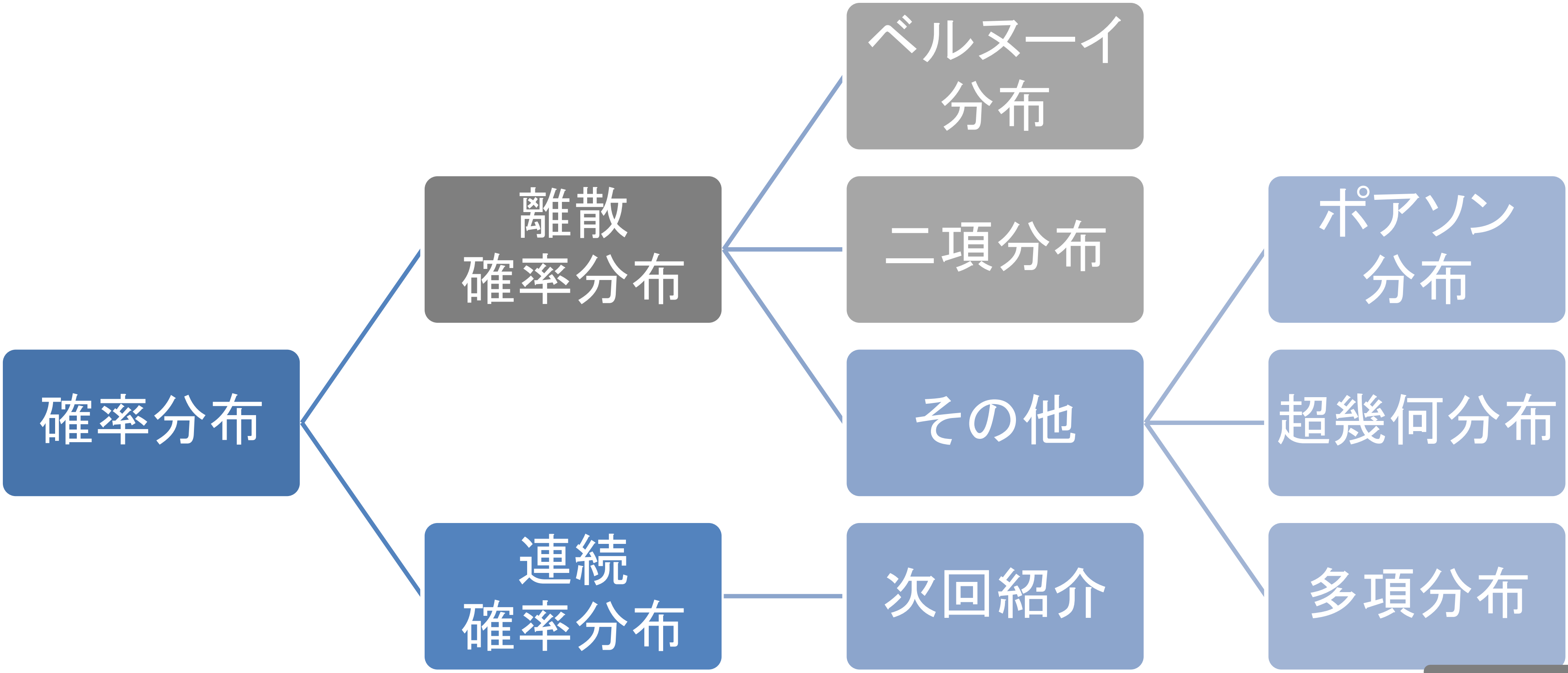
第4章（pp. 51）

確率分布（連続確率分布）

確率分布の種類



（１）連続確率分布の性質

連続確率分布の性質

- 連続確率変数に
  対応する確率$\Pr(X = x)$はゼロになる
    - $\Pr(X = x) = 0$
  - 連続変数では相対度数は表現できない
  - 連続変数でも累積度数は表現できる
    - 駅からの距離480m0cm0mmちょうどの物件はほぼない

分布関数

- 分布関数

$$F(x) = \Pr(X < x) = \Pr(\omega: X(\omega) < x)$$

  - すべての根元事象の集合：　　$\{\omega: X(\omega) < x\}$
  - 連続確率変数Xがx以下である確率
  - 確率には相対度数が対応
  - 分布関数には累積度数が対応

単調に増加する関数

  - 減少することがない

xの取り得る値は-∞から∞の間

  - $F(-\infty) = 0$
  - $F(+\infty) = 1$

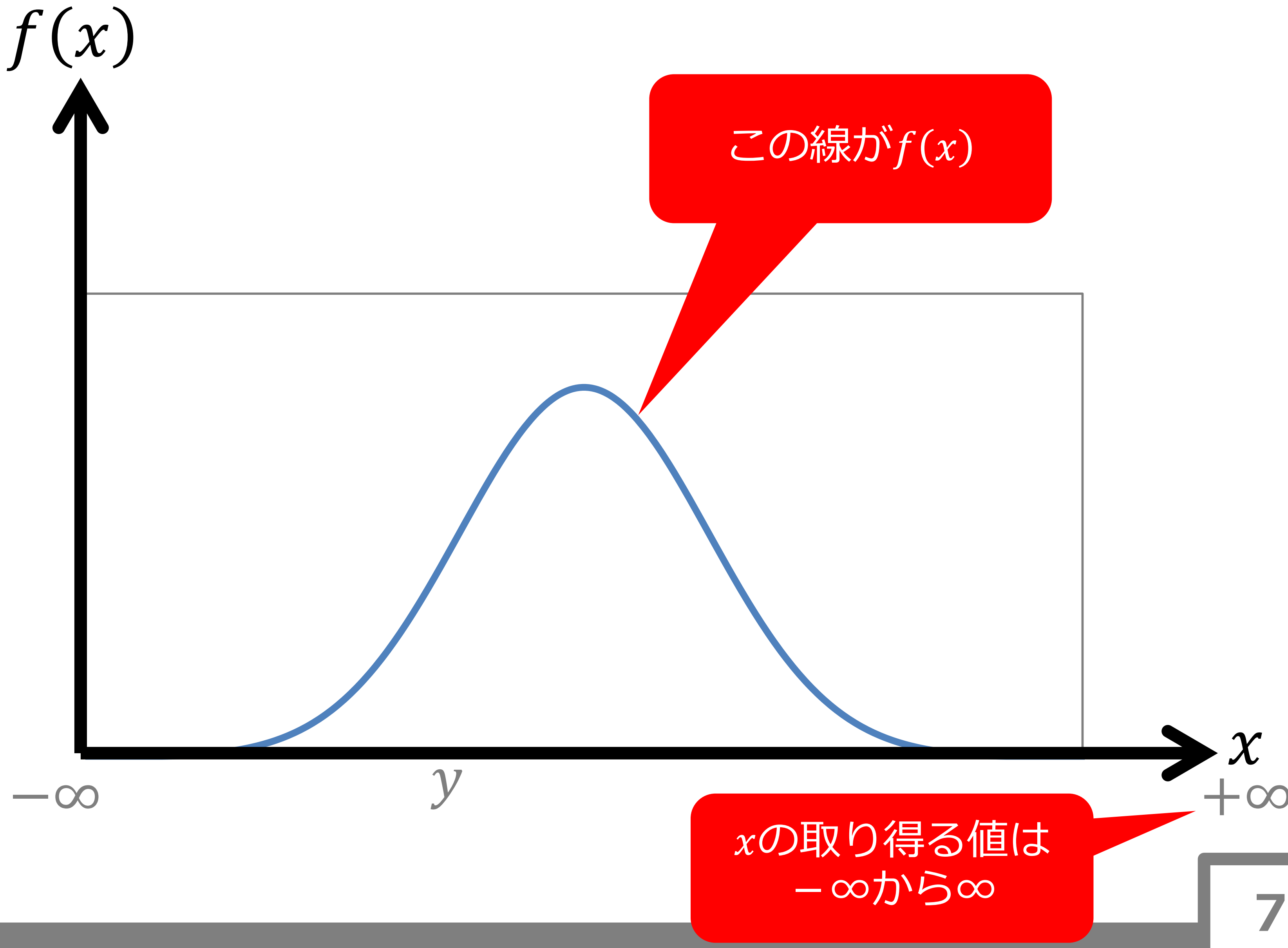
∫は積分の記号

- 確率密度関数

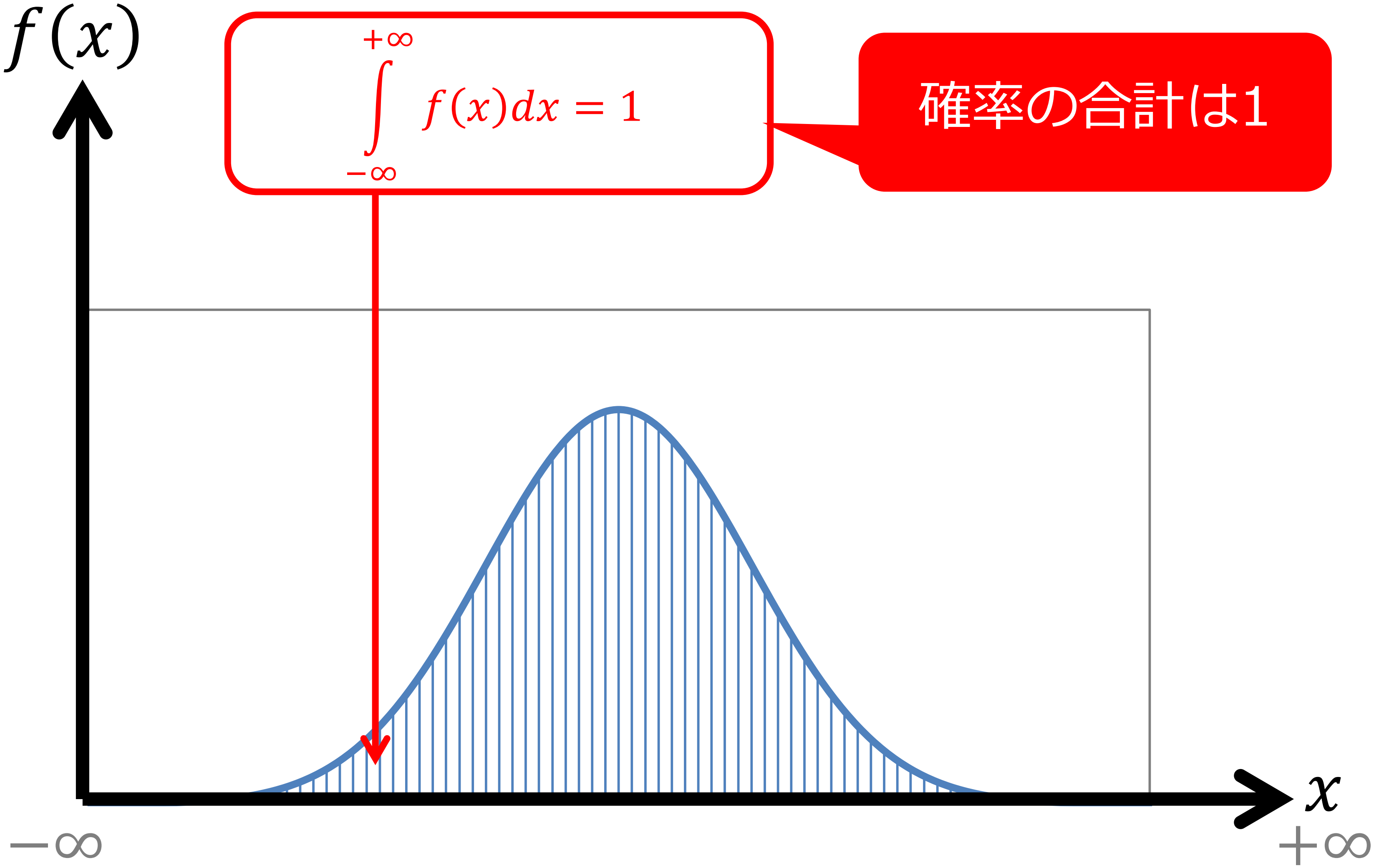
$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx$$

  - 関数$f(x)$とx軸で囲まれた部分の面積を計算

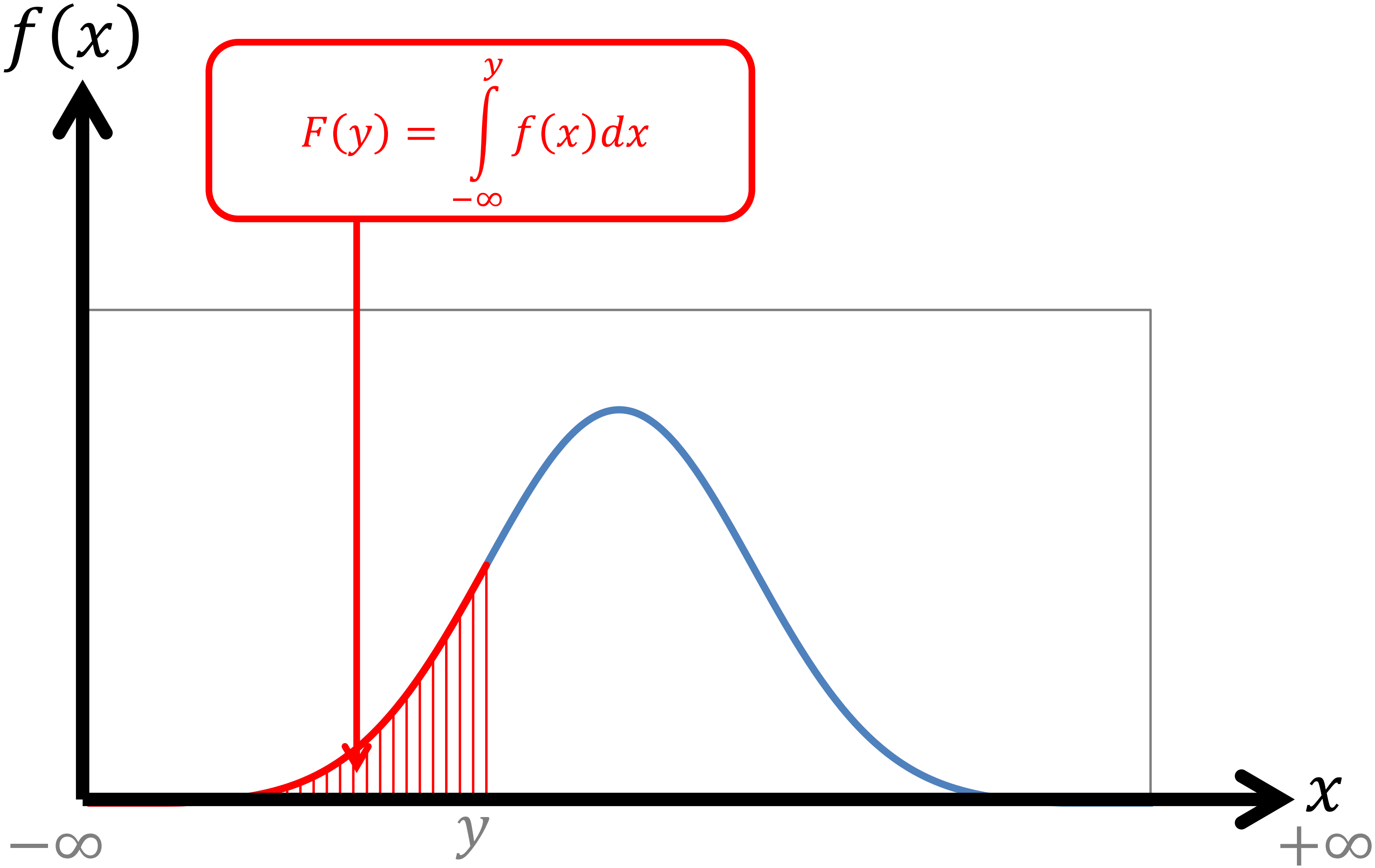
確率密度分布 $f(x)$



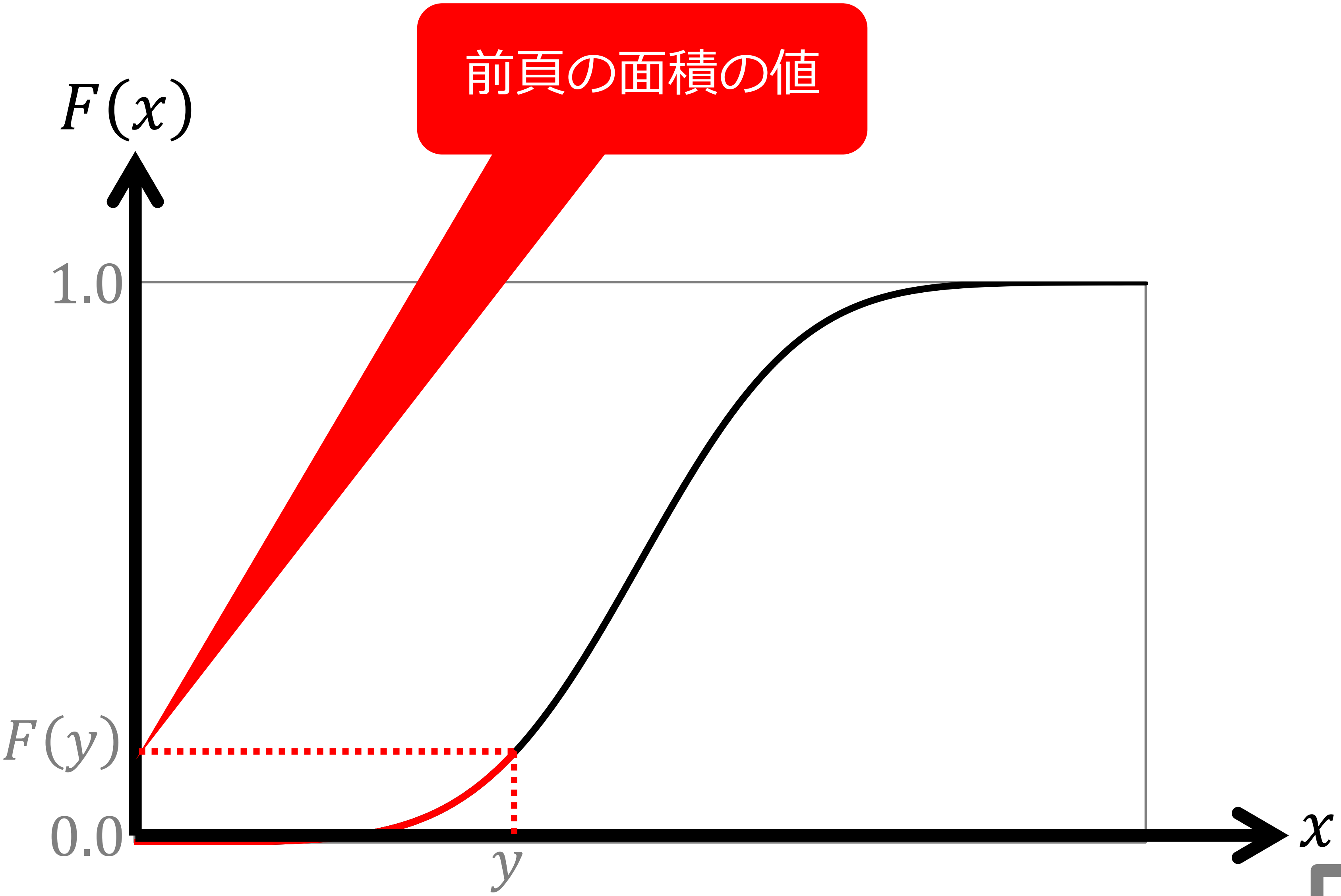
確率密度分布$f(x)$とx軸の間の面積は1



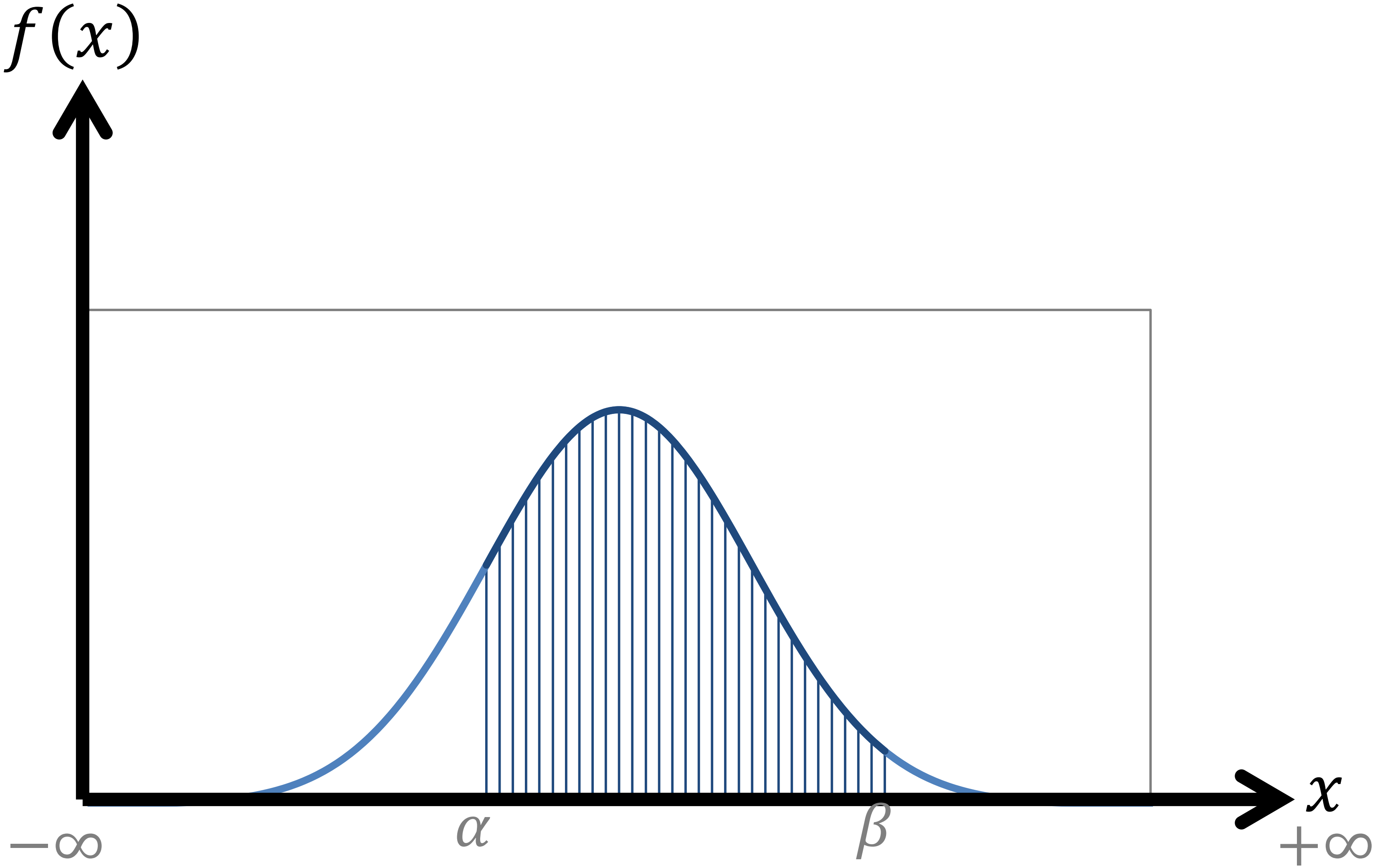
xがyのときの$f(x)$とx軸で囲まれた部分の面積



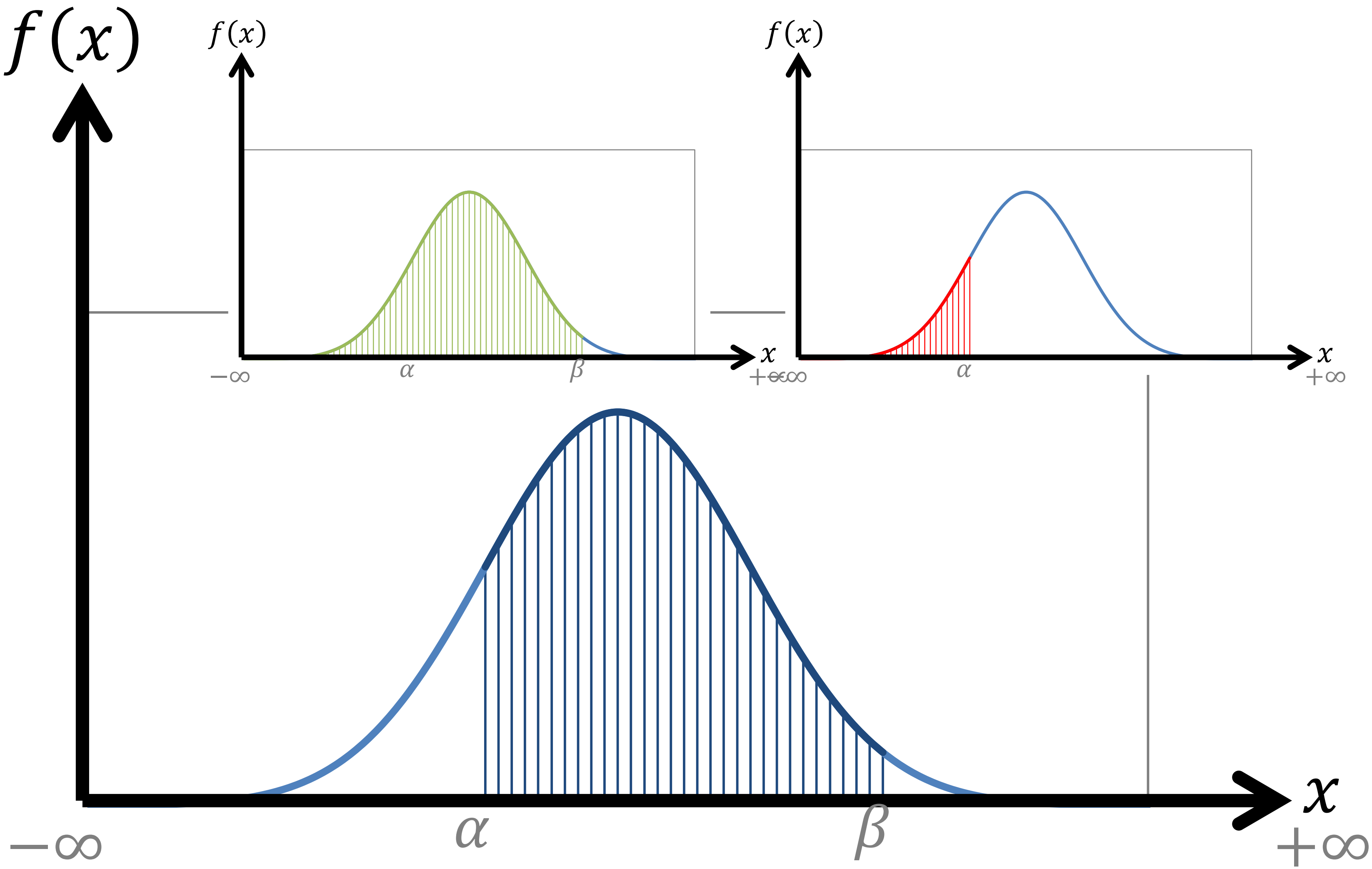
分布関数 $F(x)$



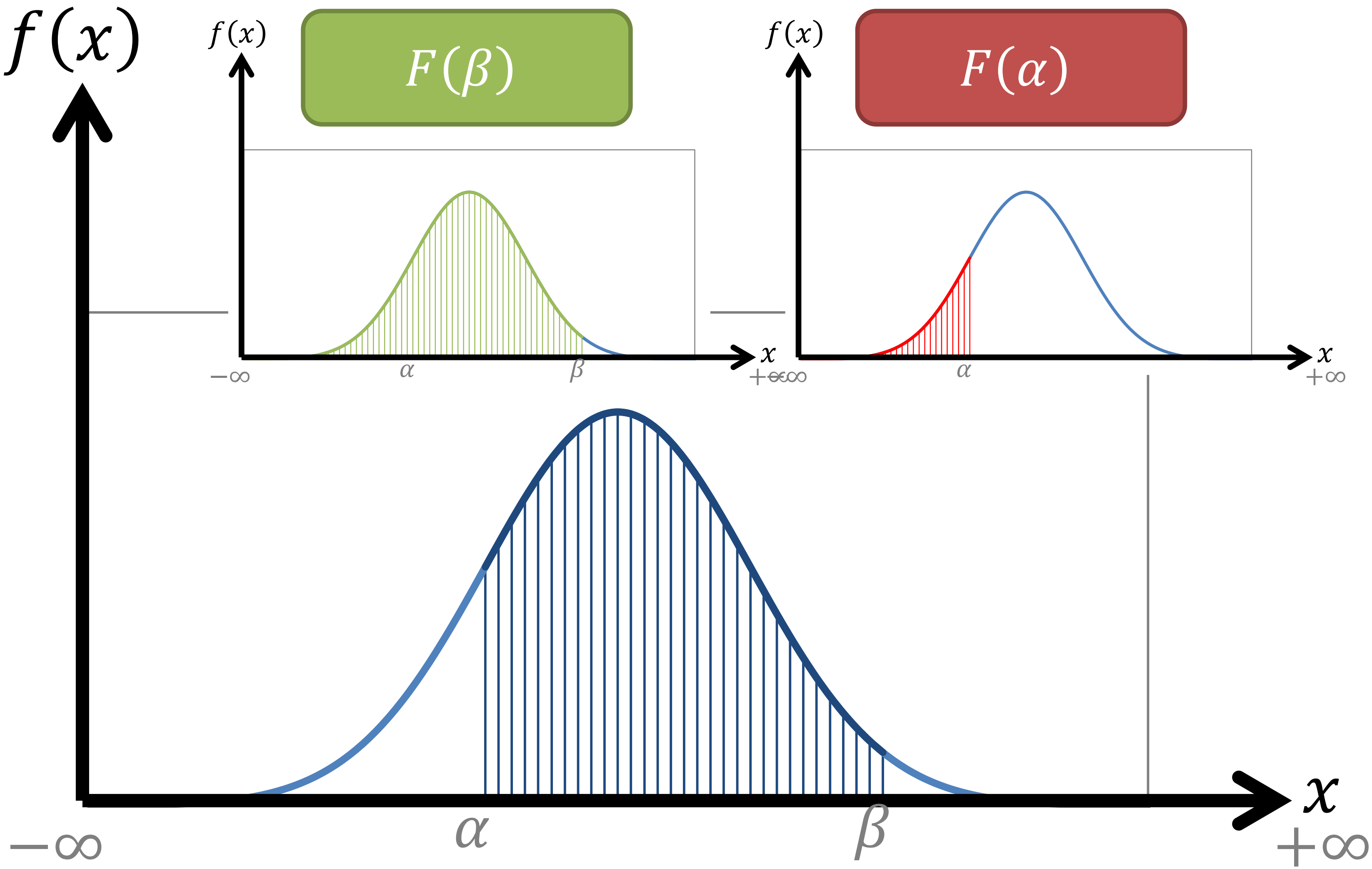
色部分の面積　$\Pr(\alpha < X < \beta)$　の求め方



緑の面積から赤の面積を引く



緑の面積から赤の面積を引く



$\Pr(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

（２）一様分布

一様分布

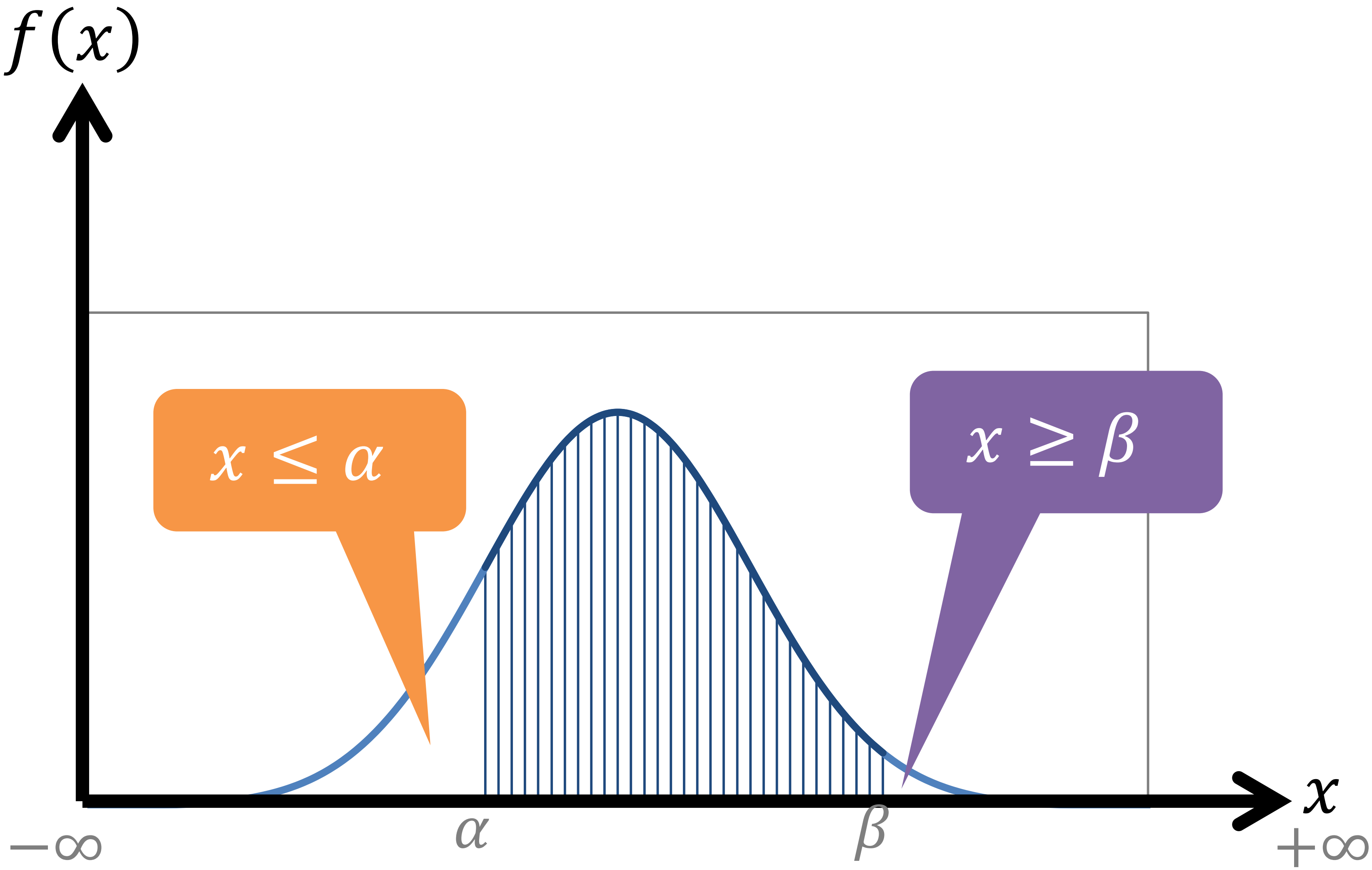
- 一様分布（uniform distribution）

  連続確率変数Xの確率密度関数$f(x)$が
  区間$[\alpha, \beta]$において$\frac{1}{\beta-\alpha}$となるとき

  - $X \sim U(\alpha, \beta)$
  - 確率変数Xは一様分布にしたがう

  - とり得る値の範囲はわかっているものの
    どのような値を取るかについて
    全く情報がないときの確率分布
    - ちょうど1年後の同じ月日の
      1日間においての降水時間⇒0時間～24時間

一様分布



（３）その他の連続確率分布

その他の連続確率分布

- 一様分布
  - 前述
- 指数分布
  - 事象が起こる時間間隔を表現する連続確率分布

- 正規分布
- カイ二乗分布
- t分布
- F分布

第6章以降に登場

（１）確率分布の平均値と分散の定義

確率分布の平均値と分散の定義

- 確率分布は母集団の分布
  ⇒母平均μと母分散σ^2は確率分布の平均値と分散

- 母平均
  – 離散確率変数の場合　$\mu_x = \sum_x x \Pr(X = x)$
  – 連続確率変数の場合　$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$
- 母分散
  – 離散確率変数の場合　$\sigma_x^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 \Pr(X = x)$
  – 連続確率変数の場合　$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$

確率分布の平均値と分散の定義

- 確率分布は母集団の分布

  ⇒母平均μと母分散σ^2は確率分

赤文字の部分が
青文字になっただけ

- 母平均
  - 離散確率変数の場合　$\mu_x = \sum_x x \Pr(X = x)$
  - 連続確率変数の場合　$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$
- 母分散
  - 離散確率変数の場合　$\sigma_x^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 \Pr(X = x)$
  - 連続確率変数の場合　$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2\, f(x)dx$

（２）確率分布の平均値と分散の考え方

離散変数における平均値と確率の考え方

第3章

経験確率の考え方
相対度数を確率として定義

$$\Pr(X = x) \quad \leftarrow \quad \frac{f_k}{n}$$

第4章

確率分布は母集団の分布
確率分布の平均値は
値と**確率**の積和

母平均：　$\mu_x = \sum_x x \Pr(X = x)$

母分散：　$\sigma_x^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 \Pr(X = x)$

第2章

度数分布の平均値は
値と**相対度数**との積和

標本平均：　$\bar{x} = \sum_k x(k) \frac{f_k}{n}$

標本分散：　$S_x^2 = \sum_k (x(k) - \bar{x})^2 \frac{f_k}{n}$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2\Pr(X=x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	[illegible]	0	0.0000
2	0.1937	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	0.0574	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	0.0112	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	0.0015	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	0.0001	0.0008	25	0.0034
7	0.0000	0.0001	36	0.0003
8	0.0000	0.0000	49	0.0000
9	0.0000	0.0000	64	0.0000
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

$$\Pr(X=0) = {}_{10}C_0(0.1)^0(1-0.1)^{10}$$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2\Pr(X=x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	0.3874	0	0.0000
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	[illegible]	0.1004
5	0.0015	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	0.0001	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

$$x\,\Pr(X=1) = 1 \times \Pr(X=1)$$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2\Pr(X=x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	0.3874	0	0.0000
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	9	[illegible]
5	0.0015	0.0074	[illegible]	[illegible]
6	0.0001	0.0008	[illegible]	[illegible]
7	0.0000	0.0001	[illegible]	[illegible]
8	0.0000	0.0000	[illegible]	[illegible]
9	0.0000	0.0000	64	[illegible]
10	0.0000	0.0000	[illegible]	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

平均

$$\mu_x = \sum_x x\Pr(X=x)$$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2\Pr(X=x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	0.3874	0	0.0000
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	9	0.1004
5	0.0015	0.0074	16	0.0238
6	0.0001	0.0008	25	0.0034
7	0.0000	0.0001	3[illegible]	[illegible]
8	0.0000	0.0000	4[illegible]	[illegible]
9	0.0000	0.0000	6[illegible]	[illegible]
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

$$(x-\mu_x)^2 = (3-1)^2$$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2\Pr(X=x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	0.3874	0	0.0000
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	9	0.1004
5	0.0015	0.0074	16	0.0238
6	0.0001	0.0008	25	[illegible]
7	0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	0.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

$$(4-\mu_x)^2\Pr(X=4) = 9 \times 0.0112$$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$	$(x-\mu_x)^2$	$(x-\mu_x)^2\Pr(X=x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	0.3874	0	0.0000
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	[illegible]	9	0.1004
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0238
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0034
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0003
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0000
9	0.0000	0.0000	64	0.0000
10	0.0000	0.0000	[illegible]	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

分散

$$\sigma_x^2 = \sum_x (x-\mu_x)^2 \Pr(X=x)$$

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる
- 平均値と分散を計算する

景品がまったく当たらない確率

確率変数	確率 $\mathrm{Pr}(X = x)$	$x\mathrm{Pr}(X = x)$	$(x - \mu_x)^2$	$(x - \mu_x)^2\,\mathrm{Pr}(X = x)$
0	0.3487	0.0000	1	0.3487
1	0.3874	0.3874	0	0.0000
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	9	0.1004
5	0.0015	0.0074	16	0.0238
6	0.0001	0.		
7	0.0000	0.		
8	0.0000	0.		
9	0.0000	0.		
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

景品が3個当たる確率は？
景品が4個以上当たる確率は？

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X = x)$	$x \Pr(X = x)$		
0	0.3487	0.0000		
1	0.3874	0.3874		
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.1722	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	9	0.1004
5	0.0015	0.0074	16	0.0238
6	0.0001	0.		
7	0.0000	0.		
8	0.0000	0.		
9	0.0000	0.		
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

景品が3個当たる確率

景品が3個当たる確率は？
⇒0.0574

例題4-2

- 10回の福引で景品が1個以上あたる確率：　二項分布B(10, 0.1)
- 平均値と分散を計算する

確率変数	確率 $\Pr(X=x)$	$x\Pr(X=x)$		
0	0.3487	0.0000		
1	0.3874	0.3874		
2	0.1937	0.3874	1	0.1937
3	0.0574	0.17	4	0.2296
4	0.0112	0.0446	9	0.1004
5	0.0015	0.0074	16	0.0238
6	0.0001	0.		
7	0.0000	0.		
8	0.0000	0.		
9	0.0000	0.		
10	0.0000	0.0000	81	0.0000
合計	1.0000	1.0000		0.9000

景品が4個以上当たる確率

景品が4個以上当たる確率は？
0.0112+0.0015+0.0001+⋯+0.0000
=0.0128

第4章(後半)のまとめ

- 連続確率分布
    - 分布関数と確率密度で表現する
  - 一様分布
    - 値のとり得る範囲のみの情報がある確率分布
  - その他の連続確率分布
    - 指数分布
      - 事象が起こる時間間隔を表現する分布
    - 正規分布
    - カイ二乗分布
    - t分布
    - F分布

- 確率分布の平均と分散
  - 母集団の平均値と分散
  - 経験確率の考え方を利用
    - 標本の平均値　　値と相対度数の積和
    - 母集団の平均値　値と確率の積和