統計学 Ch. 9

（担当：池川）

今日やること	母平均の区間推定について学びます。 区間推定で用いる信頼係数と信頼区間の意味を理解します。 母平均の区間推定に関する計算を行います。

pp.105　前回までの復習

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

$$U=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_X^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_X}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}}\sim t(n-1)$$

※　色つきの部分は確率変数（可変）

※　それ以外の部分は固定値

pp.106　母平均の区間推定

推定量の確率分布における区間を用いて母数を推定する

ある区間内に母数が含まれることを　　　　で示す

推定した区間は　　　　で表す

（confedence coefficient）

（confedence interval）

信頼係数　$100(1-\alpha)$　%の信頼区間のことを

$100(1-\alpha)$ %信頼区間ともいう

（　　　，　　　）で表す

pp.109　母平均の95%信頼区間

ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って

信頼区間を100回計算するとき

区間内に母平均を含むものは

100回のうち95回程度になるような区間

標本平均、t分布の%点、標本不偏分散を使って計算する

超重要

$$\left(\bar{x}-t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}},\bar{x}+t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}\right)$$

pp.111　母平均の区間推定に関する計算

例題9-1　ポイントカード所有者2万人の母集団から50人を無作為抽出

標本数　$n = 50$

標本平均　$\bar{x} = 1.98$

標本分散　$S_x^2 = 2.6196$

母平均の95%信頼区間を求める

① 標本不偏分散を求める

$$\widehat{\sigma_X^2} = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}S_x^2$$

（pp.98 定義16 参照）より

$$\boxed{\widehat{\sigma_X^2} = \frac{n}{n-1}S_x^2 = \qquad}$$

② t分布表から、t分布の%点を求める

今回は母平均の95%信頼区間なので

$\boxed{\qquad}$ を求める $\left(\frac{1-0.95}{2}\right) = \left(\frac{0.05}{2}\right)$

※　この例の場合は表中に数字がないが、

$t_{0.025}(49) = 2.0096$ として計算することとする

③ t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入する

すなわち

$$\boxed{t_{0.025}(49) \times \sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}} = 2.0096 \times \sqrt{\frac{2.6731}{50}} \approx \qquad}$$

④ 標本平均から±して上限値と下限値を求める

下限値

$$\boxed{\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}} = \qquad}$$

上限値

$$\boxed{\bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}} = \qquad}$$

以上より、母平均の95%信頼区間は $\boxed{\qquad}$

pp.112　統計データからの区間推定

例題9-2　ポイントカード所有者2万人の母集団から7人を無作為抽出

標本平均、標本分散等は不明

得られた統計データは以下の表の通り

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	3		
2	0		
3	2		
4	7		
5	5		
6	3		
7	1		
合計			
平均値			

① 標本平均が不明の場合、

まず標本平均を計算

※　有効桁数は多めにとる

② 平均値からの偏差を計算

※　合計がゼロになる確認

③ 偏差平方和を計算

（統計学Ａの復習）

④ t分布表から2.5%点を求める

$t_{0.025}(7-1) =$

⑤ 標本不偏分散を求める

$$\widehat{\sigma_X^2} = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 =$$

⑥ t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入する

$$t_{0.025}(n-1) \times \sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}} =$$

④ 標本平均から±して上限値と下限値を求める

下限値

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}} =$$

上限値

$$\bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}} =$$

以上より、母平均の95%信頼区間は

【練習問題】　下表は、あるクラスの英語の試験の受験者から抽出した15人分の得点である。

受験番号	得点	偏差	偏差平方和
1	28		
2	38		
3	32		
4	41		
5	42		
6	50		
7	42		
8	68		
9	52		
10	28		
11	67		
12	22		
13	27		
14	79		
15	62		
合計	678		

Memo

① 標本平均と標本分散を求めよ

標本平均

標本分散

② 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散の値を母分散として

考えることができるとした場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント　標準正規分布表

$n =$

$\bar{x} =$

$\mathrm{Pr}(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$\widehat{\sigma_X^2} = S_x^2 =$

(　　　,　　　)

③ 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散は母集団の分散の

推定値に過ぎないと考える場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント　t分布表

②の例では $\widehat{\sigma_X^2} = S_x^2$　だが

「推定値に過ぎない」と

考える場合は

「標本不偏分散」を求める

$\widehat{\sigma_X^2} =$

(　　　,　　　)

【練習問題】　下表は、ある日のコンビニ20店舗の売上高である。

店舗ＩＤ	売上高	偏差	偏差平方和
1	41		
2	17		
3	14		
4	23		
5	33		
6	38		
7	36		
8	26		
9	32		
10	27		
11	41		
12	25		
13	31		
14	21		
15	27		
16	35		
17	18		
18	19		
19	16		
20	28		
合計	548		

Memo

① 標本平均と標本分散を求めよ

標本平均

標本分散

② 標本平均は正規分布にしたがい
標本分散の値を母分散として
考えることができるとした場合、
95%信頼区間を求めよ。

ヒント　標準正規分布表

$n =$

$\bar{x} =$

$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$\widehat{\sigma_X^2} = S_x^2 =$

(　　　,　　　)

③ 標本平均は正規分布にしたがい
標本分散は母集団の分散の
推定値に過ぎないと考える場合、
95%信頼区間を求めよ。

ヒント　t分布表

②の例では $\widehat{\sigma_X^2} = S_x^2$ 　だが
「推定値に過ぎない」と
考える場合は
「標本不偏分散」を求める

$\widehat{\sigma_X^2} =$

(　　　,　　　)

今日の講義のまとめ

母平均の区間推定

母平均を含む統計量に基づいて行う

信頼係数　confidence coefficient

信頼区間　confidence interval

（下限　,　上限）

95%信頼区間

信頼係数95%の信頼区間を、95%信頼区間ともいう

ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って

信頼区間を100回計算するとき

区間内に母平均を含むものは100回中95回程度になる区間

$$\left(\bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}\right)$$

区間推定の計算

使用するもの

標本平均　$\bar{x}$

標本不偏分散　$\widehat{\sigma_X^2}$

t 分布のパーセント点　$t_{0.025}(n-1)$

$$\text{標本平均} \pm t\text{分布のパーセント点}\sqrt{\frac{\text{標本不偏分散}}{\text{標本数}}}$$

Memo

本日の講義資料　Google classroom: u26iot3

※ スライド・配布資料　はここからダウンロード可能

本日の課題　なし