2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【详解】先求出函数的导数,再求函数在某点的微分.

方法 1：利用恒等变形得 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y'=e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

方法 2：两边取对数，$\ln y=x\ln(1+\sin x)$，对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $$y'=(1+\sin x)^x\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

故 $$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

(2)曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 ________.

【详解】由求斜渐近线公式 $y=ax+b$ (其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$)，得：

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

(3)【详解】通过还原变换求定积分

方法 1：令 $x=\sin t\quad(0<t<\dfrac{\pi}{2})$,则

$$\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{2-\sin^2 t}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

方法 2：令 $\sqrt{1-x^2}=t$，有 $x^2=1-t^2$, 所以有 $xdx=-tdt$，其中 $0<t<1$.

$$\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{-dt}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

(4)【答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解，有公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$ (其中 C 是常数).

将原方程等价化为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，于是利用公式得方程的通解

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln xdx+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2}$$, (其中 C 是常数)

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

(5)【详解】由题设，

$$\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right],$$

又因为 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$， $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\,\underline{\underline{\arcsin x=u}}\,\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin u}=1$

所以 $\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{2k}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4k}$

由题设 $x\to0$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，所以 $\frac{3}{4k}=1$， 得 $k=\frac{3}{4}$.

(6)【答案】2

【详解】

方法 1：因为$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，

$$(\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},$$

故 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$，

记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式，于是有

$$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2.$$

方法 2：利用行列式性质(在行列式中，把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上，行列式的值不变；从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{[2]-[1]}{\underset{[3]-[1]}{====}}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|\overset{[3]-2[2]}{====}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|\overset{[1]-[3]}{\underset{[2]-3[3]}{====}}2|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|\overset{[1]-[2]}{====}2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

又因为$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，故$|B|=2|A|=2$.

二、选择题

(7)【答案】C

【详解】分段讨论，并应用夹逼准则，

当$|x|<1$时，有$\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2}$，命$n\to\infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，由夹逼准则得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$；

当$|x|>1$时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}\,|x|^3$，命$n\to\infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$，由夹逼准则得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3\left(\frac{1}{|x|^{3n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ \left|x^3\right|, & |x|\ge 1\end{cases}$

再讨论 $f(x)$ 的不可导点. 按导数定义，易知 $x=\pm 1$ 处 $f(x)$ 不可导，故应选(C).

(8)【答案】A

【详解】

方法 1：应用函数奇偶性的定义判定，

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，亦即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C$，令 $t=-k$，则有 $dt=-dk$，

所以 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C=-\int_0^x f(-k)dk+C=\int_0^x f(k)dk+C=F(x)$，

从而 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

方法 2：排除法，

令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，排除(B)、(C);

令 $f(x)=x$， 则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D);

(9)【答案】A

【详解】当 $x=3$ 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t_1=1, t_2=-3$（舍去，此时 y 无意义），

曲线 $y=y(x)$ 的导数为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(t+1)^2}$，

所以曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$（即 $t=1$）处的切线斜率为 $\frac{1}{8}$

于是在该处的法线的斜率为 -8，所以过点 $(3,\ln 2)$ 的法线方程为

$$y-\ln 2=-8(x-3),$$

令 y =0, 得其与 x 轴交点的横坐标为：$\frac{1}{8}\ln 2+3$，故应(A).

(10)【答案】D

【详解】由于积分区域D是关于$y=x$对称的，所以x与y互换后积分值不变，所以有

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]d\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.$$ 应选(D).

(11)【答案】B

【详解】因为$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

(12)【答案】D

【详解】由于函数$f(x)$在$x=0$，$x=1$点处无定义，因此是间断点.

且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以$x=0$为第二类间断点；

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$，所以$x=1$为第一类间断点，故应选(D).

(13)【答案】B

【详解】

方法 1：利用线性无关的定义

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

设有数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0 \Rightarrow (k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0.$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，则

$$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1=0, \\ k_2\lambda_2=0. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$ 时，方程只有零解，则 $k_1=0,k_2=0$，此时 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关；反过来，若 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2\neq 0$（否则，α_1 与 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法 2：将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

由于 $\left(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，知 α_1,α_2 线性无关. 若 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则 $r\left(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=2$，则

$$2=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)\leq \min\left\{r\left(\alpha_1,\alpha_2\right), r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\}\leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\leq 2,$$

故 $2\leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\leq 2$ 从而 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2$，从而 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$

若 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$，则 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2$，又 α_1,α_2 线性无关，则

$$r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)=r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2,$$

则

$$r\left(\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right)=2$$

从而α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0.$故应选(B).

方法 3：利用矩阵的秩

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

因$\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1,α_2线性无关，又

$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，故$\alpha_1$， $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=2$

又因为 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)\overset{将\alpha_1的-\lambda_1倍加到第2列}{=}\left(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2\right)$

则$r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$(若$\lambda_2=0$，与$r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2$矛盾)

方法 4：利用线性齐次方程组

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

由$\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1,α_2线性无关，

$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关

$\Leftrightarrow\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$线性无关

$\Leftrightarrow\left|\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right|\neq 0$，

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)X=0$只有零解，又$\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$只有零解

$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2$线性无关时$\left(\alpha_1,\alpha_2\right)Y=0$只有零解，故$Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$，只有零解，

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$的系数矩阵是个可逆矩阵，

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$，故应选(B)

方法 5： 由$\lambda_1 \neq \lambda_2$，α_1, α_2线性无关

α_1, α_2分别是特征值λ_1, λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$.

向量组$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2$和向量组$(\mathrm{II}): \alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$. 显然向量组$(\mathrm{II})$可以由向量组$(\mathrm{I})$线性表出；当$\lambda_2 \neq 0$时，不论$\lambda_1$的取值如何，向量组$(\mathrm{I})$可以由向量组$(\mathrm{II})$线性表出

$$\alpha_1 = \alpha_1，\quad \alpha_2 = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1) + \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\alpha_1 + \frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1 + \alpha_2),$$

从而(I)，(II)是等价向量组$\Rightarrow$当$\lambda_2 \neq 0$时，$r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 2$

(14)【答案】(C)
【详解】

方法 1： 由题设，存在初等矩阵E_{12}(交换n阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得)，使得$E_{12}A = B$，(A进行行变换，故A左乘初等矩阵)，于是 $B^* = (E_{12}A)^* = A^*E^*_{12}$，

又初等矩阵都是可逆的，故 $E_{12}{}^{-1} = \dfrac{E_{12}{}^*}{|E_{12}|}$，

又$|E_{12}| = -|E| = -1$(行列式的两行互换，行列式反号)，$E_{12}{}^{-1} = E_{12}$，故

$$B^* = A^*E^*_{12} = A^*|E_{12}|\cdot E_{12}{}^{-1} = -A^*E_{12}{}^{-1} = -A^*E_{12},$$

即$A^*E_{12} = -B^*$,可见应选(C).

方法 2： 交换A的第一行与第二行得B，即$B = E_{12}A$.

又因为A是可逆阵，$|E_{12}| = -|E| = -1$，故$|B| = |E_{12}A| = |E_{12}||A| = -|A| \neq 0$，

所以B可逆，且$B^{-1} = (E_{12}A)^{-1} = A^{-1}E_{12}$.

又 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}, B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}$，故 $\frac{B^*}{|B|}=\frac{A^*}{|A|}E_{12}$，又因 $|B|=-|A|$，故 $A^*E_{12}=-B^*$.

三、解答题

(15)【详解】 作积分变量代换，命 $x-t=u$，则

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du,$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}\overset{洛必达法则}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$

$$\overset{整理}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}\overset{上下同除x}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}$$

而 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{x'}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

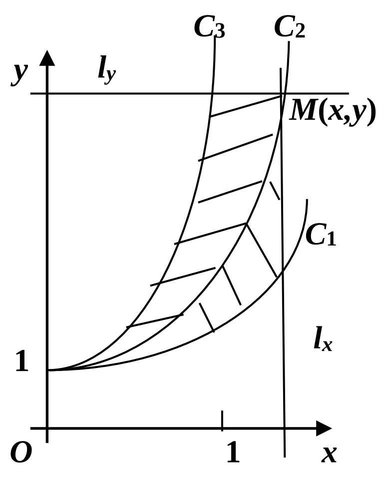
所以由极限的四则运算法则得，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\lim_{x\to 0}f(x)+\lim\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}\overset{f(0)\neq 0}{=}\frac{1}{2}.$$

(16) 【详解】由题设图形知，C_3 在 C_1 的左侧，根据平面图形的面积公式得，

$$S_1(x)=\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)]dt=\frac{1}{2}(e^x-x-1),$$

$$S_2(y)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$



由 $S_1(x)=S_2(y)$，得

$$\frac{1}{2}(e^x-x-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

注意到 $M(x,y)$ 是 $y=e^x$ 的点，

于是 $\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt$

两边对 y 求导得 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{y})=\ln y-\varphi(y)$，

整理上面关系式得函数关系为：$x=\varphi(y)=\ln y-\frac{y-1}{2y}.$

(17)【详解】由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点(0,0)的切线，由导数的几何意义知 $f'(0)=2$. 同理可得 $f'(3)=-2$. 另外由点(3,2)是曲线 C 的一个拐点知 $f''(3)=0$.

由分部积分公式，

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=(3^2+3)f''(3)-(0^2+0)f''(0)-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=-\int_0^3 (2x+1)df'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=-(2\times 3+1)f'(3)+(2\times 0+1)f'(0)+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=16+2[f(3)-f(0)]=20.$$

(18)【详解】 由题设 $x=\cos t(0<t<\pi)$，有 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，由复合函数求导的链式法则得

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},\quad y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t}),$$

代入原方程，$(1-\cos^2 t)[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t})-\cos t(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt})+y=0$，

化简得 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$，其特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm i$，通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$

所以 $y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$，

将初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，代入得，$1=C_1\times 0+C_2\sqrt{1-0^2}=C_2$，即 $C_2=1$.

而 $y'=C_1x'+C_2(\sqrt{1-x^2})'=C_1+\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$，

将 $y'\Big|_{x=0}=2$ 代入得 $2=C_1+\dfrac{2\times 0}{2\sqrt{1-0^2}}=C_1$，即 $C_1=2$.

将 $C_1=2,C_2=1$ 代入通解公式得满足条件的特解为 $y=2x+\sqrt{1-x^2}$，$-1<x<1$.

(19)【详解】

(I) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在[0，1]上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，于是由闭区间连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(II) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是 $$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

(20)【详解】由 $dz=2xdx-2ydy$ 知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$. 对 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ 两边积分得 $z=f(x,y)=x^2+c(y)$. 将 $z(x,y)=x^2+c(y)$ 代入 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ 得 $c'(y)=2y$. 所以 $c(y)=y^2+c$. 所以 $z=x^2-y^2+c$.再由 $x=1,y=1$ 时 $z=2$ 知，$c=2$. 于是所讨论的函数为 $z=x^2-y^2+2$.

求 z 在 $x^2+\dfrac{y^2}{4}<1$ 中的驻点. 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ 得驻点 $(0,0)$，对应的 $z=f(0,0)=2$.

讨论 $z=x^2-y^2+2$ 在 D 的边界 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的最值，有两个方法.

方法 1：把 $y^2=4(1-x^2)$ 代入 z 的表达式，有

$$z=x^2-y^2+2=5x^2-2,\quad -1\le x\le 1$$

$$z'_x=10x$$

命 $z'_x=0$ 解得 $x=0$，对应的 $y=\pm2$， $z\big|_{x=0,y=\pm2}=-2$

还要考虑 $-1\le x\le 1$ 的端点 $x=\pm1$，对应的 $y=0$， $z\big|_{x=\pm1,y=0}=3$

由 $z=2,z=-2,z=3$ 比较大小，故

$\min z=-2$(对应于 $x=0$， $y=\pm2$)， $\max z=3$(对应于 $x=0$， $y=\pm2$)

方法 2：用拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1)$

解方程组 $$\begin{cases} F'_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}+2\lambda x=2(1+\lambda)x=0, \\ F'_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\lambda y}{2}=-2y+\dfrac{1}{2}\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$$

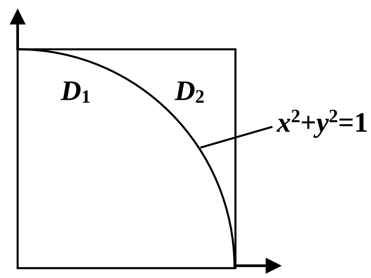
由上面的第一个方程解得 $x=0$ 或 $\lambda=-1$：当 $x=0$ 时由最后一个方程解得 $y=\pm2$；当 $\lambda=-1$ 是由第二个方程解得 $y=0$，这时由最后一个方程解得 $x=\pm1$. 故解得 4 个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$.计算对应 z 的值：

$$z\big|_{(0,2)}=-2,\quad z\big|_{(0,-2)}=-2,\quad z\big|_{(1,0)}=3,\quad z\big|_{(-1,0)}=3$$

再与 $z\big|_{(0,0)}=2$ 比较大小，结论同方法 1.

(21)【详解】D：$x^2+y^2-1=0$ 为以 O 为中心半径为 1 的圆周，划分 D 如下图为 D_1 与 D_2 .

这时可以去掉绝对值符号 $|x^2+y^2-1|=\begin{cases} x^2+y^2-1, & (x,y)\in D_2 \\ 1-x^2-y^2, & (x,y)\in D_1 \end{cases}$



方法 1： $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

后一个积分用直角坐标做，

$$\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)dy$$

$$=\int_0^1[(x^2-1)-(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=\int_0^1[(x^2-\frac{2}{3})+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1\frac{2}{3}dx+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2t}{2})^2dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\ dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}+2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times 0=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.$$

前一个积分用极坐标做，

$$\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $\displaystyle\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\frac{\pi}{8}+-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$

方法 2：由于区域 D_2 的边界复杂，计算该积分较麻烦，可以将 D_2 内的函数“扩充”到整个区域 $D=D_1\bigcup D_2$，再减去“扩充”的部分，就简化了运算．即

$$\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

因此 $\displaystyle\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)d\sigma$

$$=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint_D(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

由极坐标 $\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{8}$.

而 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma=\int_0^1dy\int_0^1(x^2+y^2-1)dx=\int_0^1[\frac{x^3}{3}+(y^2-1)x]\Big|_0^1dy$

$$=\int_0^1[\frac{1}{3}+y^2-1]dy=\int_0^1(y^2-\frac{2}{3})dy=[\frac{y^3}{3}-\frac{2}{3}y]\Big|_0^1=-\frac{1}{3}$$

所以 $\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|d\sigma=2\times\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

(22)【详解】

方法 1：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故

$r(A)<3$，(若 $r(A)=3$，则任何三维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{把第2、3行加到第1行}}\begin{vmatrix}2+a&2+a&2+a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{提取第1行的公因子}(2+a)}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{3行}-\text{1行}]{\text{2行}-\text{1行}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第3列展开}}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&0\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2=0$$

(其中 $(-1)^{1+3}$ 指数中的 1 和 3 分别是1所在的行数和列数)

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=[1,1,1]^T$，则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但 $\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出(因为方程组 $\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=-2\\k_1+k_2+k_3=1\\k_1+k_2+k_3=4\end{cases}$ 无解)，故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时,由于

$$[B\vdots A]=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2 & \vdots & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[3行+1行\times 2]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因 $r(B)=2\neq r(B\vdots\alpha_2)=3$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，故方程组 $BX=\alpha_2$ 无解，故 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，这和题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

因此 $a=1$.

方法 2：对矩阵 $\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换，有

$$\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 1 & a & a & \vdots & 1 & a & 1\\ a & 4 & a & \vdots & a & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 4+2a & 3a & \vdots & 0 & 1-a & 1-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行-2行\times 2}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-4 & \vdots & 0 & 3(1-a) & 1-a\end{bmatrix},$$

当 $a=-2$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$，不存在非零常数 k_1,k_2,k_3，

使得 $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$，$\alpha_2$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，因此 $a\neq-2$；

当 $a=4$ 时，

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -9 & -3\end{bmatrix},$$

α_3 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，不存在非零常数 k_1,k_2,k_3，使得 $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$. 因此 $a\neq4$.

而当$a\neq -2$且$a\neq 4$时，秩$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示. 又

$$\overline{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\1&a&1&\vdots&1&a&a\\a&1&1&\vdots&a&4&a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&\vdots&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&\vdots&0&4+2a&3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&\vdots&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&\vdots&0&6+3a&4a+2\end{bmatrix},$$

由题设向量组β_1,β_2,β_3不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则方程组$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_1$或$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_2$或$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_3$无解，故系数矩阵的秩$\neq$增广矩阵的秩，故$r(\overline{B})\neq r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$.

又当$a\neq -2$且$a\neq 4$时，$r(\overline{B})=3$，则必有$a-1=0$或$2-a-a^2=0$，即$a=1$或$a=-2$.

综上所述，满足题设条件的a只能是：$a=1$.

方法 3：记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，对矩阵$(A\vdots B)$作初等行变换，得

$$(A\vdots B)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\1&a&1&\vdots&1&a&a\\a&1&1&\vdots&a&4&a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&\vdots&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&\vdots&0&4+2a&3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&\vdots&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&\vdots&0&6+3a&4a+2\end{bmatrix},$$

由于β_1,β_2,β_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故$r(A)<3$，(若$r(A)=3$，则任何三维向量都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{把第2、3行}\atop\text{加到第1行}}}\begin{vmatrix}2+a&2+a&2+a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{提取第1行的}\atop\text{公因子}(2+a)}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{2\text{行}-1\text{行}\atop 3\text{行}-1\text{行}}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第3列展开}}}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&0\end{vmatrix}$$

$$=-(2+a)(a-1)^2=0$$

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时,

$$(A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&1&1\vdots1&-2&2\\0&0&0\vdots0&3&3\\0&0&0\vdots0&9&6\end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但由于 $r(A)=1\neq r(A\vdots\beta_2)=2$, 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等, 方程组 $Ax=\beta_2$ 无解, $\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. 或由于 $r(A)=1\neq r(A\vdots\beta_3)=2$, 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_3$ 无解， β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时,

$$(A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&1&-2\vdots1&-2&2\\0&-3&3\vdots0&0&0\\0&0&0\vdots0&0&-6\end{pmatrix},$$

因 $r(A)=2\neq r(A\vdots\beta_3)=3$,, 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等, β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但 $r(B)=2\neq r(B\vdots\alpha_2)=3$(或 $r(B\vdots\alpha_3)=3$)，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，即 $BX=\alpha_2$(或 $BX=\alpha_3$)无解，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，与题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

故 $a=1$.

(23)【详解】 由 $AB=0$ 知，B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解，且 $r(A)+r(B)\le 3$.(3 是 A 的列数或 B 的行数)

(1) 若 $k\neq 9$，β_1,β_3 不成比例，β_1,β_2 成比例，则 $r(B)=2$，方程组 $Ax=0$ 的解向量中至少有两个线性无关的解向量，故它的基础解系中解向量的个数 ≥ 2，又基础解系中解向量的个数=未知数的个数 $-r(A)=3-r(A)$，于是 $r(A)\leq 1$.

又矩阵 A 的第一行元素 (a,b,c) 不全为零，显然 $r(A)\geq 1$，故 $r(A)=1$．可见此时 $Ax=0$ 的基础解系由 $3-r(A)=2$ 个线性无关解向量组成，β_1,β_3 是方程组的解且线性无关，可作为其基础解系，故 $Ax=0$ 的通解为：

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数.}$$

(2) 若 $k=9$，则 β_1,β_2,β_3 均成比例，故 $r(B)$ =1，从而 $1\leq r(A)\leq 2$. 故 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$.

①若 $r(A)=2$，则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成，β_1 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=0$ 的通解为：$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},k_1$ 为任意常数.

②若 $r(A)=1$，则 A 的三个行向量成比例，因第 1 行元素 (a,b,c) 不全为零，不妨设 $a\neq 0$，则 $Ax=0$ 的同解方程组为：$ax_1+bx_2+cx_3=0$，系数矩阵的秩为 1，故基础解系由 $3-1=2$ 个线性无关解向量组成，选 x_2,x_3 为自由未知量，分别取 $x_2=1,x_3=0$ 或 $x_2=0,x_3=1$，方程组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$，则其通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2$ 为任意常数.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y=\dfrac{1}{5}$

【详解】 由水平渐近线的定义及无穷小量的性质----“无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量”可知

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{5-0}=\frac{1}{5}$$

$x\to 0$ 时 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量， $\sin x$ ， $\cos x$ 均为有界量. 故， $y=\dfrac{1}{5}$ 是水平渐近线.

(2)【答案】 $\dfrac{1}{3}$

【详解】按连续性定义，极限值等于函数值，故

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2}{x^3}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

注： $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，可以采用洛必达法则；等价无穷小量的替换 $\sin x^2 \sim x^2$

(3)【答案】$1/2$

【详解】

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

(4) 【答案】Cxe^{-x} .

【详解】分离变量,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-x)}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{(1-x)}{x}dx\Rightarrow\frac{dy}{y}=(\frac{1}{x}-1)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx-\int dx$$

$$\Rightarrow\ln y=\ln x-x+c\ \Rightarrow e^{\ln y}=e^{\ln x-x+c}\ \Rightarrow y=Cxe^{-x}$$

(5)【答案】$-e$

【详解】题目考察由方程确定的隐函数在某一点处的导数.

在原方程中令 $x=0\Rightarrow y(0)=1$.

将方程两边对 x 求导得 $y'=-e^y-xe^y y'$，令 $x=0$ 得 $y'(0)=-e$

(6) 【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得，$BA-2E=B\Rightarrow B(A-E)=2E$，两边取行列式，得

$$|B(A-E)|=|2E|=4|E|=4$$

其中，$|A-E|=\left|\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，　$|2E|=2^2|E|=4$

因此，$|B|=\dfrac{|2E|}{|A-E|}=\dfrac{4}{2}=2$.

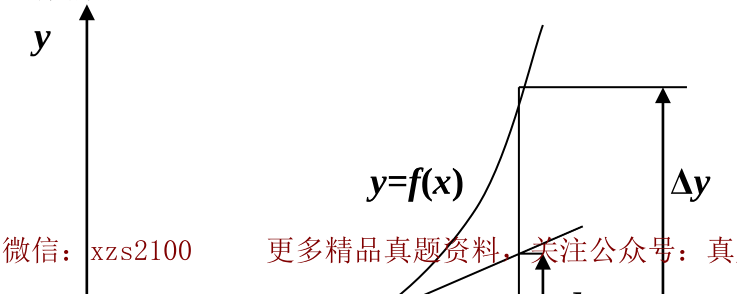
二、选择题.

(7)【答案】 A

【详解】

方法 1： 图示法.

因为 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加；因为 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 是凹函数，又□$x>0$，画 $f(x)=x^2$ 的图形



结合图形分析，就可以明显得出结论：$0 < dy < \Delta y$.

方法 2：用两次拉格朗日中值定理

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \text{(前两项用拉氏定理)}$$

$$= f'(\xi)\Delta x - f'(x_0)\Delta x \qquad \text{(再用一次拉氏定理)}$$

$$= f''(\eta)(\xi - x_0)\Delta x, \qquad \text{其中 } x_0 < \xi < x_0 + \Delta x, x_0 < \eta < \xi$$

由于 $f''(x) > 0$，从而 $\Delta y - dy > 0$. 又由于 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$，故选 $[A]$

方法 3：　用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

其中 $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^n$. 此时 n 取 1 代入，可得

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

又由 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$，选 (A) .

(8)【答案】(B)

【详解】

方法 1：赋值法

特殊选取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，满足所有条件，则 $\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$.

它是连续的偶函数. 因此，选 (B)

方法 2：显然 $f(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上可积，于是 $F(x) \overset{\text{记}}{=} \int_0^x f(t)dt$ 处处连续，又

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^{-x} f(-t)dt \overset{s=-t}{=} \int_0^x f(s)ds = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数 . 选 (B).

(9)【答案】(C)

【详解】利用复合函数求导法

$h(x)=e^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导 $\Rightarrow h'(x)=g'(x)e^{1+g(x)}$

将 $x=1$ 代入上式，$\Rightarrow 1=2e^{1+g(1)} \Rightarrow g(1)=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1$. 故选 (C).

(10)【答案】(C)

【详解】题目由二阶线性常系数非齐次方程的通解，反求二阶常系数非齐次微分方程，分两步进行，先求出二阶常系数齐次微分方程的形式，再由特解定常数项.

因为 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 是某二阶线性常系数非齐次方程的通解，所以该方程对应的齐次方程的特征根为 1 和-2，于是特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2)=\lambda^2+\lambda-2=0$，对应的齐次微分方程为 $y''+y'-2y=0$

所以不选 (A) 与 (B)，为了确定是 (C) 还是 (D)，只要将特解 $y^*=xe^x$ 代入方程左边，计算得 $(y^*)''+(y^*)'-2y^*=3e^x$，故选 (D).

(11)【答案】(C)

【详解】记 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则区域 D 的极坐标表示是：$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题，画出积分区间，结合图形可以看出，直角坐标的积分范围（注意 $y=x$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的交点是 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$），于是 $D:0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}, y\le x\le\sqrt{1-y^2}$

所以，原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$. 因此选 (C)

(12)【答案】D

【详解】

方法 1： 化条件极值问题为一元函数极值问题。

已知 $\varphi(x_0,y_0)=0$，由 $\varphi(x,y)=0$，在 (x_0,y_0) 邻域，可确定隐函数 $y=y(x)$，满足 $y(x_0)=y_0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}$。

(x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x=x_0$ 是 $z=f(x,y(x))$ 的极值点。它的必要条件是

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}\right|_{x=x_0}=0$$

若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$，或 $\varphi'_x(x_0,y_0)=0$，因此不选 (A)，(B).

若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$ (否则 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}\neq 0$). 因此选 (D)

方法 2：用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，有

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 & (1) \\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 & (2) \\ F'_\lambda=\varphi'(x,y)=0 \end{cases}$$

因为 $\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以 $\lambda=-\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$，代入(1)得

$$f'_x(x_0,y_0)=-\frac{f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$

若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$，选 (D)

(13) 【答案】A

【详解】

方法 1：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则由线性相关定义存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

为了得到 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 的形式，用 A 左乘等式两边，得

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0 \qquad ①$$

于是存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得①成立，所以 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

方法 2：如果用秩来解,则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质，它们是:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$；2. $r(AB)<r(B)$.

矩阵 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，设 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则由 $r(AB)<r(B)$ 得 $r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$. 所以答案应该为$(A)$.

(14) 【答案】B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，即 $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A \underline{\underline{\text{记}}} PA$

将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，即 $C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underline{\underline{\text{记}}} BQ$

因为 $PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$，故 $Q=P^{-1}E=P^{-1}$.

从而 $C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$,故选(B).

三、解答题

(15) 【详解】

方法 1：用泰勒公式

将 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 代入题设等式整理得

$$1+(B+1)x+(C+B+\frac{1}{2})x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)+o(x^3)=1+Ax+o(x^3)$$

比较两边同次幂函数得 $\begin{cases}B+1=A\\ C+B+\dfrac{1}{2}=0\\ \dfrac{B}{2}+C+\dfrac{1}{6}=0\end{cases}$，由此可解得 $A=\dfrac{1}{3}$， $B=-\dfrac{2}{3}$， $C=\dfrac{1}{6}$

方法 2： 用洛必达法则. 由 $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3),(x\to 0)$

$$\Rightarrow \quad J\overset{(\text{记})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}=0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+e^x(B+2Cx)-A}{3x^2}$$

要求分子极限为 0，即 $1+B-A=0$，否则 $J=\infty$

$$\Rightarrow \quad J=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+2e^x(B+2Cx)+2e^xC}{6x}$$

要求分子极限为 0，即 $1+2B+2C=0$，否则 $J=\infty$

$$\Rightarrow \qquad J=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+3e^x(B+2Cx)+6e^xC}{6}=\frac{1+3B+6C}{6}=0$$

$$\Rightarrow \qquad 1+3B+6C=0$$

所以

$$\begin{cases}1+B-A=0\\1+2B+2C=0\\1+3B+6C=0\end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases}A=\dfrac{1}{3}\\B=-\dfrac{2}{3}\\C=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

(16)【详解】题目考察不定积分的计算，利用变量替换和分部积分的方法计算.

$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=\int\frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}\cdot e^xdx=\int\frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}de^x\underline{\underline{\text{令}e^x=t}}\int\frac{\arcsin t}{t^2}dt$$

$$=-\int\arcsin t\,d(\frac{1}{t})=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{tdt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}}$$

$$\underline{\underline{\text{令}\sqrt{1-t^2}=u}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{du^2}{u^3-u}=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{du}{u^2-1}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

所以 $$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+C$$

(17)【详解】积分区域对称于 x 轴，$\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}y$ 为 y 的奇函数，

从而知 $$\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$$

所以 $$I=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy\underline{\underline{\text{极坐标}}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

(18)【详解】(I) 由于 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x<x$，于是 $0<x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$，说明数列 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$．由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.记为 A.

递推公式两边取极限得 $A=\sin A,\ \therefore A=0$

(II) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，为“$1^\infty$”型.

因为离散型不能直接用洛必达法则，先考虑 $\lim\limits_{t\to0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}$

$$\lim_{t\to0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{-\sin t}{6t}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

(19) 【详解】令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，只需证明 $0<x<\pi$时，$f(x)$ 单调增加(严格)

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$$

$\therefore f'(x)$ 单调减少(严格)，

又 $f'(\pi)=\pi\cos\pi+\pi=0$，故 $0<x<\pi$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加(严格)

由$b>a$有$f(b)>f(a)$　　得证

(20) 【详解】(I)由于题目是验证，只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$= f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)} + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

同理 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)} + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$ 成立.

(II) 令 $f'(u)=p$ 于是上述方程成为$\frac{dp}{du}=-\frac{p}{u}$，则$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{du}{u}+c$，

即 $\ln|p|=-\ln u+c$，所以 $f'(u)=p=\frac{c}{u}$

因为 $f'(1)=1$，所以 $c=1$，得 $f(u)=\ln u+c_2$

又因为 $f(1)=0$，所以 $c_2=0$，得 $f(u)=\ln u$

(21)【详解】

方法 1：计算该参数方程的各阶导数如下

(I) $\frac{dx}{dt}=2t,\frac{dy}{dt}=4-2t,\frac{dy}{dx}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0 \quad (t>0\text{处})$$

所以曲线L在$t>0$处是凸的

(II) 切线方程为$y-0=\left(\frac{2}{t}-1\right)(x+1)$，设$x_0=t_0^2+1$，$y_0=4t_0-t_0^2$，

则 $4t_0-t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2), 4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2)$

得 $t_0^2+t_0-2=0,(t_0-1)(t_0+2)=0 \quad \because t_0>0 \quad \therefore t_0=1$

所以，切点为(2，3)，切线方程为$y=x+1$

(III) 设L的方程$x=g(y)$，则 $S=\int_0^3\left[\left(g(y)-(y-1)\right)\right]dy$

由 $t^2-4t+y=0$ 解出$t=2\pm\sqrt{4-y}$ 得$x=\left(2\pm\sqrt{4-y}\right)^2+1$

由于点(2，3)在 L 上，由 $y=3$得$x=2$, 可知 $x=\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2+1=g(y)$

所以 $S=\int_0^3\left[\left(9-y-4\sqrt{4-y}\right)-(y-1)\right]dy=\int_0^3(10-2y)dy-4\int_0^3\sqrt{4-y}dy$

$$=(10y-y^2)\Big|_0^3+4\int_0^3\sqrt{4-y}d(4-y)=21+4\times\frac{2}{3}\times(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

$$=21+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

方法 2：(I) 解出 $y=y(x)$：由 $t=\sqrt{x-1}$ $(x\ge1)$ 代入 y 得 $y=4\sqrt{x-1}-x+1$.

于是$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}-1$ ，$\frac{d^2y}{dx^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0$ $(x>1)$ $\Rightarrow$ 曲线L是凸的 .

(II) L 上任意点 (x_0,y_0) 处的切线方程是 $y-y_0=(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1)(x-x_0)$，其中 $x_0>1$($x_0=1$时不合题意).

令 $x=-1$, $y=0$，得 $-4\sqrt{x_0-1}+x_0-1=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0)$

令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$ ，得 $-4t_0+t_0{}^2=(\frac{2}{t_0}-1)(-2-t_0{}^2)$.

其余同方法 1，得$t_0=1$

(III) 所求图形面积

$$S=\frac{9}{2}-\int_1^2y(x)dx=\frac{9}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx$$

$$=\frac{9}{2}-(4\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_1^2=\frac{9}{2}-(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+1)=\frac{9}{2}-\frac{13}{6}=\frac{7}{3} .$$

(22) 【详解】(I)系数矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}$未知量的个数为$n=4$，且又$AX=b$有三个线性无关解，设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程组的 3 个线性无关的解，则$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$是$AX=0$的两

个线性无关的解. 因为$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$线性无关又是齐次方程的解，于是$AX=0$的基础解系中解的个数不少于 2, 得$4-r(A)\ge 2$，从而$r(A)\le 2$.

又因为A的行向量是两两线性无关的, 所以$r(A)\ge 2$. 所以$r(A)=2$.

(II)对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$[A|b]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&|-1\\4&3&5&-1&|-1\\a&1&3&b&|\ 1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3]+[1]\times(-a)}]{[2]+[1]\times(-4)}\begin{bmatrix}1&1&1&1&|-1\\0&-1&1&-5&|\ 3\\0&1-a&3-a&b-a&|1+a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times(1-a)}\begin{bmatrix}1&1&1&1&|-1\\0&-1&1&-5&|\ 3\\0&0&4-2a&4a+b-5&|4-2a\end{bmatrix},$$

由$r(A)=2$，得$\begin{cases}4-2a=0\\4a+b-5=0\end{cases}$， 即$a=2,\ \ b=-3$.

所以$[A|b]$作初等行变换后化为; $\begin{bmatrix}1&0&2&-4&|\ 2\\0&-1&-1&5&|-3\\0&0&0&0&|\ 0\end{bmatrix}$,

它的同解方程组 $\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4\\x_2=-3+x_3-5x_4\end{cases}$ ①

①中令$x_3=0,x_4=0$求出$AX=b$的一个特解$(2,-3,0,0)^T$；

$AX=0$的同解方程组是$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$ ②

取$x_3=1,x_4=0$,代入②得$(-2,1,1,0)^T$；取$x_3=0,x_4=1$, 代入②得$(4,-5,0,1)^T$. 所以$AX=0$的基础解系为$(-2,1,1,0)^T$， $(4,-5,0,1)^T$

所以方程组$AX=b$的通解为:

$$(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T，\ c_1,c_2\text{为任意常数}$$

(23) 【详解】(I) 由题设条件$A\alpha_1=0=0\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\alpha_2$，故α_1,α_2是A的对应于$\lambda=0$的特征向量，又因为α_1,α_2线性无关，故$\lambda=0$至少是A的二重特征值. 又因为A的每行元素之和为3，所以有$A(1,1,1)^T=(3,3,3)^T=3(1,1,1)^T$，由特征值、特征向量的定义，

$\alpha_0=(1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量，特征值为 $\lambda_3=3$，λ_3 只能是单根，$k_3\alpha_0,k_3\neq 0$ 是全体特征向量，从而知 $\lambda=0$ 是二重特征值.

于是 A 的特征值为 $3,0,0$；属于 3 的特征向量：$k_3\alpha_3,k_3\neq 0$；属于 0 的特征向量：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，k_1,k_2 不都为 0.

(Ⅱ) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化 .

先将 α_0 单位化，得 $\eta_0=(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\ )^T$.

对 α_1,α_2 作施密特正交化，得 $\eta_1=(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\ )^T$,□$\eta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\ )^T$.

作 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 Q 是正交矩阵,并且 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】B

【详解】

方法 1：排除法：由几个常见的等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，

$$e^x - 1 \sim x; \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x;\ 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2},$$ 当 $x \to 0^+$ 时，此时

$\sqrt{x} \to 0$，所以 $1 - e^{\sqrt{x}} \sim (-\sqrt{x}); \sqrt{1\ +\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x};\ 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2$，可以排除 A、C、D，所以选(B).

方法 2： $$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln\frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}} = \ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]$$

当 $x \to 0^+$ 时，$1-\sqrt{x} \to 1$，$\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \to 0$，又因为 $x \to 0$ 时，$\ln\left(1+x\right) \sim x$，

所以 $\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}] \sim \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim x+\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) \sim \sqrt{x}$，选(B).

方法 3： $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} \xlongequal{\text{洛}} \lim_{x\to0^+}\frac{\left[\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})\right]'}{\left(\sqrt{x}\right)'} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+x\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{\left(1+x\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

设 $\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{\left(1+x\right)\left(1-\sqrt{x}\right)} = \frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-\sqrt{x}}$，则 $A\left(1-\sqrt{x}\right)+B\left(1+x\right) = 4x+2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}$

对应系数相等得：$A = 2\sqrt{x}, B = 1$，所以

$$\text{原式} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{\left(1+x\right)\left(1-\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to0^+}\left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=0+1=1$$，选(B).

(2)【答案】(A)

【详解】首先找出 $f(x)$ 的所有不连续点，然后考虑 $f(x)$ 在间断点处的极限.

$f(x)$ 的不连续点为 0、1、$\pm\frac{\pi}{2}$，第一类间断点包括可去间断点及跳跃间断点.逐个考虑各个选项即可.

对 A:
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\lim_{x\to0^+}\frac{e(1+e^{1-\frac{1}{x}})}{e(1-e^{1-\frac{1}{x}})}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\frac{\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)}{\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}=\frac{e}{-e}=-1.$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 存在左右极限，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，选(A);

同样，可验证其余选项是第二类间断点，$\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)=\infty$.

(3)【答案】C

【详解】由题给条件知，$f(x)$ 为 x 的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，由 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，知

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\,\underline{\underline{令t=-u}}\int_0^x f(-u)d(-u)\,\underline{\underline{因为f(-u)=-f(u)}}\int_0^x f(u)du=F(x),$$

故 $F(x)$ 为 x 的偶函数，所以 $F(-3)=F(3)$.

而 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt$ 表示半径 $R=1$ 的半圆的面积，所以 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$，其中 $\int_2^3 f(t)dt$ 表示半径 $r=\frac{1}{2}$ 的半圆的面积的负值，所以 $\int_2^3 f(t)dt=-\frac{\pi r^2}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{\pi}{8}$

所以 $F(3)=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}F(2)$

所以 $F(-3)=F(3)=\frac{3}{4}F(2)$，选择 C

(4)【答案】(D)

【详解】

方法 1：论证法，证明 $A.B.C$ 都正确，从而只有 $D.$ 不正确.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$，所以(A)正确；

由选项(A)知， $f(0)=0$ ，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，根据导数定义，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$ 存在，所以(C)也正确；

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(-x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right]=\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}f(-x)=f(0)+f(0)=2f(0)$$

所以 $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=0$

即有 $f(0)=0$.所以(B)正确，故此题选择(D).

方法 2：举例法，举例说明(D)不正确. 例如取 $f(x)=|x|$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0\text{ 存在}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x-0}=1$，

左右极限存在但不相等，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的导数 $f'(0)$ 不存在. (D)不正确，选(D).

(5)【答案】D

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x)=\infty$，

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0+0=0$，

所以 $y=0$ 是沿 $x\to-\infty$ 方向的一条水平渐近线；

令 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\,\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\,0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1$$

令 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y-a\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-x\right)\,\underline{\underline{x=\ln e^x}}\,0+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1+e^x}{e^x})=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=\ln 1=0$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线，所以共有 3 条，选择(D)

(6)【答案】(D)

【详解】$u_n=f(n)$，由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),(n=1,2,\cdots),$$

其中 $n<\xi_n<n+1$，$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\cdots$. 由 $f''(x)>0$, 知 $f'(x)$ 严格单调增，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots.$$

若 $u_1<u_2$，则 $f'(\xi_1)=u_2-u_1>0$, 所以 $0<f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots$.

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1).$$

而 $f'(\xi_1)$ 是一个确定的正数. 于是推知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$, 故 $\{u_n\}$ 发散. 选(D)

(7)【答案】(C)

【详解】一般提到的全微分存在的一个充分条件是：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在全微分，但题设的 $A.B.C.D.$ 中没有一个能推出上述充分条件，所以改用全微分的定义检查之. 全微分的定义是：设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量可以写成 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 为与

$\Delta x, \Delta y$ 无关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，对照此定义，就可解决本题.

选项 $A.$ 相当于已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；选项 $B.$ 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在，因此 $A.$ $B.$ 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. 选项 $D.$ 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在，但不能推导出两个一阶偏导函数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此也不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

由 $C.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{[f(x,y)-f(0,0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，推知

$$f(x,y)-f(0,0)=\alpha\sqrt{x^2+y^2}=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha=0$.对照全微分定义，相当于

$$x_0=0, y_0=0, \Delta x=x, \Delta y=y, A=0, B=0.$$

可见 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，故选择(C).

(8)【答案】(B)

【详解】画出该二次积分所对应的积分区域 $D:\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi, \sin x\le y\le 1$

交换为先 x 后 y，则积分区域可化为：$0\le y\le 1, \pi-\arcsin y\le x\le\pi$

所以 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\pi-arc\sin y}^{\pi}f(x,y)dx$， 所以选择(B).

(9) 【答案】A

【详解】

方法 1：根据线性相关的定义，若存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

因 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，故 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关，所以选择(A).

方法 2：排除法

因为$\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_2,\text{其中}C_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

且 $$\left|C_2\right|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\underline{\underline{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}}}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-1\times(-1)=2\neq0.$$

故C_2是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_2右乘$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关，排除(B).

因为$\left(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_3,\text{ 其中}C_3=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$\left|C_3\right|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}\underline{\underline{1\text{行}\times2+2\text{行}}}\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-4\\0&-2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\-2&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-(-2)\times(-4)=-7\neq0.$$

故C_3是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_3右乘$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$线性无关，排除(C).

因为$\left(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_4,\text{ 其中}C_4=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

$$|C_4|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}\overline{\overline{1行\times(-2)+2行}}\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\2&1\end{vmatrix}$$

$=1\times1-2\times(-4)=9\neq0.$

故 C_4 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_4 右乘 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$ 线性无关，排除(D).

综上知应选(A).

(10)【答案】B

【详解】

方法 1： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\overline{\overline{2、3列分别加到1列}}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\\lambda&\lambda-2&1\\\lambda&1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$\overline{\overline{提出\lambda}}\ \lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\overline{\overline{1行\times(-1)+2行}}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{1行\times(-1)+3行}}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3&0\\0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2\lambda=0$$

则 A 的特征值为 3，3，0; B 是对角阵，对应元素即是的特征值，则 B 的特征值为 1，1，0. A,B 的特征值不相同，由相似矩阵的特征值相同知，A与B 不相似.

由 A,B 的特征值可知，A,B 的正惯性指数都是 2，又秩都等于 2 可知负惯性指数也相同，则由实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数，知 A 与 B 合同，应选(B).

方法 2: 因为迹(A)=2+2+2=6，迹(B)=1+1=2$\neq$6，所以 A 与 B 不相似(不满足相似的必要条件).

又 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)^2$，$A$ 与 B 是同阶实对称矩阵，其秩相等，且有相同的正惯性指数，故 A 与 B 合同.

二、填空题

(11)【答案】$-\dfrac{1}{6}$

【详解】由洛必达法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}\underline{\underline{\frac{0}{0}}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1+x^2\right)\cos x}{3x^2\left(1+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3\left(1+x^2\right)}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}-\cos x\right)=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2/2}{x^2}-1\right)=-\frac{1}{6}$$

(12)【答案】$1+\sqrt{2}$

【详解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{(1+\sin t)'}{\left(\cos t+\cos^2 t\right)'}=\dfrac{\cos t}{-\sin t-2\sin t\cos t}$

把$t=\dfrac{\pi}{4}$代入，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，所以法线斜率为$1+\sqrt{2}$.

(13)【答案】$\dfrac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}$

【详解】$y=\dfrac{1}{2x+3}=(2x+3)^{-1}$，

$$y'=(-1)\cdot(2x+3)^{-1-1}\cdot(2x)'=(-1)^1\cdot1!\cdot2^1\cdot(2x+3)^{-1-1},$$

$$y''=(-1)\cdot(-2)\cdot2^2\cdot(2x+3)^{-3}=(-1)^22!\cdot2^2\cdot(2x+3)^{-2-1},\cdots,$$

由数学归纳法可知 $y^{(n)}=(-1)^n2^nn!(2x+3)^{-n-1}$，

把$x=0$代入得 $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}$

(14)【答案】$C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$

【详解】这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数$f(x)$是$P_m(x)e^{\lambda x}$型(其中$P_m(x)=2,\lambda=2$).

所给方程对应的齐次方程为 $y''-4y'+3y=0$，它的特征方程为 $r^2-4r+3=0,$ 得特征根 $r_1=1, r_2=3,$ 对应齐次方程的通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以应设该非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$，

所以 $\left(y^*\right)'=2Ae^{2x}$，$\left(y^*\right)''=4Ae^{2x}$，代入原方程：$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}$，

则 $A=-2$，所以 $y^*=-2e^{2x}$. 故得原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

(15)【答案】$2(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2')$

【详解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x}=f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

所以 $$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\left[f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}\right]-y\left[f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot f_1'+f_2'\cdot\frac{x}{y}-f_1'\cdot\frac{y}{x}+f_2'\cdot\frac{x}{y}=2(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2')$$

(16) 【答案】1

【详解】

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由阶梯矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数，知 $r\left(A^3\right)=1.$

三、解答题.

(17)【分析】本题要求函数详解式，已知条件当中关于函数有关的式子只有

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

这是一个带有积分符号的式子，如果想求出函数的详解式，首先要去掉积分符号，即求导.

【详解】方程 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$ 两边对 x 求导， 得

$$f^{-1}[f(x)]\cdot f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}，\text{即 } xf'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

当 $x\neq 0$ 时，对上式两边同时除以 x，得 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$，所以

$$f(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

在已知等式中令 $x=0$，得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt=0$. 因 $f(x)$ 是 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的单调可导函数，$f^{-1}(t)$ 的值域为 $[0,\frac{\pi}{4}]$，它是单调非负的，故必有 $f(0)=0$，从而两边对上式取 $x\to 0^+$ 极限

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=C=0$$

于是 $f(x)=\ln\left|\sin x+\cos x\right|$，因为 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，故 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x),x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

(18)【详解】(I) $V(a)=\pi\int_0^{\infty} xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} xd\left(a^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi[xa^{-\frac{x}{a}}]\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} a^{-\frac{x}{a}}dx=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2$$

(II) $V'(a)=[\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2]'=\pi\cdot\frac{2a\ln^2 a-a^2\cdot 2\ln a\cdot\frac{1}{a}}{\ln^4 a}=\pi\cdot\frac{2a\ln a-2a}{\ln^3 a}=2\pi\left(\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}\right)$

令 $V'(a)=0$，得 $\ln a=1$，从而 $a=e$. 当 $1<a<e$ 时，$V'(a)<0$，$V(a)$ 单调减少；当 $a>e$ 时，$V'(a)>0$，$V(a)$ 单调增加. 所以 $a=e$ 时 V 最小，最小体积为 $V_{\min}(a)=\pi e^2$

(19)【详解】令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为 $p'(x+p^2)=p$.

两边同时除以 $p'p$，得 $\frac{x}{p}+p=\frac{1}{p'}$

将 $p'=\frac{dp}{dx}$ 带入上式，得 $\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$

按一阶线性方程求导公式，得

$$x=e^{\int\frac{1}{p}dp}(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp+C)=e^{\ln p+C}(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp)=p[\int dp+C]=p(p+C)$$

带入初始条件得 $C=0$，于是 $p^2=x$．由 $y'(1)=1$ 知 $p=\sqrt{x}$，即 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}$

解得 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$，带入初始条件得 $C_1=\frac{1}{3}$，所以特解为 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$.

(20)【详解】在 $y-xe^{y-1}=1$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，即 $y(0)=1$

$y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导，得 $y'-(xe^{y-1})'=1'=0\Rightarrow y'-x'e^{y-1}-x(e^{y-1})'=0$

$\Rightarrow y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0$($y=y(x)$ 是 x 的函数，故 e^{y-1} 是关于 x 的复合函数，在求导时要用复合函数求导的法则)

$\Rightarrow\left(2-y\right)y'-e^{y-1}=0$　(*)　　　(由 $y-xe^{y-1}=1$ 知，$xe^{y-1}=y-1$，把它代入)

在(*)中令 $x=0$，由 $x=0,y=1$，得 $y'\big|_{x=0}=1$

在(*)两边求导，得 $\left(2-y\right)y''-y'^2-e^{y-1}y'=0$．令 $x=0$，由 $x=0,y=1,y'=1$ 得，$y''\big|_{x=0}=2$

因为 $z=f(\ln y-\sin x)$，令 $u=\ln y-\sin x$，根据复合函数的求导法则，

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\qquad(**)$$

在 $u=\ln y-\sin x$ 中把 x,y 看成独立的变量，两边关于 x 求导，得 $u'_x=-\cos x$

在 $u=\ln y-\sin x$ 中把 x,y 看成独立的变量，两边关于 y 求导，得 $u'_y=\frac{1}{y}$

把以上两式代入(**)中，$\frac{dz}{dx}=f'(u)\cdot(-\cos x)+f'(u)\cdot\frac{1}{y}\cdot y'$

即　$\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)$　(***)

把 $x=0,y=1,y'=1$ 代入(***)，得 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}=f'(\ln 1-\sin 0)(\frac{1}{1}-\cos 0)=0$

在(***)左右两端关于 x 求导，

$$\frac{d^2z}{dx^2}=[f'(\ln y-\sin x)]'(\frac{y'}{y}-\cos x)+f'(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)'$$

根据复合函数的求导法则 $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$，有

$$[f'(\ln y-\sin x)]'=f''(\ln y-\sin x)(-\cos x)+f''(\ln y-\sin x)\cdot\frac{y'}{y}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)$$

$$(\frac{y'}{y}-\cos x)'=(\frac{y'}{y})'-(\cos x)'=-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x$$

故 $$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)^2+f'(\ln y-\sin x)\left[-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x\right]$$

把 $x=0, y=1, y'=1, y''=2$ 代入上式，得

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln 1-\sin 0)(\frac{1}{1}-\cos 0)^2+f'(\ln 1-\sin 0)\left[-\frac{1^2}{1^2}+\frac{2}{1}+\sin 0\right]=f'(0)(2-1)=1$$

(21)【详解】欲证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$，可构造函数 $\varphi(f(x),g(x))=0$，从而使用介值定理、微分中值定理等证明之.

令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x),g(x)$ 存在相等的最大值，设 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)=\max\limits_{[a.b]}f(x)=g(x_2)=\max\limits_{[a.b]}g(x)$. 于是 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geq 0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leq 0$

若 $\varphi(x_1)=0$，则取 $\eta=x_1\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_2)=0$，则取 $\eta=x_2\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_1)>0,\varphi(x_2)<0$，则由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(\eta)=0$.

不论以上哪种情况，总存在 $\eta\in(a,b)$, 使 $\varphi(\eta)=0$.

再 $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0,\varphi(b)=f(b)-g(b)=0$，将 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\eta],[\eta,b]$ 分别应

用罗尔定理，得存在$\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$,使得$\varphi'(\xi_1)=0,\ \varphi'(\xi_2)=0$；再由罗尔定理知，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使$\varphi''(\xi)=0$.即有$f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)【详解】记$D_1=\left\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\big|1<|x|+|y|\le 2\right\}$则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} x^2 d\sigma+\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$

再记$\sigma_1=\left\{(x,y)\big|0\le x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，$\sigma_2=\left\{(x,y)\big|1\le x+y\le 2,x\ge 0,y\ge 0\right\}$

由于D_1与D_2都与x轴对称，也都与y轴对称，函数x^2与$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$都是$x$的偶函数，也都是$y$的偶函数，所以由区域对称性和被积函数的奇偶性有

$$\iint_{D_1} x^2 d\sigma=4\iint_{\sigma_1} x^2 d\sigma=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^2 dy=4\int_0^1 x^2(1-x)dx=4\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{1}{3}$$

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=4\iint_{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma.$$

对第二个积分采用极坐标，令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.则$x+y=1$化为$r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，$x+y=2$化为$r=\dfrac{2}{\cos\theta+\sin\theta}$，于是，

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}rdr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta=2\sqrt{2}\ln\left[\sec(\theta-\frac{\pi}{4})+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\ln\left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right|\right)=2\sqrt{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

所以 $$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma=\frac{1}{3}+2\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

(23)【详解】

方法 1： 因为方程组(1)、(2)有公共解，将方程组联立得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases} \qquad (3)$$

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)+2行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)+4行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4行\times(-1)+2行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4行\times(-3)+3行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{换行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{3行\times(-a-1)+4行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$

由此知，要使此线性方程组有解，a 必须满足 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时， $r(A)=2$，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量. 选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$，解得两方程组的公共解为 $k(1,0,-1)^T$，其中 k 是任意常数.

当 $a=2$ 时，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \\ x_3=-1 \end{cases}$，解得两方程的公共解为 $(0,1,-1)^T$.

方法 2： 将方程组(1)的系数矩阵 A 作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times(-1)+2行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\1&4&a^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&3&a^2-1\end{bmatrix}\xrightarrow{2行\times(-3)+3行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&0&(a-1)(a-2)\end{bmatrix}$$

当$a=1$时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，由$r(A)=2$，方程组有$n-r=3-2=1$个自由未知量.选$x_1$为自由未知量，取$x_1=1$，解得(1)的通解为$k\left(1,0,-1\right)^T$，其中$k$是任意常数. 将通解$k\left(1,0,-1\right)^T$代入方程(2)得$k+0+(-k)=0$，对任意的$k$成立，故当$a=1$时，$k\left(1,0,-1\right)^T$是(1)、(2)的公共解.

当$a=2$时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，由$r(A)=2$，方程组有$n-r=3-2=1$个自由未知量.选$x_2$为自由未知量，取$x_2=1$，解得(1)的通解为$\mu\left(0,1,-1\right)^T$,其中$\mu$是任意常数. 将通解$\mu\left(0,1,-1\right)^T$代入方程(2)得$2\mu-\mu=1$，即$\mu=1$，故当$a=2$时，(1)和(2)的公共解为$\left(0,1,-1\right)^T$.

(24)【详解】(I) 由$A\alpha_1=\alpha_1$，可得 $A^k\alpha_1=A^{k-1}(A\alpha_1)=A^{k-1}\alpha_1=\cdots=\alpha_1$，$k$是正整数,故

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+E\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$$

于是α_1是矩阵B的特征向量(对应的特征值为$\lambda_1'=-2$).

若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^mx=\lambda^mx$ 因此对任意多项式 $f(x)$，$f(A)x=f(\lambda)x$，即$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值.

故B的特征值可以由A的特征值以及B与A的关系得到，A的特征值$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,$ $\lambda_3=-2,$ 则B有特征值$\lambda_1'=f(\lambda_1)=-2,\lambda_2'=f(\lambda_2)=1,\lambda_3'=f(\lambda_3)=1,$ 所以B的全部特征值为－2，1，1.

由A是实对称矩阵及B与A的关系可以知道，B也是实对称矩阵，属于不同的特征值

的特征向量正交. 由前面证明知 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 $\lambda_1' = -2$ 的特征向量，设 B 的属于 1 的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$， α_1 与 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 正交，所以有方程如下：

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

选 x_2, x_3 为自由未知量，取 $x_2 = 0, x_3 = 1 和 x_2 = 1, x_3 = 0$，于是求得 B 的属于 1 的特征向量为

$$\alpha_2 = k_2(-1,0,1)^T, \alpha_3 = (1,1,0)^T$$

故 B 的所有的特征向量为: 对应于 $\lambda_1' = -2$ 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 k_1 是非零任意常数，对应于 $\lambda_2' = \lambda_3' = 1$ 的全体特征向量为 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，其中 k_2, k_3 是不同时为零的任意常数.

(II) 方法 1： 令矩阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求逆矩阵 P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{1行+2行} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行+3行} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{行\times2+3行} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\div3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{3行\times(-2)+2行} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\times(-1)+1行} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)+1行} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & -1/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

由 $P^{-1}BP=diag(-2,1,1)$，所以

$$B=P\cdot diag(-2,1,1)\cdot P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 3 & -3\\ 3 & 0 & 3\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

方法 2：由 (I) 知 α_1 与 α_2,α_3 分别正交，但是 α_2 和 α_3 不正交，现将 α_2,α_3 正交化：

取 $\beta_2=\alpha_2,\beta_3=\alpha_3+k_{12}\beta_2=(1,1,0)+(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

其中，$k_{12}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=-\frac{1\times(-1)}{(-1)\times(-1)+1\times 1}(-1,0,1)^T=(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

再对 α_1,β_2,β_3 单位化：

$$\xi_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),\xi_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)=,\xi_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$$

其中，$\|\alpha_1\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3},\|\beta_2\|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\|\beta_3\|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

合并成正交矩阵，

记 $$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

由 $Q^{-1}BQ=diag(-2,1,1)$，有 $B=Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^{-1}$. 又由正交矩阵的性质：

$Q^{-1}=Q^T$，得

$$B = Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】D

【详解】因为 $f(0)=f(1)=f(2)=0$，由罗尔定理知至少有 $\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(1,2)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，所以 $f'(x)$ 至少有两个零点. 由于 $f'(x)$ 是三次多项式，三次方程 $f'(x)=0$ 的实根不是三个就是一个，故 D 正确.

(2)【答案】C

【详解】$\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积.

(3)【答案】D

【详解】由微分方程的通解中含有 e^x、$\cos 2x$、$\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1,r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$. 故以已知函数为通解的微分方程是 $y'''-y''+4y'-4=0$

(4) 【答案】A

【详解】$x=0,x=1$ 时 $f(x)$ 无定义，故 $x=0,x=1$ 是函数的间断点

因为 $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x}=0$$

同理 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

又 $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=\left(\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\right)\sin 1=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=-\sin 1$$

所以 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点.

(5)【答案】B

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

(6)【答案】A

【详解】用极坐标得 $F(u,v)=\iint\limits_D \frac{f\left(u^2+v^2\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u \frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u}=vf\left(u^2\right)$

(7) 【答案】C

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆.

(8) 【答案】D

【详解】记 $D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，

则 $|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$，又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$

所以 A 和 D 有相同的特征多项式，所以 A 和 D 有相同的特征值.
又 A 和 D 为同阶实对称矩阵，所以 A 和 D 相似. 由于实对称矩阵相似必合同，故 D 正确.

二、填空题

(9)【答案】2

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]}{x^2 f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]\cdot f(x)}{[xf(x)/2]^2\cdot 4}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=1$$

所以 $f(0)=2$

(10)【答案】$x(-e^{-x}+C)$

【详解】微分方程$\left(y+x^2e^{-x}\right)dx-xdy=0$可变形为$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=xe^{-x}$

所以 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x\left(\int xe^{-x}\cdot\dfrac{1}{x}dx+C\right)=x(-e^{-x}+C)$

(11)【答案】$y=x+1$

【详解】设$F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}=-\dfrac{y\cos(xy)-\frac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}}$，

将$y(0)=1$代入得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为$y-1=x-0$，即$y=x+1$

(12)【答案】$(-1,-6)$

【详解】$y=x^{5/3}-5x^{2/3}\Rightarrow y'=\dfrac{5}{3}x^{2/3}-\dfrac{10}{3}x^{-1/3}=\dfrac{10(x+2)}{3x^{1/3}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}=\frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$$

$x=-1$时，$y''=0$；$x=0$时，y''不存在

在$x=-1$左右近旁y''异号，在$x=0$左右近旁$y''>0$，且$y(-1)=-6$

故曲线的拐点为$(-1,-6)$

(13)【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$

【详解】设$u=\dfrac{y}{x},v=\dfrac{x}{y}$，则$z=u^v$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}(-\dfrac{y}{x^2})+u^v\ln u\cdot\dfrac{1}{y}$

$$=u^v\left(-\frac{vy}{ux^2}+\frac{\ln u}{y}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\left(-1+\ln\frac{y}{x}\right)$$

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$

(14)【答案】-1

【详解】$\because\ |A|=2\times3\times\lambda=6\lambda \qquad |2A|=2^3|A|$

$$\therefore\ 2^3\times6\lambda=-48 \qquad \Rightarrow\lambda=-1$$

三、解答题

(15)【详解】

方法一： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

方法二： $\because\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3) \qquad \sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin^4 x}{6x^4}+\frac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\frac{1}{6}$$

(16)【详解】

方法一： 由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$$

方法二： 由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)=e^x x$$

所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^x(x+1)$

(17)【详解】

方法一： 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分.

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2})dt$$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}td\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

方法二： $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2d(\arcsin x)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

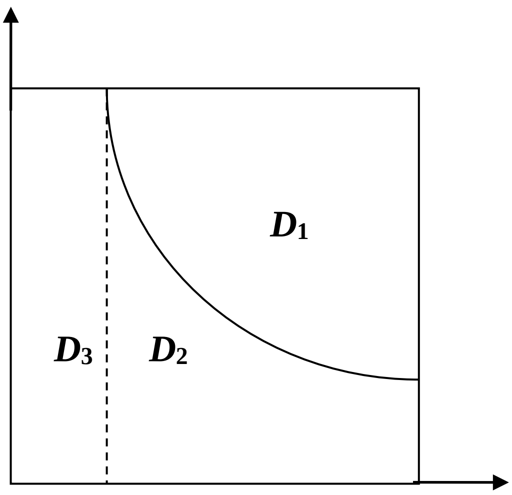
$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2tdt=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2d\cos 2t$$

$$=-\frac{1}{4}(t^2\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2tdt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$$

故，原式 $=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{1}{4}$

(18)【详解】 曲线 $xy=1$ 将区域分成两个区域 D_1 和 D_2+D_3，为了便于计算继续对区域分割，最后为

$$\iint\limits_D\max\left(xy,1\right)dxdy$$



$$=\iint_{D_1} xydxdy+\iint_{D_2} dxdy+\iint_{D_3} dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^2 1dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}} 1dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy$$

$$=1+2\ln 2+\frac{15}{4}-\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2$$

(19)【详解】旋转体的体积 $V=\pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积 $S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x)dx=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

上式两端对 t 求导得　$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$，　即　$y'=\sqrt{y^2-1}$

由分离变量法解得　$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$，　即　$y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t$

将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$，故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^t$，$y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

于是所求函数为　　$y=f(x)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

(20)【详解】(I) 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，即

$$m\le f(x)\le M\qquad x\in[a,b]$$

由定积分性质，有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$，即 $m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$

由连续函数介值定理，至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即
$$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，使 $\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta)$

又由　$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$，知　$2<\eta\le 3$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2][2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$ 得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0\qquad 1<\xi_1<2$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0 \qquad 2<\xi_1<\eta\le 3$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对导函数$\varphi'(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0 \qquad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$$

(21)【详解】

方法一：作拉格朗日函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$

令 $$\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0\\F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0\\F'_z=2z-\lambda+\mu=0\\F'_\lambda=x^2+y^2-z=0\\F'_\mu=x+y+z-4=0\end{cases}$$

解方程组得$(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2),(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8)$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

方法二：问题可转化为求$u=x^2+y^2+x^4+2x^2y^2+y^4$在$x+y+x^2+y^2=4$条件下的最值

设$F(x,y,\lambda)=u=x^4+y^4+2x^2y^2+x^2+y^2+\lambda(x+y+x^2+y^2-4)$

令 $$\begin{cases}F'_x=4x^3+4xy^2+2x+\lambda(1+2x)=0\\F'_y=4y^3+4x^2y+2y+\lambda(1+2y)=0\\F'_\lambda=x+y+x^2+y^2-4=0\end{cases}$$

解得$(x_1,y_1)=(1,1),(x_2,y_2)=(-2,-2)$，代入$z=x^2+y^2$，得$z_1=2,z_2=8$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

(22)【详解】(I)**证法一**：

$$|A|=\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1}\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\0&\frac{3a}{2}&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}=\cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix}=2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\cdot\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n=|A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，结论成立.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立．将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故　　$|A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得　　$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以　　$D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即　　$D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II)因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$.

由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$

(III)方程组有无穷多解，由 $|A|=0$，有 $a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为

$k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T, k$ 为任意常数.

(23)【详解】(I)

证法一： 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 因为 α_1,α_2 分别属于不同特征值的特征向量，故 α_1,α_2 线性无关，则 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出，不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中 l_1,l_2 不全为零(若 l_1,l_2 同时为 0，则 α_3 为 0，由 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 可知 $\alpha_2=0$，而特征向量都是非 0 向量，矛盾)

$\because A\alpha_1=-\alpha_1,\ A\alpha_2=\alpha_2$

$\therefore A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，又 $A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$\therefore -l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$

则 α_1,α_2 线性相关，矛盾. 所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证法二： 设存在数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ (1)

用 A 左乘(1)的两边并由 $A\alpha_1=-\alpha_1,\ A\alpha_2=\alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (2)$$

(1)—(2)得 $$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0 \qquad (3)$$

因为 α_1,α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量，所以 α_1,α_2 线性无关，从而 $k_1=k_3=0$，代入(1)得 $k_2\alpha_2=0$，又由于 $\alpha_2\neq 0$，所以 $k_2=0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(II) 记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 P 可逆，

$$AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2009年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数为（　　）

$\left(A\right)$1.　　　　$\left(B\right)$2.　　　　$\left(C\right)$3.　　　　$\left(D\right)$无穷多个.

【答案】C

【解析】

$$f\left(x\right)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$$

则当 x 取任何整数时，$f\left(x\right)$ 均无意义

故 $f\left(x\right)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的解

$$x_{1,2,3}=0,\pm1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为 3 个，即 $0,\pm1$

（2）当 $x\to0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 是等价无穷小，则（　　）

$\left(A\right)$ $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　$\left(B\right)$ $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　$\left(C\right)$ $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　$\left(D\right)$ $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

【答案】A

【解析】 $f(x)=x-\sin ax,g(x)=x^2ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-\frac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1\qquad\therefore a^3=-6b\quad 故排除 B,C.$$

另外 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1-a\cos ax\to 0\ (x\to 0)$ 故 $a=1$. 排除 D.
所以本题选 A.

（3）设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$（　）

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【答案】 D

【解析】因 $dz=xdx+ydy$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

又在（0，0）处，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$AC-B^2=1>0$$

故（0，0）为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

（4）设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$（　）

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$.　(B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$.　(D). $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

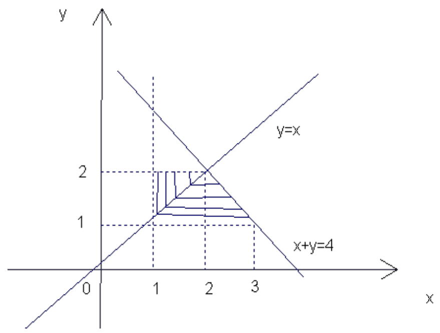
【答案】C

【解析】$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_x^2 f(x,y)dx$ 的积分区域为两部分：

$D_1=\{(x,y)|1\le x\le 2, x\le y\le 2\}$，$D_2=\{(x,y)|1\le y\le 2, y\le x\le 4-y\}$

将其写成一块 $D=\{(x,y)|1\le y\le 2, 1\le x\le 4-y\}$

故二重积分可以表示为 $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$，故答案为 C.



（5）若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（　　）

(A) 有极值点，无零点.　(B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点.　(D) 无极值点，无零点.

【答案】　B

【解析】由题意可知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，且在点 $(1,1)$ 处的曲率

$$\rho=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$，而 $f'(1)=-1$，由此可得，$f''(1)=-2$

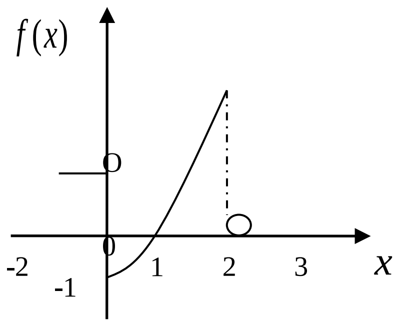
在 $[1,2]$ 上，$f'(x)\le f'(1)=-1<0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点.

对于 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1$　，$\zeta\in(1,2)$，　（拉格朗日中值定理）

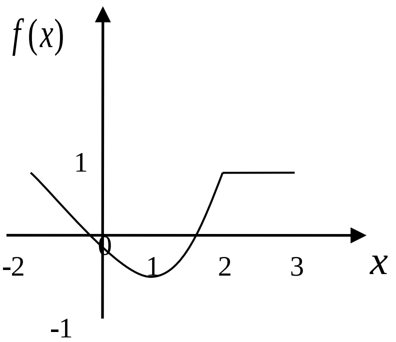
$\therefore$　$f(2)<0$ 而　$f(1)=1>0$

由零点定理知，在 $[1,2]$ 上，$f(x)$ 有零点.　故应选（B）.

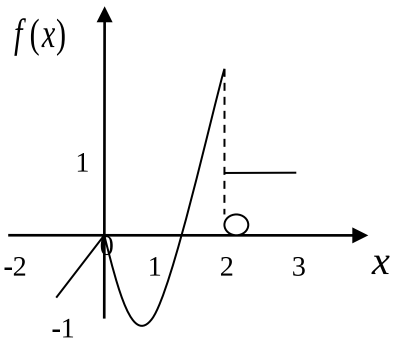
（6）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



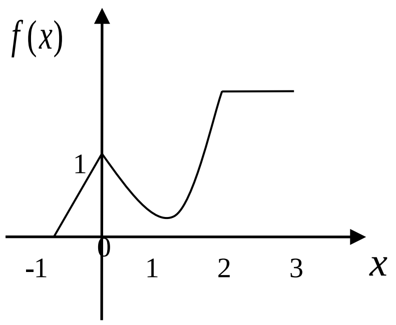
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　　）



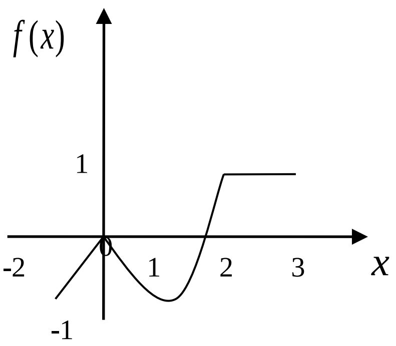
(A).



(B).



(C).



(D).

【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、

$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

①$x\in[0,1]$ 时， $F(x)\le 0$，且单调递减.

②$x\in[1,2]$ 时， $F(x)$ 单调递增.

③$x\in[2,3]$ 时， $F(x)$ 为常函数.

④$x\in[-1,0]$ 时， $F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增.

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为 D.

（7）设 A， B 均为 2 阶矩阵， A*， B* 分别为 A， B 的伴随矩阵.若 $|A|=2,|B|=3$，则分

块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）

(A). $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　　　(B). $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　　　　$(D).\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

【答案】 B

【解析】根据 $CC^* = |C|E$ 若 $C^* = |C|C^{-1}, C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|A||B| = 2\times 3 = 6$ 即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{|B|}B^* \\ \dfrac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3}B^* \\ \dfrac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

（8）设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$Q = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则 Q^TAQ 为（　　）

$(A).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　　$(B).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　　$(D).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】 A

【解析】$Q = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$$Q = PE_{12}(1)$$
$$Q^T AQ = [PE_{12}(1)]^T A[PE_{12}(1)] = E_{12}^T(1)[P^T AP]E_{12}(1)$$
$$= E_{21}^T(1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} E_{12}(1)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在（0，0）处的切线方程为______________.

【答案】 $y = 2x$

【解析】 $\dfrac{dy}{dt} = 2t\ln(2-t^2) - t^2 \cdot \dfrac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1} = -2$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-(1-t)^2} \cdot (-1)\Big|_{t=1} = -1$$

所以 $\dfrac{dy}{dx} = 2$

所以 切线方程为 $y = 2x$.

（10）已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$,则 k = ______________.

【答案】 -2

【解析】 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{kx} dx = 2 \lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{1}{k} e^{kx} \Big|_0^b$

因为极限存在所以 $k < 0$

$$1 = 0 - \frac{2}{k}$$

$$k = -2$$

（11） $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ ______________.

【答案】0

【解析】令 $I_n = \int e^{-x} \sin nx dx = -e^{-x} \sin nx + n\int e^{-x} \cos nx dx$

$$= -e^{-x} \sin nx - ne^{-x} \cos nx - n^2 I_n$$

所以 $I_n=-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1)$

$$=\lim_{n\to\infty}(-\frac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\frac{n}{n^2+1})$$
$$=0$$

（12）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=$______________.

【答案】-3

【解析】对方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导有 $y+xy'+y'e^y=1$，得 $y'=\dfrac{1-y}{x+e^y}$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\dfrac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}\quad(*)$

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'_{(0)}=\dfrac{1-0}{e^0}=1$，代入 $(*)$ 得

$$y''(0)=-\frac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$$

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_______.

【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】因为 $y'=x^{2x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得驻点为 $x=\dfrac{1}{e}$.

又 $y''=x^{2x}(2\ln x+2)^2+x^{2x}\cdot\dfrac{2}{x}$，得 $y''\left(\dfrac{1}{e}\right)=2e^{-\frac{2}{e}+1}>0$，

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}$ 的极小值点，此时 $y=e^{-\frac{2}{e}}$，

又当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$y'(x)<0$；$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right]$ 时，$y'(x)>0$，故 y 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 上递增.

而 $y(1)=1$，$y_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-2x)}=1$，

所以 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

(14) 设 α，β 为 3 维列向量，β^{T} 为 β 的转置，若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$________.

【答案】2

【解析】因为 $\alpha\beta^{T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^{T}$ 得特征值是 $2,0,0$ 而 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha$ 是一个常数，是矩阵 $\alpha\beta^{T}$ 的对角元素之和，则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=2+0+0=2$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx\quad(x>0)$.

【解析】

令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$ 得 $x=\frac{1}{t^2-1},dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$$\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=\int\ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1}$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt$$

而

$$\int \frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2})dt$$

$$\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+2\frac{1}{t+1}+C$$

所以

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C$$

（17）（本题满分 10 分）

设 $z=f\left(x+y,x-y,xy\right)$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+f_3'+y[f_{31}''\cdot 1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x]$$

$$=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$$

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 $y=y\left(x\right)\left(x\geq 0\right)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y\left(x\right)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

【解析】

解微分方程 $xy''-y'+2=0$ 得其通解 $y=C_1+2x+C_2x^2$,其中 C_1，C_2 为任意常数

又因为 $y=y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得

$C_1=0$

$$2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+C_2x^2)dx=(x^2+\frac{C_2}{3}x^3)\Big|_0^1=1+\frac{C_2}{3}$$

从而 $C_2=3$

于是，所求非负函数 $y=2x+3x^2\ \ (x\geq 0)$

又由 $y=2x+3x^2$ 可得，在第一象限曲线 $y=f(x)$ 表示为 $x=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是 D 围绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $V=5\pi-V_1$，其中

$$V_1=\int_0^5\pi x^2dy=\int_0^5\pi\cdot\frac{1}{9}(\sqrt{1+3y}-1)^2dy$$

$$=\frac{\pi}{9}\int_0^5(2+3y-2\sqrt{1+3y})dy$$

$$=\frac{39}{18}\pi$$

$$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi.$$

（19）（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2,y\geq x\right\}$.

【解析】由 $(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2$ 得 $r\leq 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

$$\therefore\iint\limits_D(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}.$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 是区间（$-\pi$，π）内过点（$-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}$）的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$.求 $y(x)$ 的表达式.

【解析】由题意，当 $-\pi<x<0$ 时，$y=-\frac{x}{y'}$，即 $ydy=-xdx$，得 $y^2=-x^2+c$，

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2=-x^2+c$ 得 $c=\pi^2$，从而有 $x^2+y^2=\pi^2$

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 得 $y''+y=0$ 的通解为 $y^*=c_1\cos x+c_2\sin x$

令解为 $y_1=Ax+b$，则有 $0+Ax+b+x=0$，得 $A=-1,b=0$，

故 $y_1=-x$，得 $y''+y+x=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线，故 y 在 $x=0$ 处连续

于是由 $y(0-)=\pm\pi$，$y(0+)=c_1$，故 $c_1=\pm\pi$ 时，$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又当 $-\pi<x<0$ 时，有 $2x+2y\cdot y'=0$，得 $y_-'(0)=-\frac{x}{y}=0$，

当 $0\le x<\pi$ 时，有 $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$，得 $y_+'(0)=c_2-1$

由 $y_-'(0)=y_+'(0)$ 得 $c_2-1=0$，即 $c_2=1$

故 $y=y(x)$ 的表达式为 $y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ -\pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 或

$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，又过点$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

（21）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【解析】（Ⅰ）作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

根据罗尔定理，可得在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（Ⅱ）任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足；

在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得 $f'\left(\xi_{x_0}\right)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\cdots\cdots(*)$

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式（*式）两边取 $x_0\to0^+$ 时的极限可得：

$$f_+'(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f'(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f'(\xi_{x_0})=A$$

故 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

（22）（本题满分 11 分设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量 ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

【解析】（Ⅰ）解方程 $A\xi_2=\xi_1$

$$\left(A,\xi_1\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ 故有一个自由变量，令 $x_3=2$，由 $Ax=0$ 解得，$x_2=-1, x_1=1$

求特解，令 $x_1=x_2=0$，得 $x_3=1$

故 $\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数

解方程 $A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(A^2,\xi_1\right)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1, x_3=0$

求特解 $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ 故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，其中 k_2 为任意常数.

（Ⅱ）证明：

由于 $\begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2+\frac{1}{2} \\ 1 & -k_1 & -k_2 \\ -2 & 2k_1+1 & 0 \end{vmatrix} = 2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2+\frac{1}{2})-2k_1(k_2+\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)$

$=\frac{1}{2}\neq 0$　故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【解析】（Ⅰ）　$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix} \lambda-a & 1 \\ 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \lambda-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$$
$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$$
$$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$$
$$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$$
$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

$\therefore \lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$

（Ⅱ）　若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0.则

1)　若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2)　若 $\lambda_2=0$ ，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3)　若 $\lambda_3=0$ ，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$ ，$\lambda_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (B).

【解析】因为 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x=0,\pm1$, 又因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,\lim\limits_{x\to0^-}=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$, 所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

显然 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $x=1$ 为连续点.

而 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$, 所以 $x=-1$ 为无穷间断点, 故答案选择 B.

(2)【答案】 (A).

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解, 故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$, 所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0,$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x),y_2'+P(x)y_2=q(x)$, 所以

$$(\lambda-\mu)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的, 由此可知 $q(x)\neq0$, 所以 $\lambda-\mu=0$.

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得
$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即
$$(\lambda+\mu)q(x)=q(x), \text{由 } q(x)\neq0 \text{ 可知 } \lambda+\mu=1, \qquad ②$$

由①②求解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$, 故应选(A).

(3)【答案】 (C).

【解析】因为曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切, 所以在切点处两个曲线的斜率相同,

所以 $2x=\dfrac{a}{x}$, 即 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}\ (x>0)$. 又因为两个曲线在切点的坐标是相同的, 所以在 $y=x^2$ 上,

当 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时 $y=\dfrac{a}{2}$; 在 $y=a\ln x$ 上, $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时, $y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

所以 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$. 从而解得 $a=2e$. 故答案选择(C).

(4)【答案】 (D).

【解析】 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点. 应分成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然, 当 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$, 则该反常积分收敛.

当 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}\leq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛. 对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 取 $0<\delta<1$, 不论 m,n 是什么正整数,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to 1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛, 故选(D).

(5) 【答案】 (B).

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=\frac{F_1'\cdot\frac{y}{x}+F_2'\cdot\frac{z}{x}}{F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z\ .$$

(6) 【答案】 (D).

【解析】$\sum\limits_{i=1}^{n}\ \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})=(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

$$=(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})\ (\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i})$$

$$=(\int_0^1\frac{1}{1+x}dx)(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy)=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy\ .$$

(7) 【答案】 (A).

【解析】由于向量组I能由向量组II线性表示, 所以$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$, 即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组I线性无关, 则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$, 所以$r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$, 即$r\le s$, 选(A).

(8) 【答案】 (D).

【解析】：设 λ 为 A 的特征值，由于 $A^2+A=O$，所以 $\lambda^2+\lambda=0$，即 $(\lambda+1)\lambda=0$，这样 A 的特征值只能为 -1 或 0. 由于 A 为实对称矩阵，故 A 可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，$r(A)=r(\Lambda)=3$，因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

二、填空题

(9)【答案】$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

【解析】该常系数线性齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$，因式分解得

$$\lambda^2(\lambda-2)+(\lambda-2)=(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0,$$

解得特征根为 $\lambda=2,\ \lambda=\pm i$，所以通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

(10) 【答案】$y=2x$.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}=2$，所以函数存在斜渐近线，又因为

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^3-2x}{x^2+1}=0$，所以斜渐近线方程为 $y=2x$.

(11)【答案】$-2^n\cdot(n-1)!$.

【解析】由高阶导数公式可知 $\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$，

所以 $\ln^{(n)}(1-2x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}\cdot(-2)^n=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}$，

即 $y^{(n)}(0)=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2\cdot0)^n}=-2^n(n-1)!$.

(12)【答案】$\sqrt{2}(e^\pi-1)$.

【解析】因为 $0\le\theta\le\pi$，所以对数螺线 $r=e^\theta$ 的极坐标弧长公式为

$$\int_0^\pi\sqrt{(e^\theta)^2+(e^\theta)^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{2}\,e^\theta d\theta=\sqrt{2}(e^\pi-1).$$

(13)【答案】$3\,\text{cm/s}$.

【解析】设 $l=x(t),w=y(t)$，由题意知，在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=2,$

$y'(t_0)=3$，设该对角线长为 $S(t)$，则 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，所以

$$S'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

所以 $$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\cdot 2+5\cdot 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

(14)【答案】3.

【解析】由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $|B|=2$，所以 $\left|B^{-1}\right|=|B|^{-1}=\dfrac{1}{2}$，因此

$$\left|A+B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

三、**解答题**

(15)【解析】因为 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$，

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，令 $f'(x)=0$，则 $x=0,x=\pm 1$.

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$，则 $f''(0)=2\int_1^{0}e^{-t^2}dt<0$，所以

$$f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm 1)=4e^{-1}>0$，所以 $f(\pm 1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\geq 1$ 时，$f'(x)>0$；$0\leq x<1$ 时，$f'(x)<0$；$-1\leq x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x<-1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(16)【解析】(I) 当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$，故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$，所以

$$\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n<\left|\ln t\right|t^n,$$

则 $$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \ (n=1,2,\cdots).$$

（II）$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t d\left(t^{n+1}\right) \ = \frac{1}{(n+1)^2}$，故由

$$0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

（17）【解析】根据题意得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{2t+2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2} = \frac{3}{4(1+t)}$$

即 $\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t) = 6(t+1)^2$，整理有 $\psi''(t)(t+1)-\psi'(t) = 3(t+1)^2$，解

$$\begin{cases} \psi''(t) - \dfrac{\psi'(t)}{t+1} = 3(t+1) \\ \psi(1) = \dfrac{5}{2}, \psi'(1) = 6 \end{cases},\ 令\ y = \psi'(t),\ 即\ y' - \frac{1}{1+t}y = 3(1+t).$$

所以 $y = e^{\int \frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int \frac{1}{1+t}dt}dt + C\right) = (1+t)(3t+C)$，$t > -1$. 因为 $y(1) = \psi'(1) = 6$，

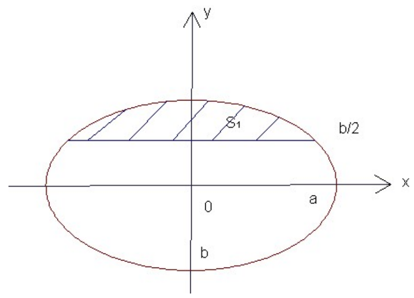
所以 $C = 0$，故 $y = 3t(t+1)$，即 $\psi'(t) = 3t(t+1)$，

故 $\psi(t) = \int \ 3t(t+1)dt = \frac{3}{2}t^2 + t^3 + C_1$.

又由 $\psi(1) = \frac{5}{2}$，所以 $C_1 = 0$，故 $\psi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3, (t > -1)$.

（18）【解析】油罐放平，截面如图建立坐标系之后，边界椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



阴影部分的面积

$$S = \int_{-b}^{\frac{b}{2}} 2xdy = \frac{2a}{b}\int_{-b}^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - y^2}dy$$

令 $y=b\sin t, y=-b$ 时 $t=-\frac{\pi}{2}; y=\frac{b}{2}$ 时 $t=\frac{\pi}{6}$.

$$S=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})ab$$

所以油的质量 $m=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})abl\rho$.

(19)【解析】由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})+b(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

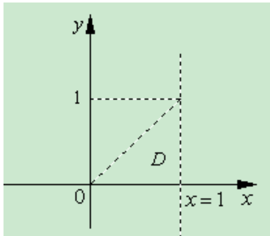
故 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\left[12(a+b)+10ab+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0,$$

所以 $$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12(a+b)+10ab+8\neq 0\end{cases},$$

则 $a=-\dfrac{2}{5}$ 或 -2，$b=-\dfrac{2}{5}$ 或 -2. 又因为当 (a,b) 为 $(-2,-2),(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{2}{5})$ 时方程(3)不满足，所以当 (a,b) 为 $(-\dfrac{2}{5},-2)$，$(-2,-\dfrac{2}{5})$ 满足题意.

(20)【解析】$I=\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$



$$=\iint\limits_{D} r\sin\theta\sqrt{1-r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\cdot rdrd\theta$$

$$=\iint\limits_{D} y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{3}{16}\pi.$$

(21)【解析】令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$，对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，得存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi).$$

对于 $F(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，得存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta),$$

两式相加得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

所以存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)【解析】因为方程组有两个不同的解，所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3，进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数，有以下两种方法.

方法 1：（Ⅰ）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\overline{A})<3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时, $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, 此时, $r(A)\neq r(\overline{A})$, 故 $Ax=b$ 无解(舍去).

当 $\lambda=-1$ 时, $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$, 由于 $r(A)=r(\overline{A})<3$, 所以 $a=-2$, 故 $\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\overline{A})<3$, 因此 $|A|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时, $r(A)=1\neq r(\overline{A})=2$, 此时, $Ax=b$ 无解, 因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\overline{A})$, 得 $a=-2$.

（ II ）对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(23)【解析】由于 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵，且 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故 A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义，有 $A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，即

$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，由此可得 $a=-1,\lambda_1=2$. 故 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$，

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$.

由 $(\lambda_2E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_2=-4$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由 $(\lambda_3E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正

交, 只需单位化：

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{cx^k}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(3-\cos 2x-2\cos^2 x\right)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 2x-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{cx^{k-3}}=1.$$

所以 $c=4,k=3$，故答案选(C).

(2)【答案】(B).

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)-2f(x^3)+2f(0)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故答案选(B).

(3)【答案】(C).

【解析】 $f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3}$，故 $f(x)$ 有两个不同的驻点.

(4)【答案】(C).

【解析】微分方程对应的齐次方程的特征方程为$r^2-\lambda^2=0$，解得特征根$r_1=\lambda, r_2=-\lambda$.

所以非齐次方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$ 有特解 $y_1=x\cdot a\cdot e^{\lambda x}$,

非齐次方程 $y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$ 有特解 $y_2=x\cdot b\cdot e^{-\lambda x}$，

故由微分方程解的结构可知非齐次方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$ 可设特解 $y=x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

(5)【答案】(A).

【解析】由题意有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$

所以，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0$，即$(0,0)$点是可能的极值点.

又因为$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=g''(y)f(x)$，

所以，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(0)\cdot g(0)$，$B=\frac{\alpha^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(0)\cdot g'(0)=0$，

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(0)\cdot g''(0),$$

根据题意由$(0,0)$为极小值点，可得$AC-B^2=A\cdot C>0,$且$A=f''(0)\cdot g(0)>0$，所以有

$C=f(0)\cdot g''(0)>0.$由题意$f(0)>0,g(0)<0$，所以$f''(0)<0,g''(0)>0$，故选(A).

(6)【答案】(B).

【解析】因为$0<x<\frac{\pi}{4}$时，　$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因$\ln x$是单调递增的函数，所以$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(7)【答案】 (D).

【解析】由于将A的第2列加到第1列得矩阵B，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即$AP_1=B$，$A=BP_1^{-1}$.

由于交换B的第2行和第3行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即$P_2B=E,$故$B=P_2^{-1}=P_2$. 因此，$A=P_2P_1^{-1}$，故选(D).

(8)【答案】(D).

【解析】由于$(1,0,1,0)^T$是方程组$Ax=0$的一个基础解系，所以$A(1,0,1,0)^T=0$，且$r(A)=4-1=3$，即$\alpha_1+\alpha_3=0$，且$|A|=0$. 由此可得$A^*A=|A|E=O$，即$A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$A^*x=0$的解.

由于$r(A)=3$，$\alpha_1+\alpha_3=0$，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关. 又由于$r(A)=3$，所以$r(A^*)=1$，因此$A^*x=0$的基础解系中含有$4-1=3$个线性无关的解向量. 而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线

性无关，且为 $A^* x=0$ 的解，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 $A^* x=0$ 的基础解系，故选(D).

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9)【答案】$\sqrt{2}$.

【解析】原式$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2}-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\cdot\ln 2}{2}}=e^{\frac{1}{2}\ln 2}=\sqrt{2}$.

(10)【答案】$y=e^{-x}\sin x$.

【解析】由通解公式得

$$y=e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C)$$

$$=e^{-x}(\int\cos x dx+C)$$

$$=e^{-x}(\sin x+C).$$

由于 $y(0)=0$, 故 C=0．所以 $y=e^{-x}\sin x$.

(11)【解析】选取 x 为参数，则弧微元 $ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\sec x dx$

所以 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

(12)【答案】$\frac{1}{\lambda}$.

【解析】原式$=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x de^{-\lambda x}$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}+0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}-\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}-e^0\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

(13)【答案】$\frac{7}{12}$.

【解析】原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta r dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3 dr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot 16\sin^4\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sin^5\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{12}.$$

(14)【答案】2.

【解析】方法 1： f 的正惯性指数为所对应矩阵的特征值中正的个数.

二次型 f 对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\lambda\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda-3&-2\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

故 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$. 因此 f 的正惯性指数为 2.

方法 2： f 的正惯性指数为标准形中正的平方项个数.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2,$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 则 $f=y_1^2+2y_2^2$，故 f 的正惯性指数为 2.

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15) (本题满分 10 分)

【解析】如果 $a\le 0$ 时， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-a}\cdot\int_0^x\ln(1+t^2)dt=+\infty$，

显然与已知矛盾，故 $a>0$.

当 $a>0$ 时，又因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{a}\cdot x^{3-a}=0.$$

所以 $3-a>0$ 即 $a<3$.

又因为 $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-2}}=\dfrac{2}{a(a-1)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{3-a}}{1+x^2}$

所以$3-a<2$，即$a>1$，综合得$1<a<3$.

（16）（本题满分 11 分）

【解析】因为$y'(x)=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，

$$y''(x)=\frac{d(\frac{t^2-1}{t^2+1})}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3},$$

令$y'(x)=0$得$t=\pm1$，

当$t=1$时，$x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{1}{3}$，此时$y''>0$，所以$y=-\dfrac{1}{3}$为极小值.

当$t=-1$时，$x=-1$，$y=1$，此时$y''<0$，所以$y=1$为极大值.

令$y''(x)=0$得$t=0$，$x=y=\dfrac{1}{3}$.

当$t<0$时，$x<\dfrac{1}{3}$，此时$y''<0$；当$t>0$时，$x>\dfrac{1}{3}$，此时$y''>0$.

所以曲线的凸区间为$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$，凹区间为$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，拐点为$(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$.

（17）（本题满分 9 分）

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]\cdot y+f_2'\left[xy,yg(x)\right]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]+y\left[f_{11}''(xy,yg(x))x+f_{12}''(xy,yg(x))g(x)\right]$$

$$+g'(x)\cdot f_2'\left[xy,yg(x)\right]+yg'(x)\left\{f_{12}''[xy,yg(x)]\cdot x+f_{22}''[xy,yg(x)]g(x)\right\}.$$

因为$g(x)$在$x=1$可导，且为极值,所以$g'(1)=0$，则

$$\frac{d^2z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

（18）（本题满分 10 分）

【解析】由题意可知当$x=0$时，$y=0$，$y'(0)=1$，由导数的几何意义得$y'=\tan\alpha$，

即$\alpha=\arctan y'$，由题意$\dfrac{d}{dx}\left(\arctan y'\right)=\dfrac{dy}{dx}$，即$\dfrac{y''}{1+y'^2}=y'$.

令 $y'=p$， $y''=p'$，则 $\frac{p'}{1+p^2}=p$， $\int\frac{dp}{p^3+p}=\int dx$，即

$$\int\frac{dp}{p}-\int\frac{p}{p^2+1}dp=\int dx，\ln|p|-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=x+c_1，即\ p^2=\frac{1}{ce^{-2x}-1}.$$

当 $x=0$， $p=1$，代入得 $c=2$，所以 $y'=\frac{1}{\sqrt{2e^{-2x}-1}}$，

则 $y(x)-y(0)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{2e^{-2t}-1}}=\int_0^x\frac{e^t dt}{\sqrt{2-e^{2t}}}$

$$=\int_0^x\frac{d\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-(\frac{e^t}{\sqrt{2}})^2}}=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}\Big|_0^x=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

又因为 $y(0)=0$，所以 $y(x)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}e^x-\frac{\pi}{4}$.

(19)（本题满分 10 分）

【解析】(Ⅰ) 设 $f(x)=\ln(1+x),x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n},\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以 $\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 时，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}，\ 即：\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

$$亦即：\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

结论得证.

(Ⅱ) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

先证数列$\{a_n\}$单调递减.

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

利用（I）的结论可以得到$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$，所以$\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$得到$a_{n+1}<a_n$，即数列$\{a_n\}$单调递减.

再证数列$\{a_n\}$有下界.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1),$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0.$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛.

（20）（本题满分 11 分）

【解析】(I)容器的容积即旋转体体积分为两部分

$$V=V_1+V_2=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2y-y^2\right)dy+\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(1-y^2\right)dy$$

$$=\pi\left(y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}+\pi\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}=\pi\left(5+\frac{1}{4}-3\right)=\frac{9}{4}\pi.$$

(II) 所做的功为

$$dw=\pi\rho g(2-y)(1-y^2)dy+\pi\rho g(2-y)(2y-y^2)dy$$

$$w=\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)(1-y^2)dy+\pi\rho g\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)(2y-y^2)dy$$

$$=\pi\rho g\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(y^3-2y^2-y+2)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}+y^3-4y^2+4y)dy\right)$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{y^4}{4}\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{2y^3}{3}\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+2y\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{4y^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}+2y^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\right)$$

$$=\frac{27\times10^3}{8}\pi g=3375g\pi\ .$$

(21)（本题满分 11 分）

【解析】因为 $f(x,1)=0$， $f(1,y)=0$，所以 $f_x'(x,1)=0$.

$$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf_{xy}''(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf_x'(x,y)$$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf_x'(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f_x'(x,y)dy\right]=\int_0^1 xdx\left(f_x'(x,1)-\int_0^1 f_x'(x,y)dy\right)$$

$$=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f_x'(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf_x'(x,y)dx=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=\iint_D f(x,y)dxdy=a\ .$$

(22)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，对 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当 $a=5$ 时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示.

(II) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(23)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\\alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0

（B）1

（C）2

（D）3

【答案】：C

【解析】：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^n n!$

【答案】：C

【解析】：$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}n!$

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$，则数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A)充分必要条件.　　(B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）即非充分地非必要条件.

【答案】：(B)

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}$ sin$x$dx(k=1,2,3),则有 D

（A）$I_1< I_2 <I_3$.　　　(B) $I_2< I_2< I_3$.

(C) $I_1< I_3 <I_1$,　　　(D) $I_1< I_2< I_3$.

【答案】: (D)

【解析】: ∵ $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin x dx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k'=e^{k^2}\sin k\ge 0, k\in(0,\pi)$，即可知 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin x dx$ 关于 k 在 $(0,\pi)$ 上为单调增函数，又由于 $1,2,3\in(0,\pi)$，则 $I_1<I_2<I_3$，故选 D

（5）设函数 f (x,y) 可微，且对任意 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是

(A) $x_1> x_2, y_1< y_2$.　　　(B) $x_1> x_2, y_1>y_1$.

(C) $x_1< x_2, y_1< y_2$.　　　(D) $x_1< x_2, y_1> y_2$.

【答案】: (D)

【解析】: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2, y_1>y_2$ 必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1,$ 围成，则 $\iint(x^5y-1)dxdy=($　$)$

$(A)\pi$　$(B)2$　$(C)-2$　$(D)-\pi$

【答案】:（D）
【解析】: 由二重积分的区域对称性，

$$\iint(x^5y-1)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)dy=-\pi$$

（7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】:（C）

【解析】: 由于 $\left|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。故选（C）

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】:（B）

【解析】: $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。

【答案】: **1**

【解析】：将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$ ， $x=0$、 $y=0$ 代入可得，所以

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

再次求导得 $2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}$，再将 $x=0$、 $y=0$、 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入可得

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1$。

（10）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$______。

【答案】：$\frac{\pi}{4}$

【解析】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$

（11）设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$______。

【答案】：0.

【解析】：因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为______。

【答案】：$x=y^2$

【解析】：$ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y-\frac{1}{y}x\Rightarrow\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y$ 为一阶线性微分方程，

所以

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2dy+C\right]=(y^3+C)\frac{1}{y}$$

又因为 $y=1$ 时 $x=1$，解得 $C=0$，故 $x=y^2$.

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

【答案】： $(-1,0)$

【解析】： 将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率计算公式，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x+1)^2=1$，解得 $x=0$或-1，又 $x<0$，所以 $x=-1$，这时 $y=0$，

故该点坐标为$(-1,0)$

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B ,则

$\left|BA^*\right|=$________。

【答案】：-27

【解析】： 由于 $B=E_{12}A$，故 $BA^*=E_{12}A\cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$，

所以，$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x,}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

【解析】：（1） $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}+1=1$，即 $a=1$

（2）,当 $x\to 0$ 时，由 $f(x)-a=f(x)-1=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$

又因为,当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\dfrac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a\sim\dfrac{1}{6}x$，即 $k=1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

【解析】：$f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点．$f_x'(x,y)=e-x=0, f_y'(x,y)=-y=0$，解得函数为驻点为$(e,0)$.

又$A=f_{xx}'(e,0)=-1, B=f_{xy}'(e,0)=0, C=f_{yy}'(e,0)=-1$，

所以$B^2-AC<0, A<0$，故$f(x,y)$在点$(e,0)$处取得极大值$f(e,0)=\dfrac{1}{2}e^2$.

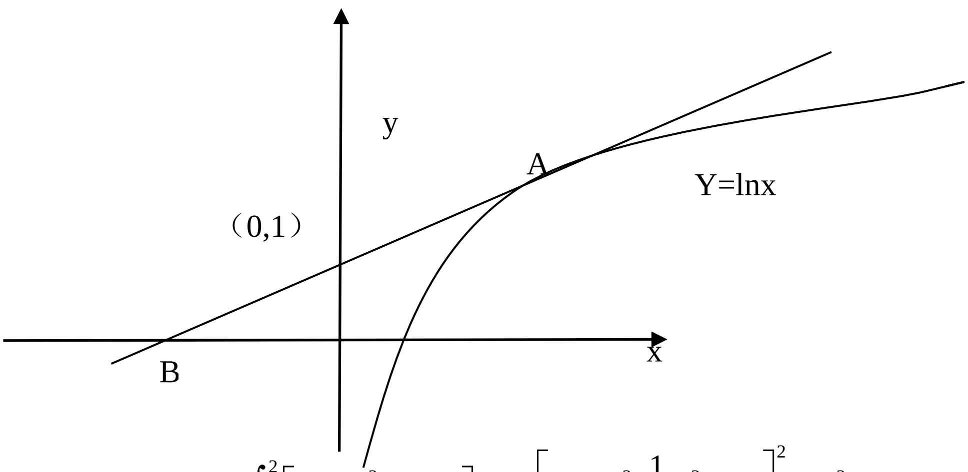
（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【解析】：

设切点坐标为$A(x_0,\ln x_0)$，斜率为$\dfrac{1}{x_0}$，所以设切线方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，又因为该切线过$B(0,1)$，所以$x_0=e^2$，故切线方程为：$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

切线与x轴交点为$B(-e^2,0)$



（1）$A=\int_0^2\left[e^y-e^2(y-1)\right]dy=\left[e^y-e^2(\frac{1}{2}y^2-y)\right]_0^2=e^2-1$

（2）

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot\left[e^2-\left(-e^2\right)\right]-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x dx\\&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln x dx\right]\\&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[4e^2-\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2dx\right]\\&=\frac{8}{3}\pi e^2-2\pi\left(e^2-1\right)=\frac{2}{3}\pi\left(e^2+3\right)\end{aligned}$$

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成。

【解析】: $\iint\limits_D xyd\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9 tdt$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}$$

$$=\frac{16}{15}$$

（19）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

【解析】:

1）特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$， $y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时，$2x>0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，可知 $y''>0$；当 $x<0$ 时，$2x<0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知 $\left(0,0\right)$ 点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f^{'}\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{2}{\left(1-x\right)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\geq 0$，

故 $f^{'}\left(x\right)\geq 0$，而 $f\left(0\right)=0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\leq 0$，

故 $f^{'}\left(x\right)\geq 0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

【解析】：(1) 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>0$，再由 $f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$，由零点定理得在 $(\frac{1}{2},1)$ 肯定有解 x_0，假设在此区间还有另外一根 x_1，

所以$x_0{}^n + x_0{}^{n-1} + \cdots + x_0 - 1 = x_n{}^n + x_n{}^{n-1} + \cdots + x_n - 1$，由归纳法得到$x_1 = x_0$，即唯一性得证

（2）假设根为x_n，即$f(x_n) = x_n{}^n + x_n{}^{n-1} + \cdots + x_n - 1 = 0$，所以$f(x_n) = \dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n} - 1 = 0, (\dfrac{1}{2} < x_n < 1)$，

由于$x_{n+1}{}^{n+1} + x_{n+1}{}^n + \cdots + x_{n+1} - 1 = 0$，可知$x_{n+1}{}^n + x_{n+1}{}^{n-1} + \cdots + x_{n+1} - 1 < 0$，由于$x_n{}^n + x_n{}^{n-1} + \cdots + x_n - 1 = 0$，可知$x_{n+1} < x_n$。又由于$\dfrac{1}{2} < x_n < 1$，也即$\{x_n\}$是单调的。则由单调有界收敛定理可知$\{x_n\}$收敛，假设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，可知$a < x_2 < x_1 = 1$。

当$n \to \infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n} - 1 = \dfrac{a}{1-a_n} - 1 = 0$, 得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

（22）（本题满分 11 分）

设$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（Ⅰ）求$|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组$Ax = b$有无穷多解，求a，并求$Ax = b$的通解。

【解析】:（Ⅰ）$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有$1 - a^4 = 0$及$-a - a^2 = 0$，可知$a = -1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，有$|A|=0$.

即： $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得 $\lambda=1$或-1.

当 $\lambda=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故 $\lambda=-1$.

（23）（本题满分 11 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$， A^T 为矩阵 A 的转置，已知$r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2） $f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0$,解$(\lambda_1E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$,解$(\lambda_2E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6$,解$(\lambda_3E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 等价的无穷小

【答案】（C）

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\alpha(x)=0$，

因此当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)\to 0$，所以 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小。

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

【答案】（A）

【解析】由于 $f(0)=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}2\left[\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}\right]=2f'(0)$，

对此隐函数两边求导得 $-(y+xy')\sin(xy)+\frac{y'}{y}-1=0$，所以 $f'(0)=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=2$。

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

【答案】（C）

【解析】$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x\sin tdt=1-\cos x, & 0\le x<\pi\\ \int_0^\pi\sin tdt+\int_\pi^x 2dt=2(x-\pi+1), & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，

由于 $\lim\limits_{x\to\pi-}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi+}F(x)=2$，所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续；

$\lim\limits_{x\to\pi-}\dfrac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{-1-\cos x}{x-\pi}=0$，$\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{2(x-\pi)}{x-\pi}=2$，

所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导。

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$\alpha>2$　　（C）$-2<\alpha<0$　　（D）$0<\alpha<2$

【答案】（D）

【解析】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$

因为 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{e}f(x)dx+\int_e^{+\infty}f(x)dx$，

当 $1<x<e$ 时，$\int_1^{e}f(x)dx=\int_1^{e}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}\int_\varepsilon^{e}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]-\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(e-1)^{\alpha-2}}$，

要使 $\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]$ 存在，需满足 $\alpha-2<0$；

当 $x\ge e$ 时，$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_e^{+\infty}\dfrac{d\ln x}{\ln^{\alpha+1}x}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}\lambda})+\dfrac{1}{\alpha}$，

要使 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}\lambda})$ 存在，需满足 $\alpha>0$；所以 $0<\alpha<2$。

（5）设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

【答案】（A）

【解析】已知 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y^2}{x}f'(xy)$，

所以 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=[-\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)]+(\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy))=2yf'(xy)$。

（6）设 D_k 是圆域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\right\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则

（　　）

（A） $I_1>0$ （B） $I_2>0$ （C） $I_3>0$ （D） $I_4>0$

【答案】（B）

【解析】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则有

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy=\int_0^1 rdr\int_\alpha^\beta(r\sin\theta-r\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_\alpha^\beta$$

故当 $k=2$ 时， $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\pi$ ，此时有 $I_2=\frac{2}{3}\Big|>0.$ 故正确答案选 B。

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$ ，且 C 可逆，则（　　）
（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价
【答案】（B）

【解析】由 $C=AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（8）矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A） $a=0,b=2$

（B） $a=0,b$为任意常数

（C） $a=2,b=0$

（D） $a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2,b,0$ 。

又$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数 。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$________________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【解析】原式= $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}}$ ，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x+o(x))}{x}=\frac{1}{2}$$

因此答案为$e^{\frac{1}{2}}$.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$ ，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$________________.

【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-e^x},\therefore\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}},\dfrac{dx}{dy}|_{y=0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}}|_{x=-1}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ (-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6})$，则 L 所围成的平面图形的面积为________________.

【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】所围图形的面积是$S=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\dfrac{\pi}{12}$

(12) 曲线$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的法线方程为________________.

【答案】$y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}}=t$，$\frac{dy}{dx}|_{t=1}=1,$

当$t=1$时，$x=\frac{\pi}{4},y=\ln\sqrt{2}$，故法线方程为$y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$.

(13)已知$y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件$y\big|_{x=0}=0$ $y'\big|_{x=0}=1$的解为$y=$________________.

【答案】$y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【解析】由题意知：e^{3x},e^x是对应齐次方程的解，$-xe^{2x}$是非齐次方程的解，

故非齐次的通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$，将初始条件代入，得到$C_1=1,C_2=-1$,

故满足条件的解为$y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$。

（14）设$\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$为 A 的行列式，$\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$为$\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}$的代数余子式，若$\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}+\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$,则$|A|=$____

【答案】-1

【解析】

由$a_{ij}+A_{ij}=0$可知，$A^T=-A^*$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$
$$=-\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$$

从而有$|A|=|A^T|=|-A^*|=-|A|^2$,故$|A|$=-1.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值。

【解析】因为当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1$

又因为：

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$$
$$=1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$$
$$=1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{ax^n}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)}{ax^n}\right)$$

所以 $n=2$ 且 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{4}{2a}+\dfrac{9}{2a}=1\Rightarrow a=7$

（16）（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

【解析】由题意可得：

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

因为：$V_y=10V_x$ 所以 $\dfrac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\dfrac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成.计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$ 。

【解析】$\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy$

$$=\int_0^2 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$$

$$=\frac{416}{3}$$

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$.证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；（II）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

【解析】（1）令 $F(x)=f(x)-x, F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0,$

则 $\exists\xi\in\left(0,1\right)$ 使得 $F'(\xi)=0,即 f'(\xi)=1$

（2）令 $G(x)=e^x(f'(x)-1),$ 则 $G(\xi)=0,$

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0$,

则 $\exists\eta\in\left(-\xi,\xi\right)\subset\left(-1,1\right)$ 使 $G'(\xi)=0,$

即 $e^\eta[f'(\eta)-1]+e^\eta f''(\eta)=0$，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 11 分）

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\ge0,y\ge0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

【解析】本题本质上是在条件 $x^3-xy+y^3=1(x\ge0,y\ge0)$ 下求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最值。

故只需求出 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在条件 $x^3-xy+y^3=1$ 下的条件极值点，再将其与曲线端点处（$\left(0,1\right),\left(1,0\right)$）的函数值比较，即可得出最大值与最小值。

由于函数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 与 x^2+y^2 的增减性一致，故可以转化为求 x^2+y^2 的条件极值点：

构造拉格朗日函数 $L\left(x,y,\lambda\right)=x^2+y^2+\lambda\left(x^3-xy+y^3-1\right)$，求其驻点得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+3\lambda x^2-\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+3\lambda y^2-\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0\end{cases}$$

为了求解该方程组，将前两个方程变形为 $\begin{cases}2x=\lambda y-3\lambda x^2\\2y=\lambda x-3\lambda y^2\end{cases}$

进一步有 $\begin{cases}2xy=\lambda y^2-3\lambda x^2y\\2xy=\lambda x^2-3\lambda xy^2\end{cases}$，故 $\lambda x^2-3\lambda xy^2=\lambda y^2-3\lambda x^2y$

即 $\lambda\left(x-y\right)\left(x+y+3xy\right)=0$。则有 $\lambda=0$ 或 $x-y=0$ 或 $x+y+3xy=0$。

当 $\lambda=0$ 时，有 $x=y=0$，不可能满足方程 $x^3-xy+y^3-1=0$；

当 $x+y+3xy=0$，由于 $x\ge 0, y\ge 0$，也只能有 $x=y=0$，不可能满足第三个方程；

故必有 $x-y=0$，将其代入 $x^3-xy+y^3-1=0$ 得 $2x^3-x^2-1=0$，解得 $x=1, y=1$。

可知 $(1,1)$ 点是唯一的条件极值点。

由于 $f(1,1)=\sqrt{2}$，$f(0,1)=f(1,0)=\sqrt{2}$，故曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\ge 0, y\ge 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$ 与最短距离为 1。

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（I）求 $f(x)$ 的最小值

（II）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

【解析】（I） $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$。

可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$。

（2）、由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\ge 1$，则 $\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$，即 $x_{n+1}>x_n$，故 x_n 单调递增。

又由于 $\ln x_n<\ln x_n+\dfrac{1}{x_n+1}<1$，则 $x_n<e$，故 x_n 有上界，则由单调有界收敛定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\left(n\,x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)=\ln a+\dfrac{1}{a}$，由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n+1}<1$，则

$\ln a+\dfrac{1}{a}\le 1$，故 $a=1$。

（21）（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \quad (1\le x\le e)$，

（1）求 L 的弧长；

（2）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1, x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标。

【解析】（1）由弧长的计算公式得 L 的弧长为

$$\int_1^e\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)'\right]^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{e^2+1}{4}$$

（2）由形心的计算公式可得，D 的形心的横坐标为

$$\frac{\int_1^e x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}{\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}=\frac{3\left(e^4-2e^2-3\right)}{4\left(e^3-7\right)}$$

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad（1）$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有 $1+a=0,b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，故有\begin{cases}x_1=k_1+k_2+1\\ x_2=-k_1\\ x_3=k_1\\ x_4=k_2\end{cases},其中k_1、k_2任意.$$

从而有$C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

【解析】(1)

$$\begin{aligned} f &=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+(4a_1a_2+2b_1b_2)x_1x_2 \\ &+(4a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{则}f\text{的矩阵为}\begin{pmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$$

$=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（2）令$\text{A}=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T,\text{则}A\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha,A\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta\beta^T\beta=\beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

1.B

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(2x)^{\alpha}}{x}=2^{\alpha}\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}\lim_{x\to0^+}x^{\frac{2}{a}-1}=0$$

$$\therefore\frac{2}{\alpha}-1>0\therefore\alpha<2$$

2、C

$$y=x+\sin\frac{1}{x}$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore y=x+\sin\frac{1}{x}\text{存在斜渐近线}y=x$$

3、D

举例：

$$\text{令}f\left(x\right)=x^2,\text{则在}[0,\ 1]\text{区间}$$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1$$

$$\therefore g\left(x\right)=0\cdot(1-x)+1\cdot x=x$$

$$\therefore\ f\left(x\right)\le g\left(x\right)$$

$$\text{又}f''\left(x\right)=2\ge0\therefore D$$

4．C

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+4}{2t}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{2\cdot 2t-2(2t+4)}{(2t)^2}}{2t}=\frac{-8}{(2t)^3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=-1$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore R=\frac{1}{k}=(1+3^2)^{\frac{3}{2}}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$$

5、D

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2}$. 故 $\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\cdot\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

6、A

排除法当 $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$，因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 与 $B=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 异号.

$AC-B^2<0$，函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内没有极值.

连续函数在有界闭区域内有最大值和最小值，故最大值和最小值在 D 的边界点取到.

7、B

解析：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= a\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} + c\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a\times d\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - c\times b\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (bc-ad)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -(ad-bc)^2$$

8、A

解析：

已知α_1，α_2，α_3无关

设$\lambda_1(\alpha_1+\mathrm{k}\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_2+l\alpha_3)=0$

即$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+(\mathrm{k}\lambda_1+l\lambda_2)\alpha_3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$

从而$\alpha_1+\mathrm{k}\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关

反之，若$\alpha_1+\mathrm{k}\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关，不一定有$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$无关

例如，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

9. $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{3}{8}\pi$

10.

$f'(x)=2(x-1)x \in [0,2]$

$\therefore f(x)=x^2-2x+c$

又$f(x)$是奇函数

$\therefore f(0)=0 \therefore c=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$

$x \in [0,2]$

$f(x)$的周期为4

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1$

11、解：方程两边对 x 求偏导：

$$e^{2yz}(2y\cdot\frac{\partial z}{\partial x})+2x+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

代入$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$解得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$$

两边对y求偏导

$$e^{2yz}(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y})+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

代入$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$解得：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$$

12. 解：把极坐标方程化为直角坐标方程

令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{0-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\begin{cases} x = \theta\cos\theta = 0 \\ y = \theta\sin\theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

则切线方程为

$$(y-\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi}(x-0)$$

化简为

$$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$$

13、质心的横坐标：

$$\frac{\int_0^1 x f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\,dx}{\int_0^1 (-x^2+2x+1)\,dx} = \frac{\left.(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\right|_0^1}{\left.(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x)\right|_0^1} = \frac{11}{20}$$

14、

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2a\, x_1x_3 + 4\, x_2x_3$$
$$= (x_1 + a\, x_3)^2 - (x_2 - 2\, x_3)^2 + 4\, x_3^2 - a^2\, x_3^2$$

$\because$ f的负惯性指数为1

$\therefore$ $4-a^2 \geq 0$

$\therefore$ $-2 \leq a \leq 2$

15.
解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (\mathrm{t}^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (\mathrm{t}^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}=\lim_{x\to\infty}x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})$$

$$\underline{\underline{令\frac{1}{x}=t}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+t+\frac{1}{2}t^2+\mathrm{O}(\mathrm{t}^2)-1-\mathrm{t}}{t^2}=\frac{1}{2}$$

16、
解：

$\because x^2+y^2y'=1-y'$

$\therefore y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

令$y'=0,\therefore x=\pm1$

$\therefore y''=\dfrac{-2x(y^2+1)-(1-x^2)\cdot2yy'}{(y^2+1)^2}$

又$\because y'(1)=y'(-1)=0$

$\therefore y''(1)=\dfrac{-2}{y^2(1)+1}\langle 0,\therefore y(1)$为极大值

$y''(-1)=\dfrac{2}{y^2(1)+1}\rangle 0, y(-1)$为极小值

下求极值

$\because y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1},\therefore (y^2+1)dy=(1-x^2)dx,\therefore\int(y^2+1)dy=\int(1-x^2)dx$

$\therefore\dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+c$

又　$y(2)=0$

$\therefore c=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$

代入 $x=1$

$\therefore \frac{1}{3}y^3(1)+y(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

$\therefore y(1)=1$

代入 $x=-1,$

$\therefore \frac{1}{3}y^3(-1)+y(-1)=-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$

$\therefore y(-1)=0$

17、

解：积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，利用轮对称行，

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 \sin(\pi r)r\,\mathrm{d}\,r=-\frac{1}{4}\int_1^2 rd\cos(\pi r)$$

$$=-\frac{1}{4}r\cos(\pi r)|_1^2+\frac{1}{4}\int_1^2\cos(\pi r)\,\mathrm{d}\,r$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

18、

解 ：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot e^x \cdot \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos y \cdot (f'' \cdot e^x \cdot \cos y \cdot e^x + f' \cdot e^x) = f'' \cdot (e^x \cdot \cos y)^2 + f' \cdot e^x \cdot \cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot e^x \cdot (-\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x[f'' \cdot e^x \cdot (-\sin y) + f' \cdot \cos y] = (e^x)^2 \sin y^2 f'' - f' \cdot \cos y \cdot e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot e^{2x} = (4z + e^x \cdot \cos y)e^{2x}$$

$\therefore f''(e^x \cdot \cos y) = 4f(e^x \cdot \cos y) + e^x \cdot \cos y$

令$t = e^x \cdot \cos y, \therefore f''(t) = 4f(t) + t$

$\therefore y'' - 4y = x$

求特征值：

$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \therefore x = \pm 2 \quad \therefore y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

再求非其次特征值。

$y^* = (ax + b)$ 代入 $\therefore y^* = -\frac{1}{4}x$

$\therefore y = y(x) + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x$

$y(0)=0=C_1 + C_2$

$y'(0)=0=x_1 - x_2 - \frac{1}{4}$

$$\therefore \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{16} \\ C_2 = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\therefore f(\mu) = \frac{1}{16}e^{2\mu} - \frac{1}{16}e^{-2\mu} - \frac{1}{4}\mu$$

19.

解：（I）

$h_1(x)=\int_a^x g(t)dt$

$h_1(a)=0$

$h_1'(x)=g(x)\geq 0$

$\therefore h_1(x)$单调不减

$\therefore$ 当$x\in[a,b]$时，$h_1(x)\geq 0$

$h_2(x)=\int_a^x g(t)dt-x+a$

$h_2'(x)=g(x)-1$

$\because 0\leq g(x)\leq 1 \therefore h_2'(x)\leq 0$

$\therefore h_2(x)$单调不增又$h_2(a)=0$

$\therefore$ 当$x\in[a,b]$时，$h_2(x)\leq 0$

$p(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$

$p'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\cdot g(x)=\left[f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\right]g(x)$

$\because 0\leq g(x)\leq 1$

$\therefore \int_a^x g(t)dt\leq \int_a^x dt=x-a \therefore a+\int_a^x g(t)dt\leq x$

又$f(x)$单调增加

（II）$\therefore f(x)\geq f[a+\int_a^x g(t)dt] \therefore p'(x)\geq 0$

$\therefore p(x)$单调不减

又$p(a)=0 \therefore p(b)\geq 0$

即$\int_a^b f(x)g(x)dx\geq \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx$

20、

解：

$$f(x)=\frac{x}{1+x}, f_1(x)=f(x)$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}$$

用归纳法知：$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}, x\in[0,1]$

$$S_n=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{nx+1-1}{1+nx}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}n[\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)]=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$$

$$=1$$

21.

解：

因 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 则

$$f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)$$

$$\begin{cases} f(y,y)=(y+1)^2-(2-y) \\ f(y,y)=y^2+2y+\varphi(y) \end{cases}$$

则$\varphi(y)=y-1$

故$f(x,y)=y^2+2y+x-1$

$$f(x,y)=0\Rightarrow x=-y^2-2y+1$$

$$V=\int_0^2\pi\left(f(x)+1\right)^2dx=\int_0^2\pi\left[f^2(x)+2f(x)+1\right]dx=\int_0^2\pi(2-x)dx=\pi\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=2\pi$$

22、

解：

$$(A)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-4r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_3+r_1]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1&=-x_4\\x_2&=2x_4\\x_3&=3x_4\\x_4&=x_4\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$ c 为任意常数

设 $B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1\\0&1&-1&1&\vdots&0\\1&2&0&-3&\vdots&0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&0\\0&1&-1&1&\vdots&1\\1&2&0&-3&\vdots&0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&0\\0&1&-1&1&\vdots&0\\1&2&0&-3&\vdots&1\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\1&2&0&-3&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\0&4&-3&1&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\0&0&1&-3&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5&\vdots&4&12&-3\\0&1&0&-2&\vdots&-1&-3&1\\0&0&1&3&\vdots&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\vdots&2&6&-1\\0&1&0&-2&\vdots&-1&-3&1\\0&0&1&-3&\vdots&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2, c_3为任意常数

23、

解：

$$设A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以A 的n个特征值为λ_1=n, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n$=0

又因为A是一个实对称矩阵，所以A可以相似对角化，且

$$A \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - N \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以B 的n个特征值为λ_1'=n, $\lambda_2' = \cdots = \lambda_n'$=0

$$又|0E - B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

所以$r(0E - B) = 1$

故B的n−1重特征值0有n−1个线性无关的特征向量

所以 B 也可以相似对角化，且 $B \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，

所以 A 与 B 相似。