



НЕБЕСНА МЕХАНИКА

2018-2019 г.

Йоанна Мурджева | ФН: 62008 | СИ

Първа Задача

Условие

Пресметнете координатите и скоростите на планетите в деня, в който сте родени.

Решение

В задачата на Кеплер орбитата на всяка планета зависи от шест елемента:

- a – дължина на голямата полу-ос на орбитата
- e – ексцентрицитета на орбитата
- i – наклонеността на плоскостта на орбитата
- l – средна аномалия
- $g + \theta$ – дължина на перихелия
- θ – дължина на възела

Пет от тези елементи са константи, единствено средната аномалия l е линейна функция на времето t .

Допълнителен елемент е ексцентричната аномалия u . В сила е уравнението на Кеплер:

$$l = u - e \cdot \sin u$$

Ексцентритетът e характеризира сплеснатостта на елипсата:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0,1), \quad \text{където } b \text{ е дължината на малката полуос}$$

Връзката на елиптичните елементи с декартовите координати в R^3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обръщаме $\theta, g + \theta$ в радиани (*π/180)

Обръщаме i в градуси (*π/180)

Стойностите на μ за планетите

Планета	μ
Меркурий	1/6023600
Венера	1/408523
Земя	1/328900,5
Марс	1/3098708
Юпитер	1/1047,34
Сатурн	1/3497,8
Уран	1/22902,9
Нептун	1/19042
Плутон	1/135000000

$$\gamma = 1 + \mu, \text{ където } \gamma = Gm_A$$

$$= 6.670 * 10^{-8} \frac{sm^3}{g * sec^2} \text{ е гравитационна константа}$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Величината n наричаме средно движение. Връзката между средната и ексцентричната аномалии: $l = u - e \cdot \sin(u)$ наричаме уравнение на Кеплер.

Въвеждаме времето от рождената дата до 01. 01. 2000 г. (t). Рождена дата: 15. 02. 1997 г., $t = 2.876712328767123$

От решението на задачата на Кеплер в декартови координати:

$$l = \sqrt{\gamma} \cdot a^{-\frac{3}{2}}(t - T_0) \Rightarrow l = n(t(2\pi) - T_0) = u - e \cdot \sin(u)$$

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin l))$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot a \left(\cos u - e; \sin u; \sqrt{(1 - e^2); 0} \right)$$

$$v = Q \cdot \frac{-\sin u; \cos u \cdot \sqrt{(1 - e^2); 0} \cdot a \cdot n}{1 - e \cdot \cos u}$$

Където Q е от Основна формула на сферичната тригонометрия

[Теорема] Всяка матрица $Q \in SO(3, R)$ може да се представи аналитично във вида:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos g - \sin \theta \sin g \cos i & -\cos \theta \sin g - \sin \theta \cos g \cos i & \sin \theta \sin i \\ \sin \theta \cos g + \cos \theta \sin g \cos i & -\sin \theta \sin g + \cos \theta \cos g \cos i & -\cos \theta \sin i \\ \sin g \sin i & \cos g \sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

където $\theta, g \in [0, 2\pi)$ и $i \in [0, \pi]$

Описаните процедури се повтарят за всяка планета по отделно:

	Меркурий	Венера	Земя	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
r	-0.027885	0.33674	-0.82012	-1.5909	2.7018	9.3438	11.322	14.0106	-14.2978
	-0.46191	-0.64372	0.55133	0.48505	-4.3449	1.4439	-16.233	-26.6687	-25.689
	-0.044667	-0.032548	0	-0.021397	-0.10844	-0.10535	-0.168269	-0.903005	-5.90033
v	1.3061	1.037	-0.57357	-0.20625	0.36761	-0.066508	0.18576	0.1604	0.17118
	-0.036536	0.53825	-0.8336	-0.70906	0.25221	0.31948	0.12011	0.085885	-0.099267
	0.10333	0.045233	0	-0.02174	0.0041244	0.013858	0.0022452	-0.0013237	-0.047031
 r 	0.4649	0.72721	0.98821	1.6634	5.1176	9.4553	19.7921	30.1385	29.9861
 v 	1.3107	1.1692	1.0119	0.73877	0.44583	0.32663	0.22122	0.18195	0.2034

Функции за реализиране на решението:

```
function kepler_elements(a, e, i, L, w, omega, mu, t)
    theta = omega*pi/180;
    g = (w - omega)*pi/180;
    i = i*pi/180;

    Tita = [ cos(theta) , -sin(theta), 0 ;
             sin(theta) ,  cos(theta), 0 ;
             0          ,  0        , 1 ] ;

    I = [ cos(i) , 0 , -sin(i) ;
          0      , 1 ,  0      ;
          sin(i) , 0 ,  cos(i) ] ;

    G = [ cos(g) , -sin(g) , 0 ;
          sin(g) ,  cos(g) , 0 ;
          0      ,  0      , 1 ] ;

    Q = Tita*I*G;

    gama = 1 + mu;
    n = sqrt(gama/a^3);
    to = ((w - L)/n)*pi/180;
    l = n*(-t*2*pi - to);
    u = l + e*sin(l + e*sin(l + e*sin(l)));

    r = Q*a*[cos(u)-e ; sin(u)*sqrt(1-e^2) ; 0 ];

    v = Q*[-sin(u);cos(u)*sqrt(1-e^2);0]*a*n/(1-e*cos(u));

    disp('Coordinates (r)')
    disp(num2str(r))
    disp(['|r| = ', num2str(norm(r))])

    disp('Speed (v)')
    disp(num2str(v))
    disp(['|v| = ', num2str(norm(v))])
end

function calculations(d)
    years = 2.876712328767123; %years from birth till 01.01.2000
    kepler_elements(d(1), d(2), d(3), d(4), d(5), d(6), d(7), years)
end
```

```

d = [0.387 0.205 7.004 252.250 77.457 48.330 1/6023600;
     0.723 0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;
     1 0.016 0 100.464 102.937 0 1/328900.5;
     1.523 0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;
     5.202 0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;
     9.536 0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;
     19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;
     30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;
     39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

planets = {'Mercury', 'Venus', 'Earth', 'Mars', 'Jupiter', 'Saturn', 'Uranus', 'Neptune', 'Pluto'};

for i = 1:9
    disp(char(planets(i)))
    calculations(d(i,:))
end

```

Втора Задача

Условие

Пресметнете елементите на Делоне и Поанкаре от I и II вид в деня, в който сте родени.

Решение

[От Теорема] Елементите на Делоне:

- L
- G
- θ
- l
- g
- θ

където (l, L) , (G, g) и (θ, θ) са спрегнати канонично променливи, се изразяват чрез орбиталните (елиптични) елементи:

- a – дължина на голямата полу-ос на орбитата
- e – ексцентрицитета на орбитата
- i – наклонеността на плоскостта на орбитата
- l – средна аномалия
- $g + \theta$ – дължина на перихелия
- θ – дължина на възела

както следва:

$$L = \mu \sqrt{\gamma} \sqrt{a}$$

$$G = \mu \sqrt{\gamma} \sqrt{a} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$\theta = \mu \sqrt{\gamma} \sqrt{a} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos i = G \cos i$$

Като при това l, g и θ съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне - $L, G, \theta, l, g, \theta$ са константи с хамилтониан:

$$\hat{H} = - \frac{\mu^3 \gamma^2}{2L^3}$$

Обръщаме θ в радиани (* $\pi/180$)

Обръщаме i в градуси (* $\pi/180$)

$$l = \sqrt{\gamma} \cdot a^{-\frac{3}{2}} (t - T_0)$$

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin l))$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

(T_0 : момента на преминаване през перихелия на планета (начало на епоха))

Въвеждаме времето от рождената дата до 01. 01. 2000 г. (t). Рождена дата: 15. 02. 1997 г., $t = 2.876712328767123$

$$l = n(t(2\pi) - T_0)$$

Чрез $\lambda = l + g + \theta$ (дължина на епоха) можем да изразим елементите от двете системи на Поанкаре.

Първа система (I) от шест елемента, характеризираща орбитите на планетите:

$$L, \quad L - G, \quad G - \theta,$$

$$l + g + \theta, \quad -g - \theta, \quad -\theta$$

И втора система (II):

$$L, \quad \xi := \sqrt{2(L - G)} \cos(g + \theta), \quad p := \sqrt{2(G - \theta)} \cos \theta$$

$$\lambda, \quad \eta := -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + \theta), \quad q := -\sqrt{2(G - \theta)} \sin \theta$$

Описаните процедури се повтарят за всяка планета по отделно.

Като резултат получаваме следните таблици:

	Меркурий			Венера			Земля		
L	1.0328e-07			2.0814e-06			3.0404e-06		
G	1.0108e-07			2.0814e-06			3.0400e-06		
Θ	1.0033e-07			2.0777e-06			3.0400e-06		
l	78.1282			30.2807			18.0318		
g	0.5084			0.9586			1.7966		
θ	0.8435			1.3383			0		
H	-2.1449e-07			-1.6928e-06			-1.5202e-06		
I	0.6221	0.0132	0.0045	0.8503	1.5305e-05	0.0015	1	1.2801e-04	0
	1.8025e-09	-1.3519	-0.8435	3.6327e-08	-2.2969	-1.3383	5.3066e-08	-1.7966	0
II	0.6221	1.4384e-05	2.5823e-05	0.8503	-5.7473e-06	1.9688e-05	1	- 6.2462e-06	0
	1.8025e-09	- 6.4652e-05	-2.9014e-05	3.6327e-08	-6.4729e-06	-8.3148e-05	5.3066e-08	- 2.7192e-05	0

	Марс			Юпитер			Сатурн		
L	3.9826e-07			0.0022			8.8298e-04		
G	3.9654e-07			0.0022			8.8174e-04		
Θ	3.9633e-07			0.0022			8.8091e-04		
l	9.9551			1.8667			-0.1305		
g	-1.2829			-1.4965			-0.3676		
θ	0.8650			1.7536			1.9838		
H	-1.0595e-07			-9.1860e-05			-1.4995e-05		
I	1.2341	0.0053	6.3977e-04	2.2808	0.0026	5.8999e-04	3.0880	0.0043	0.0029
	6.9510e-09	0.4179	-0.8650	3.8026e-05	-0.2571	-1.7536	1.5411e-05	-1.6161	-1.9838
II	1.2341	5.3698e-05	1.3181e-05	2.2808	0.0022	-1.9299e-04	3.0880	- 7.1412e-05	- 5.1684e-04
	6.9510e-09	2.3844e-05	-1.5466e-05	3.8026e-05	-5.6977e-04	-0.0010	1.5411e-05	-0.0016	-0.0012

	Уран			Нептун			Плутон		
L	1.9127e-04			2.8263e-04			4.6544e-08		
G	1.9106e-04			2.8262e-04			4.5090e-08		
Θ	1.9104e-04			2.8249e-04			4.3088e-08		
l	2.6984			-1.6372			0.3322		
g	1.6919			-1.5153			1.9856		
θ	1.2918			2.3001			1.9252		
H	-1.1377e-06			-8.5709e-07			-9.3807e-11		
I	4.3805	0.0048	3.9719e-04	5.4835	1.7548e-04	0.0026	6.2835	0.1963	0.2703
	3.3383e-06	-2.9837	-1.2918	4.9329e-06	-0.7848	-2.3001	8.1235e-10	-3.9107	-1.9252
II	4.3805	-6.4210e-04	5.1285e-05	5.4835	9.5162e-05	-3.4604e-04	6.2835	-3.8747e-05	-2.1959e-05
	3.3383e-06	-1.0223e-04	-1.7904e-04	4.9329e-06	-9.5042e-05	-3.8724e-04	8.1235e-10	3.7507e-05	-5.9354e-05

Функции за реализиране на решението

```
function elements(a, e, i, L, w, omega, mu, t)
    i = i*pi/180;
    n = sqrt(1/a^3);
    to = ((w - L)/n)*pi/180;

    gamma = 1 + mu;
    L = mu*sqrt(gamma*a)
    G = L*sqrt(1-e^2)
    bigTheta = G*cos(i)
    l = n*(t*2*pi - to)
    g = (w - omega)*pi/180
    theta = omega*pi/180
    H = - mu*gamma/(2*a)

    %First Poincare System of equations
    P11 = sqrt(a)
    P12 = (L-G)/(mu*sqrt(gamma))
    P13 = (G-bigTheta)/(mu*sqrt(gamma))
    P14 = L*pi/180
    P15 = -g-theta
    P16 = -theta

    %Second Poincare System of equations
    P21 = P11
    P22 = sqrt(2*(L-G))*cos(g+theta)
    P23 = sqrt(2*(G-bigTheta))*cos(theta)
    P24 = P14
    P25 = -sqrt(2*(L-G))*sin(g+theta)
    P26 = -sqrt(2*(G-bigTheta))*sin(theta)
end
```

```

d = [0.387 0.205 7.004 252.250 77.457 48.330 1/6023600;
     0.723 0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;
     1 0.016 0 100.464 102.937 0 1/328900.5;
     1.523 0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;
     5.202 0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;
     9.536 0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;
     19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;
     30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;
     39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

years = 2.876712328767123; %years from birth till 01.01.2000
planets = {'Mercury', 'Venus', 'Earth', 'Mars', 'Jupiter', 'Saturn', 'Uranus', 'Neptune', 'Pluto'};

for i = 1:9
    disp(char(planets(i)))
    elements(d(i,1), d(i,2), d(i,3), d(i,4), d(i,5), d(i,6), d(i,7), years)
end

```

Ресурси

1. Стойности на Кеплеровите елементи -
<http://www.met.rdg.ac.uk/~ross/Astronomy/Planets.html>
2. За реализацията на функциите е използвана програмата MatLab R2015A