても成り立つ

期待値の基本的な性質③

- XとY　：確率変数
- aとb　：定数

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

- 分散は散らばりを表すため
  定数bが加えられても分散は変わらない

期待値の基本的な性質④

- XとY　　　　：確率変数
- aとb　　　　：定数

$$Var(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- 分散は期待値の特別な形式
- 期待値を用いて書き直すことができる

期待値の基本的な性質⑤

- XとY　　：確率変数
- aとb　　：定数

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- XとYが独立である場合のみ成り立つ

期待値の基本的な性質⑥

- XとY ：確率変数
- aとb ：定数

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

- XとYが独立である場合のみ成り立つ

（４）二項分布にしたがう確率変数の期待値

二項分布にしたがう確率変数の期待値

- 確率変数Xが二項分布にしたがう　：$X \sim B(n, \pi)$

- 期待値

$$E(X) = n\pi$$

- 分散

$$Var(X) = n\pi(1 - \pi)$$

！超重要！

練習問題

- 打率3割2分8厘（0.328）の野球選手が、
  今日の試合で5回打席に立つときの
  ヒットの本数xの確率を考える。
  ヒットの本数の期待値と分散を求めなさい。

  – 公式を用いて解くと簡単！
    - 期待値 $E(X) = n\pi$
    - 分散 $Var(X) = n\pi(1 - \pi)$

（pp. 64）問題5-1

- 確率変数Xが二項分布にしたがうとき
  確率変数Xの関数$g(X) = \frac{X}{n}$を確率変数Yとする
- 確率変数Yの期待値$E(Y)$と分散$Var(Y)$を求めよ
  - 期待値の基本的性質aとcを使って解きます

（pp. 64）問題5-1

- 確率変数Xが二項分布にしたがうとき
  確率変数Xの関数$g(X)=\frac{X}{n}$を確率変数Yとする
- 確率変数Yの期待値$E(Y)$と分散$Var(Y)$を求めよ
  - 期待値の基本的性質aとcを使って解きます

基本的性質aより

$$E(Y)=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}n\pi=\pi$$

基本的性質cより

$$Var(Y)=Var\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}Var(X)=\frac{1}{n^2}n\pi(1-\pi)$$

$$=\frac{1}{n}\pi(1-\pi)$$

応用問題

- 大数の法則
  - 標本の大きさnを大きくすればするほど標本の状況は母集団の状況に近づく

- ある工場で不良品の製品は1,000個中2個あることがわかっている。
- これから出荷する製品3,500個のうち、不良品の数をxとするとその確率分布はポアソン分布で近似できるものとする。
- ただし、ポアソン分布関数は$\Pr(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$とする

ポアソン分布の期待値と分散

- ポアソン分布
  - 二項分布のひとつ
  - π（起こる確率）が極端に小さい場合
    すなわち**$n\pi$が一定とみなせる**場合（pp. 50）

  - ポアソン分布では期待値と分散は同じ式で表せる
    - πが極端に小さいので，$(1-\pi) \fallingdotseq 1$と考える．

    - 期待値 $E(x) = n\pi$
    - 分散 $Var(x) = n\pi$

期待値と分散

期待値	$$E(x) = n\pi = 3500 \times \left(\frac{2}{1000}\right) = 7.0$$
分散 【難】	$$Var(x) = n\pi = 7.0$$

確率分布関数

$$\Pr(x) = \frac{7.0^x e^{-7.0}}{x!}$$

（pp. 65）問題5-2

- あるテレビ番組の視聴を事象とすると事象は2つ（視た・視なかった）なので視聴した世帯数は二項分布にしたがう
- 視聴した世帯数をxとおくと問題5-1で定義した確率変数Yは視聴率を表す
- $n = 200, \pi = 0.10$のときの視聴率の期待値と標準偏差を求めよ

（pp. 65）問題5-2

- 問題5-1より
  - 期待値

$$E(Y) = \pi = 0.10$$

  - 分散

$$Var(Y) = \frac{1}{n}\pi(1-\pi) = \frac{1}{200} \times 0.10 \times 0.90 = 0.00045$$

  - 標準偏差

$$\sqrt{Var(Y)} = \sqrt{0.00045} = 0.0212$$

大数の法則

- 大数（たいすう）の法則
  - 試行数あるいは標本数（n）の大きさを大きくすると標本の状況は母集団の状況に近づく
    - 経験確率　：試行回数nを大きくしたときに相対度数がある値に近づくならば相対度数＝確率　とする

！超重要！

大数の法則の事例

- 教科書 pp. 48 例題4-1　　標本数$n = 10$
- 教科書 pp. 49 問題4-1　　標本数$n = 20$

- 母集団での比率　$\pi = 0.6$
- 標本比率　$\dfrac{x}{n}$

  - 標本比率が母集団の比率の± 0.1の範囲 $0.5 < \dfrac{x}{n} < 0.7$に入る確率を計算

  - 例題4-1　$\Rightarrow$　0.67
  - 問題4-1　$\Rightarrow$　0.75

標本比率が
母集団の比率に
近づく可能性

第5章のまとめ

- 確率変数の期待値
  - 確率変数と確率の積和
  - 確率分布の平均値と分散は期待値の特別な形式
    - 確率分布を特定できれば期待値を求めることができる
- 確率変数が二項分布にしたがうとき
  - 期待値　$E(X) = n\pi$
  - 分散　$Var(X) = n\pi(1 - \pi)$
- 大数の法則
  - 標本の大きさnを大きくしたときに
    標本の状況が母集団の状況に近づくこと