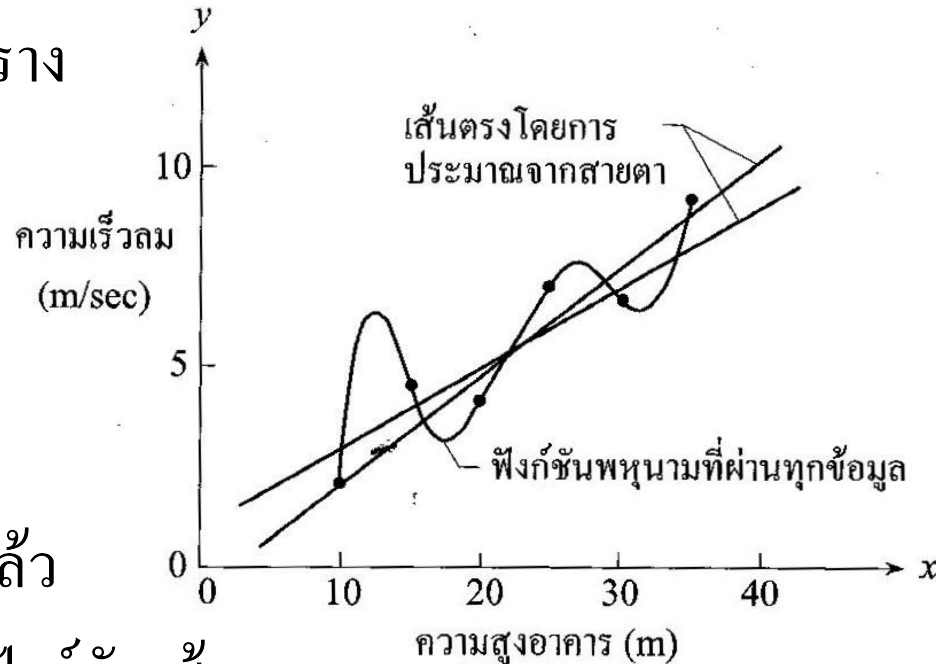
การถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด

182 302 Numerical Methods

Introduction

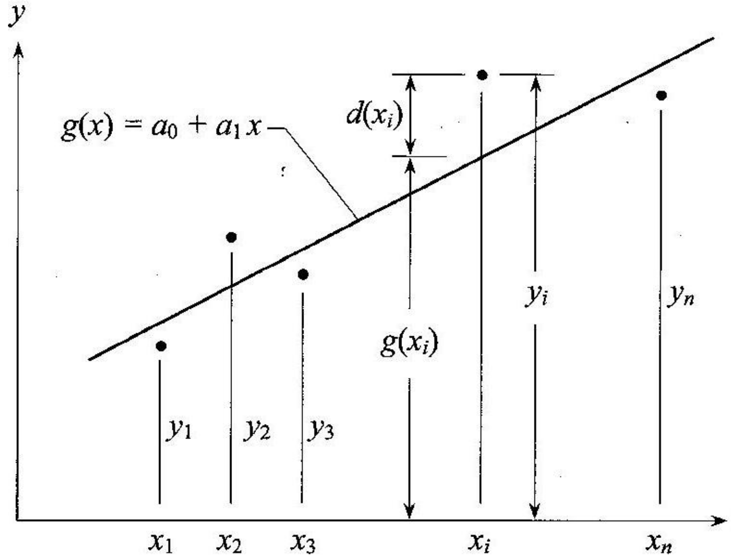
ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง หากจะนำไปใช้ต่อไปจะต้องมีการนำมาหาค่าความสัมพันธ์เสียก่อน ตัวอย่างเช่นการทดลองวัดความเร็วลมที่ความสูงของตึกในระดับความสูงต่าง ๆ ได้ดังตาราง

ความสูงอาคาร, x (m)	ความเร็วลม, y (m/sec)
10	2.2
15	4.6
20	4.2
25	7.0
30	6.6
35	9.2



จากข้อมูลเราอาจใช้ความรู้ในบทที่แล้วในการสร้างฟังก์ชันหรือจะลากเป็นฟังก์ชันเส้นตรง

การถดถอยแบบเชิงเส้น



วิธีการ linear regression เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการประมาณฟังก์ชัน จากรูปเราจะมีข้อมูล $x_i, y_i, i=1, 2, 3, \ldots, n$

เป้าหมายคือเราจะสร้างฟังก์ชัน $$g(x) = a_0 + a_1 x \qquad [1]$$

สมมติว่า $g(x)$ ในรูปคือฟังก์ชันที่ได้ซึ่งจะมีความผิดพลาดจาก y_i เท่ากับ $d(x_i)$ ดังนั้นค่าความผิดพลาดทั้งหมดคือ

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[d(x_i) \right]^2 \qquad [2]$$

เรายกกำลังสอง $d(x_i)$ เนื่องจากต้องการกำจัดค่าลบ เราอาจเขียนในอีกรูปคือ

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - g(x_i) \right]^2 \qquad [3]$$

การถดถอยแบบเชิงเส้น

เมื่อแทนค่าด้วย [1] ที่ตำแหน่ง $x = x_i$ จะได้

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i \right) \right]^2 \qquad [4]$$

วิธีการ least square คือการหาความผิดพลาดต่ำสุดของตัวที่เกี่ยวข้อง

คือ $\dfrac{\partial E}{\partial a_0} = 0$ [5.1] $\dfrac{\partial E}{\partial a_1} = 0$ [5.2]

จาก [5.1] $\dfrac{\partial E}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i \right) \right] (-1) = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0$$

$$n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad [6.1]$$

การถดถอยแบบเชิงเส้น

ส่วน [5.2]

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i\right)\right]\left(-x_1\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad [6.2]$$

จาก [6.1] และ [6.2] เขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{Bmatrix} \qquad [6.3]$$

จาก [6.3] เราสามารถหา a_0 และ a_1 ได้ดังนี้

การถดถอยแบบเชิงเส้น

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad [6.4]$$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad [6.5]$$

ค่า a_0 และ a_1 เมื่อนำกลับไปแทนใน [1] ก็จะได้สมการเชิงเส้นที่ประมาณค่าจุดทั้งหมด

ตัวอย่าง

จากตารางจงคำนวณหาสมการเส้นตรงโดย

linear regression

ความสูงอาคาร, x (m)	ความเร็วลม, y (m/sec)
10	2.2
15	4.6
20	4.2
25	7.0
30	6.6
35	9.2

- หา a_0 และ a_1

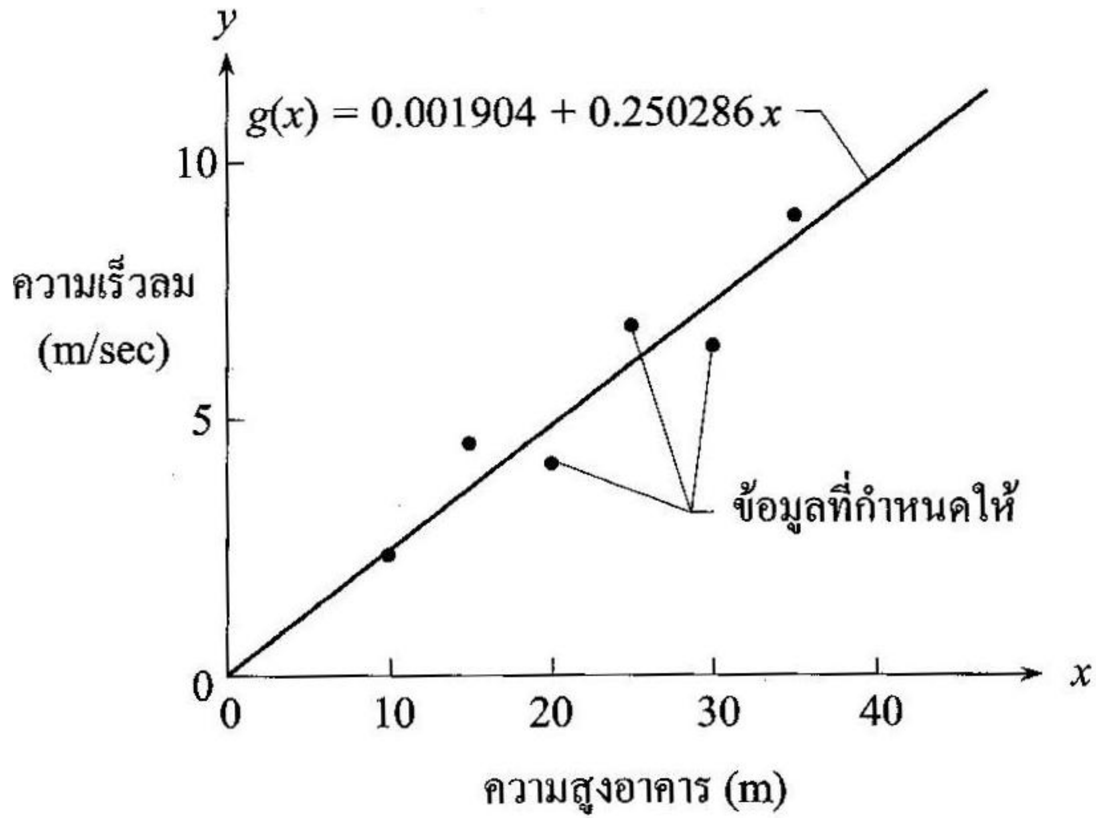
$$a_0 = \frac{(33.8)(3,475)-(870)(135)}{6(3,475)-(135)^2} = \frac{5}{2,625} = 0.001904$$

$$a_1 = \frac{6(870)-(135)(33.8)}{6(3,475)-(135)^2} = \frac{657}{2,625} = 0.250286$$

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	10	2.2	100	22
	15	4.6	225	69
	20	4.2	400	84
	25	7.0	625	175
	30	6.6	900	198
	35	9.2	1,225	322
Σ	135	33.8	3,475	870

ตัวอย่าง

จะได้สมการ $g(x) = 0.001904 + 0.250286x$



การประยุกต์การถดถอยแบบเชิงเส้นกับข้อมูลไม่เชิงเส้น

ในบางครั้งลักษณะของชุดข้อมูลไม่เป็นเชิงเส้น เราจะประมาณได้ใน

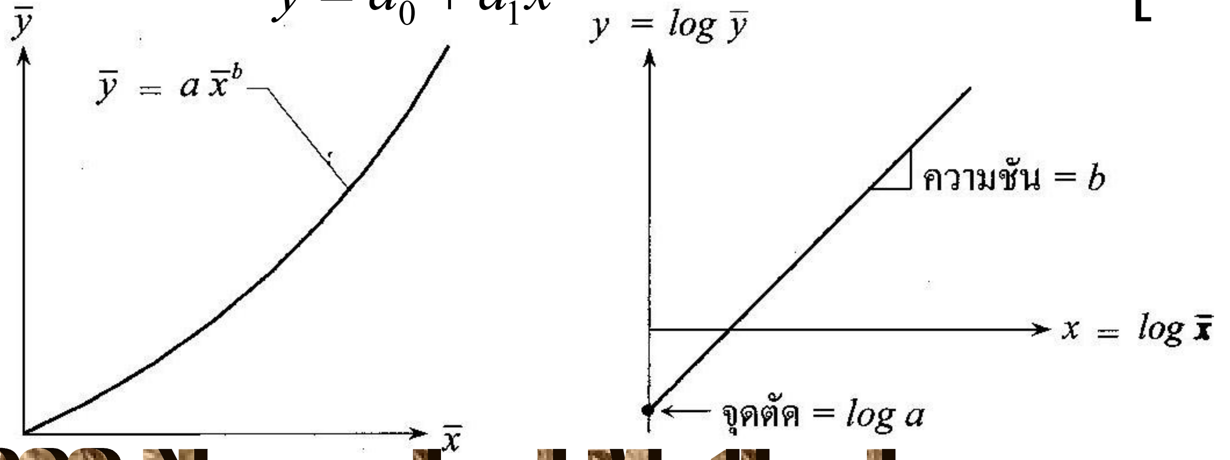
ลักษณะของสมการกำลัง $\bar{y} = a\bar{x}^b$ [7]

รูปแบบของ [7] เราสามารถประยุกต์ให้เป็นสมการเส้นตรงได้เป็น

$$\log \bar{y} = \log a + b \log \bar{x} \qquad [8.1]$$

ซึ่งสามารถปรับให้เป็นสมการเส้นตรง

$$y = a_0 + a_1 x \qquad [8.2]$$



$\bar{x}$	$\bar{y}$
1	0.1
2	0.7
3	0.9
4	1.7
5	2.1

ตัวอย่าง

จากข้อมูลในตารางจงประยุกต์ linear regression เพื่อประมาณเป็นสมการกำลัง $\bar{y} = a\bar{x}^b$

- แปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบ log และอื่น ๆ จะได้ตาราง

$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$x_i = \log \bar{x}_i$	$y_i = \log \bar{y}_i$	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.1	0.000	-1.000	0.000	0.000
2	0.7	0.301	-0.155	0.091	-0.047
3	0.9	0.477	-0.046	0.228	-0.022
4	1.7	0.602	0.230	0.362	0.138
5	2.1	0.699	0.322	0.489	0.225
	Σ	2.079	-0.649	1.170	0.294

หา a_0 และ a_1

$$a_0 = \frac{(-0.649)(1.170)-(0.294)(2.079)}{5(1.170)-(2.079)^2} = \frac{-1.371}{1.528} = -0.897$$

$$a_1 = \frac{5(0.294)-(2.079)(-0.649)}{5(1.170)-(2.079)^2} = \frac{2.819}{1.528} = 1.845$$

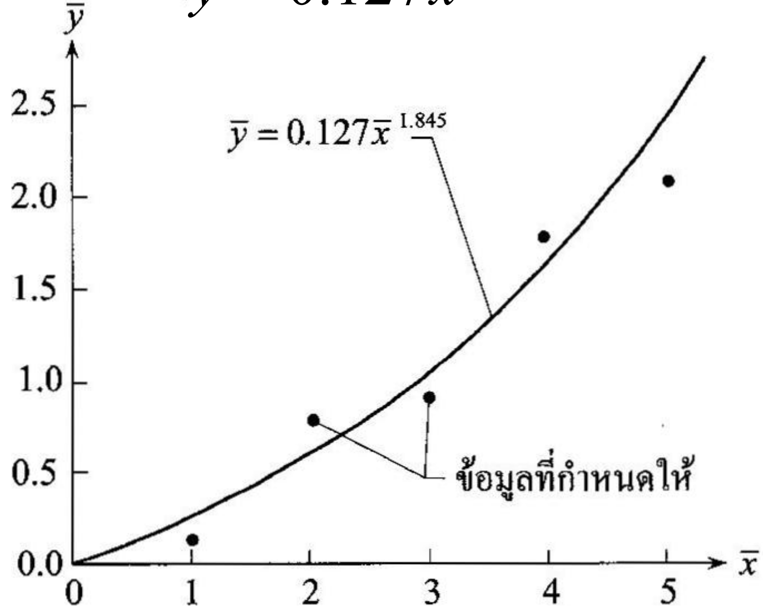
ตัวอย่าง

จากข้อมูลจะได้สมการ $y = -0.897 + 1.845x$

คำนวณหาความสัมพันธ์กลับ $a_0 = \log a \rightarrow a = 0.127$

$a_1 = b = 1.845$

สมการกำลังคือ $\overline{y} = 0.127\overline{x}^{1.845}$

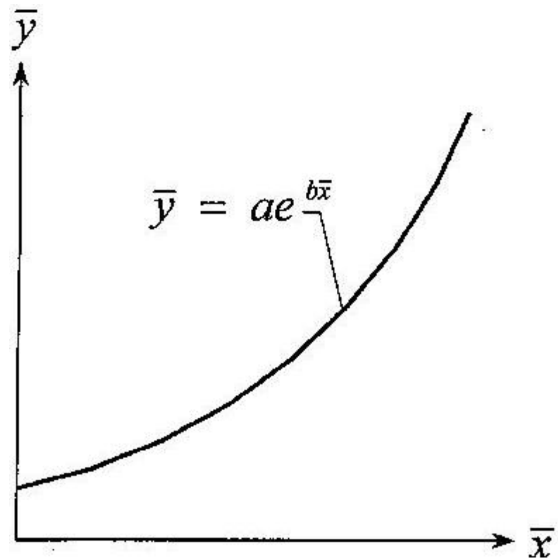


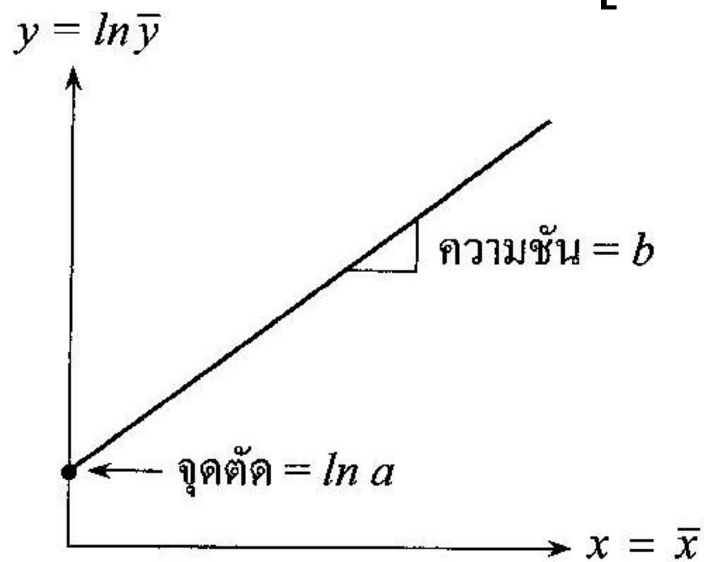
การประยุกต์การถดถอยแบบเชิงเส้นกับข้อมูลไม่เชิงเส้น

เราประยุกต์ linear regression กับสมการ exponential ได้เช่นกัน โดยที่ $\bar{y} = ae^{b\bar{x}}$ [9]

take log สมการ $\ln \bar{y} = \ln a + b\bar{x} \ln e = \ln a + b\bar{x}$ [9.1]

รูปแบบของสมการเชิงเส้น $y = a_0 + a_1 x$ [9.2]





การประยุกต์การถดถอยแบบเชิงเส้นกับข้อมูลไม่เชิงเส้น

สมการอีกรูปแบบหนึ่งที่สามารถนำมาประยุกต์ได้คือสมการอัตราการเพิ่มสู่จุดอิ่มตัวมีรูปแบบเป็น

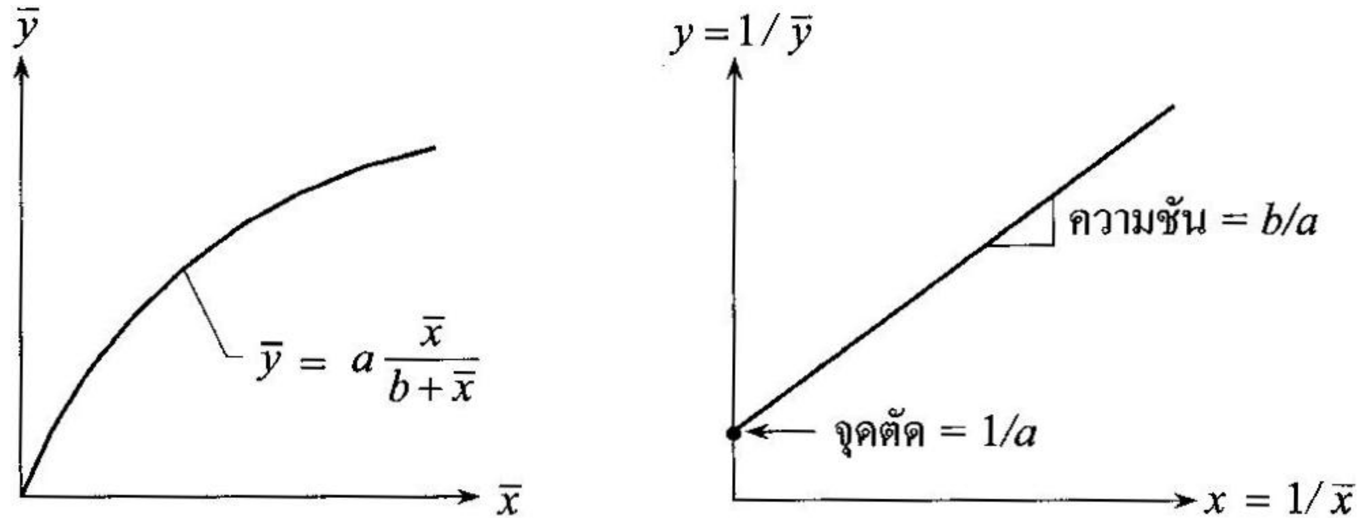
$$\bar{y} = a\frac{\bar{x}}{b+\bar{x}} \qquad [10]$$

หรือ

$$\frac{1}{\bar{y}} = \frac{b+\bar{x}}{a\bar{x}} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\frac{1}{\bar{x}} \qquad [10.1]$$

สมการเชิงเส้น

$$y = a_0 + a_1 x \qquad [10.2]$$



การถดถอยแบบพหุนาม

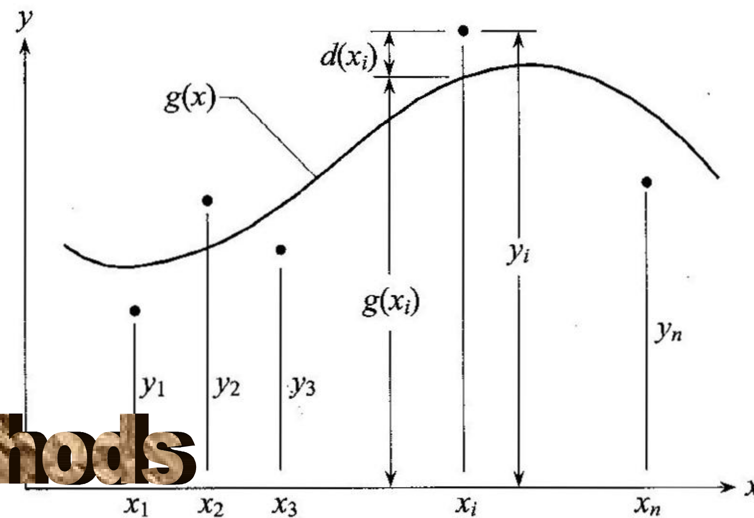
วิธีการ polynomial regression เป็นวิธีใช้ประมาณฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูปแบบของสมการพหุนาม ถ้าเรามีข้อมูล n ข้อมูล (เราทราบ x_i, y_i, $i=1,2,\ldots,n$) เราจะสร้างสมการพหุนามอันดับ m กรณีนี้

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \qquad [11]$$

เราต้องหา $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ เพื่อให้ได้สมการที่มีความผิดพลาด E น้อยที่สุด โดยที่เราหาจาก

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[d(x_i) \right]^2 \qquad [12]$$

หากเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม



การถดถอยแบบพหุนาม

จะได้ $$E = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - g\left(x_i\right)\right]^2 \qquad [12.1]$$

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m\right)\right]^2 \qquad [12.2]$$

เพื่อที่จะหาค่าของ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ จำนวน $m+1$ ตัว จะหาจาก

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= 0 \\ \vdots\quad & \quad\vdots \\ \frac{\partial E}{\partial a_m} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad m+1 \text{ สมการ} \qquad [12.3]$$

การถดถอยแบบพหุนาม

ตัวอย่างเช่น [12.3] สมการแรกจะได้ว่า

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m\right)\right](-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^2 - \ldots - \sum_{i=1}^{n} a_m x_i^m = 0$$

$$n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) a_m = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad [12.4]$$

สมการที่ 2

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m\right)\right](-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^3 - \ldots - \sum_{i=1}^{n} a_m x_i^{m+1} = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right) a_m = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad [12.5]$$

การถดถอยแบบพหุนาม

สมการอื่นก็จะให้ผลคล้ายกัน ดังนั้นจึงตั้งเป็นระบบสมการได้ว่า

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{Bmatrix} \quad [12.6]$$

โดยที่ [12.6] เป็นระบบสมการที่เราเคยเรียนในบทที่ 3

ตัวอย่าง

จากข้อมูลในตารางจงประยุกต์ polynomial regression เพื่อประมาณเป็นสมการพหุนามอันดับ 3

T	c_p	T	c_p
0	1.00762	55	0.9991
5	1.00392	60	0.9996
10	1.00153	65	1.0002
15	1.00000	70	1.0009
20	0.99907	75	1.0016
25	0.99852	80	1.0025
30	0.99826	85	1.0035
35	0.99818	90	1.0046
40	0.99828	95	1.0058
45	0.99849	100	1.0072
50	0.99878		

- จากข้อมูลในตารางสามารถหาค่าได้เป็น

$$n = 21 \qquad \sum_{i=1}^{21} x_i = 1,050 \qquad \sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 71,750 \qquad \sum_{i=1}^{21} x_i^3 = 5,512,500$$

$$\sum_{i=1}^{21} x_i^4 = 451,666,200 \qquad \sum_{i=1}^{21} x_i^5 = 38,541,560,000 \qquad \sum_{i=1}^{21} y_i = 21.02805$$

$$\sum_{i=1}^{21} x_i^6 = 3,382,122,000,000 \qquad \sum_{i=1}^{21} x_i y_i = 1,051.999$$

$$\sum_{i=1}^{21} x_i^2 y_i = 71,951.41 \qquad \sum_{i=1}^{21} x_i^3 y_i = 5,531,869$$

ตัวอย่าง

จากข้อมูลนำมาตั้งเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 0.2100000E+02 & 0.1050000E+04 & 0.7175000E+05 & 0.5512500E+07 \\ 0.1050000E+04 & 0.7175000E+05 & 0.5512500E+07 & 0.4516662E+09 \\ 0.7175000E+05 & 0.5512500E+07 & 0.4516662E+09 & 0.3854156E+11 \\ 0.5512500E+07 & 0.4516662E+09 & 0.3854156E+11 & 0.3382122E+13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.2102805E+02 \\ 0.1051999E+04 \\ 0.7195141E+05 \\ 0.5531869E+07 \end{Bmatrix}$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$a_0 = 1.006448 \qquad a_1 = -4.988565 \times 10^{-4}$$

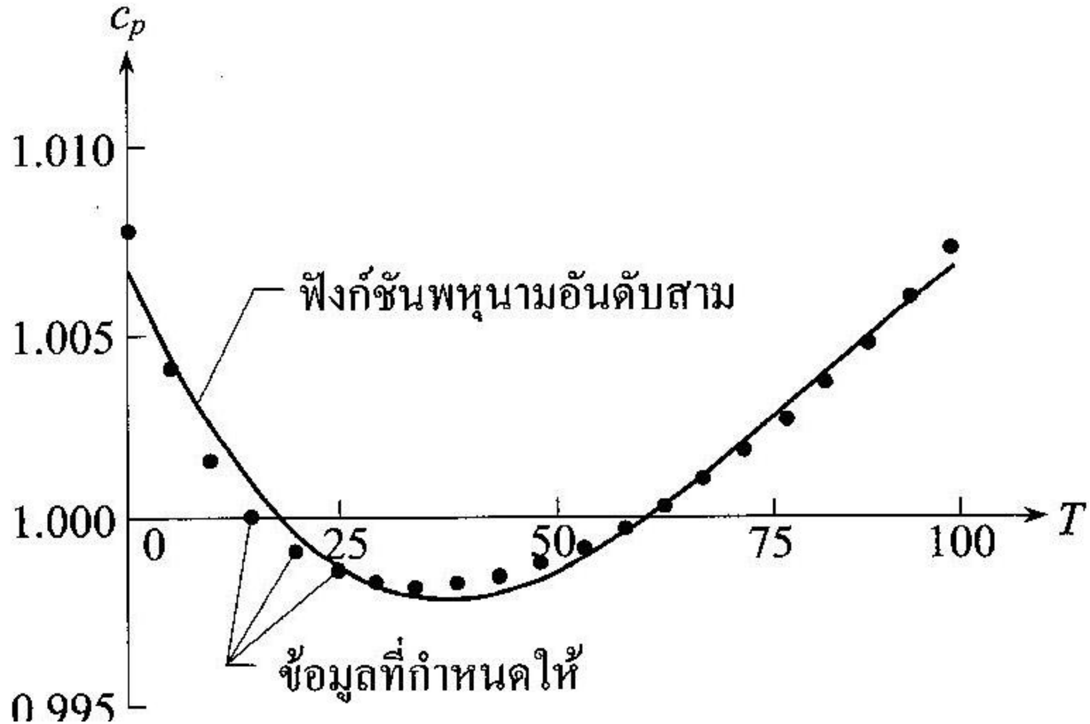
$$a_2 = 8.460584 \times 10^{-6} \qquad a_3 = -3.457691 \times 10^{-5}$$

ตัวอย่าง

ดังนั้นสมการพหุนามคือ

$$c_p = 1.006448 - 4.988565\times10^{-4}T + 8.460584\times10^{-6}T^2 - 3.457691\times10^{-5}T^3$$

เมื่อนำสมการมาพล๊อตกราฟจะได้เป็น



การถดถอยแบบหลายเชิง

ในกรณีที่ค่าของฟังก์ชันเกิดจากตัวแปรหลายตัว ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$y = y\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\right) \qquad [13]$$

การทำ regression สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรก็จะคล้ายกันกับการหาฟังก์ชันตัแปรเดียว คือสามารถทำเป็นฟังก์ชันแบบ

- เชิงเส้น
- พหุนาม

การถดถอยแบบหลายเชิง – เชิงเส้น

- การถดถอยแบบหลายเชิง - เชิงเส้น

ในกรณีนี้เราจะประมาณข้อมูลเป็นรูปแบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

$$g = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_k x_k \qquad [14]$$

ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าคือ $a_j, j = 0,1,2,\ldots,k$ จำนวน $k+1$ ตัวที่ต้องหาค่า โดยวิธี least square สมการความผิดพลาดจะเท่ากับ

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_k x_k \right) \right]^2 \qquad [14.1]$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ E เทียบกับตัวไม่รู้ค่า a_j ก็จะทำให้เกิดสมการ จำนวน $k+1$ สมการ

การถดถอยแบบหลายเชิง – เชิงเส้น

- การถดถอยแบบหลายเชิง - เชิงเส้น

ในกรณีนี้เราจะประมาณข้อมูลเป็นรูปแบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

$$g = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_k x_k \qquad [14]$$

ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าคือ $a_j, j = 0,1,2,\ldots,k$ จำนวน $k+1$ ตัวที่ต้องหาค่า โดยวิธี least square สมการความผิดพลาดจะเท่ากับ

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_k x_k \right) \right]^2 \qquad [14.1]$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ E เทียบกับตัวไม่รู้ค่า a_j ก็จะทำให้เกิดสมการจำนวน $k+1$ สมการ