

圏論

me

2024年8月17日

1 予備知識

Def. 1.1. 単射, 全射, 同型

1. $f : A \rightarrow B \in \text{Mor } \mathcal{C}$ が単射であるとは,
 $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \forall g, h : X \rightarrow A. f \circ g = f \circ h \implies g = h$
2. $f : A \rightarrow B \in \text{Mor } \mathcal{C}$ が全射であるとは,
 $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \forall g, h : B \rightarrow X. g \circ f = h \circ f \implies g = h$
3. $f : A \rightarrow B \in \text{Mor } \mathcal{C}$ が同型であるとは,
 $\exists g : B \rightarrow A. \text{st. } g \circ f = \text{id}_A, f \circ g = \text{id}_B$

Rem. 1.2. 図でイメージしよう.

単射: 左の射が一意

$$X \xrightarrow[g]{g} A \xrightarrow{f} B = X \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

全射: 右の射が一意

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow[g]{g} X = A \xrightarrow{f} B \longrightarrow X$$

Rem. 1.3. 集合論的な意味で雰囲気をとらえよう.(集合論の教科書を読めば厳密に書いてある)

単射であれば, 元の行き先が等しいときに, もとの元も等しいので $f(g(x)) = f(h(x)) \implies g(x) = h(x)$ となる.(実は逆も成り立つ) 圏においてはこれを単射の定義としてしまおうというわけです.

また全射であれば, 元の行き先が codomain をすべて埋め尽くすので $f(x)$ は B の元をすべて表せる. よって $g(f(x)) = h(f(x))$ の時 g, h の中身は B の任意の元とみなせる. よって $g = h$ となる.(逆も成り立つ) 単射と同様に, これを全射の定義としてしまうのです.

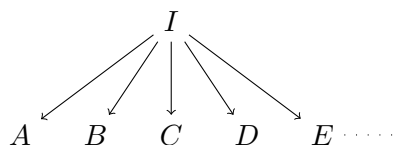
Def. 1.4. 始対象 (initial object)

圏 \mathcal{C} において, $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ が始対象であるとは,

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \exists ! f : I \longrightarrow X$$

である.

Rem. 1.5. 次の図のように I からすべての対象に 1 本の射があるもの.



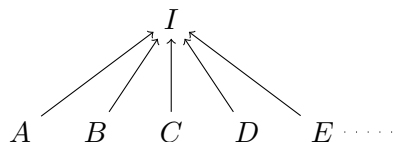
Def. 1.6. 終対象 (final object)

圏 \mathcal{C} において, $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ が終対象であるとは,

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \exists ! f : X \longrightarrow I$$

である.

Rem. 1.7. 次の図のように I に向かってすべての対象から 1 本の射があるもの.



Def. 1.8. 零対象 (zero object)

圏 \mathcal{C} において, $O \in \text{Ob } \mathcal{C}$ が零対象であるとは, O が始対象であり, かつ終対象であること.

Def. 1.9. 零射 (zero morphism)

$A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ に対し, 合成 $A \longrightarrow O \longrightarrow B$ を零射といい, 0 で表す.

2 アーベル圏

Def. 2.1. アーベル圏

\mathcal{A} がアーベル圏であるとは, 次の条件を満たすことである.

1. \mathcal{A} はゼロ対象を持つ
2. 任意の $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に対して積と和 $\mathcal{A}_1 \amalg \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1 \coprod \mathcal{A}_2$ が存在する.
3. \mathcal{A} の任意の射に \ker, coker が存在する.
4. \mathcal{A} の任意の単射はある射の \ker で, 任意の全射はある射の coker である.

Lem. 2.2. \mathcal{A} をアーベル圏とする. \mathcal{A} における射 $f : A \longrightarrow B$ に対し,

- f が単射 $\implies f \simeq \ker(\operatorname{coker} f)$
- f が全射 $\implies f \simeq \operatorname{coker}(\ker f)$

が成り立つ.

