第3章（pp. 30）

確率と確率変数

確率の考え方

（１）確率に関する諸定義

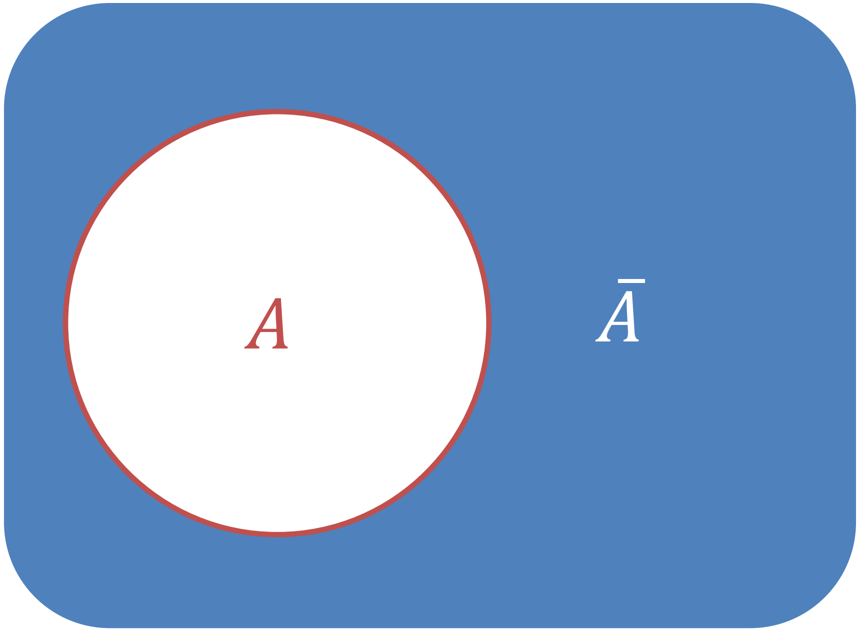
確率に関する諸定義

- 確率
  - 偶然性の確からしさを測る指標
- 事象
  - 偶然性を伴って生じる結果
    - サイコロを投げて「2」の目が出ること
    - コインを投げて表が出ること

確率に関する諸定義

例）　事象A：　コイン投げで「表」が出ること

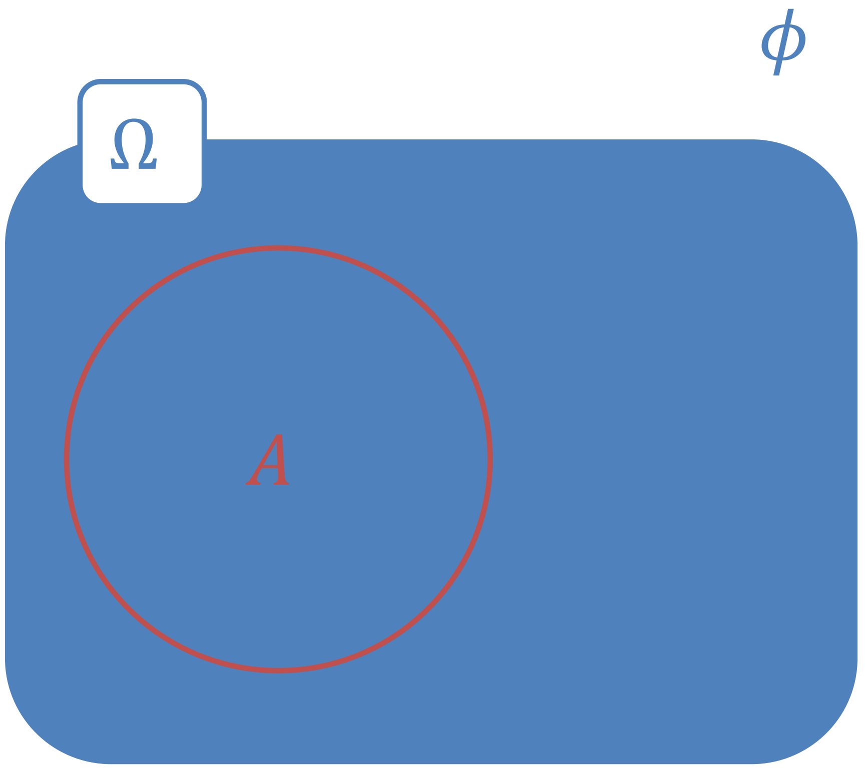
- 余事象
  - 事象Aが起こらないこと
  - 事象Aの補集合
    - コイン投げで「裏」が出る
    - $\bar{A}=\{裏\}$



確率に関する諸定義

例）　事象A：　コイン投げで「表」が出ること

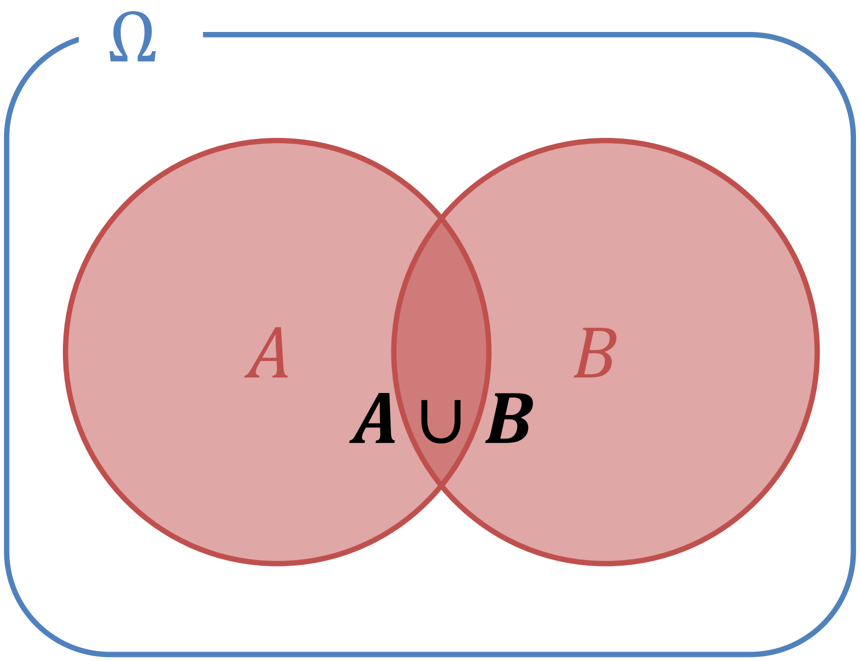
- 全事象（標本空間）
  - 起こり得る結果すべて
    - $\Omega = \{表, 裏\}$
- 空事象
  - 事象が何も起こらないこと
    - ϕ



確率に関する諸定義

例）　事象A：　コイン投げで「表」が出ること
　　　事象B：　コイン投げで「裏」が出ること

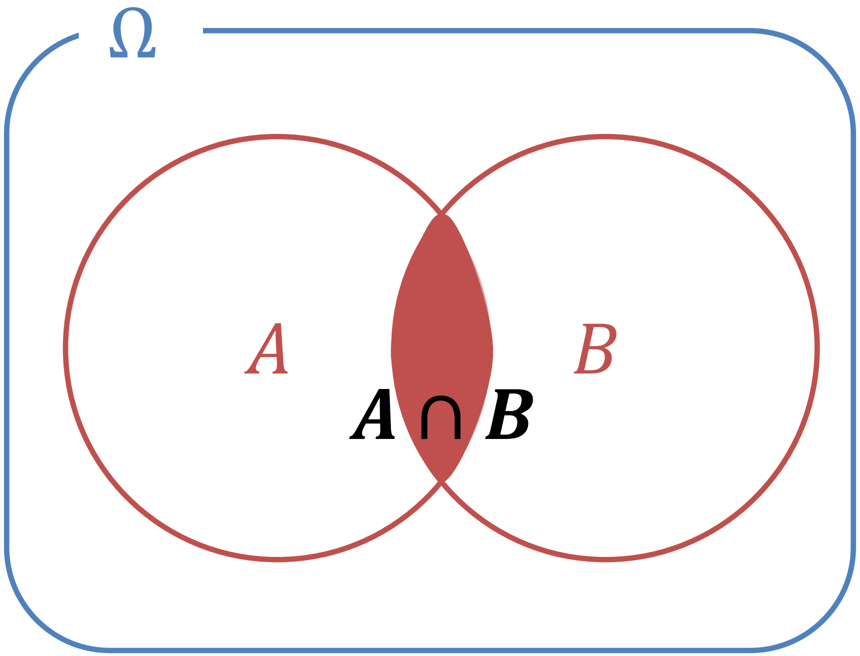
- 和事象
  - 事象Aまたは事象B
  - 事象Aと事象Bの少なくとも1つが起こること
    - 表か裏のどちらかが出ること
    - $A \cup B$



確率に関する諸定義

例）　事象A：　コイン投げで「表」が出ること
　　　事象B：　コイン投げで「裏」が出ること

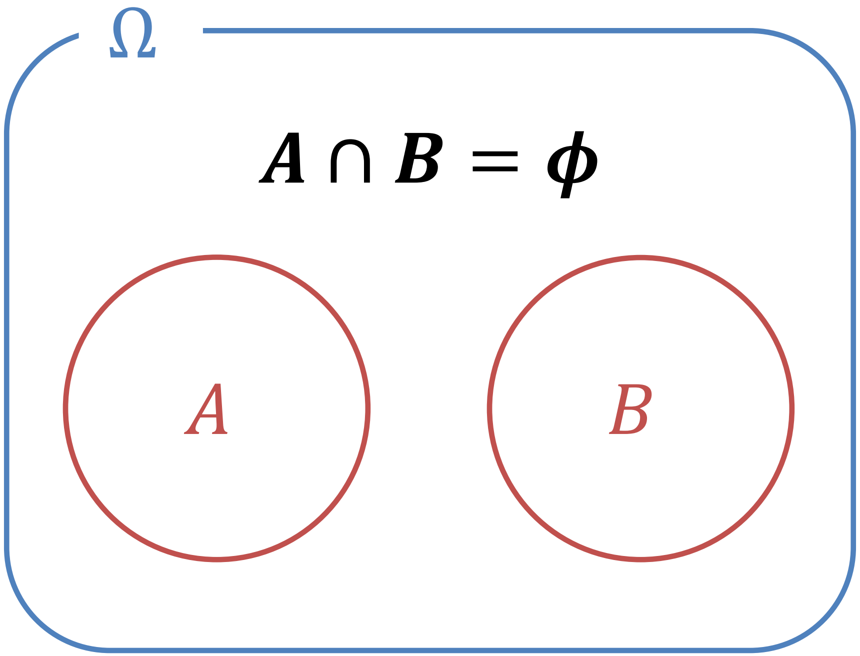
- 積事象
  - 事象Aかつ事象B
  - 事象Aと事象Bがともに起こること
    - 表と裏の両方が出ること
    - $A \cap B$



確率に関する諸定義

例）　事象A：　コイン投げで「表」が出ること
　　　事象B：　コイン投げで「裏」が出ること

- 排反事象
  - 積事象が空事象であること
    - $A \cap B = \phi$
    - 表と裏が同時に出ることはありえないため事象Aと事象Bは互いに排反である。

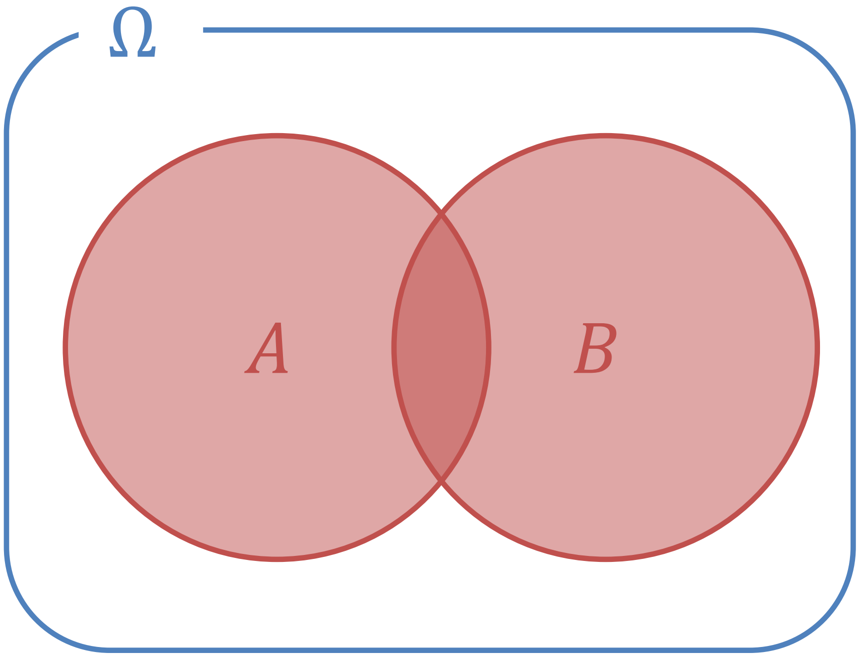


例題3-1　サイコロによる事象の例

- 事象A
  - 出た目が偶数
    - 2, 4, 6
- 事象B
  - 出た目が2
    - 2
- 全事象
  - サイコロの目すべて
    - 1, 2, 3, 4, 5, 6

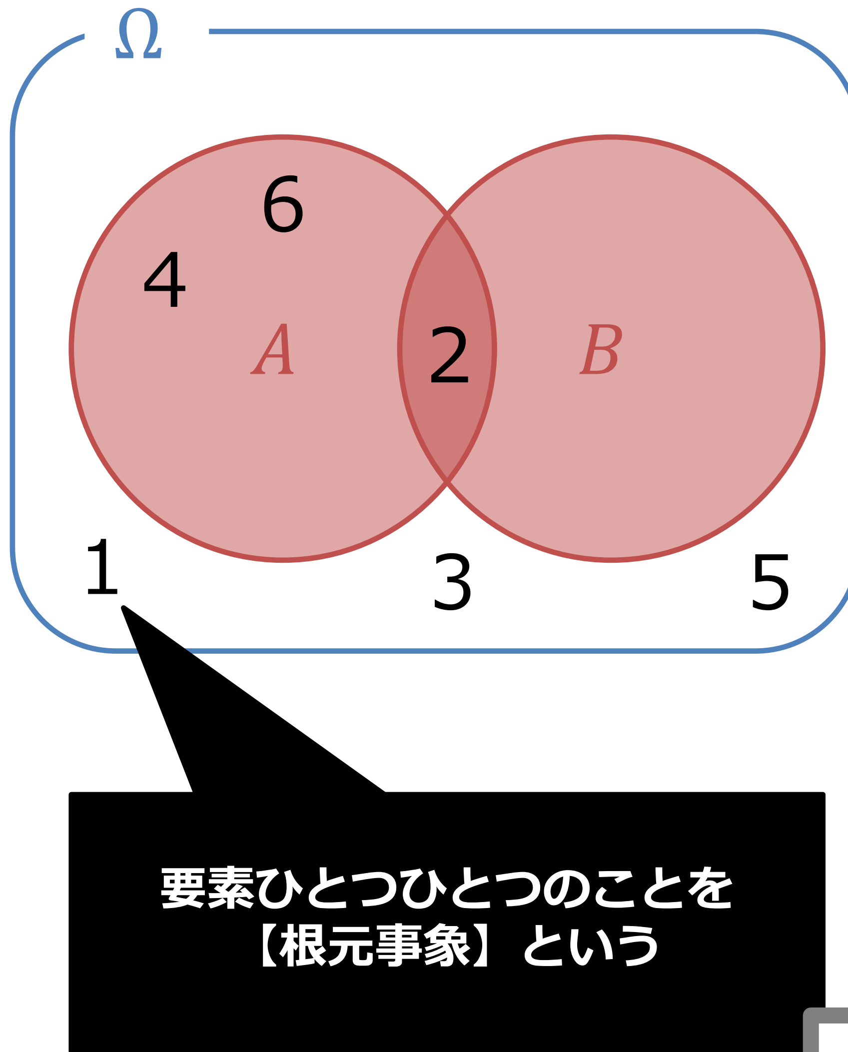
例題3-1　サイコロによる事象の例

- 事象A
  - 出た目が偶数
    - 2, 4, 6
- 事象B
  - 出た目が2
    - 2
- 全事象
  - サイコロの目すべて
    - 1, 2, 3, 4, 5, 6



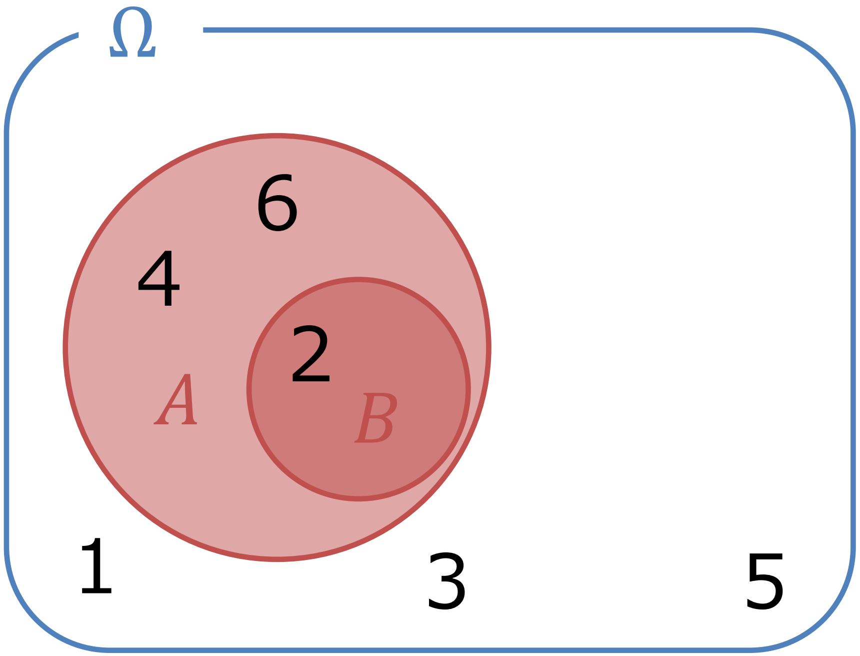
例題3-1　サイコロによる事象の例

- 事象A
  - 出た目が偶数
    - 2, 4, 6
      - 余事象：1, 3, 5
        - » Aの円に入らないもの
- 事象B
  - 出た目が2
    - 2
      - 余事象：1, 3, 4, 5, 6
        - » Bの円に入らないもの
- 全事象
  - サイコロの目すべて
    - 1, 2, 3, 4, 5, 6



例題3-1　サイコロによる事象の例

- 事象A
  - 出た目が偶数
    - 2, 4, 6
      - 余事象：1, 3, 5
        - » Aの円に入らないもの
- 事象B
  - 出た目が2
    - 2
      - 余事象：1, 3, 4, 5, 6
        - » Bの円に入らないもの
- 全事象
  - サイコロの目すべて
    - 1, 2, 3, 4, 5, 6



正確なベン図は↑

事象Bは事象Aの部分集合である

（２）確率の公理

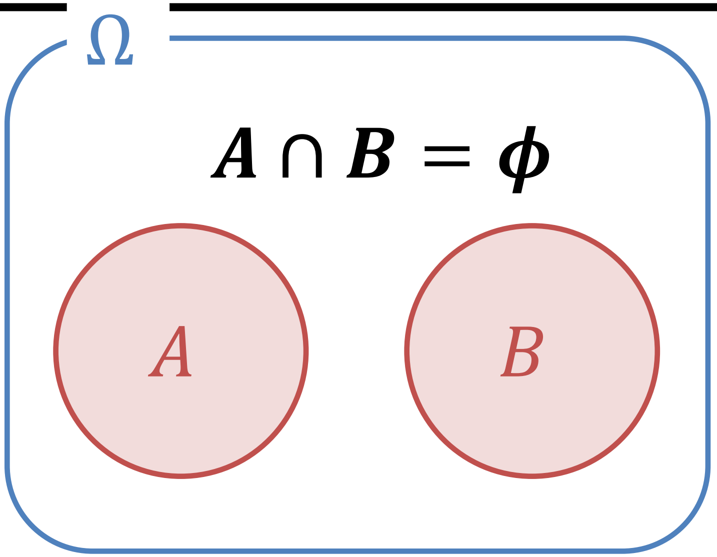
【！重要！】確率の公理

- 確率の公理（probability axioms）
  - 以下の性質を満たさないものは確率ではない

- Ⅰ 任意の事象Aに対して、$0 \le \Pr(A) \le 1$
  - 確率は必ず0から1の間の値
  - パーセント表示なら0%～100%
- Ⅱ $\Pr(\Omega) = 1$
  - 全事象の根元事象の合計は1（=100%）
- Ⅲ 事象Aと事象Bが排反$(A \cap B = \phi)$ならば、
  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$
  - 積事象が空事象であれば、和事象の確率は
    和事象を構成する事象の確率の和

【！重要！】確率の公理

- 確率の公理（probability axioms）
  - 以下の性質を満たさないものは確率ではない

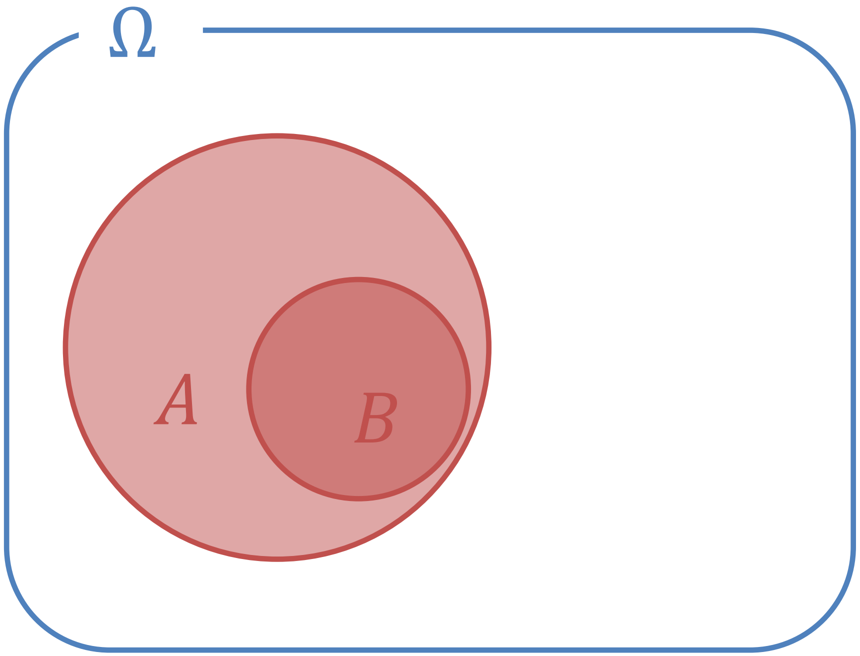


- Ⅲ 事象Aと事象Bが排反($A \cap B = \phi$)ならば、
  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$
  - 積事象が空事象であれば、和事象の確率は和事象を構成する事象の確率の和

確率の公理から導かれる定理１

- ① $\Pr(\phi) = 0$
  - 空事象はゼロ
- ② $\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$
  - （A以外の確率）＝（全体）-（Aの確率）
- ③ 事象Bが事象Aに含まれるならば
  $\Pr(B) \leq \Pr(A)$
- ④ $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

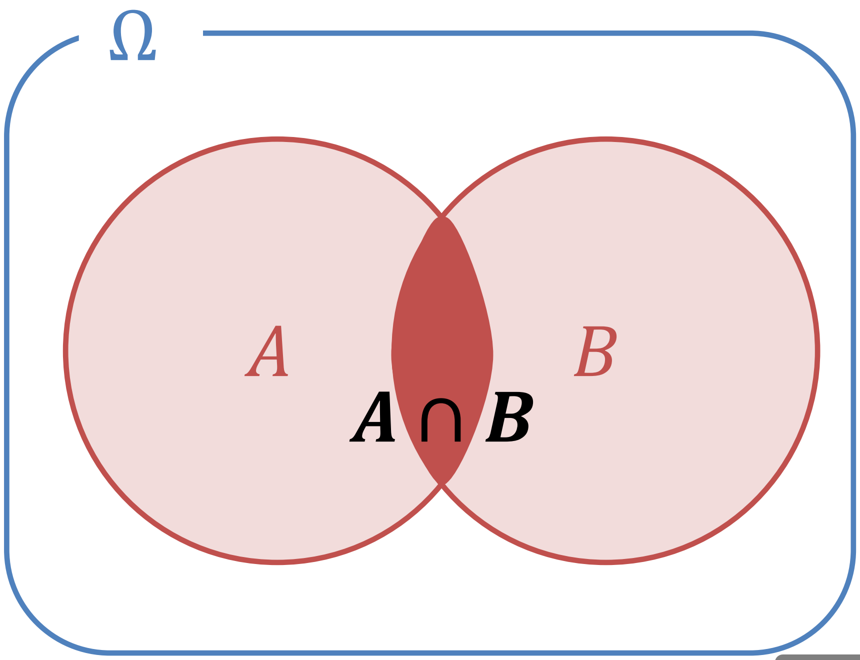
確率の公理から導かれる定理１



- ③ 事象Bが事象Aに含まれるならば
  $\Pr(B) \leq \Pr(A)$
  - 図で見ると一目瞭然

- ④ $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
  - 図でみるとわかりやすい
  - 薄い円A（$\Pr(A)$）と
    薄い円B（$\Pr(B)$）の合計から
    重複している
    濃色部分（$\Pr(A \cap B)$）
    を引く

確率の加法定理



（３）先験確率と経験確率

先験確率と経験確率

- 先験確率（事前確率）
  - 根元事象の可能性が同等であると考えて定義
    - 根元事象：　事象におけるひとつの要素
  - 事象に含まれる根元事象の数を計算して定義
  - 事象自体がまったくわからない場合は困難

- 経験確率（客観確率）
  - 試行の数を十分大きくしたときに
相対度数がある値に近づくならば
相対度数を確率として定義
    - 試行：　　　同じ条件のもとで繰り返し実験を行うこと
  - 試行できない場合や
事象がめったに起こらない場合は困難

先験確率と経験確率

- 先験確率（事前確率）
  - 根元事象の可能性が同等であると考えて定義
    - 根元事象：　事象におけるひとつの要素
  - 事象に含まれる根元事象の数を計算して定義
  - 事象自体がまったくわからない場合は困難

コイン投げ	
根元事象：	表、裏 ⇒２個
先験確率：	1/2

サイコロ	
根元事象：	1, 2, 3, 4, 5, 6 ⇒6個
先験確率：	1/6

先験確率と経験確率

コイン投げ（50回）	
【度数】	
表：27	裏：23
【相対度数】	
0.54	0.46

コイン投げ（20000回）	
【度数】	
表：9948	裏：10052
【相対度数】	
0.4974	0.5026

- 経験確率（客観確率）
  - 試行の数を十分大きくしたときに相対度数がある値に近づくならば相対度数を確率として定義
    - 試行：　　　同じ条件のもとで繰り返し実験を行うこと
  - 試行できない場合や事象がめったに起こらない場合は困難

公理・定理・定義のちがい

✍ 公理・定理・定義

公理

（一つの体系の中で）前提条件となる仮定

絶対的に正しい

証明は必要なし

定理

前提条件（公理）と定義に基づいて導き出されるもの

公理や定義から証明できる

定義

約束事

状況を用語や記号で表現したもの

a=1とする、など

公式

定理を数式で表現したもの

（４）条件付き確率

- 条件付き確率
  - 事象Aが起こった、という条件の下で事象Bが起こる確率

定義 1

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- 同時確率
  - 積事象の確率

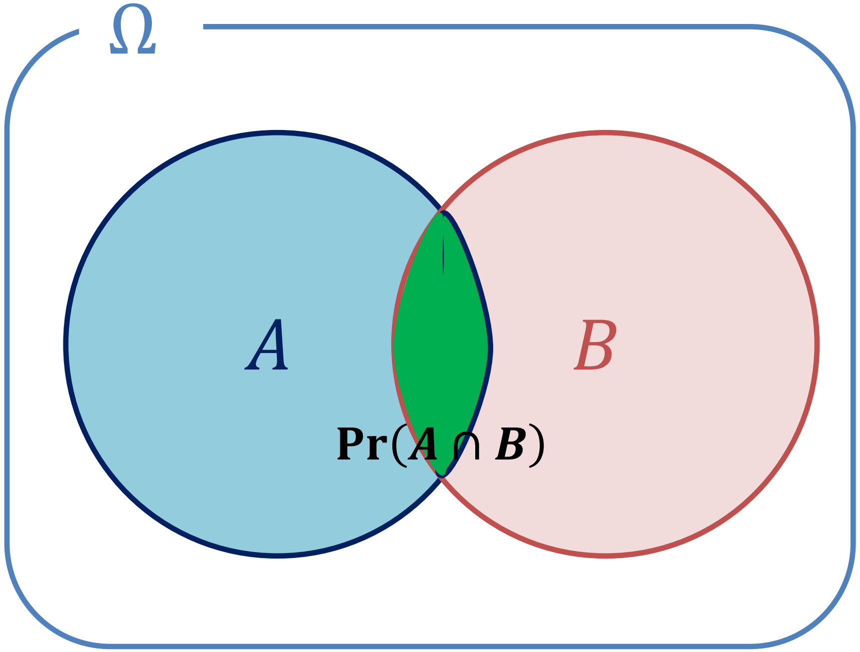
$$\Pr(A \cap B)$$

条件付き確率

- 条件付き確率
  - 事象Aが起こった、という条件の下で事象Bが起こる確率

定義 1

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$



確率の乗法定理

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- 確率の乗法定理

$$\Pr(B|A)\Pr(A) = \Pr(A \cap B)$$

定理２

  – 条件付き確率の右辺の分母を移項

定理３

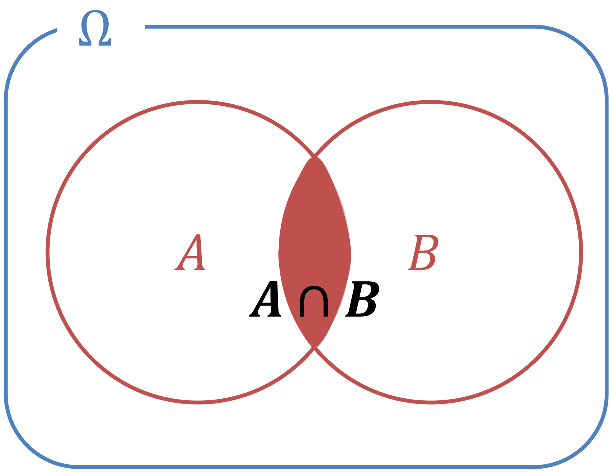
確率の乗法定理　$\Pr(B|A)\Pr(A) = \Pr(A \cap B)$

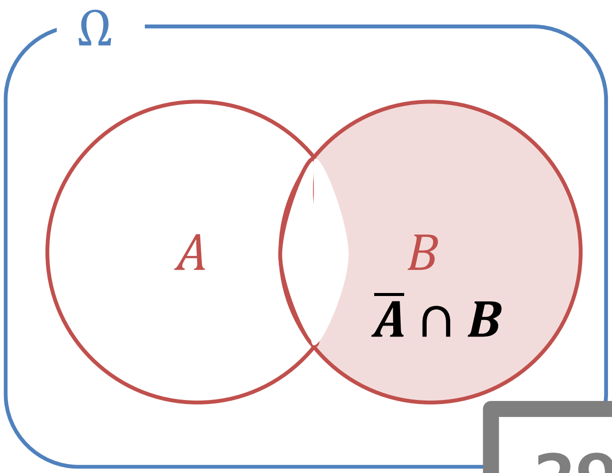
- 事象Bの確率の書き換え

定理３

$$\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(\bar{A} \cap B)$$
$$= \Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|\bar{A})\Pr(\bar{A})$$

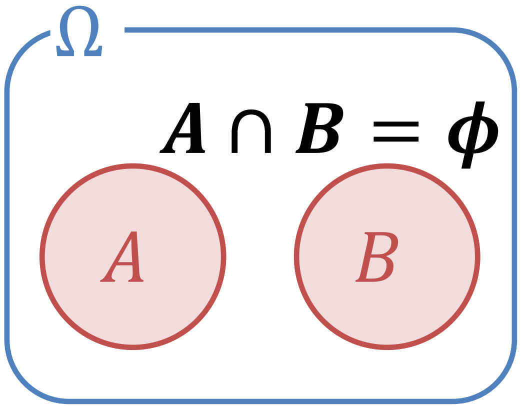
事象B（Bの円）を
２つに分けて
乗法定理を代入





（５）事象の独立性

事象の独立性



- 独立
  - 事象Bの起こる確率が
    事象Aの結果にまったく影響を受けない
  - 条件付き確率でない

- 事象Aと事象Bが独立のとき
  同時確率は積として表現できる

【条件付き確率】ってどんな状況？

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- サイコロを振り、出目を見逃した。
  友人によると、出目は偶数だったとのこと。
  出目が4以上である確率は？
  - 事象A：　偶数
  - 事象AとBの同時確率：　偶数かつ4以上

【条件付き確率】ってどんな状況？

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- サイコロを振り、出目を見逃した。
  友人によると、出目は偶数だったとのこと。
  出目が4以上である確率は？
  - 事象A：　偶数（2, 4, 6）
  - 事象AとBの同時確率：　偶数かつ4以上（4, 6）

【条件付き確率】ってどんな状況？

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- サイコロを振り、出目を見逃した。
  友人によると、出目は偶数だったとのこと。
  出目が4以上である確率は？
  - 事象A：　偶数（2, 4, 6）
  - 事象AとBの同時確率：　偶数かつ4以上（4, 6）
    - $\Pr(A) = \frac{3}{6}$
    - $\Pr(A \cap B) = \frac{2}{6}$
    - $\Pr(B|A) = \frac{2}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$

【条件付き確率】ってどんな状況？

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- 病気にかかっているか判定する検査
- 病気は10万人に1人が罹患
- 検査の判定が間違っている確率は1%(=0.01)
  - 病気なのに陰性反応が出る
  - 病気でないのに陽性反応が出る
- 検査で陽性反応が出たとき
  あなたが本当に罹患している確率は？
  - 事象A：　陽性反応が出る
  - 同時確率：本当に罹患していて、検査が正しい

【条件付き確率】ってどんな状況？

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- 事象A
  - 陽性反応が出る
    - 本当に罹患していて、検査が正しい
      - (0.00001×0.99)
    - 罹患していないのに、検査が誤る
      - (0.99999×0.01)

$$\Pr(A) = (0.00001 * 0.99) + (0.99999 * 0.01)$$
$$= 0.0000099 + 0.0099999 = 0.0100098$$

【条件付き確率】ってどんな状況？

条件付き確率　事象Aが起こった条件下で事象Bが起こる確率

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

- 同時確率
  - 本当に罹患していて、検査が正しい
    - 本当に罹患していて、検査が正しい
      - $\Pr(A \cap B) = (0.00001 \times 0.99)$

$$\Pr(B|A) = \frac{0.0000099}{0.0100098} = 0.000989 \ldots = 0.1\%$$

確率変数の定義

（１）確率変数の定義

確率変数の定義

- 確率変数
  - 変数の概念に確率が加わったもの
    - サイコロの出た目
      - 偶然性を伴って生じる結果
  - 観測値に確率が対応している変数のこと
    - 変数
      - 観測値の集合

確率変数の定義

- 確率変数

$$X = X(\omega)$$

  - ω：事象を表す
  - 変数が離散変数のとき、確率変数は離散確率変数

- コイン投げの事例
  - 確率変数　　$X = \{1, 0\}$

$$X(\omega) \begin{cases} 1\ \omega\text{:表}\ \Pr(X = 1) = \dfrac{1}{2} \\ 0\ \omega\text{:裏}\ \Pr(X = 0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

例題3-2

- サイコロの出た目⇒　確率変数
  X={1, 2, 3, 4, 5, 6}

  – 先験確率で考えると…

- $X(\omega) = \begin{cases} 1 \ldots \omega: 1\text{の目} \ldots \Pr(X = 1) = \frac{1}{6} \\ 2 \ldots \omega: 2\text{の目} \ldots \Pr(X = 2) = \frac{1}{6} \\ \ldots \end{cases}$

問題3-2

- コイン投げの事例⇒　確率変数
- コインを3回投げたとき表が出た回数

  X={0, 1, 2, 3}

  – コイン投げの結果は、
    前の回の影響を受けないので【独立】

    [定理4]から

  – 確率…3回のコイン投げの積として表現できる
    - 例：表が0回のとき
    - $(1回目裏) * (2回目裏) * (3回目裏) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$

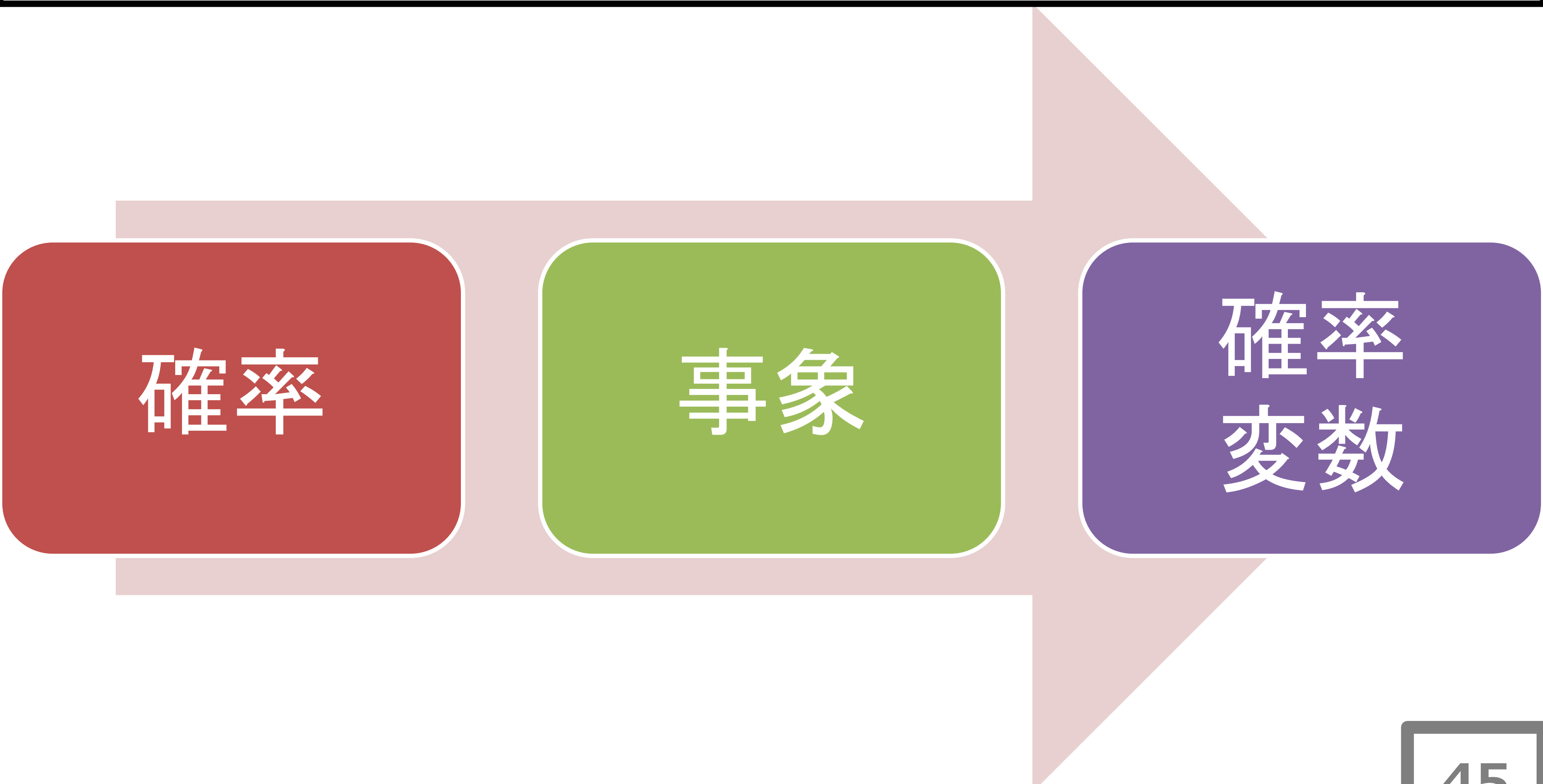
問題3-2

- コイン投げの事例⇒　確率変数
- コインを3回投げたとき表が出た回数
  X={0, 1, 2, 3}

  - 確率…3回のコイン投げの積として表現できる
    - 例：表が2回のとき
      - $(1回目表) * (2回目表) * (3回目裏) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$
      - $(1回目表) * (2回目裏) * (3回目表) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$
      - $(1回目裏) * (2回目表) * (3回目表) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$
    - $X(2) = 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 * \frac{1}{8} = 0.375$

確率変数

- 確率変数は、事象を介して確率を付与された変数



（３）確率変数の例

母集団を無限母集団と想定すると

- **確率変数Xの分布（確率分布）は、母集団の分布**を表している
  - 実際には確率分布はわからないことが一般的なので
    実験や調査が必要になる

- コイン投げで表がでる比率を考えると
  - コイン投げ（試行）が無限に実行できる
  ⇒無限母集団から標本を抽出していることと同じ

- 観測値x
  - 実際にコイン投げをしたときに表の出た回数
  - 標本における統計値（データ）
- 確率$\Pr(X = x)$
  - 確率変数Xが観測値xをとる確率

母集団を有限母集団と想定すると

- 母集団の分布が分かっている場合を想定する

来店頻度 k	度数 f_k	相対度数 $\frac{f_k}{N}$	確率変数 X	確率 $\Pr(X = x)$
0	2662	0.13	0	0.13
1	5411	0.27	1	0.27
2	5461	0.27	2	0.27
3	3589	0.18	3	0.18
4	1836	0.09	4	0.09
5	713	0.04	5	0.04
6	232	0.01	6	0.01
7	96	0.00	7	0.00
総数	20000	1	総数	1

- 相対度数を確率とする（経験確率）
  - 来店頻度kを確率変数Xと考えることができる
- 母集団からランダムに1人を抽出したとき
  - [来店頻度0回/週]の人が抽出される確率 ⇒ 0.13

第3章のまとめ

- 確率の公理
  - 【確率の公理】を満たさないものは確率ではない
    - 0から1の間
    - 全部足したら1
    - AとBが排反ならば$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$
- 先験確率と経験確率
  - 先験確率
    - 根元事象の確率が同等であると定義
    - 事象自体が不明な場合は困難
  - 経験確率
    - 相対度数を確率として定義
    - 試行できない場合やめったに起こらない場合は困難
- 確率変数
  - 確率が付与された変数