複素対数関数・冪関数・逆三角関数
杉浦 解析入門

横瀬 仁

2025 年 10 月 27 日

目次

1. 複素対数関数

▶ 定理. 1.1.
$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ とし、A と B を K の開集合とする。A から B への全単射 f が A の点 x で微分可能であり、f と f^{-1} が共に連続であるとする。f の x における微分係数が 0 でないとき、f の逆関数 f^{-1} は $y = f(x)$ で微分可能であり、その微分係数は $\dfrac{1}{f'(x)}$ となる。 □

【証明】
$h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ とする。$f^{-1}(y) = x$ なので、$x + h = f^{-1}(y+k)$ が得られ、この式に f を適用することで $f(x+h) = y + k$ 即ち $k = f(x+h) - f(x)$ を得る。よって、f と f^{-1} の単射性から $k \neq 0$ と $h \neq 0$ は同値であり、また f の x における連続性と f^{-1} の y における連続性から、$k \to 0$ と $h \to 0$ は同値となる。したがって

$$\lim_{k\to 0, k\neq 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

が成り立つ。 ♣

▶ 定理. 1.2.
f が $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I = [a, b]$ から $\mathbb{R}$ への狭義単調な連続関数ならば、以下が成り立つ：

(i) f は I から $J = f(I)$ への全単射である。

(ii) $J = f(I)$ は、f が増加関数なら $[f(a), f(b)]$ であり、減少関数なら $[f(b), f(a)]$ である。

(iii) f の逆関数は連続かつ狭義単調である。

□

【証明】
(i)
f が狭義単調増加であるとする。このとき、I の互いに異なる点 $x_0 < x_1$ に対し、$f(x_0) < f(x_1)$ となるため、f は単射である。よって、f は I から $J = f(I)$ への全単射となる。f が減少関数の場合も同様。
(ii)
f が増加関数なら、$J \subset [f(a), f(b)]$ であることは明らかである。また、$f(a)$ と $f(b)$ の間にある c に対しては中間値の定理を用いると、$f(\gamma) = c$ なる I の点 γ がとれ、従って $[f(a), f(b)] \subset J$ である。f が減少関数の場合も同様。
(iii)

任意の $[f(a), f(b)]$ の点 y と任意の 0 でない実数 k に対し、$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = h$ とおいて、$y = f(c)$ となる I の点 c を取れば、$f(c+h) - f(c) = k$ を得る。よってこのとき、f の連続性から $h \to 0$ と $k \to 0$ は同値である。そこで、$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = h$ において $k \to 0$ とすると、$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \to 0$ であることがわかる。従って、f^{-1} は連続である。また、$f(c_0) < f(c_1)$ かつ $c_0 \geq c_1$ を満たす I の点 c_0, c_1 があったとすると、f の狭義単調性に矛盾するので、f^{-1} は狭義単調である。 ♣

$\mathbb{R}$ から $(0, \infty)$ への連続関数 exp は全単射であった。従って、任意の正の実数 x に対し、$e^y = x$ となるような実数 y が一意に定まる。この対応により、対数関数を定義する。

▷ 定義. 1.3.
$\mathbb{R}$ から $(0, \infty)$ への関数 exp の逆関数を対数関数あるいは実対数関数と呼び、log と表す。 ♥

実対数関数の性質を列挙する。

▶ 命題. 1.4.
対数関数は、次のような性質を持つ。

(i) $\log 1 = 0, \log e = 1.$

(ii) $x > 0$ に対し、$(\log x)' = \dfrac{1}{x}.$

(iii) $x_0, x_1 > 0$ に対し、$\log x_0 x_1 = \log x_0 + \log x_1.$

(iv) $x > 0$ に対し、$\log \dfrac{1}{x} = -\log x.$

(v) log は狭義単調増加関数である。

(vi) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = \infty, \lim\limits_{x \to +0} \log x = -\infty.$

(vii) $a > 0$ に対し、$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x^a} = 0, \lim\limits_{x \to 0} x^a \log x = 0.$

□

【証明】
(i) $e^0 = 1, e^1 = e$ から従う。
(ii) $x > 0$ に対し、$e^y = x$ となるような実数 y を取れば、$(\log x)' = \dfrac{1}{(e^y)'} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}.$
(iii) $\log x_i = y_i \ (i = 0, 1)$ とすれば、$e^{y_i} = x_i$ であり、$x_0 x_1 = e^{y_0 + y_1}$ が成り立つ。よって、$\log x_0 x_1 = \log x_0 + \log x_1$ である。
(iv) $x > 0$ に対し、$0 = \log 1 = \log x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + \log \dfrac{1}{x}$ である。
(v) exp が狭義単調増加なので log もそうである。
(vi) $\log x = y$ とすると、$x = e^y$ なので、$x \to \infty$ と $y \to \infty$ は同値。また、$x \to 0$ と $y \to -\infty$ も同値。
(vii) $\log x = y$ とすると、$x = e^y$ なので、$\dfrac{\log x}{x^a} = \dfrac{y}{e^{ay}}$ と $x^a \log x = e^{ay} y$ が成り立ち、主張が従う。 ♣

次に、複素関数の意味での対数関数を定義したい。実関数の場合は指数関数が $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_{>0}$ への全単射であったため、そのまま指数関数の逆関数として、対数関数を定義できた。しかし、複素指数関数の場合はそううまくいかない。実際、複素関数 exp は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^*$ への単射にならず、逆写像の存在を言うことができないのである。

まずは $\mathbb{C}^*$ の点 z に対し、$z = e^w$ となるような w の形を求めてみる。$w = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R})$ とすると $z = e^x e^{iy}$ となるので、$|z| = e^x$ と $\arg z = y$ が成り立つ。従って、$w = \log |z| + i \arg z$ となる。ここで、$\arg z$ は値が一つに定まらないことに注意する。

まとめると、$\mathbb{C}^*$ の点 z に対し、$w = \log |z| + i \arg z$ の形の複素数は $z = e^w$ を満たすことがわかった。

この多価性を除くために、次の命題を示す。

▶ 命題. 1.5.
$\mathbb{C}$ から 0 を含む負の実軸を取り除いた開集合を D する。つまり、$D = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}\, z \neq 0$ かつ $\mathrm{Re}\, z > 0\}$ である。このとき、任意の D の点 z に対し、$z = |z| e^{i\theta}$ を満たす $\theta \in (-\pi, \pi)$ が一意に存在する。 □

【証明】
まず D の点 z に対し、$z = |z|e^{i\theta}$ となるような $\theta \in [-\pi, \pi)$ が一意に存在するが、仮に $\theta = -\pi$ であるとすると、$z = -|z|$ となり、z が D の点であることに矛盾する。よってこのような θ は $(-\pi, \pi)$ の元である。 ♣

この性質を使って、複素関数としての対数関数を次のように定義する：

▷ 定義. 1.6.
D を $\mathbb{C}$ の開集合 $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\, z \neq 0$ かつ $\mathrm{Re}\, z > 0\}$ とする。任意の D の点 z に対し、$z = |z|e^{i\theta}$ となるような $\theta \in (-\pi, \pi)$ をとって、

$$\mathrm{Log}\, z := \log |z| + i\theta$$

と定める。このようにして定義された D 上の関数 Log を**対数関数**と呼ぶ。 ♥

▶ 補題. 1.7.
$\mathrm{Log}\, D = \{u + iv\ ;\ u \in \mathbb{R}$ かつ $v \in (-\pi, \pi)\}$ である。この右辺を E と書く。 □

【証明】
まず、$\mathrm{Log}\, D$ の元 $\log |z| + i\theta\ (z \in D, \theta \in (-\pi, \pi))$ は E に属する。逆に、E の元 $u + iv\ (u \in \mathbb{R}, v \in (-\pi, \pi))$ に対し、$\log x = u$ となるような正の実数 x をとって $z = xe^{iv}$ とおくと、z は D に属する。実際、仮に $\mathrm{Re}\, z = x \cos v$ が正でないとすると、$v \in (-\pi, -\pi/2)$ または $v \in (\pi/2, \pi)$ である。このとき、$\mathrm{Im}\, z = x \sin v$ は 0 にならない。また、$\mathrm{Log}\, z = \log x + iv = u + iv$ なので、$u + iv$ は $\mathrm{Log}\, D$ に属する。 ♣

▶ 命題. 1.8.
D 上の対数関数 Log と、指数関数 exp の $\mathrm{Log}\, D$ への制限 $\exp|_{\mathrm{Log}\, D}$ は互いに逆である。 □

【証明】
任意の D の点 z に対し、$z = |z|e^{i\theta}$ となるような唯一の $\theta \in (-\pi, \pi)$ を取れば、Log の定義から、

$$\exp \mathrm{Log}\, z = \exp(\log |z| + i\theta) = |z|e^{i\theta} = z$$

が成り立つことがわかる。
逆に、任意の $\mathrm{Log}\, D$ の元 $u + iv$ に対し、$\mathrm{Log} \exp(u + iv) = \mathrm{Log}\, e^u e^{iv} = \log e^u + iv = u + iv$ となる。
以上より、主張が示された。 ♣

▶ 命題. 1.9.
Log は D 上連続である。 □

【証明】
$\mathrm{Log}\, z = \log |z| + i\theta$ より、D の点 z に対してその偏角 $\theta_z \in (-\pi, \pi)$ を対応させる関数が連続であることを示せば良い。
$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を z に収束する D の点列とする。このとき、$z = re^{i\theta}, z_n = r_n e^{i\theta_n}$ とおくと、$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は r に収束する。いま、

$$\begin{aligned}
|z - z_n| &= |re^{i\theta} - r_n e^{i\theta_n}| \\
&= |re^{i\theta} - r_n e^{i\theta_n} + re^{i\theta_n} - re^{i\theta_n}| \\
&= |r(e^{i\theta} - e^{i\theta_n}) + (r - r_n)e^{i\theta_n}| \\
&\geq r|e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| - |r - r_n|
\end{aligned}$$

即ち $|e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| \leq \dfrac{1}{r}(|z - z_n| + |r - r_n|)$ であるから、$\{e^{i\theta_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $e^{i\theta}$ に収束する。
さて、加法定理により、任意の実数 α, β に対して $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ が成り立つことがわかるので、

$$\begin{aligned}
|e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| &= ((\cos\theta - \cos\theta_n)^2 + (\sin\theta - \sin\theta_n)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq |\cos\theta - \cos\theta_n|
\end{aligned}$$

$$= 2\left|\sin\frac{|\theta-\theta_n|}{2}\right|$$

となることがわかる。また、正弦関数の凸性から $0 \le x \le \pi/2$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x \le \sin x$ となるが、偏角のとり方から、$|\theta-\theta_n| \le \pi$ なので、上の不等式と合わせることで

$$|e^{i\theta}-e^{i\theta_n}| \ge 2\left|\sin\frac{|\theta-\theta_n|}{2}\right| \ge 2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{|\theta-\theta_n|}{2} = \frac{|\theta-\theta_n|}{2\pi}$$

を得る。従って $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は θ に収束するので、主張が従う。 ♣

▶ 命題. 1.10.
D を今までと同じ開集合とすると、以下が成り立つ。

(i) $\mathrm{Log}\,1 = 0, \mathrm{Log}\,e = 1$.

(ii) $z \in D$ に対し、$(\mathrm{Log}\,z)' = \dfrac{1}{z}$.

(iii) $z_0, z_1 \in D$ に対し、$\mathrm{Log}\,z_0z_1 = \mathrm{Log}\,z_0 + \mathrm{Log}\,z_1$.

(iv) $z \in D$ に対し、$\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{z} = -\mathrm{Log}\,z$.

□

【証明】
(i)
$1 = 1\cdot e^{i\cdot 0}$ より $\mathrm{Log}\,1 = \log|1| + i\cdot 0 = 0$. また、$e = e\cdot e^{i\cdot 0}$ なので $\mathrm{Log}\,e = \log e + i\cdot 0 = 1$.
(ii)
Log が D 上連続であり、逆関数 exp は正則なので、Log も正則である。この時、実関数と同様に議論で主張が従う。
(iii)
$\exp\mathrm{Log}\,z_0z_1 = z_0z_1 = (\exp\mathrm{Log}\,z_0)(\exp\mathrm{Log}\,z_1) = \exp(\mathrm{Log}\,z_0 + \mathrm{Log}\,z_1)$ と exp の単射性から従う。
(iv)
$\exp\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} = (\exp\mathrm{Log}\,z)^{-1} = \exp(-\mathrm{Log}\,z)$ と exp の単射性から従う。 ♣

▶ 命題. 1.11.
$z \in U_1(0)$ に対し、$\mathrm{Log}(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ である。ここで、$U_1(0)$ は $\mathbb{C}$ 内の $(0,0)$ を中心とする半径 1 の開球である。 □

【証明】
まず、$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|\left|\dfrac{n+1}{(-1)^n}\right| = \dfrac{n+1}{n} \to 1$ より、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ の収束半径は 1 である。そこで、$z \in U_1(0)$ に対して $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ とおくと、$f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$ である。今、$z \in U_1(0)$ ならば $1+z \in D$ なので $(\mathrm{Log}(1+z))' = \dfrac{1}{1+z} = f'(z)$ が成り立つ。従って、$(\mathrm{Log}(1+z) - f(z))' = 0$ となるので、$\mathrm{Log}(1+z) - f(z)$ は定数である。特に $z = 0$ とすると、これは 0 になるので、$\mathrm{Log}\,z = f(z)$ が得られた。 ♣

▶ 命題. 1.12.
$z \in U_1(0)$ に対し、$-\mathrm{Log}(1-z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ である。また、

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

が成り立つ。 □

【証明】
上の命題で、z を $-z$ に置き換えると、$-\operatorname{Log}(1-z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ を得る。

また、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1}{2}(\operatorname{Log}(1+z)-\operatorname{Log}(1-z)) \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}) \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}z^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}
$$

である。 ♣

2. 冪関数と二項定理

▷ 定義. 2.1.
正の数 a と複素数 z に対し、$a^z := \exp(z\log a)$ と定める。これを a の z 乗と呼ぶ。 ♥

▶ 命題. 2.2.
正の数 a に対し、以下が成り立つ：

(i) z, w を複素数とすると、$a^z a^w = a^{z+w}$.

(ii) x が実数ならば、$a^{x>0}$ で $\log a^x = x\log a$.

(iii) x, y が実数ならば、$(a^x)^y = a^{xy}$.

(iv) $a^0 = 1$.

(v) m を正の整数とすると、$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ であり、また、$a^{-\frac{1}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a}}$ である。

(vi) 正の数 x と実数 c に対し、$(x^c)' = cx^{c-1}$.

▯

【証明】
(i)
$a^{z+w} = \exp((z+w)\log a) = \exp(z\log a)\exp(w\log a) = a^z a^w$.
(ii)
実関数 exp は正の実数に値をとるので、$a^x > 0$ である。また、$\log a^x = \log(\exp(x\log a)) = x\log a$ である。
(iii)
$(a^x)^y = \exp(y\log a^x) = \exp(xy\log a) = a^{xy}$.
(iv)
$a^0 = \exp(0\cdot\log a) = 1$.
(v)
$(a^{\frac{1}{m}})^m = a$ なので、$a^{\frac{1}{m}}$ は a の m 乗根。また、$a^{\frac{1}{m}}a^{-\frac{1}{m}} = a^{-1}$ なので、$a^{-\frac{1}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a}}$ である。
(vi)
$(x^c)' = (\exp(c\log x))' = x^c\cdot\dfrac{c}{x} = cx^{c-1}$. ♣

▷ 定義. 2.3.
a を D の点とし、z を複素数とする。a の z 乗を $a^z := \exp(z\operatorname{Log} a)$ によって定める。 ♥

▶ 命題. 2.4.
$(a^z)' = a^z \operatorname{Log} a$ である。 □

▷ 定義. 2.5.
複素数 m と自然数 n に対して、$n \geq 1$ のとき

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!}$$

また $n=0$ のとき $\displaystyle\binom{m}{n} = 1$ と定める。 ♥

▶ 命題. 2.6.
複素数 m と自然数 n に対して、

$$n\binom{m}{n} + (n+1)\binom{m}{n+1} = m\binom{m}{n}$$

が成り立つ。 □

▶ 命題. 2.7.
任意の複素数 m と $|z| < 1$ に対し、

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$$

が成り立つ。 □

【証明】
$|z| < 1$ に対して $f(z) := (1+z)^m = \exp(m \operatorname{Log}(1+z))$ とおく。このとき、

$$f'(z) = \frac{m}{1+z} f(z)$$

である。また、

$$\lim_{n \to 0} \left| \binom{m}{n} \Big/ \binom{m}{n+1} \right| = \lim_{n \to 0} \frac{n+1}{m-n} = 1$$

なので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$ の収束半径は 1 である。$|z| < 1$ に対して $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$ とおくと、

$$\begin{aligned}
(1+z)g'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{m}{n+1}(1+z)z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{m}{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{m}{n+1} z^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{m}{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{m}{n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)\binom{m}{n+1} + n\binom{m}{n}) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m\binom{m}{n} z^n \\
&= mg(z)
\end{aligned}$$

を得る。f の定義から、任意の点 $|z| < 1$ に対して $f(z) \neq 0$ なので、g/f は $|z| < 1$ なる z において正則である。

従って、任意の $|z| < 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{g}{f}\right)'(z) &= \frac{g'(z)f(z) - g(z)f'(z)}{f(z)^2} \\
&= \frac{(1+z)g'(z)f(z) - (1+z)g(z)f'(z)}{(1+z)f(z)^2} \\
&= \frac{mg(z)f(z) - g(z)mf(z)}{(1+z)f(z)^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であり、$U_1(0)$ の連結性から g/f は定数関数となる。いま、$f(0) = g(0) = 1$ であるから、$g/f = 1$ 即ち $f = g$ が従う。 ♣

3. 逆三角関数

二項定理を用いて、次の級数表示が得られる：

▶ 命題. 3.1.
実数 $|x| < 1$ に対し、

$$
\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n
$$

が成り立つ。 □

【証明】
前命題により、$|x| < 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n
\end{aligned}
$$

が得られる。 ♣

正弦関数 sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の上で狭義単調増加な連続関数で、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ と $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$ が成り立つから、$[-1, 1]$ 上で定義された逆関数を持つ。

▷ 定義. 3.2.
$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ の逆関数を Arcsin とかき、逆正弦関数と呼ぶ。 ♥

▶ 命題. 3.3.
任意の $y \in (-1, 1)$ に対し、

$$
(\operatorname{Arcsin} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
$$

が成り立つ。 □

【証明】
実際、$\sin x = y$ となるような $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ をとれば、逆関数の微分法により

$$(\mathrm{Arcsin}\, y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

が従う。 ♣

▶ 命題. 3.4.
任意の $-1 \le x \le 1$ に対して、

$$\mathrm{Arcsin}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

が成り立つ。

【証明】
右辺の収束半径は 1 なので、$-1 < x < 1$ に対して右辺は収束する。そこで $-1 < x < 1$ に対して右辺を $f(x)$ とおくと、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}' x$$

である。よって、$\mathrm{Arcsin} - f$ は定数関数であり、この関数の 0 で値を計算すると 0 となるので $\mathrm{Arcsin} = f$ である。さて、$0 \le x \le 1$ において右辺の級数の部分和 $s_n(x)$ は単調増加数列で、Arcsin の単調性から

$$s_n(x) \le \mathrm{Arcsin}\, x \le \mathrm{Arcsin}\, 1 = \pi/2$$

が得られる。よって、$s_n(1)$ は上に有界な単調増加数列になり、収束する。いま、任意の $0 \le x \le 1$ に対して

$$\left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right| = \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} \right|$$

が成り立つので、Weierstraß の判定法により、$s_n(x)$ は $0 \le x \le 1$ に於いて収束し、連続である。従って、$\lim_{x \to 1-0} \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{x \to 1-0} \mathrm{Arcsin}\, x = \pi/2$ となる。これは $x = -1$ に於いても同様に収束が示せる。♣

▷ 定義. 3.5.
余弦関数 cos は $[0, \pi]$ から $[-1, 1]$ への狭義単調減少な全単射であるから、$[-1, 1]$ で定義された逆関数を持つ。これを逆余弦関数と呼び、Arccos と書く。 ♥

▶ 命題. 3.6.
$-1 \le y \le 1$ に対し、

$$\mathrm{Arccos}' y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

が成り立つ。

▷ 定義. 3.7.
正接関数 tan は $[-\pi/2, \pi/2]$ から $\mathbb{R}$ への全単射であるから、$\mathbb{R}$ 上で定義された tan の逆関数が存在する。これを逆正接関数と呼び、Arctan と書く。 ♥

▶ 命題. 3.8.
任意の実数 y に対して

$$\mathrm{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つ。

▶ 命題. 3.9.
任意の $|x| < 1$ に対して

$$\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

が成り立つ。 □

【証明】
右辺の収束半径は 1 である。$|x| < 1$ に対して右辺を $f(x)$ とおくと、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}' x$$

となり、従って $\mathrm{Arctan} - f$ は $(-1, 1)$ 上で定数関数になる。0 での値を考えると、これが定数関数 0 であることがわかり、$\mathrm{Arctan} = f$ が従う。 ♣