

今日やること	母平均の区間推定について学びます。 区間推定で用いる信頼係数と信頼区間の意味を理解します。 母平均の区間推定に関する計算を行います。
--------	--

pp.105 前回までの復習

正規分布	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0, 1)$
カイ二乗分布	$U = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$
t分布	$T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}}} \sim t(n-1)$

※ 色つきの部分は確率変数 (可変)

※ それ以外の部分は固定値

pp.106 母平均の区間推定

区間推定	推定量の確率分布における区間を用いて母数を推定する ある区間内に母数が含まれることを <b>信頼度</b> で示す 推定した区間は <b>信頼区間</b> で表す
------	---

信頼係数	(confidence coefficient)
信頼区間	(confidence interval)

信頼係数  $100(1 - \alpha)$  %の信頼区間のことを $100(1 - \alpha)$  %信頼区間ともいう( **下限値** , **上限値** ) で表す

pp.109 母平均の95%信頼区間

ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って

信頼区間を100回計算するとき

区間内に母平均を含むものは

100回のうち95回程度になるような区間

標本平均、t分布の%点、標本不偏分散を使って計算する

**超重要**

$$\left( \bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}} \right)$$

## pp.111 母平均の区間推定に関する計算

例題9-1 ポイントカード所有者2万人の母集団から50人を無作為抽出

標本数  $n = 50$ 標本平均  $\bar{x} = 1.98$ 標本分散  $S_x^2 = 2.6196$ 

母平均の95%信頼区間を求める

## ① 標本不偏分散を求める

$$\widehat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2$$

(pp.98 定義16 参照) より

$$\widehat{\sigma}_x^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2 = \frac{50}{49} \times 2.6196 \approx 2.6731$$

## ② t分布表から、t分布の%点を求める

今回は母平均の95%信頼区間なので

$$2.5\% \text{点} \text{ を求める } \left( \frac{1-0.95}{2} \right) = \left( \frac{0.05}{2} \right)$$

※ この例の場合は表中に数字がないが、

$$t_{0.025}(49) = 2.0096 \text{ として計算することとする}$$

## ③ t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入する

すなわち

$$t_{0.025}(49) \times \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{n}} = 2.0096 \times \sqrt{\frac{2.6731}{50}} \approx 0.46466$$

## ④ 標本平均から±して上限値と下限値を求める

下限値

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{n}} = 1.98 - 0.46466 \approx 1.54$$

上限値

$$\bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{n}} = 1.98 + 0.46466 \approx 2.44$$

以上より、母平均の95%信頼区間は

$$(1.54, 2.44)$$

## pp.112 統計データからの区間推定

例題9-2 ポイントカード所有者2万人の母集団から7人を無作為抽出

標本平均、標本分散等は不明

得られた統計データは以下の表の通り

i	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	3	0	0
2	0	-3	9
3	2	-1	1
4	7	4	16
5	5	2	4
6	3	0	0
7	1	-2	4
合計	21	0	34
平均値	3		

- ① 標本平均が不明の場合、  
まず標本平均を計算  
※ 有効桁数は多めにとる
- ② 平均値からの偏差を計算  
※ 合計がゼロになる確認
- ③ 偏差平方和を計算

(統計学Aの復習)

- ④ t分布表から2.5%点を求める

$$t_{0.025}(7-1) =$$

2.4469

- ⑤ 標本不偏分散を求める

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7-1} \times 34 \approx 5.6667$$

- ⑥ t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入する

$$t_{0.025}(n-1) \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}} = 2.4469 \times \sqrt{\frac{5.6667}{7}} \approx 2.2016$$

- ④ 標本平均から±して上限値と下限値を求める

下限値

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}} = 3.0 - 2.2016 \approx 0.80$$

上限値

$$\bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}} = 3.0 + 2.2016 \approx 5.20$$

以上より、母平均の95%信頼区間は

(0.80, 5.20)

【練習問題】 下表は、あるクラスの英語の試験の受験者から抽出した15人分の得点である。

受験番号	得点	偏差	偏差平方和
1	28	-17.2	295.84
2	38	-7.2	51.84
3	32	-13.2	174.24
4	41	-4.2	17.64
5	42	-3.2	10.24
6	50	4.8	23.04
7	42	-3.2	10.24
8	68	22.8	519.84
9	52	6.8	46.24
10	28	-17.2	295.84
11	67	21.8	475.24
12	22	-23.2	538.24
13	27	-18.2	331.24
14	79	33.8	1142.44
15	62	16.8	282.24
合計	678		4214.4

① 標本平均と標本分散を求めよ

標本平均

45.2

標本分散

280.96

② 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散の値を母分散として

考えることができるとした場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント 標準正規分布表

$n =$

15

$\bar{x} =$

45.2

$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$\hat{\sigma}_X^2 = S_X^2 =$

280.96

( 36.72 , 53.68 )

③ 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散は母集団の分散の

推定値に過ぎないとする場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント t分布表

②の例では  $\hat{\sigma}_X^2 = S_X^2$  だが

「推定値に過ぎない」と

考える場合は

「標本不偏分散」を求める

$\hat{\sigma}_X^2 =$

301.0286

( 45.20 , 45.20 )

Memo

【練習問題】 下表は、ある日のコンビニ20店舗の売上高である。

店舗 I D	売上高	偏差	偏差平方和
1	41	13.6	184.96
2	17	-10.4	108.16
3	14	-13.4	179.56
4	23	-4.4	19.36
5	33	5.6	31.36
6	38	10.6	112.36
7	36	8.6	73.96
8	26	-1.4	1.96
9	32	4.6	21.16
10	27	-0.4	0.16
11	41	13.6	184.96
12	25	-2.4	5.76
13	31	3.6	12.96
14	21	-6.4	40.96
15	27	-0.4	0.16
16	35	7.6	57.76
17	18	-9.4	88.36
18	19	-8.4	70.56
19	16	-11.4	129.96
20	28	0.6	0.36
合計	548		1324.8

① 標本平均と標本分散を求めよ

標本平均

27.4

標本分散

66.24

② 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散の値を母分散として

考えることができるとした場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント 標準正規分布表

$n =$  20

$\bar{x} =$  27.4

$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$\hat{\sigma}_x^2 = s_x^2 =$  66.24

( 23.83 , 30.97 )

③ 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散は母集団の分散の

推定値に過ぎないとする場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント t分布表

②の例では  $\hat{\sigma}_x^2 = s_x^2$  だが

「推定値に過ぎない」と

考える場合は

「標本不偏分散」を求める

$\hat{\sigma}_x^2 =$  69.7263

( 27.40 , 27.40 )

Memo

今日の講義のまとめ	
母平均の区間推定	
母平均を含む統計量に基づいて行う	
信頼係数	confidence coefficient
信頼区間	confidence interval
(下限 , 上限)	
95%信頼区間	
信頼係数95%の信頼区間を、95%信頼区間ともいう	
ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って	
信頼区間を100回計算するとき	
区間内に母平均を含むものは100回中95回程度になる区間	
$\left( \bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}} \right)$	
区間推定の計算	
使用するもの	
標本平均	$\bar{x}$
標本不偏分散	$\widehat{\sigma}_X^2$
$t$ 分布のパーセント点	$t_{0.025}(n-1)$
標本平均 $\pm t$ 分布のパーセント点 $\sqrt{\frac{\text{標本不偏分散}}{\text{標本数}}}$	

 Memo