

複素対数関数・冪関数・逆三角関数

杉浦 解析入門

横瀬 仁

目次

1. 複素対数関数	1
2. 冪関数と二項定理	5
3. 逆三角関数	7

1. 複素対数関数

► 定理. 1.1.

$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ とし、 A と B を K の開集合とする。 A から B への全単射 f が A の点 x で微分可能であり、 f と f^{-1} が共に連続であるとする。 f の x における微分係数が 0 でないとき、 f の逆関数 f^{-1} は $y = f(x)$ で微分可能であり、その微分係数は $\frac{1}{f'(x)}$ となる。□

【証明】

$h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ とする。 $f^{-1}(y) = x$ なので、 $x+h = f^{-1}(y+k)$ が得られ、この式に f を適用することで $f(x+h) = y+k$ 即ち $k = f(x+h) - f(x)$ を得る。よって、 f と f^{-1} の単射性から $k \neq 0$ と $h \neq 0$ は同値であり、また f の x における連続性と f^{-1} の y における連続性から、 $k \rightarrow 0$ と $h \rightarrow 0$ は同値となる。したがって

$$\lim_{k \rightarrow 0, k \neq 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

が成り立つ。♣

► 定理. 1.2.

f が \mathbb{R} の有界閉区間 $I = [a, b]$ から \mathbb{R} への狭義単調連続関数ならば、以下が成り立つ：

- (i) f は I から $J = f(I)$ への全単射である。
- (ii) $J = f(I)$ は、 f が増加関数なら $[f(a), f(b)]$ であり、減少関数なら $[f(b), f(a)]$ である。
- (iii) f の逆関数は連続かつ狭義単調である。

□

【証明】

(i)

f が狭義単調増加であるとする。このとき、 I の互いに異なる点 $x_0 < x_1$ に対し、 $f(x_0) < f(x_1)$ となるため、 f は単射である。よって、 f は I から $J = f(I)$ への全単射となる。 f が減少関数の場合も同様。

(ii)

f が増加関数なら、 $J \subset [f(a), f(b)]$ であることは明らかである。また、 $f(a)$ と $f(b)$ の間にある c に対しては中間値の定理を用いると、 $f(\gamma) = c$ なる I の点 γ がとれ、従って $[f(a), f(b)] \subset J$ である。 f が減少関数の場合も同様。

(iii)

任意の $[f(a), f(b)]$ の点 y と任意の 0 でない実数 k に対し、 $f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = h$ とおいて、 $y = f(c)$ となる

I の点 c を取れば、 $f(c+h) - f(c) = k$ を得る。よってこのとき、 f の連続性から $h \rightarrow 0$ と $k \rightarrow 0$ は同値である。そこで、 $f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = h$ において $k \rightarrow 0$ とすると、 $f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \rightarrow 0$ であることがわかる。従って、 f^{-1} は連続である。また、 $f(c_0) < f(c_1)$ かつ $c_0 \geq c_1$ を満たす I の点 c_0, c_1 があったとすると、 f の狭義単調性に矛盾するので、 f^{-1} は狭義単調である。♣

\mathbb{R} から $(0, \infty)$ への連続関数 \exp は全単射であった。従って、任意の正の実数 x に対し、 $e^y = x$ となるような実数 y が一意に定まる。この対応により、対数関数を定義する。

▷ 定義. 1.3.

\mathbb{R} から $(0, \infty)$ への関数 \exp の逆関数を対数関数あるいは実対数関数と呼び、 \log と表す。♥

実対数関数の性質を列挙する。

▶ 命題. 1.4.

対数関数は、次のような性質を持つ。

- (i) $\log 1 = 0, \log e = 1$.
- (ii) $x > 0$ に対し、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$.
- (iii) $x_0, x_1 > 0$ に対し、 $\log x_0 x_1 = \log x_0 + \log x_1$.
- (iv) $x > 0$ に対し、 $\log \frac{1}{x} = -\log x$.
- (v) \log は狭義単調増加関数である。
- (vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$.
- (vii) $a > 0$ に対し、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^a \log x = 0$.

□

【証明】

- (i) $e^0 = 1, e^1 = e$ から従う。
- (ii) $x > 0$ に対し、 $e^y = x$ となるような実数 y を取れば、 $(\log x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.
- (iii) $\log x_i = y_i$ ($i = 0, 1$) とすれば、 $e^{y_i} = x_i$ であり、 $x_0 x_1 = e^{y_0 + y_1}$ が成り立つ。よって、 $\log x_0 x_1 = \log x_0 + \log x_1$ である。
- (iv) $x > 0$ に対し、 $0 = \log 1 = \log x \cdot \frac{1}{x} = \log x + \log \frac{1}{x}$ である。
- (v) \exp が狭義単調増加なので \log もそうである。
- (vi) $\log x = y$ とすると、 $x = e^y$ なので、 $x \rightarrow \infty$ と $y \rightarrow \infty$ は同値。また、 $x \rightarrow 0$ と $y \rightarrow -\infty$ も同値。
- (vii) $\log x = y$ とすると、 $x = e^y$ なので、 $\frac{\log x}{x^a} = \frac{y}{e^{ay}}$ と $x^a \log x = e^{ay} y$ が成り立ち、主張が従う。♣

次に、複素関数の意味での対数関数を定義したい。実関数の場合は指数関数が \mathbb{R} から $\mathbb{R}_{>0}$ への全単射であったため、そのまま指数関数の逆関数として、対数関数を定義できた。しかし、複素指数関数の場合はそううまくいかない。実際、複素関数 \exp は \mathbb{C} から \mathbb{C}^* への単射にならず、逆写像の存在を言うことができないのである。

まずは \mathbb{C}^* の点 z に対し、 $z = e^w$ となるような w の形を求めてみる。 $w = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると $z = e^x e^{iy}$ となるので、 $|z| = e^x$ と $\arg z = y$ が成り立つ。従って、 $w = \log |z| + i \arg z$ となる。ここで、 $\arg z$ は値が一つに定まらないことに注意する。

まとめると、 \mathbb{C}^* の点 z に対し、 $w = \log |z| + i \arg z$ の形の複素数は $z = e^w$ を満たすことがわかった。

この多価性を除くために、次の命題を示す。

▶ 命題. 1.5.

\mathbb{C} から 0 を含む負の実軸を取り除いた開集合を D する。つまり、 $D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ かつ } \operatorname{Re} z > 0\}$ である。このとき、任意の D の点 z に対し、 $z = |z|e^{i\theta}$ を満たす $\theta \in (-\pi, \pi)$ が一意に存在する。□

【証明】

まず D の点 z に対し、 $z = |z|e^{i\theta}$ となるような $\theta \in [-\pi, \pi)$ が一意に存在するが、仮に $\theta = -\pi$ であるとする、

$z = -|z|$ となり、 z が D の点であることに矛盾する。よってこのような θ は $(-\pi, \pi)$ の元である。♣

この性質を使って、複素関数としての対数関数を次のように定義する：

▷ 定義. 1.6.

D を \mathbb{C} の開集合 $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ かつ } \operatorname{Re} z > 0\}$ とする。任意の D の点 z に対し、 $z = |z|e^{i\theta}$ となるような $\theta \in (-\pi, \pi)$ をとって、

$$\operatorname{Log} z := \log |z| + i\theta$$

と定める。このようにして定義された D 上の関数 Log を対数関数と呼ぶ。♥

▶ 補題. 1.7.

$\operatorname{Log} D = \{u + iv ; u \in \mathbb{R} \text{ かつ } v \in (-\pi, \pi)\}$ である。この右辺を E と書く。□

【証明】

まず、 $\operatorname{Log} D$ の元 $\log |z| + i\theta$ ($z \in D, \theta \in (-\pi, \pi)$) は E に属する。逆に、 E の元 $u + iv$ ($u \in \mathbb{R}, v \in (-\pi, \pi)$) に対し、 $\log x = u$ となるような正の実数 x をとって $z = xe^{iv}$ とおくと、 z は D に属する。実際、仮に $\operatorname{Re} z = x \cos v$ が正でないとする、 $v \in (-\pi, -\pi/2)$ または $v \in (\pi/2, \pi)$ である。このとき、 $\operatorname{Im} z = x \sin v$ は 0 にならない。また、 $\operatorname{Log} z = \log x + iv = u + iv$ なので、 $u + iv$ は $\operatorname{Log} D$ に属する。♣

▶ 命題. 1.8.

D 上の対数関数 Log と、指数関数 \exp の $\operatorname{Log} D$ への制限 $\exp|_{\operatorname{Log} D}$ は互いに逆である。□

【証明】

任意の D の点 z に対し、 $z = |z|e^{i\theta}$ となるような唯一の $\theta \in (-\pi, \pi)$ を取れば、 Log の定義から、

$$\exp \operatorname{Log} z = \exp(\log |z| + i\theta) = |z|e^{i\theta} = z$$

が成り立つことがわかる。

逆に、任意の $\operatorname{Log} D$ の元 $u + iv$ に対し、 $\operatorname{Log} \exp(u + iv) = \operatorname{Log} e^u e^{iv} = \log e^u + iv = u + iv$ となる。

以上より、主張が示された。♣

▶ 命題. 1.9.

Log は D 上連続である。□

【証明】

$\operatorname{Log} z = \log |z| + i\theta$ より、 D の点 z に対してその偏角 $\theta_z \in (-\pi, \pi)$ を対応させる関数が連続であることを示せば良い。

$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を z に収束する D の点列とする。このとき、 $z = re^{i\theta}, z_n = r_n e^{i\theta_n}$ とおくと、 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は r に収束する。いま、

$$\begin{aligned} |z - z_n| &= |re^{i\theta} - r_n e^{i\theta_n}| \\ &= |re^{i\theta} - r_n e^{i\theta_n} + re^{i\theta_n} - r_n e^{i\theta_n}| \\ &= |r(e^{i\theta} - e^{i\theta_n}) + (r - r_n)e^{i\theta_n}| \\ &\geq r|e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| - |r - r_n| \end{aligned}$$

即ち $|e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| \leq \frac{1}{r}(|z - z_n| + |r - r_n|)$ であるから、 $\{e^{i\theta_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $e^{i\theta}$ に収束する。

さて、加法定理により、任意の実数 α, β に対して $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ が成り立つことがわかるので、

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| &= ((\cos \theta - \cos \theta_n)^2 + (\sin \theta - \sin \theta_n)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq |\cos \theta - \cos \theta_n| \\ &= 2 \left| \sin \frac{\theta - \theta_n}{2} \right| \end{aligned}$$

となることがわかる。また、正弦関数の凸性から $0 \leq x \leq \pi/2$ ならば $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ となるが、偏角のとり方から、 $|\theta - \theta_n| \leq \pi$ なので、上の不等式と合わせることで

$$|e^{i\theta} - e^{i\theta_n}| \geq 2 \left| \sin \frac{|\theta - \theta_n|}{2} \right| \geq 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{|\theta - \theta_n|}{2} = \frac{|\theta - \theta_n|}{\pi}$$

を得る。従って $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は θ に収束するので、主張が従う。 ♣

► 命題. 1.10.

D を今までと同じ開集合とすると、以下が成り立つ。

(i) $\text{Log } 1 = 0, \text{Log } e = 1$.

(ii) $z \in D$ に対し、 $(\text{Log } z)' = \frac{1}{z}$.

(iii) $z_0, z_1 \in D$ に対し、 $\text{Log } z_0 z_1 = \text{Log } z_0 + \text{Log } z_1$.

(iv) $z \in D$ に対し、 $\text{Log } \frac{1}{z} = -\text{Log } z$.

□

【証明】

(i)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ より $\text{Log } 1 = \log |1| + i \cdot 0 = 0$ 。また、 $e = e \cdot e^{i \cdot 0}$ なので $\text{Log } e = \log e + i \cdot 0 = 1$ 。

(ii)

Log が D 上連続であり、逆関数 \exp は正則なので、 Log も正則である。この時、実関数と同様に議論で主張が従う。

(iii)

$\exp \text{Log } z_0 z_1 = z_0 z_1 = (\exp \text{Log } z_0)(\exp \text{Log } z_1) = \exp(\text{Log } z_0 + \text{Log } z_1)$ と \exp の単射性から従う。

(iv)

$\exp \text{Log } \frac{1}{z} = \frac{1}{z} = (\exp \text{Log } z)^{-1} = \exp(-\text{Log } z)$ と \exp の単射性から従う。 ♣

► 命題. 1.11.

$z \in U_1(0)$ に対し、 $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ である。ここで、 $U_1(0)$ は \mathbb{C} 内の $(0,0)$ を中心とする半径 1 の開球である。 □

【証明】

まず、 $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| \left| \frac{n+1}{(-1)^n} \right| = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ より、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ の収束半径は 1 である。そこで、 $z \in U_1(0)$ に対し

て $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ とおくと、 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$ である。今、 $z \in U_1(0)$ ならば $1+z \in D$

なので $(\text{Log}(1+z))' = \frac{1}{1+z} = f'(z)$ が成り立つ。従って、 $(\text{Log}(1+z) - f(z))' = 0$ となるので、 $\text{Log}(1+z) - f(z)$ は定数である。特に $z = 0$ とすると、これは 0 になるので、 $\text{Log } z = f(z)$ が得られた。 ♣

► 命題. 1.12.

$z \in U_1(0)$ に対し、 $-\text{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ である。また、

$$\frac{1}{2} \text{Log } \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

が成り立つ。 □

【証明】

上の命題で、 z を $-z$ に置き換えると、 $-\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ を得る。

また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} &= \frac{1}{2} (\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1-z)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

である。

♣

2. 冪関数と二項定理

▷ 定義. 2.1.

正の数 a と複素数 z に対し、 $a^z := \exp(z \log a)$ と定める。これを a の z 乗と呼ぶ。

♥

► 命題. 2.2.

正の数 a に対し、以下が成り立つ：

- (i) z, w を複素数とすると、 $a^z a^w = a^{z+w}$.
- (ii) x が実数ならば、 $a^{x>0}$ で $\log a^x = x \log a$.
- (iii) x, y が実数ならば、 $(a^x)^y = a^{xy}$.
- (iv) $a^0 = 1$.
- (v) m を正の整数とすると、 $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ であり、また、 $a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$ である。
- (vi) 正の数 x と実数 c に対し、 $(x^c)' = cx^{c-1}$.

□

【証明】

(i)

$$a^{z+w} = \exp((z+w) \log a) = \exp(z \log a) \exp(w \log a) = a^z a^w.$$

(ii)

実関数 \exp は正の実数に値をとるので、 $a^x > 0$ である。また、 $\log a^x = \log(\exp(x \log a)) = x \log a$ である。

(iii)

$$(a^x)^y = \exp(y \log a^x) = \exp(xy \log a) = a^{xy}.$$

(iv)

$$a^0 = \exp(0 \cdot \log a) = 1.$$

(v)

$(a^{\frac{1}{m}})^m = a$ なので、 $a^{\frac{1}{m}}$ は a の m 乗根。また、 $a^{\frac{1}{m}} a^{-\frac{1}{m}} = a^{-1}$ なので、 $a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$ である。

(vi)

$$(x^c)' = (\exp(c \log x))' = x^c \cdot \frac{c}{x} = cx^{c-1}.$$

♣

▷ 定義. 2.3.

a を D の点とし、 z を複素数とする。 a の z 乗を $a^z := \exp(z \operatorname{Log} a)$ によって定める。

♥

► 命題. 2.4.

$(a^z)' = a^z \operatorname{Log} a$ である。

□

▷ 定義. 2.5.

複素数 m と自然数 n に対して、 $n \geq 1$ のとき

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!}$$

また $n = 0$ のとき $\binom{m}{n} = 1$ と定める。

♥

► 命題. 2.6.

複素数 m と自然数 n に対して、

$$n \binom{m}{n} + (n+1) \binom{m}{n+1} = m \binom{m}{n}$$

が成り立つ。

□

► 命題. 2.7.

任意の複素数 m と $|z| < 1$ に対し、

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$$

が成り立つ。

□

【証明】

$|z| < 1$ に対して $f(z) := (1+z)^m = \exp(m \operatorname{Log}(1+z))$ とおく。このとき、

$$f'(z) = \frac{m}{1+z} f(z)$$

である。また、

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left| \binom{m}{n} / \binom{m}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n+1}{m-n} = 1$$

なので、 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$ の収束半径は 1 である。 $|z| < 1$ に対して $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$ とおくと、

$$\begin{aligned} (1+z)g'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{m}{n+1} (1+z)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{m}{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{m}{n+1} z^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{m}{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{m}{n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) \binom{m}{n+1} + n \binom{m}{n}) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} m \binom{m}{n} z^n \\ &= mg(z) \end{aligned}$$

を得る。 f の定義から、任意の点 $|z| < 1$ に対して $f(z) \neq 0$ なので、 g/f は $|z| < 1$ なる z において正則である。

従って、任意の $|z| < 1$ に対して

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)'(z) &= \frac{g'(z)f(z) - g(z)f'(z)}{f(z)^2} \\ &= \frac{(1+z)g'(z)f(z) - (1+z)g(z)f'(z)}{(1+z)f(z)^2} \\ &= \frac{mg(z)f(z) - g(z)mf(z)}{(1+z)f(z)^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、 $U_1(0)$ の連結性から g/f は定数関数となる。いま、 $f(0) = g(0) = 1$ であるから、 $g/f = 1$ 即ち $f = g$ が従う。♣

3. 逆三角関数

二項定理を用いて、次の級数表示が得られる：

► 命題. 3.1.

実数 $|x| < 1$ に対し、

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n$$

が成り立つ。□

【証明】

前命題により、 $|x| < 1$ に対して

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n\end{aligned}$$

が得られる。♣

正弦関数 \sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の上で狭義単調増加な連続関数で、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ と $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$ が成り立つから、 $[-1, 1]$ 上で定義された逆関数を持つ。

▷ 定義. 3.2.

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ の逆関数を Arcsin とかき、逆正弦関数と呼ぶ。♥

► 命題. 3.3.

任意の $y \in (-1, 1)$ に対し、

$$(\text{Arcsin } y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

が成り立つ。□

【証明】

実際、 $\sin x = y$ となるような $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ をとれば、逆関数の微分法により

$$(\operatorname{Arcsin} y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

が従う。

♣

► 命題. 3.4.

任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対して、

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

が成り立つ。

□

【証明】

右辺の収束半径は 1 なので、 $-1 < x < 1$ に対して右辺は収束する。そこで $-1 < x < 1$ に対して右辺を $f(x)$ とおくと、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin}' x$$

である。よって、 $\operatorname{Arcsin} - f$ は定数関数であり、この関数の 0 で値を計算すると 0 となるので $\operatorname{Arcsin} = f$ である。さて、 $0 \leq x \leq 1$ において右辺の級数の部分和 $s_n(x)$ は単調増加数列で、 Arcsin の単調性から

$$s_n(x) \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \operatorname{Arcsin} 1 = \pi/2$$

が得られる。よって、 $s_n(1)$ は上に有界な単調増加数列になり、収束する。いま、任意の $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$\left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right| = \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} \right|$$

が成り立つので、Weierstraß の判定法により、 $s_n(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ に於いて収束し、連続である。従って、 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$ となる。これは $x = -1$ に於いても同様に収束が示せる。♣

▷ 定義. 3.5.

余弦関数 \cos は $[0, \pi]$ から $[-1, 1]$ への狭義単調減少な全単射であるから、 $[-1, 1]$ で定義された逆関数を持つ。これを逆余弦関数と呼び、 Arccos と書く。

♥

► 命題. 3.6.

$-1 \leq y \leq 1$ に対し、

$$\operatorname{Arccos}' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

が成り立つ。

□

▷ 定義. 3.7.

正接関数 \tan は $[-\pi/2, \pi/2]$ から \mathbb{R} への全単射であるから、 \mathbb{R} 上で定義された \tan の逆関数が存在する。これを逆正接関数と呼び、 Arctan と書く。

♥

► 命題. 3.8.

任意の実数 y に対して

$$\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つ。

□

► 命題. 3.9.

任意の $|x| < 1$ に対して

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

が成り立つ。

□

【証明】

右辺の収束半径は 1 である。 $|x| < 1$ に対して右辺を $f(x)$ とおくと、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Arctan}' x$$

となり、従って $\operatorname{Arctan} - f$ は $(-1, 1)$ 上で定数関数になる。0 での値を考えると、これが定数関数 0 であることがわかり、 $\operatorname{Arctan} = f$ が従う。

♣