統計学①　参考

1．期末試験のある問題の正答率は 0.52 であった．これから採点する 10 人の正答（x）の確率を考えたい．

（1）　　　確率分布関数を示しなさい．

nはこれから採点する最大人数なので 10.

xは不明なのでxのまま.

πは 1 回あたりの確率（正答率）なので 0.52.

$$\Pr(x) = {}_{10}C_x 0.52^x (1-0.52)^{10-x}$$

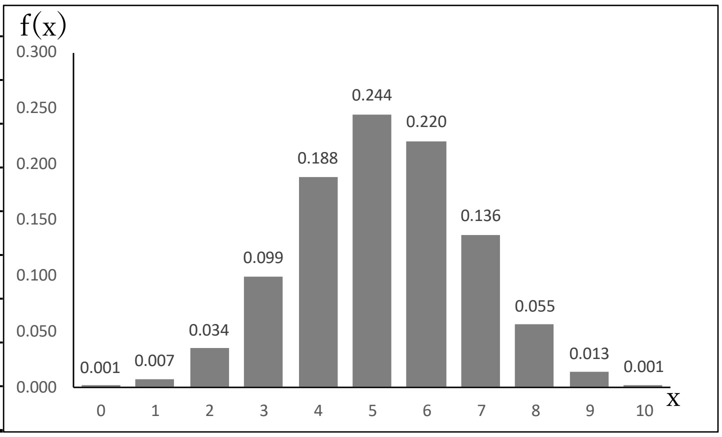
（2）　　　正答率の期待値と分散を求めなさい.

期待値：$E(X) = n\pi = 10 \times 0.52 = 5.2$

分散：$Var(X) = n\pi(1-\pi) = 10 \times 0.52 \times (1-0.52) = 2.496$

（3）　　　おおよその姿を図示しなさい.

x	nCx	p^x	$(1-p)^{n-x}$	f(x)
0	1	1.000	0.001	0.001
1	10	0.520	0.001	0.007
2	45	0.270	0.003	0.034
3	120	0.141	0.006	0.099
4	210	0.073	0.012	0.188
5	252	0.038	0.025	0.244
6	210	0.020	0.053	0.220
7	120	0.010	0.111	0.136
8	45	0.005	0.230	0.055
9	10	0.003	0.480	0.013
10	1	0.001	1.000	0.001



２．ある工場の生産ラインで，不良品の製品は 1,000 個中 2 個あることがわかっている．これから出荷する製品 4,500 個のうち不良品の個数をxとして，その確率分布はポアソン分布で近似できるものとする．

（1）　　　期待値と分散を求めなさい．

期待値：$E(X) = n\pi = 4500 \times \left(\frac{2}{1000}\right) = 9$

分散：$Var(X) = n\pi = 4500 \times \left(\frac{1}{1000}\right) = 9$

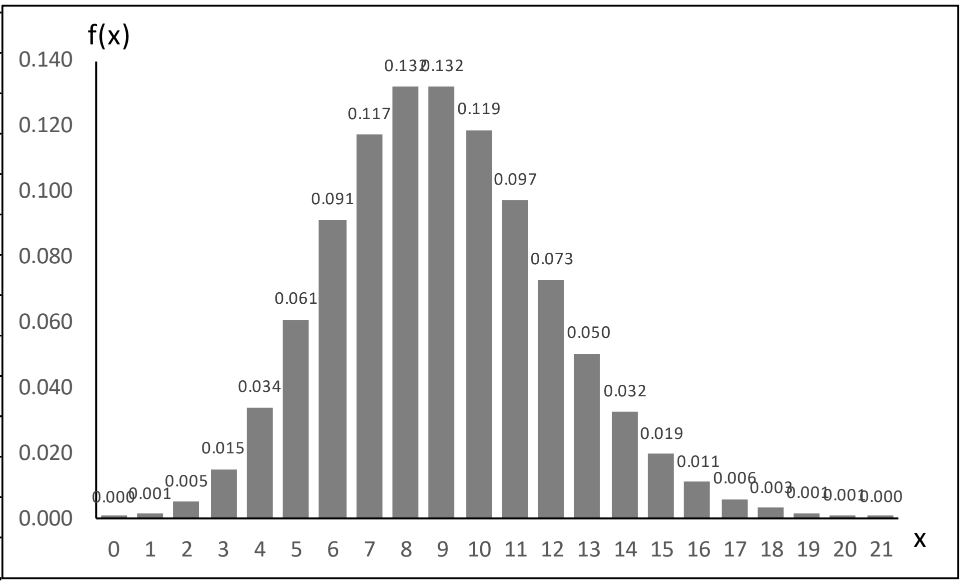
（2）　　　確率分布関数を示しなさい．

μは期待値なので．eはネイピア数なのでそのまま．xは不明なのでそのまま．

$$\Pr(x) = \frac{9^x e^{-9}}{x!}$$

（3）　　　おおよその姿を図示しなさい．

x	f(x)
0	0.000
1	0.001
2	0.005
3	0.015
4	0.034
5	0.061
6	0.091
7	0.117
8	0.132
9	0.132
10	0.119
11	0.097
12	0.073
13	0.050
14	0.032
15	0.019
16	0.011
17	0.006
18	0.003
19	0.001
20	0.001
21	0.000



３．あるフランチャイズレストランでは，1 日の 1 店舗あたりの平均売上高は 35 万円，標準偏差 5 万円であった．1 店舗あたりの売り上げが正規分布$N(35, 5^2)$にしたがう確率変数（X）であるとする．

（１）　70 万円以上の店舗は何パーセントあるか．

標準化正規分布にしたがうので，標準化した値zを求める．

平均値 $\bar{x}$は 35（万円），標準偏差σは 5（万円）なので，

$$\Pr(x \geq 70) = \Pr\left(z \geq \frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right) = \Pr\left(z \geq \frac{70 - 35}{5}\right) = \Pr(z \geq 7)$$

$z \geq 7$の値を標準正規分布表から読むと，0.00100

よって求める確率は 0.1%（未満）．

※Excel 等を用いて正確に計算すると，0.0000000000012799 くらいになる．

（２）　20 万円未満の店舗は何パーセントあるか．

$$\Pr(x < 20) = \Pr\left(z < \frac{20 - 35}{5}\right) = \Pr(z < -3)$$

$z < -3$の値を標準正規分布表から読むと，0.00135=0.135%．

（３）　売上高が高い方から 5%までの店舗を「優良店」としたい．

いくらに設定したら良いか．なお，売上高は整数値とする．

5%(0.05)を超えず最も大きい値を標準正規分布表から探すと，$z = 1.65$．

$$1.65 = \frac{x - 35}{5}$$

$$8.25 = x - 35$$

よって$x = 43.25$．

「売上高は整数値とする」ので，43.25 万円以上で最も小さい値は 44 万円．

（４）　売上高が低い方から 3%までの店舗を閉店とする．

閉店の対象とならない売上高は少なくともいくらか？なお，売上高は整数値とする．

3%(0.03)を超えず最も大きい値を標準正規分布表から探すと，$z = -1.89$．

$$-1.89 = \frac{x - 35}{5}$$

よって$x = 25.55$．

「売上高は整数値とする」ので，25.55 万円未満で最も大きい値は 25 万円．

４．以下のデータは，ある一日のコンビニ 20 店舗の売上高である．

（１）　　　標本平均と標本分散を求めよ．

標本平均： $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x = 27.4$

標本分散：$S^2 = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2 = 66.24$

（２）　　　標本平均は正規分布にしたがい，標本分散の値を母集団の分散として考えることができるとき，95%信頼係数で売上高の平均価格の下限値と上限値を求めよ．

「標本分散の値を母集団の分散として考えることができる」ので，$\sigma^2 = S^2 = 66.24$.

標準正規分布表より，両側 5%(片側 0.025)になる値は$z = 1.96$.

売上高の平均価格（母平均）μの範囲は

$$\bar{x} - 1.96\sqrt{\frac{S^2}{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$$27.4 - 1.96\sqrt{\frac{66.24}{20}} < \mu < 27.4 + 1.96\sqrt{\frac{66.24}{20}}$$

$$27.4 - 1.96 \times 1.8198 < \mu < 27.4 + 1.96 \times 1.8198$$

$$27.4 - 3.5668 < \mu < 27.4 + 3.5668$$

$$23.8332 < \mu < 30.9668$$

よって，下限値 23.83．上限値 30.97．

（３）　　　（２）とは異なり，標本平均は正規分布にしたがい，標本分散は母集団の分散に対する推定値にすぎないと考えるとき，95%信頼区間で売上高の平均価格の上限値と下限値を求めよ．

「標本分散は母集団の分散に対する推定値にすぎないと考える」ので，標本不偏分散を用いる．

標本不偏分散：$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2 = 69.7263$.

t 分布表より，自由度$\nu = 20 - 1 = 19$，片側 2.5%(0.025)になる値は$t_{0.025} = 2.093$.

$$\bar{x} - t_{0.025}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} < \mu < \bar{x} + t_{0.025}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}$$

$$27.4 - 2.093 \times \sqrt{\frac{69.7263}{20}} < \mu < 27.4 + 2.093 \times \sqrt{\frac{69.7263}{20}}$$

$$27.4 - 2.093 \times 1.8671 < \mu < 27.4 + 2.093 \times 1.8671$$

$$27.4 - 3.9078 < \mu < 27.4 + 3.9078$$

$$23.4922 < \mu < 31.3078$$

よって，下限値 23.49．上限値 31.31．