

今日やること	母平均の区間推定について学びます。 区間推定で用いる信頼係数と信頼区間の意味を理解します。 母平均の区間推定に関する計算を行います。
--------	--

pp.105 前回までの復習

	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0, 1)$
	$U = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$
	$T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}}} \sim t(n-1)$

※ 色つきの部分は確率変数 (可変)

※ それ以外の部分は固定値

pp.106 母平均の区間推定

推定量の確率分布における区間を用いて母数を推定する
 ある区間内に母数が含まれることを で示す
 推定した区間は で表す

(confidence coefficient)

(confidence interval)

信頼係数 $100(1 - \alpha)$ %の信頼区間のことを $100(1 - \alpha)$ %信頼区間ともいう(,) で表す

pp.109 母平均の95%信頼区間

ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って

信頼区間を100回計算するとき

区間内に母平均を含むものは

100回のうち95回程度になるような区間

標本平均、t分布の%点、標本不偏分散を使って計算する

超重要

$$\left(\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}} \right)$$

pp.111 母平均の区間推定に関する計算

例題9-1 ポイントカード所有者2万人の母集団から50人を無作為抽出

標本数 $n = 50$ 標本平均 $\bar{x} = 1.98$ 標本分散 $S_x^2 = 2.6196$

母平均の95%信頼区間を求める

① 標本不偏分散を求める

$$\widehat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2$$

(pp.98 定義16 参照) より

$$\widehat{\sigma}_x^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2 =$$

② t分布表から、t分布の%点を求める

今回は母平均の95%信頼区間なので

$$\boxed{} \text{ を求める } \left(\frac{1-0.95}{2} \right) = \left(\frac{0.05}{2} \right)$$

※ この例の場合は表中に数字がないが、

$$t_{0.025}(49) = 2.0096 \text{ として計算することとする}$$

③ t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入する

すなわち

$$t_{0.025}(49) \times \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{n}} = 2.0096 \times \sqrt{\frac{2.6731}{50}} \approx$$

④ 標本平均から±して上限値と下限値を求める

下限値

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{n}} =$$

上限値

$$\bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{n}} =$$

以上より、母平均の95%信頼区間は

pp.112 統計データからの区間推定

例題9-2 ポイントカード所有者2万人の母集団から7人を無作為抽出

標本平均、標本分散等は不明

得られた統計データは以下の表の通り

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	3		
2	0		
3	2		
4	7		
5	5		
6	3		
7	1		
合計			
平均値			

- ① 標本平均が不明の場合、
まず標本平均を計算
※ 有効桁数は多めにとる
- ② 平均値からの偏差を計算
※ 合計がゼロになる確認
- ③ 偏差平方和を計算

(統計学Aの復習)

- ④ t分布表から2.5%点を求める

$$t_{0.025}(7-1) =$$

- ⑤ 標本不偏分散を求める

$$\widehat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 =$$

- ⑥ t分布の%点、標本不偏分散、標本数を代入する

$$t_{0.025}(n-1) \times \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}} =$$

- ④ 標本平均から±して上限値と下限値を求める

下限値

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}} =$$

上限値

$$\bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}} =$$

以上より、母平均の95%信頼区間は

【練習問題】 下表は、あるクラスの英語の試験の受験者から抽出した15人分の得点である。

受験番号	得点	偏差	偏差平方和
1	28		
2	38		
3	32		
4	41		
5	42		
6	50		
7	42		
8	68		
9	52		
10	28		
11	67		
12	22		
13	27		
14	79		
15	62		
合計	678		

① 標本平均と標本分散を求めよ

標本平均

標本分散

② 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散の値を母分散として

考えることができるとした場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント 標準正規分布表

$n =$

$\bar{x} =$

$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$\hat{\sigma}_X^2 = S_X^2 =$

(,)

③ 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散は母集団の分散の

推定値に過ぎないとする場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント t分布表

②の例では $\hat{\sigma}_X^2 = S_X^2$ だが

「推定値に過ぎない」と

考える場合は

「標本不偏分散」を求める

$\hat{\sigma}_X^2 =$

(,)

Memo

【練習問題】 下表は、ある日のコンビニ20店舗の売上高である。

店舗 I D	売上高	偏差	偏差平方和
1	41		
2	17		
3	14		
4	23		
5	33		
6	38		
7	36		
8	26		
9	32		
10	27		
11	41		
12	25		
13	31		
14	21		
15	27		
16	35		
17	18		
18	19		
19	16		
20	28		
合計	548		

① 標本平均と標本分散を求めよ

標本平均

標本分散

② 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散の値を母分散として

考えることができるとした場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント 標準正規分布表

$n =$

$\bar{x} =$

$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$\hat{\sigma}_X^2 = S_X^2 =$

(,)

③ 標本平均は正規分布にしたがい

標本分散は母集団の分散の

推定値に過ぎないとする場合、

95%信頼区間を求めよ。

ヒント t分布表

②の例では $\hat{\sigma}_X^2 = S_X^2$ だが

「推定値に過ぎない」と

考える場合は

「標本不偏分散」を求める

$\hat{\sigma}_X^2 =$

(,)

✎ Memo

今日の講義のまとめ	
母平均の区間推定	
母平均を含む統計量に基づいて行う	
信頼係数	confidence coefficient
信頼区間	confidence interval
(下限 , 上限)	
95%信頼区間	
信頼係数95%の信頼区間を、95%信頼区間ともいう	
ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って	
信頼区間を100回計算するとき	
区間内に母平均を含むものは100回中95回程度になる区間	
$\left(\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}}, \bar{x} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_X^2}{n}} \right)$	
区間推定の計算	
使用するもの	
標本平均	\bar{x}
標本不偏分散	$\widehat{\sigma}_X^2$
t 分布のパーセント点	$t_{0.025}(n-1)$
標本平均 \pm t 分布のパーセント点 $\sqrt{\frac{\text{標本不偏分散}}{\text{標本数}}}$	

 Memo

2022 年度 統計学 期末試験

t 分布表

α	0.250	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
$v (2\alpha)$	0.500	0.400	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	0.001
1	1.0000	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192
2	0.8165	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991
3	0.7649	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240
4	0.7407	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103
5	0.7267	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8688
6	0.7176	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9588
7	0.7111	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4079
8	0.7064	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	5.0413
9	0.7027	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.7809
10	0.6998	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869
11	0.6974	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.4370
12	0.6955	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	4.3178
13	0.6938	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.2208
14	0.6924	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.1405
15	0.6912	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	4.0728
16	0.6901	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	4.0150
17	0.6892	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.9651
18	0.6884	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.9216
19	0.6876	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.8834
20	0.6870	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.8495
21	0.6864	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.8193
22	0.6858	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.7921
23	0.6853	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.7676
24	0.6848	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.7454
25	0.6844	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.7251
26	0.6840	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.7066
27	0.6837	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.6896
28	0.6834	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.6739
29	0.6830	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.6594
30	0.6828	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.6460
40	0.6807	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.5510
60	0.6786	0.8477	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.4602
120	0.6765	0.8446	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174	3.3735
200	0.6757	0.8434	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.3398
∞	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.2905