

第10章 (pp. 117)

母分散の区間推定

【二項分布】

標本の大きさ n が大きいときに
正規分布に近似

【ポアソン分布】

二項分布のひとつ
期待値 = 分散

【正規分布】

標本の大きさ n が大きいときに
和の分布は正規分布に近似

【t分布】

標準正規分布にしたがう統計量と
カイ二乗分布にしたがう統計量
(互いに独立) の
比に関する確率分布

【カイ二乗分布】

標準正規分布にしたがう統計量の
平方和に関する確率分布

【F分布】

カイ二乗分布にしたがう統計量
(互いに独立) の
比に関する確率分布

【ポアソン分布】

二項分布のひとつ
期待値 = 分散

【二項分布】

標本の大きさ n が大きいときに
正規分布に近似

【正規分布】

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}}$$

【t分布】

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_x^2}}{n}}}$$

【カイ二乗分布】

$$U = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_x^2}$$

【F分布】

$$F = \frac{\widehat{\sigma_1^2} \sigma_2^2}{\widehat{\sigma_2^2} \sigma_1^2}$$

母分散の区間推定

(復習) 区間推定の考え方

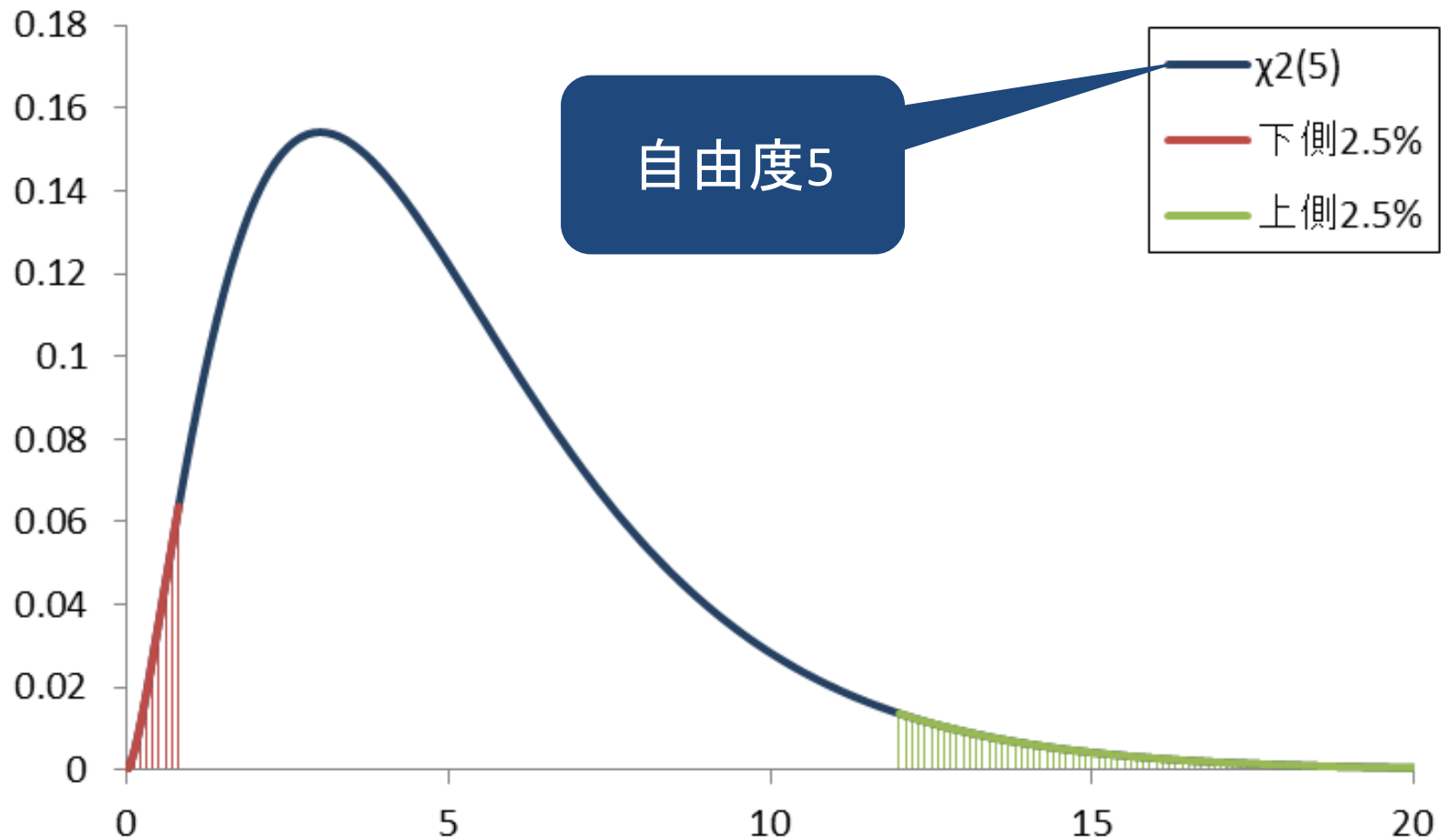
- 区間推定
 - 推定量の確率分布における区間を用いて母数を推定
 - ある区間内に母数が含まれることを信頼度で示す
- 推定した区間
 - 信頼係数 $100(1 - \alpha)\%$ の信頼区間
 - 信頼係数 confidence coefficient
 - 信頼区間 confidence interval
 - 信頼係数95%の信頼区間のことを95%信頼区間ともいう
 - 信頼区間は (下限値, 上限値) で表す

- 自由度 $n - 1$ のカイ二乗分布
 - 母分散 σ_x^2 を含む統計量

$$U = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(n - 1)$$

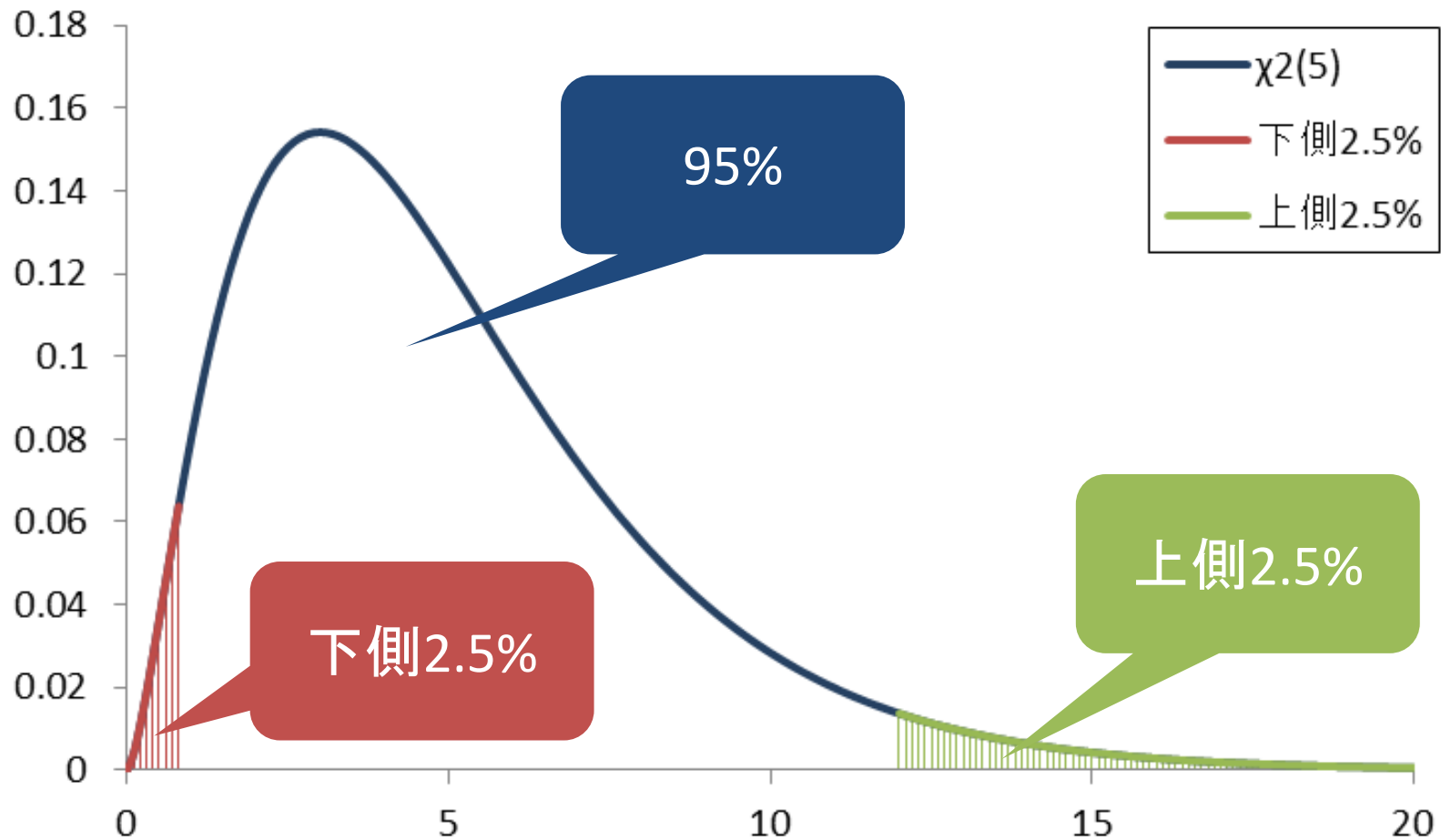
母分散の区間推定

- カイ二乗分布は自由度が小さいと左右非対称



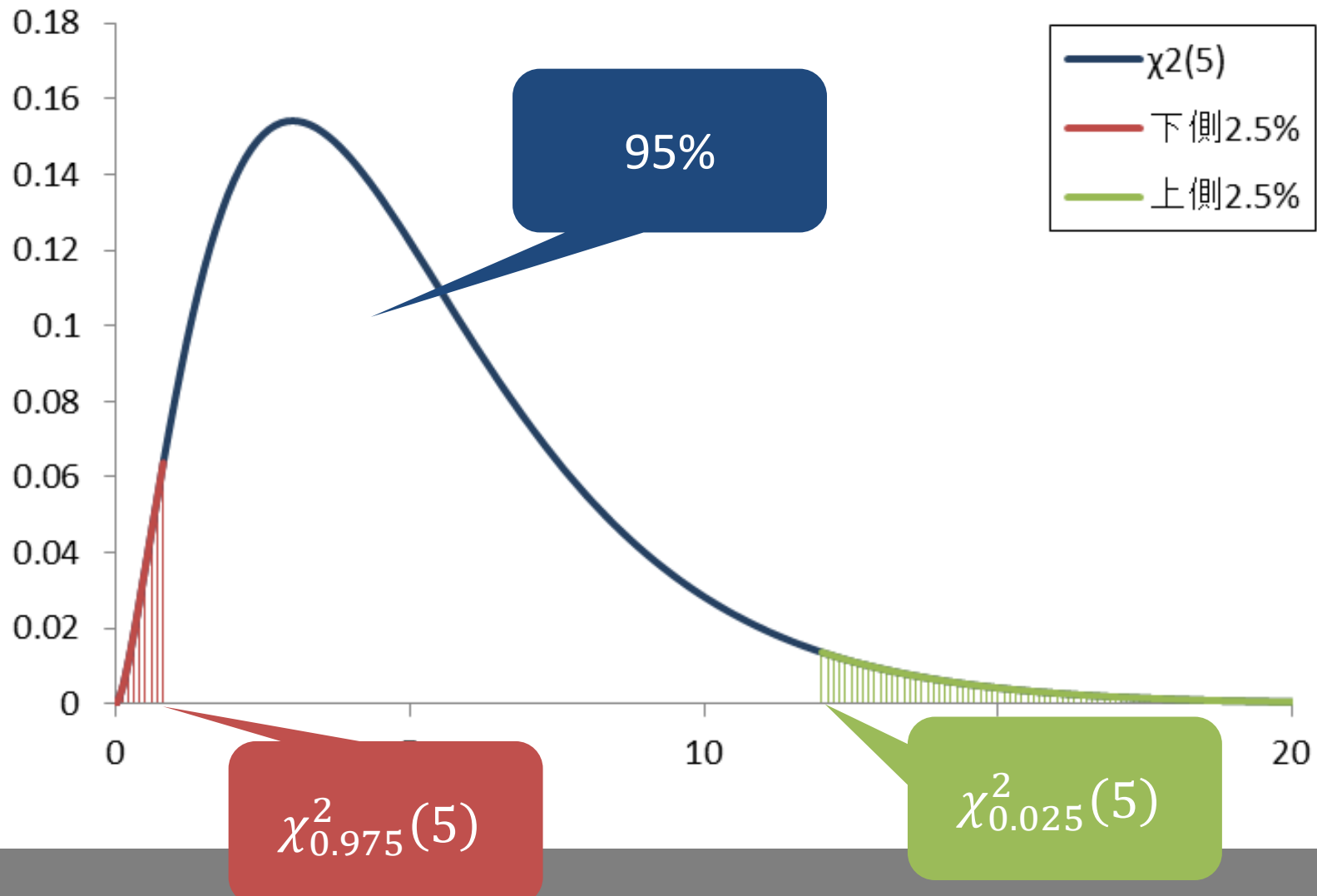
母分散の区間推定

- カイ二乗分布は自由度が小さいと左右非対称



母分散の区間推定

- カイ二乗分布は自由度が小さいと左右非対称



母分散の区間推定

- カイ二乗分布は自由度が小さいと左右非対称

$$\Pr\left(\chi_{0.975}^2(n-1) < U < \chi_{0.025}^2(n-1)\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)} < \sigma_x^2 < \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right) = 0.95$$

母分散の
95%信頼区間

※式の変形については教科書pp.119を参照

- カイ二乗分布は自由度が小さいと左右非対称

$$\Pr\left(\chi_{0.975}^2(n-1) < U < \chi_{0.025}^2(n-1)\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)} < \sigma_x^2 < \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right) = 0.95$$

$$= \Pr\left(\frac{\text{偏差平方和}}{\text{カイ二乗統計量0.025}} < \sigma_x^2 < \frac{\text{偏差平方和}}{\text{カイ二乗統計量0.975}}\right) = 0.95$$

母分散の区間推定

カイ二乗分布表をつかう

確率

自由度

α ν	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	11.0705	12.8325	15.0863	16.7554
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	16.9190	19.0228	21.6660	23.5819
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881

母分散の区間推定

カイ二乗分布表をつかう

確率

自由度

α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	11.0705	12.8325	15.0863	16.7505
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	15.5073	17.5345	20.0902	21.9569
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	16.9190	19.0228	21.6660	23.5819
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881

(pp.123) 問題10-2

- 業種「機械」に分類される企業のうち、5社を無作為抽出してROAを調べた
- 母分散の95%信頼区間を求めよ

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	5.6		
2	5.2		
3	3.2		
4	4.6		
5	8.4		
合計			
平均			

母分散の区間推定に必要なもの

①自由度: $n - 1$

②カイ二乗統計量: 統計表から読む

③偏差平方和: 表を書いて計算($(x_i - \bar{x})^2$ を合計したもの)

F分布

- F分布

- カイ二乗分布にしたがう互いに独立な確率変数の比に関する確率分布
- 左右非対称

$$F = \frac{\frac{U_1}{\nu_1}}{\frac{U_2}{\nu_2}} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

- 自由度が2つ
- 分子の自由度が1つめ (ν_1)
分母の自由度が2つめ (ν_2)

- F分布

- カイ二乗分布にしたがう互いに独立な確率変数の比に関する確率分布
- 左右非対称

$$F = \frac{\widehat{\sigma_1^2} \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \widehat{\sigma_1^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

※式の展開については教科書pp.125参照

- 自由度が2つ
- 分子の自由度が1つめ (ν_1)
分母の自由度が2つめ (ν_2)

F分布のパーセント点

F分布表をつかう

自由度1つめ

自由度2つめ

ν_1 ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.848	937.111	948.217	956.656	963.285	968.6
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.3
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.4
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.8
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.6
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.4
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.7
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.2
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.9
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.7

第10章のまとめ

- 母分散 σ_x^2 の区間推定
 - 母分散 σ_x^2 を含む
カイ二乗分布にしたがう統計量に基づいて行う
- 母分散の95%信頼区間
$$\left(\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)}, \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)} \right)$$
- F分布
 - カイ二乗分布にしたがう互いに独立な確率変数の比
 - 自由度を2つもつ