統計学 ch10_解答

今日やること	母分散の区間推定について学びます。 F分布の性質とF分布にしたがう統計量を理解します。

pp.117　母分散の区間推定

二項　分布
標本の大きさnが大きいとき 正規　分布に近似

↓

正規　分布
標本の大きさnが大きいとき 和　の分布は 正規　分布に近似 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0,1)$

→

t　分布
標準正規　分布に したがう統計量と カイ二乗　分布に したがう統計量（独立）の 比に関する確率分布 $T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X^2}}{n}}} \sim t(n-1)$

↓
↓
↓
↓

カイ二乗　分布
標準正規　分布に したがう統計量の 平方和　に関する確率分布 $U = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$

→

F　分布
カイ二乗　分布に したがう統計量（独立）の 比に関する確率分布 $F = \frac{\widehat{\sigma_1^2}}{\widehat{\sigma_2^2}} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Memo

pp.118　母分散の区間推定

自由度 n-1 の カイ二乗 分布

※　母分散を含む統計量

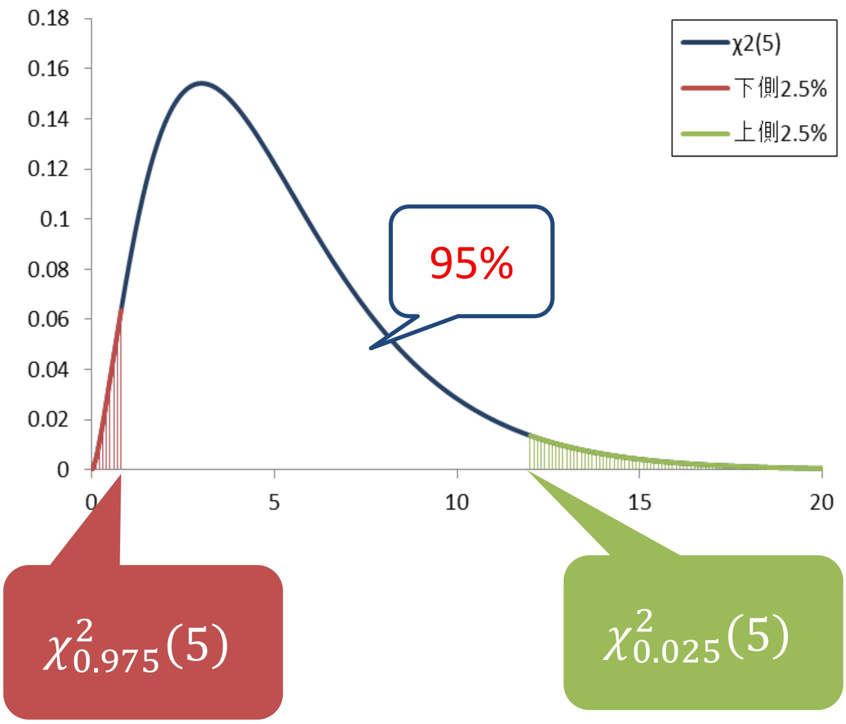
$$U = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\sum (x_i - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{n(\bar{x} - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}$$

$\sim\chi^2(n)$	$\sim\chi^2(n-1)$	$\sim\chi^2(1)$
自由度 n の カイ二乗分布	自由度 n-1 の カイ二乗分布	自由度 1 の カイ二乗分布

※　赤文字は未知　　↑母分散のみを含む統計量（＝U）

カイ二乗分布は自由度が小さいと 左右非対称



pp.120　母分散の95%信頼区間

$$\Pr\left(\chi^2_{0.975}(n-1) < U < \chi^2_{0.025}(n-1)\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)} < \sigma_x^2 < \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{\text{偏差平方和}}{\text{カイ二乗統計量}0.025} < \sigma_x^2 < \frac{\text{偏差平方和}}{\text{カイ二乗統計量}0.975}\right)$$

※　下限値　　※　上限値

pp.123　母分散の区間推定に関する計算

問題10-1　5社を無作為抽出してROAを調べた結果

i	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	5.6	0.2	0.04
2	5.2	-0.2	0.04
3	3.2	-2.2	4.84
4	4.6	-0.8	0.64
5	8.4	3	9
合計	27	0	14.56
平均値	5.4		

母分散の95%信頼区間を求める

標本数n	5
自由度n-1	4

カイ二乗97.5%点 $\chi^2_{0.975}$	0.4844
カイ二乗2.5%点　$\chi^2_{0.025}$	11.1433

※　カイ二乗分布表から数値を読み取る

標本平均　$\bar{x}$	5.4
偏差平方和　$\sum(x_i-\bar{x})^2$	14.56

これらの数値を公式に代入して下限値，上限値を計算する

$$(1.3066\ \ ,29.8544)$$

下限値：14.56/11.1433　　上限値：14.56/0.4844

pp.124　F分布

F分布

※ カイ二乗分布にしたがう2つの独立な確率変数の比に関する確率分布

※ 自由度を 2 個もつ

※ 左右 非対称

$$F = \frac{\frac{\widehat{\sigma_1^2}}{\sigma_1^2}}{\frac{\widehat{\sigma_2^2}}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

等分散性

※ 2つの 母分散 が等しい仮定

※ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

※ 等分散の仮定のもとでのみ以下も成り立つ

$$F_0 = \frac{\widehat{\sigma_1^2}}{\widehat{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Memo

今日の講義のまとめ

母分散の区間推定

母分散を含む統計量に基づいて行う

信頼係数 confidence coefficient

信頼区間 confidence interval

（下限 , 上限）

95%信頼区間

信頼係数95%の信頼区間を、95%信頼区間ともいう

ランダムな標本抽出を100回繰り返し行って

信頼区間を100回計算するとき

区間内に母分散を含むものは100回中95回程度になる区間

$$\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{0.025}},\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{\chi^2_{0.975}}\right)$$

Memo