圏論

me

2024 年 8 月 17 日

1　予備知識

Def. 1.1. 単射, 全射, 同型

1. $f : A \longrightarrow B \ \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ が単射であるとは,
   $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}.\ \forall g, h :\ X \longrightarrow A.\ f \circ g = f \circ h \implies g = h$
2. $f : A \longrightarrow B \ \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ が全射であるとは,
   $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ \forall g, h :\ B \longrightarrow A. g \circ f = h \circ f \implies g = h$
3. $f : A \longrightarrow B \ \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ が同型であるとは,
   $\exists g : B \longrightarrow A.\ st.\ g \circ f = \mathrm{id}_A,\ f \circ g = \mathrm{id}_B$

Rem. 1.2. 図でイメージしよう.
単射: 左の射が一意

$$X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\quad f \quad} B \qquad = \qquad X \xrightarrow{\qquad} A \xrightarrow{\quad f \quad} B$$

全射: 右の射が一意

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \qquad = \qquad A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\qquad} X$$

Rem. 1.3. 集合論的な意味で雰囲気をとらえよう.(集合論の教科書を読めば厳密に書いてある)
単射であれば, 元の行き先が等しいときに, もとの元も等しいので $f(g(x)) = f(h(x)) \implies g(x) = h(x)$ となる.(実は逆も成り立つ) 圏においてはこれを単射の定義としてしまおうというわけです.
また全射であれば, 元の行き先が codomain をすべて埋め尽くすので $f(x)$ は B の元をすべて表せる. よって $g(f(x)) = h(f(x))$ の時 g, h の中身は B の任意の元とみなせる. よって $g = h$ となる. (逆も成り立つ) 単射と同様に, これを全射の定義としてしまうのです.

Def. 1.4. 始対象 (initial object)
圏 $\mathcal{C}$ において,$I \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ が始対象であるとは,

$$\forall X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}. \exists! f : I \longrightarrow X$$

である.

Rem. 1.5. 次の図ように I からすべての対象に 1 本の射があるもの.

$$\begin{tikzcd}
& & I \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
A & B & C & D & E \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Def. 1.6. 終対象 (final object)
圏 $\mathcal{C}$ において,$I \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ が終対象であるとは,

$$\forall X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}. \exists! f : X \longrightarrow I$$

である.

Rem. 1.7. 次の図ように I に向かってすべての対象から 1 本の射があるもの.

$$\begin{tikzcd}
& & I & & \\
A \arrow[urr] & B \arrow[ur] & C \arrow[u] & D \arrow[ul] & E \cdots\cdots \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

Def. 1.8. 零対象 (zero object)
圏 $\mathcal{C}$ において,$O \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ が零対象であるとは, O が始対象であり, かつ終対象であること.

Def. 1.9. 零射 (zero morphism)
$A, B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ に対し, 合成 $A \longrightarrow O \longrightarrow B$ を零射といい, 0 で表す.

2　アーベル圏

Def. 2.1. アーベル圏
$\mathcal{A}$ がアーベル圏であるとは, 次の条件を満たすことである.

1. $\mathcal{A}$ はゼロ対象を持つ
2. 任意の $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$ に対して積と和 $\mathcal{A}_1 \prod \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1 \coprod \mathcal{A}_2$ が存在する.
3. $\mathcal{A}$ の任意の射に ker, coker が存在する.
4. $\mathcal{A}$ の任意の単射はある射の ker で, 任意の全射はある射の coker である.

Lem. 2.2. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする. $\mathcal{A}$ における射 $f : A \longrightarrow B$ に対し,

- f が単射 $\implies f \simeq \ker(\mathrm{coker} f)$
- f が全射 $\implies f \simeq \mathrm{coker}(\ker f)$

が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Coker} f \arrow[dr, "\psi"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, shift right, "\varphi"'] & B \arrow[u, "\mathrm{coker} f"] \arrow[r, "g"] & C \\
 & \mathrm{Ker}(\mathrm{coker} f) \arrow[ul, shift right, "\varphi'"'] \arrow[u, "\ker(\mathrm{coker} f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dashed, "\exists! h'"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] \arrow[ddr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & & & \\
 & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A \arrow[d, "\tilde{f}_1"] & \\
 & A \arrow[r, "\tilde{f}_2"] & A \times B \arrow[r, "\mathrm{coker}\tilde{f}_2"] & \mathrm{Coker}\tilde{f}_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & x \arrow[dl] \arrow[dd] \\
s \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & u & \\
 & b \arrow[rr] \arrow[dl] & & y \arrow[dl] \\
t \arrow[rr] & & v \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & x \arrow[dl] \arrow[dd] \\
s \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & u & \\
 & b \arrow[rr] \arrow[dl] & & y \arrow[dl] \\
t \arrow[rr] & & v \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}
$$