《数字信号处理》1-8 章作业选讲

杨勐
2019 年 11 月 8 日

相关说明
1、注意教材的笔误、错误，及时上报
2、改作业无法完全准确，请对照参考答案

课堂目的
1、讲解作业难点
2、梳理知识要点

习题
第一章

1.3 考虑如图 1.29 所示的函数 $x(t)$，求出 $x(t)$ 的连续时间傅里叶变换。

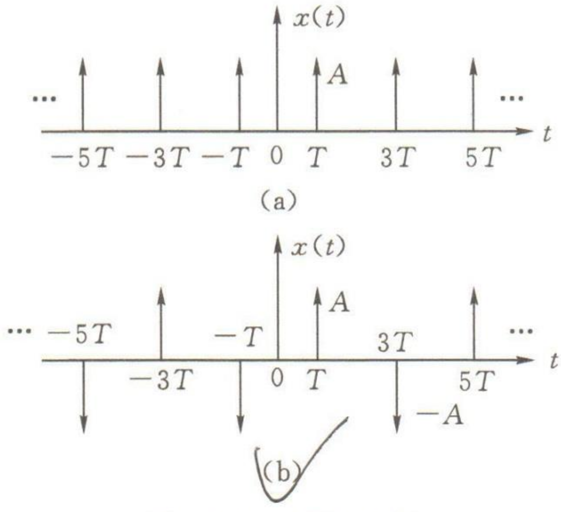


图 1.29 习题 1.3 图

分析：

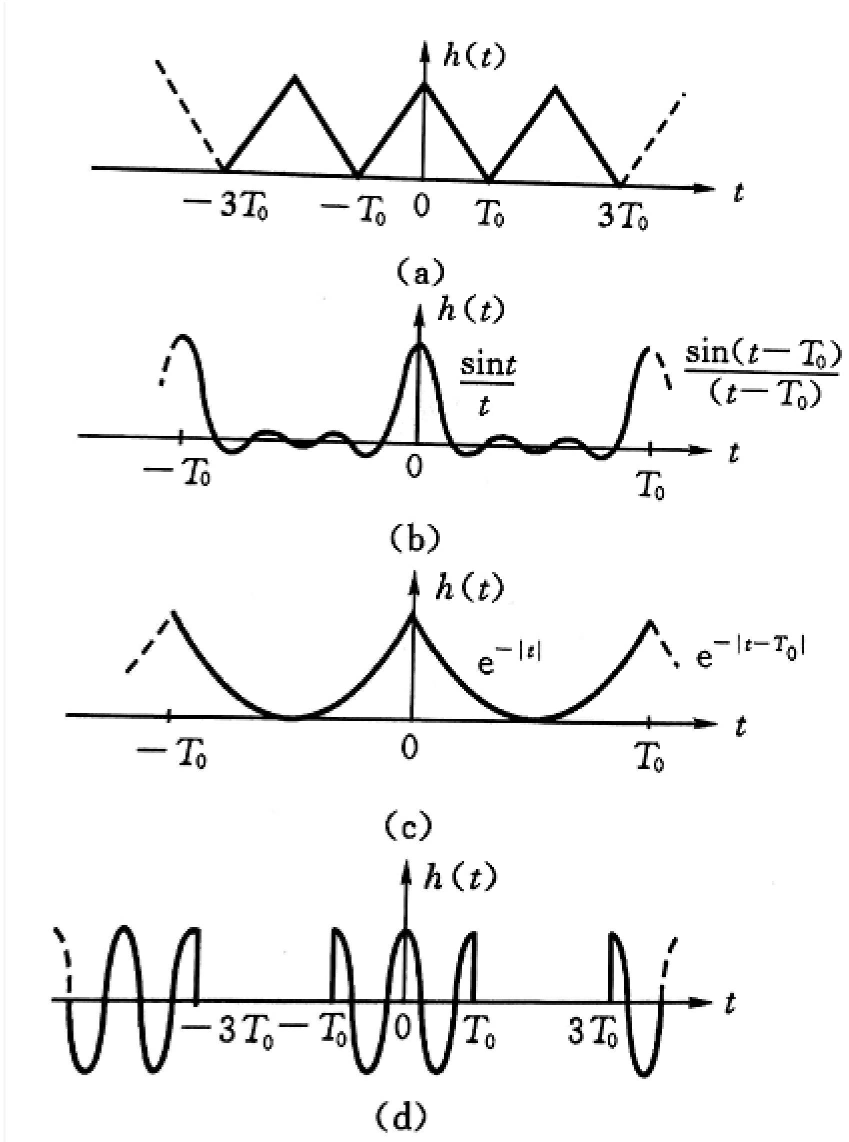
图(b)为连续时间周期信号，即 $x(t) = -A\delta(t+T) + A\delta(t-T)$.

应计算信号的傅里叶级数（FS）。周期 $T_0 = 4T$，基波频率 $\Omega_0 = 2\pi/4T = \pi/2T$
根据 FS 变换公式（1.6）有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}\left(n\Omega_0\right) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jn\Omega_0 t} = \frac{1}{4T}\int_{-2T}^{2T}\left[-A\delta(t+T)+A\delta(t-T)\right]e^{-jn\pi t/2T} \\
&= \frac{A}{4T}\left(-e^{-jn\pi t/2T}\Big|_{t=-T} + e^{-jn\pi t/2T}\Big|_{t=T}\right) \\
&= \frac{A}{4T}\left(-e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi/2}\right) \\
&= -\frac{jA}{2T}\sin\left(n\pi/2\right)
\end{aligned}
$$

知识要点：区分连续时间周期信号傅里叶级数（FS）、离散时间傅里叶变换（DTFT）、离散时间傅里叶级数（DFS）、离散傅里叶变换（DFT）.

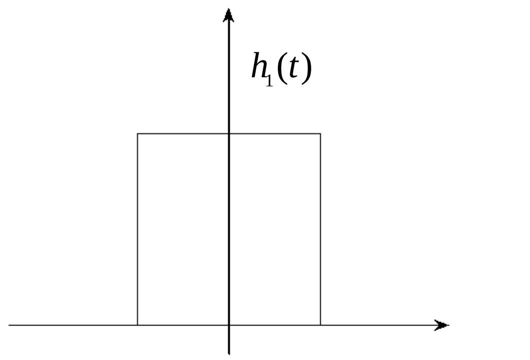
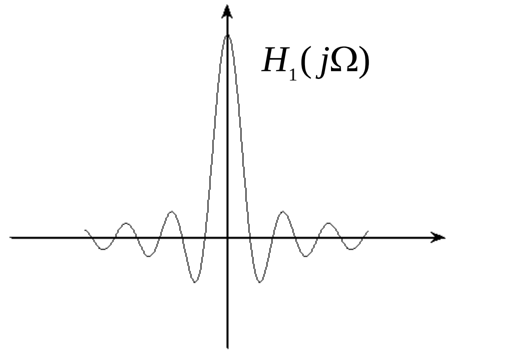
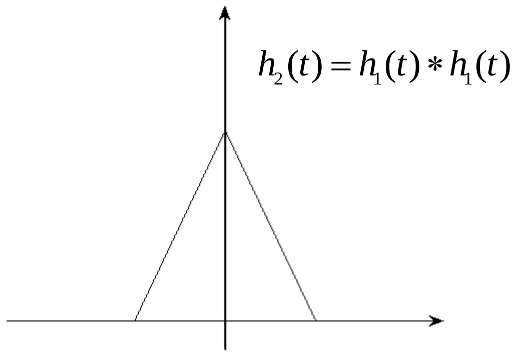
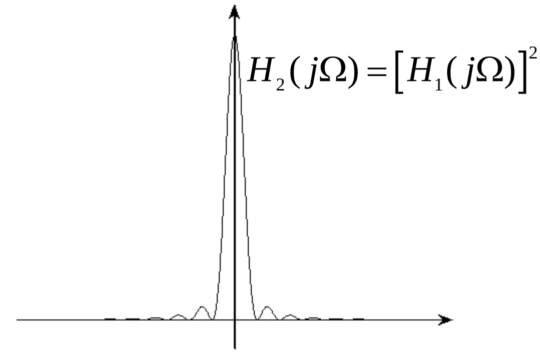
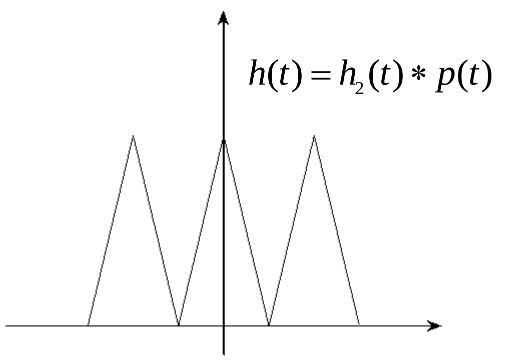
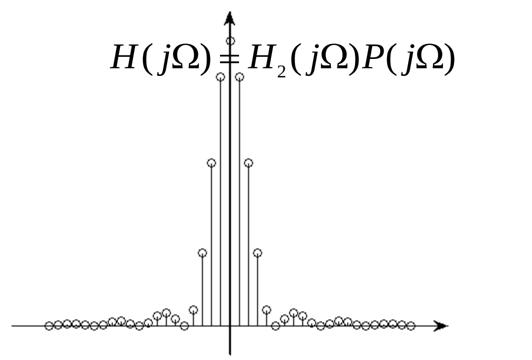
1.17



分析：

1）卷积表示信号的周期化 $h(t)=h_2(t)*p(t)=h_1(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2T_0n)$

2）三角波是方波的卷积 $h_2(t)=h_1(t)*h_1(t)$

时域信号	频域信号
	
	
	

知识要点：卷积的物理意义是实现时移（频移），比如通信技术中的调制（图 1.12）。

1.25

1.25 采样信号序列为

$$x(nT)=\cos\left(\frac{\pi}{4}nT\right),\qquad -\infty<n<\infty$$

是对模拟信号

$$x(t)=\cos(\Omega_0 t),\qquad -\infty<t<\infty$$

进行采样而得到，采样率为 1000 样本/秒。问：有哪两种可能的 Ω_0 值以同样的采样率能得到该序列 $x(nT)$？

分析：

（1）时域方法

采样信号 x(nT)和模拟信号 $x(t)$在任意采样点 $t=nT$ 上值相等，即

$$\cos\left(\Omega_0 \cdot t\right)=\cos\left(\Omega_0 T \cdot n\right)=\cos\left(\frac{\pi T}{4}\cdot n\right)=\cos\left(\pm\left(\frac{\pi T}{4}+2\pi k\right)\cdot n\right)$$

$$k=0,1,2,3,\ldots$$

$$\Omega_0=\pm\left(\frac{\pi T}{4}+2\pi k\right)/T=\pm\left(\frac{\pi}{4}+2000\pi k\right)$$

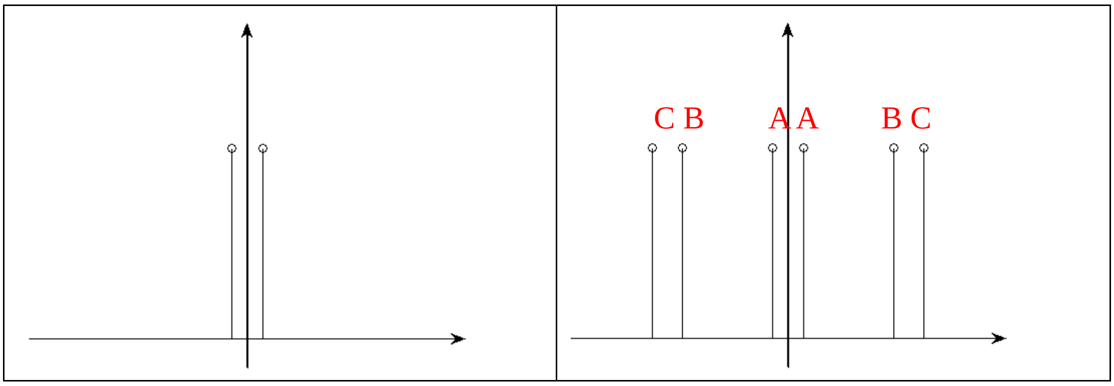
（考虑物理意义，不含负频率值）

（2）频域方法

$\cos\left(\Omega_0 t\right)=\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}$，即对称的两个脉冲信号

任意一对脉冲信号周期化都可以得到相同的频域信号，并且已知频域周期为 $\Omega_s=\frac{2\pi}{T}=2000\pi$，因此

$$\Omega_0=\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}+\Omega_s,\frac{\pi}{4}+\Omega_s,-\frac{\pi}{4}+2\Omega_s,\frac{\pi}{4}+2\Omega_s,\ldots$$



知识要点：时域采样，频域周期延拓

1.28

1.28 对具有如图 1.36 所示的连续时间傅里叶变换 $X(j\Omega)$ 的模拟信号 $x(t)$ 进行周期为 $T=2\pi/\Omega_0$ 的采样得到 $x(nT)$。

(1) 采样序列信号 $x(nT)$ 经过一个数字信道传输，在接收端原信号 $x(t)$ 必须恢复出来，假设可以采用理想滤波器。试画出该恢复系统的方框图，并给出它的特性；

(2) 请说明 T 在什么范围内(用 Ω_0 表示)，$x(t)$ 可从采样序列 $x(nT)$ 恢复?

1.29 在图 1.37 中，设 $X(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geq\pi/T$，对于一般情况 $T_1\neq T_2$，试用 $x(t)$ 来表示 (t)，对于 $T_1>T_2$ 和 $T_1<T_2$，两种情况有什么不同?

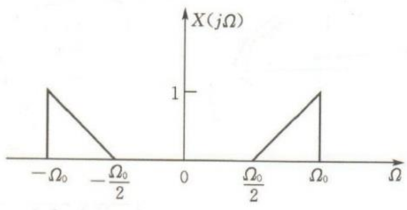


图 1.36 习题 1.28 图

分析：

（1）解决方案一：**频域周期延拓+高通滤波器**。

Case 1. 以 A 和 B 频谱为总体，以 Ω_s 为周期进行延拓，则易得 $\Omega_s \geq 2\Omega_0$

Case 2. 对 A 和 B 频谱，分别以 Ω_s 为周期进行延拓，为保证所有频谱不混叠，则有

$$\begin{cases} -\Omega_0/2 \leq \Omega_0/2-\Omega_s \\ \Omega_0-\Omega_s \leq -\Omega_0+\Omega_s \\ -\Omega_0/2+\Omega_s \leq \Omega_0/2 \end{cases}，即得 \Omega_s=\Omega_0$$

因此，采样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_0$ 或 $\Omega_s=\Omega_0$ 可保证频谱不混叠，可通过**带通滤波器**恢复原始信号。

图 1、以 A 和 B 为总体来做周期延拓

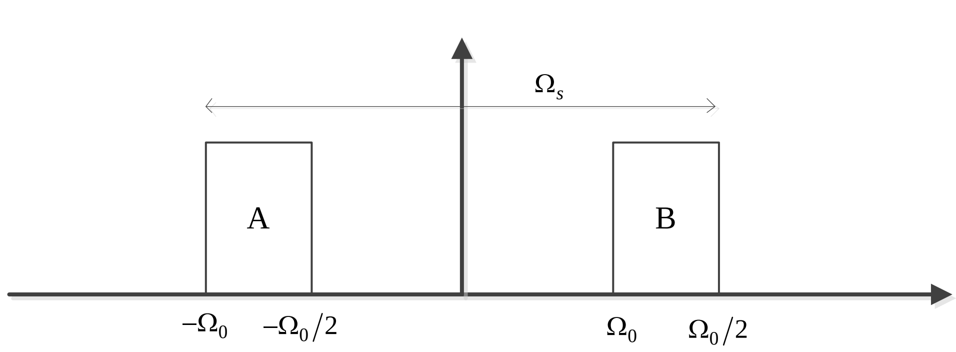



图 2、分别对 A 和 B 做周期延拓

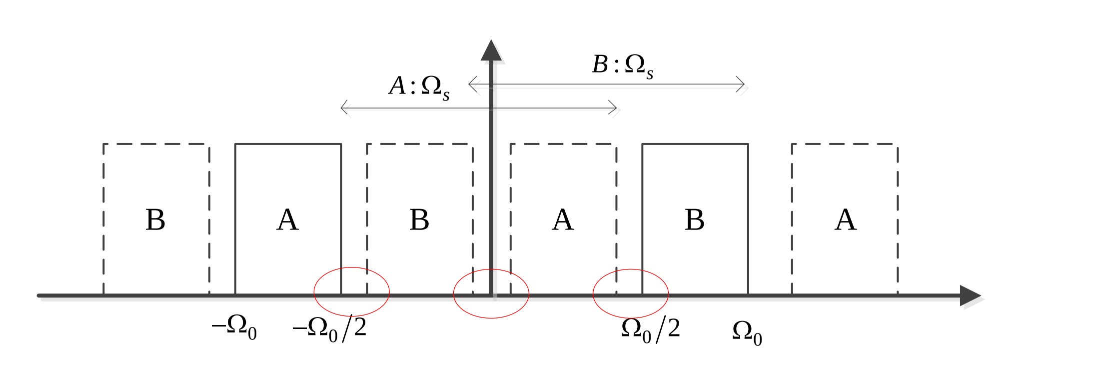
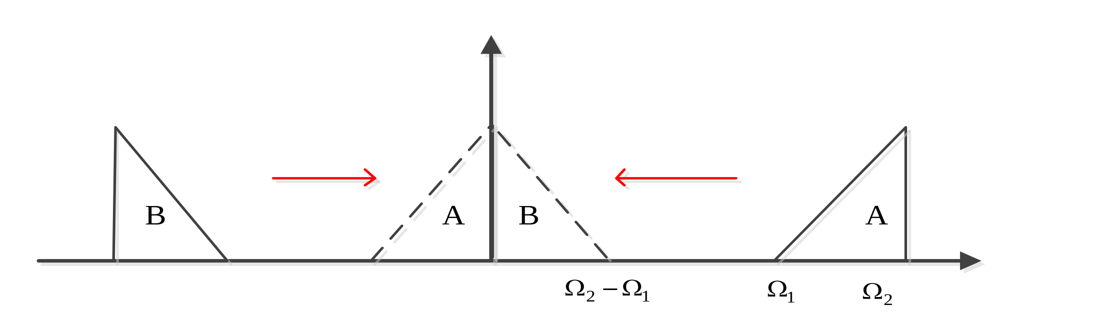


图 3、频谱解调制



（2）解决方案二：**解调制+低通滤波器**。

即把高频信号解调制到低频，然后再做采样和低通滤波。假设 $x_L(t)$ 和 $X_L[j\Omega]$ 为一个低通信号及其傅里叶变换，则调制后的高频信号为

$$x_H(t)=x_L(t)e^{j\Omega_0 t}\Leftrightarrow X_L\left[j(\Omega-\Omega_0)\right]$$

反向即可把高频信号解调制得到低频信号，请自己推导。如果输入信号为实信号呢？

知识要点：1.时域采样，频域周期延拓。2、频域调制技术。3、实信号共轭偶对称。

第二章

2.4

2.4 (1) 求等幅有限长序列

$$x(n)=\begin{cases}1/2, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

的离散时间傅里叶变换，并画出 $x(n)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的幅频和相频特性。

(2) 设一序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-ae^{j\omega}}$，$-1<a<0$，求出并画出下列以 ω 为变量的函数。

(a) $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$；(b) $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$；(c) $|X(e^{j\omega})|$；(d) $\arg[X(e^{j\omega})]$。

分析：（见教材例题 2.9）

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-e^{-jN\omega}}{2\left(1-e^{-j\omega}\right)}=\frac{e^{-jN\omega/2}\left(e^{jN\omega/2}-e^{-jN\omega/2}\right)}{2e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\right)}=e^{j(1-N)\omega/2}\frac{\sin\left(N\omega/2\right)}{2\sin\left(\omega/2\right)}$$

因此幅值和相角为

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\frac{\sin\left(N\omega/2\right)}{2\sin\left(\omega/2\right)}\right|,$$

$$\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{\omega}{2}(1-N)+\arg\left[\frac{\sin\left(N\omega/2\right)}{2\sin\left(\omega/2\right)}\right]$$ 注：取主值区间$\left(-\pi,\pi\right]$

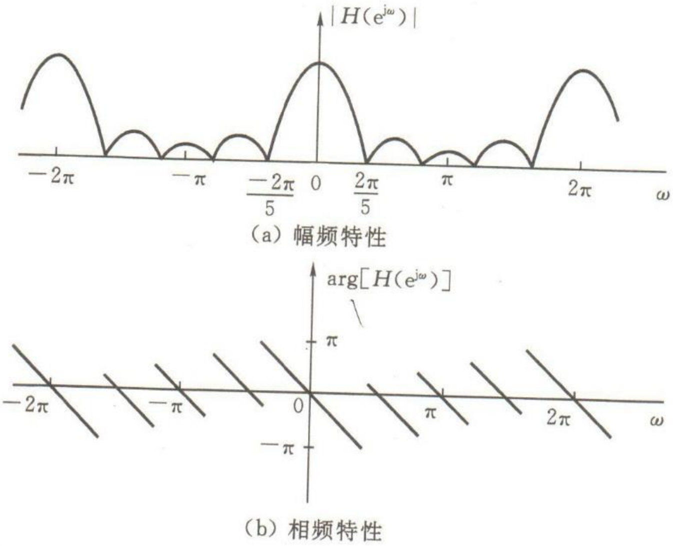


图 2.15 $M_1=0, M_2=4$ 时移动平均系统频率响应的幅频特性和相频特性

知识要点：幅频特性为非负实数；数值-1 的幅值为 1，相位为π；相位有效范围为$\left(-\pi,\pi\right]$

2.7

2.7 对下列系统，试判断系统是否是(a)稳定的；(b)因果的；(c)线性的；(d)时不变的；(e)无记忆的；并说明理由。

(1) $T[x(n)]=g(n)x(n)$， $g(n)$已知

(2) $T[x(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$

(3) $T[x(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x(k)$

(4) $T[x(n)]=x(n-n_0)$

(5) $T[x(n)]=e^{x(n)}$

(6) $T[x(n)]=ax(n)+b$

(7) $T[x(n)]=x(-n)$

(8) $T[x(n)]=x(n)+3u(n+1)$

分析：

以(2)为例。

线性：
$$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=\sum_{k=n_0}^{n}\left[ax_1(k)+bx_2(k)\right]$$
$$=\sum_{k=n_0}^{n}ax_1(k)+\sum_{k=n_0}^{n}bx_2(k)=aT\left[x_1(k)\right]+\mathrm{b}T\left[x_2(k)\right]$$

时变性：$T\left[x(n-n')\right]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-n')=\sum_{k=n_0-n'}^{n-n'}x(k)\neq y(n-n')=\sum_{k=n_0}^{n-n'}x(k)$

不稳定性：当 $x(n)\le M,\left|T\left(x(n)\right)\right|\le\sum_{k=n_0}^{n}\left|x(k)\right|\le\left|n-n_0\right|M$。随着 n 变大趋向于无穷，$T\left(x(n)\right)$ 趋向于无穷。

因果性：$T\left(x(n)\right)$ 只与过去的若干 $x(n)$ 值有关。

有记忆性：$y(n)=T\left(x(n)\right)$ 与 $x(n)$ 过去时刻的值有关。

知识要点：

卷积运算 $y(n)=x(n)*h(n)$ 是定义在 LTI 系统上，并用来表征 LTI 系统的响应。请详阅 2.4 章节的内容（P.61-P.63）.

LTI 系统稳定性判定。

a）系统对每一个输入都产生有界输出，则称该系统在有界输入有界输出（BIBO）的意义下稳定。

b）LTI 系统稳定的充分必要条件是系统的单位采样相应绝对可加（有界）。

2.16

2.16 一系统的线性常系数差分方程如下：

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n-1)$$

保证因果系统.

当 $x(n)=\delta(n)$ 和 $y(n)=0,n<0$，求 $y(n)$。

分析：

（1）归纳法

$$y(n)=3/4\,y(n-1)-1/8\,y(n-2)+2\delta(n-1)$$

已知 $y(n)=0,n<0$，则有

$$y(0)=3/4\,y(-1)-1/8\,y(-2)$$
$$y(1)=3/4\,y(0)-1/8\,y(-1)+2=2$$
$$y(2)=3/4\,y(1)-1/8\,y(0)=3/2$$
$$y(3)=3/4\,y(2)-1/8\,y(1)=7/8$$

…

存在的问题：人为归纳的递推结果可能不准确。

（2）频域响应求解

$$\left[1-3/4e^{-j\omega}+1/8e^{-2j\omega}\right]Y\left(e^{j\omega}\right)=2e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2e^{-j\omega}}{1-3/4e^{-j\omega}+1/8e^{-2j\omega}}=\frac{8}{1-2e^{-j\omega}}-\frac{8}{1-1/4e^{-j\omega}}$$

$$\because y(n)=0, n<0$$

$$\therefore y(n)=8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

存在的问题：差分方程描述的系统，应注意：初始值不同、系统因果性不同，则频域响应对应的输出序列不同。因此一般不能直接采用频域变换方法。该题目初始条件简单，采用频域法的结果刚好正确。该问题可采用单边 Z 变换法来求解，解法 2 请参见第 3.6 节内容。

知识要点：频域变换方法或单边 Z 变换求解，应注意系统的因果性和初始条件。

第三章 Z 变换

3.14

3.14 已知 $x(n)$和 $y(n)$的 z 变换

$$X(z)=\frac{0.99}{(1-0.1z^{-1})(1-0.1z)},\quad 0.1<|z|<10$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-10z},\quad |z|>0.1$$

分别用直接法和复卷积公式求$\mathscr{Z}[x(n)y(n)]$。

分析：

1）直接法

$$X(z)=\frac{1}{1-0.1z^{-1}}-\frac{1}{1-10z^{-1}}\leftrightarrow x(n)=0.1^n u(n)+10^n u(-n-1)$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-10z}=\frac{-0.1z^{-1}}{1-0.1z^{-1}}\leftrightarrow y(n)=-0.1^n u(n-1)$$

$$x(n)y(n)=-0.01^n u(n-1)=-0.01^n u(n)+\delta(n)$$

$$Z\left[x(n)y(n)\right]=\frac{-1}{1-0.01z^{-1}}+1=\frac{1}{100z-1},\ |z|>0.01$$

2）复卷积法

$$X(v)Y(\frac{z}{v})v^{-1}=v^{-1}\frac{0.99}{\left(1-0.1v^{-1}\right)\left(1-0.1v\right)}\frac{1}{1-10\left(z/v\right)}$$

$$=\frac{-9.9v}{\left(v-0.1\right)\left(v-10\right)\left(v-10z\right)},0.1<|v|<\min\left[10,10z\right]$$

因此围线 c 只有一个极点 0.1，因此复卷积计算如下

$$Z\left[x(n)\cdot y(n)\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{-9.9v}{(v-0.1)(v-10)(v-10z)}dv$$

$$=\left.\frac{-9.9v}{(v-10)(v-10z)}\right|_{v=0.1}=\frac{0.1}{0.1-10z}=\frac{1}{1-100z},|z|>0.01$$

知识要点：

1）部分分式展开法的标准式

$$X(z)=A_0+\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\dots$$

2）注意复卷积定理计算过程中区分 v 和 z 的收敛域。

3）围线积分只计算围线以内的极点。（同 3.25 题）

3.25

3.25 设一个稳定序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z)=\frac{z^{10}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)^{10}\left(z+\frac{3}{2}\right)^{2}\left(z+\frac{5}{2}\right)\left(z+\frac{7}{2}\right)}$$

（1）求 $X(z)$ 的收敛域；

（2）利用围线积分求 $n=-8$ 时的 $x(n)$。

分析：

（1）稳定系统要求 $1/2<|z|<3/2$

（2）$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$

收敛域中的围线 c 只包含一个一级极点 1/2，因此

$$x(-8)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{-8-1}dz$$

$$=\mathrm{Res}\left[X(z)z^{-8-1}\right]\Big|_{z=1/2}=(z-1/2)X(z)z^{-9}\Big|_{z=1/2}$$

$$=1/96$$

知识要点：围线积分只计算围线以内的极点。

3.30 一个因果的离散线性时不变系统的系统函数是

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+3/4\,z^{-1}}$$

该系统的输入序列是

$$x(n)=(1/2)^n u(n)+u(-n-1)$$

（1） 求对全部 *n* 的系统的单位采样响应；
（2） 求对全部 *n* 的输出序列 *y(n)*;
（3） 该系统是稳定的吗？即 *h(n)*是绝对可加的吗？

分析：

（1）用部分展开法分解如下：

$$H(\mathrm{z})=\frac{1-z^{-1}}{1+3/4\,z^{-1}}=\frac{1}{1+3/4\,z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1+3/4\,z^{-1}}$$

因为因果系统，所以 $H(\mathrm{z})$ 的收敛域为$|z|>3/4$,所以

$$h(\mathrm{n})=(-3/4)^{n}u(\mathrm{n})-(-3/4)^{n-1}u(\mathrm{n}-1)$$

（2）将 $x(\mathrm{n})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(\mathrm{n})+\mathrm{u}(-\mathrm{n}-1)$ 的 Z 变换为：

$$X(\mathrm{z})=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-1}\text{，}\quad \frac{1}{2}<|\mathrm{z}|<1$$

$$Y(\mathrm{z})=X(\mathrm{z})\,\mathrm{H}(\mathrm{z})$$
$$=\left(\frac{z}{z-1/2}-\frac{z}{z-1}\right)\frac{(z-1)}{(\mathrm{z}+3/4)}=\frac{-1/2\,z}{(z-1/2)(\mathrm{z}-1)}*\frac{(z-1)}{(\mathrm{z}+3/4)}$$
$$=\frac{-1/2\,z}{(z-1/2)(\mathrm{z}+3/4)}=\frac{-2/5}{1-1/2z^{-1}}+\frac{2/5}{1+3/4\mathrm{z}^{-1}}$$

$Y(\mathrm{z})$ 的收敛域为$|z|>\frac{3}{4}$，因此其反变换为

$$y(\mathrm{n})=\frac{-2}{5}*\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(\mathrm{n})+\frac{2}{5}*(-\frac{3}{4})^{n}u(\mathrm{n})$$

（3） 因为系统的极点 $z=-3/4$ 在单位圆内，所以系统是稳定的，即 $h(\mathrm{n})$ 是绝对可加的。

知识要点：1）注意收敛域的确定。

第四章

4.1

4.1 假设 $x(t)$ 是一个周期为 1 ms 的连续时间信号，它的傅里叶级数为

$$x(t)=\sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

对于 $|k|>9$，傅里叶系数 a_k 为零，以采样间隔 $T=\frac{1}{6}\times 10^{-3}$ s 对 $x(t)$ 采样，得到

$$x(n)=x\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$$

（1）$x(n)$ 是周期的吗？如果是，周期为多少？

（2）采样周期 T 是否充分小而可以避免混叠？

（3）利用 a_k 求出 $x(n)$ 的离散傅里叶级数系数。

解：

（1）$x(n)=\sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j2\pi kn/6}$

x(t)的周期为 1ms，因此 x(n)的周期为 $N=10^{-3}/T=6$

（2）$X(j\Omega)=\sum_{k=-9}^{9} a_k \delta\left(\Omega-2\pi k/10^{-3}\right)$，其截止频率为 $\Omega_0=2\pi\cdot 9/10^{-3}$

而采样频率 $\Omega_s=2\pi/T=2\pi\cdot 6/10^{-3}<2\Omega_0=2\pi\cdot 19/10^{-3}$，因此不能避免混叠

（3）记周期信号 $x(n)$ 为 $\tilde{x}(n)$,其 DFS 为

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{s=-9}^{9} a_s e^{j2\pi sn/6}e^{-j2\pi kn/N}$$

$$=\sum_{s=9}^{9} a_s \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi sn/6}e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{s=9}^{9} a_s \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(s-k)n/N}=\sum_{s=9}^{9} a_s \frac{1-e^{2\pi(s-k)}}{1-e^{j2\pi(s-k)/N}}$$

由于 $\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(s-k)sn/N}=\begin{cases} N,\ s-k=mN,\ m\in R \\ 0,\ \text{其它}\end{cases}}$

所以 $s=k+mN$

$\tilde{X}(0)=6\left(a_0+a_6+a_{-6}\right)$, $\tilde{X}(1)=6\left(a_1+a_7+a_{-5}\right)$, $\tilde{X}(2)=6\left(a_2+a_8+a_{-4}\right)$

$\tilde{X}(3)=6\left(a_3+a_9+a_{-3}+a_{-9}\right)$, $\tilde{X}(4)=6\left(a_4+a_{-2}+a_{-8}\right)$, $\tilde{X}(2)=6\left(a_5+a_{-1}+a_{-7}\right)$

知识要点：1）信号周期（由最低频低频子信号决定）和最高频率的区别；2）复指数的正交求和公式，作业 4.10 页用到该公式。

4.27 考虑图 4.25 所示的函数 $x(t)$，用 $N=6$ 对其采样。假如应用 DFT 对波形作谐波分析，那么采样间隔 T 应取多大？计算和画出 DFT 的结果，并与该函数的傅里叶级数比较，讨论两者的差别。

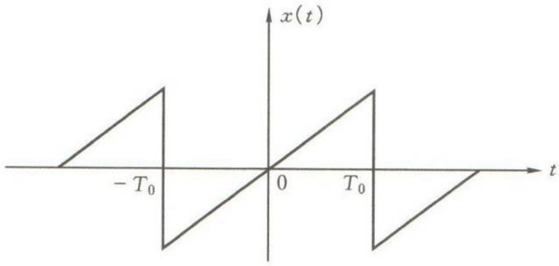


图 4.25 习题 4.27 图

解：周期 $2T_0$　$x(t)=\dfrac{t}{T_0}$　$-T_0\le t\le T_0$　$x(t+2T_0)=x(t)$

$\cancel{\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{2T_0}}$　$\cancel{T\le T_0}$

$$\cancel{X(j\omega)=\int_{-T_0}^{T_0} t e^{-j\omega t}\,dt=\frac{2jT_0\cos(\omega T_0)}{\omega}-\frac{2j\sin(\omega T_0)}{\omega^2}}$$

$\cancel{a_k=\dfrac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} t e^{-j\omega t}\,dt}$　$a_k=\dfrac{1}{2T_0}\displaystyle\int_{-T_0}^{T_0}\frac{t}{T_0}e^{-jk\frac{2\pi}{2T_0}t}\,dt$

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{j\cos(k\pi)}{k\pi} & k\ne 0\\ 0 & k=0\end{cases}$$

~~x(jw)~~ = $N=6$ 对其采样

采样间隔 $T=\frac{2T_0}{6}=\frac{T_0}{3}$

$$x(n)=x\left(\frac{nT_0}{3}\right)$$

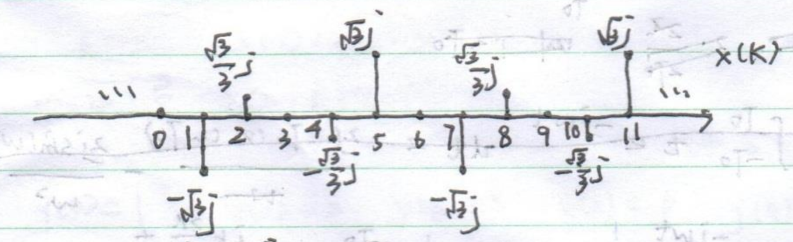
$$X(k)=\sum_{n=0}^{5} x\left(\frac{nT_0}{3}\right) e^{-j\frac{2\pi}{6}kn}$$

$$=0+\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}k}+\frac{2}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+0-\frac{2}{3}e^{-j\frac{4}{3}\pi k}-\frac{1}{3}e^{-j\frac{5\pi}{3}k}$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2j\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)+\frac{2}{3}\left(-2j\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$=-\frac{2}{3}j\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$a_k=\begin{cases} j\dfrac{\cos(k\pi)}{k\pi} & k\neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases}$$



X(k)是 a_k 谱混叠的结果

知识要点：注意理解采样点 N、采样频率 f_s、基波频率Δf 等概念，以及他们与物理频率分辨率、计算频率分辨率的关系。

第五章

5.10 已知 $x(n)$ 是一个 N(N 为偶数)点的序列，其 N 点离散傅里叶变换为 $X(k)$，$Y(k)$ 是 $y(n)$ 的 32 点离散傅里叶变换，其中

$$y(n)=\begin{cases} x(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ x(n-16), & N\leqslant n<2N \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

求 $X(k)$ 和 $Y(k)$ 之间的关系。

解：由题意知：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,2,\dots N-1$$

其中$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$。

由于$Y(k)$是$y(n)$的 32 点 DFT，所以有：

$$\begin{aligned}Y(k)&=\sum_{n=0}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{32}^{kn}+\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{N}{32}kn}+\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}\\&=X(\frac{N}{32}k)+\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn},\quad k=0,1,2,...,31\end{aligned}$$

这里$y(n)$是 2N 点而$Y(k)$是$y(n)$的 32 点 DFT，所以需要考虑 2N 和 32 的大小关系。

又由于 N 是偶数，所以只要分析 N 与 16 的大小。

当$N\le n\le 2N$时，$y(n)=x(n-16)$。

当 N=16 时：

$$\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N}^{31}x(n-16)W_{32}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{n+16}{2}k}=X(\frac{k}{2})(-1)^k$$

此时有$Y(k)=[1+(-1)^k]X(\frac{k}{2})$。

当 N<16 时：

$$\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N}^{2N}x(n-16)W_{32}^{kn}=\sum_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{(n+16)k}=\sum_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$$

此时有$Y(k)=X(\frac{N}{32}k)+\sum_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$。

当 N>16 时：

$$\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N}^{N+15}x(n-16)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{(n+16)k}=\sum_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$$

此时有$Y(k)=X(\frac{N}{32}k)+\sum_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$。

综上可得：

$$Y(k)=\begin{cases} X(\frac{N}{32}k)+\sum\limits_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k, & N<16 \\ [1+(-1)^k]X(\frac{k}{2}), & N=16 \\ X(\frac{N}{32}k)+\sum\limits_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k, & N>16 \end{cases}$$

知识要点：无。

5.16

5.16 某一线性时不变系统的输入和输出满足如下差分方程：

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=0}^{N}}_{K=1}b_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}a_k x(n-k)$$

假设可用一 FFT 程序来计算长度 $N=2^M$ 的任何有限长序列的 DFT，试提出一种方法，它可应用所提供的 FFT 程序来计算

$$H(e^{j(2\pi/(512))k}),\quad k=0,1,\cdots,511$$

其中 $H(z)$ 是该系统的系统函数。

解：由题可得：

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r z^{-r}}{1-\sum_{l=1}^{N}b_l z^{-l}}$$

$$H\left(e^{j2\pi k/512}\right)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r e^{-j2\pi kr/512}}{1-\sum_{l=1}^{N}b_l e^{-j2\pi kl/512}}$$

假设 $N\le 511$ 且 $M\le 511$（一般情况下，系统阶数较低），令：

$$a[n]=\begin{cases} a_n,\ 0\le n\le M \\ 0,\ \ M+1\le n\le 511 \end{cases}$$

$$b[n]=\begin{cases} 1,\ n=0 \\ b_n, 1\le n\le N \\ 0,\ N+1\le n\le 511 \end{cases}$$

令 $A[k]$ 与 $B[k]$ 分别为 $a[n]$ 与 $b[n]$ 的 512 点 DFT，则：

$$H\left(e^{j2\pi k/512}\right)=\frac{A[k]}{B[k]}$$

知识要点：上述过程 a[n]和 b[n]都是补零序列，FFT 计算硬件实现时效率较高。大多数人先计算出 h[n]，然后对其做 FFT，这显然是最低效的方法。

第六章

6.5

6.5 设 $h(n)$ 为一理想低通滤波器的冲激响应，其通带内增益为 1，截止频率为 $\omega_c=\pi/4$。图 6.16 示出四个系统，其中每一个都等效为一种理想线性时不变的频率选择性滤波器，对图 6.16 中每一个系统画出其等效频率响应，并用 ω_c 标注出通带边缘频率，并指出它们是否属于低通、高通、带通或带阻滤波器。

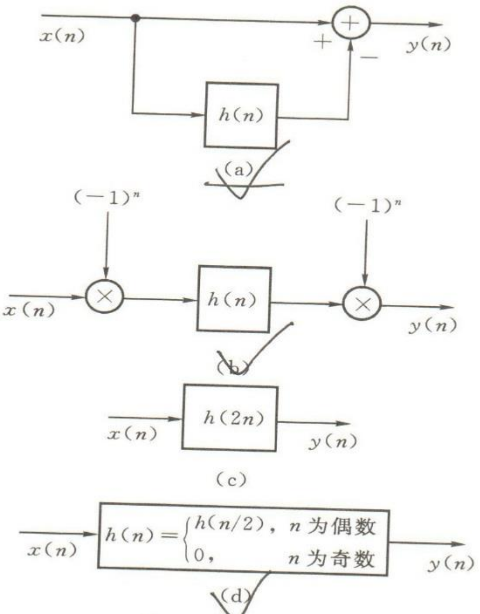


图 6.16 习题 6.5

6.5 解:

(b) $y(n)=[(-1)^n x(n) * h(n)](-1)^n = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-k}x(n-k)h(k)\right]\cdot(-1)^n$

$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(n-k)\cdot(-1)^k h(k)\right]\cdot(-1)^{2n}$

$= x(n) * (-1)^n h(n)$

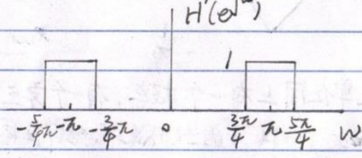
$\neq$

∴ 系统等效为冲激响应为 $(-1)^n h(n)$ 的滤波器.

$H'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h(n)e^{-j\omega n}$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\pi n}e^{-j\omega n}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j(\pi+\omega)n} = H(e^{j(\pi+\omega)})$

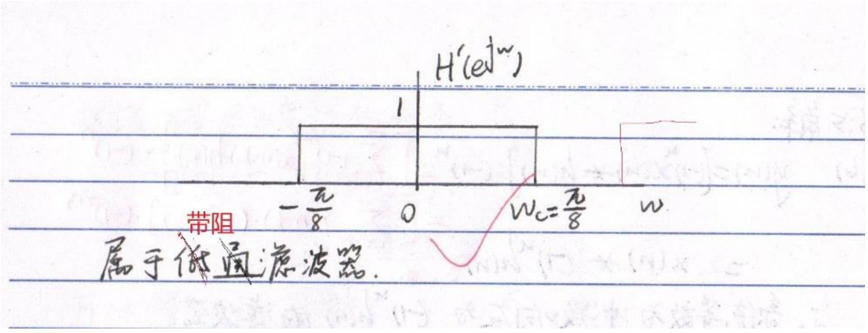


属于高通滤波器.

(d) $H'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\omega n}$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(\frac{2k}{2})e^{-j\omega 2k} + 0$

$= H(e^{j2\omega})$



知识要点：判断系统特性应先推导出相应的频率响应 H（e^jw）。

6.8

6.8 考虑一个因果的线性时不变系统，其系统函数 $H(z)$ 在 $z=e^{j\omega}$ 上的求值如图 6.18 所示。

(1) 从图 6.18 推断出有关极-零点位置的全部信息，并画出 $H(z)$ 的极-零点图；

(2) 讨论有关冲激响应的长度；

(3) 说明 $\theta(\omega)$ 是否线性；

(4) 说明系统是否稳定。

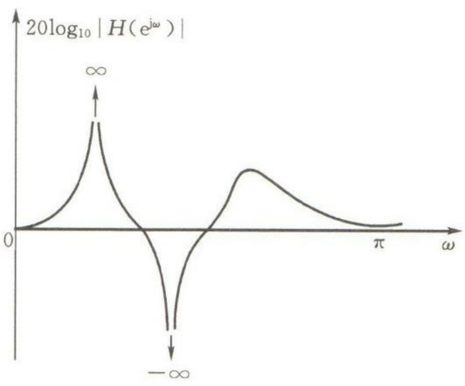
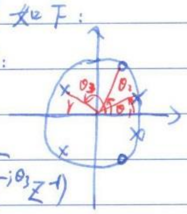


图 6.18 习题 6.8

6.8 (1) 据图， $\begin{cases} 20\lg|H(e^{j\theta_1})| = +\infty \\ 20\lg|H(e^{j\theta_2})| = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{H(e^{j\theta_1})} = 0 \\ H(e^{j\theta_2}) = 0 \end{cases}$

且在 θ_3 处有一极大值 ∴ 极零点图如下：



(2) 根据零极点分布，得到系统函数如下：

$$H(z) = \frac{(1-e^{j\theta_2}z^{-1})(1-e^{-j\theta_2}z^{-1})}{(1-e^{j\theta_1}z^{-1})(1-e^{-j\theta_1}z^{-1})(1-re^{j\theta_3}z^{-1})(1-re^{-j\theta_3}z^{-1})}$$

易知，该系统的冲激响应为 IIR

∴ 长度为无限长

(3). $\tau_g(\omega) = -Re\left\{ z\frac{d\ \ln[H(z)]}{dz} \right\}\Big|_{z=e^{j\omega}}$

$= Re\left\{ \frac{e^{j\theta_2}}{z-e^{j\theta_2}} + \frac{e^{-j\theta_2}}{z-e^{-j\theta_2}} - \frac{e^{j\theta_1}}{z-e^{j\theta_1}} - \frac{e^{-j\theta_1}}{z-e^{-j\theta_1}} - \frac{re^{j\theta_3}}{z-re^{j\theta_3}} - \frac{re^{-j\theta_3}}{z+re^{-j\theta_3}} \right\}\Big|_{z=e^{j\omega}}$

可见，$\tau_g(\omega)$ 不是常数 ∴ $\theta(\omega)$ 非线性.

(4) 由于系统是因果系统，而在单位圆上有极点

∴ ∵ 系统函数 $H(z)$ 的收敛域 ROC：$|z|>1$.

不包含单位圆 ⇒ 不稳定

6.8. 解：

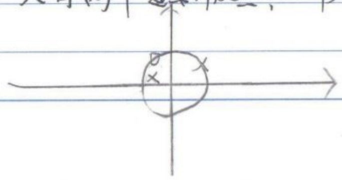
(1) 若存在零点，则知 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = 20\log_{10}0 = -\infty$

若存在极点，则知 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = 20\log_{10}|\infty| = +\infty$

则由图可知 $H(z)$ 在 $z=e^{j\omega}$ 上有一个零点和一个极点

而图中存在一个极大值点，可知其为单位圆内的一个极点

⇒ 一共有两个~~零点~~极点，一个零点.



(2) 可设零极点分别为 z_1 z_2 z_3 $|z_1| = |z_2| = 1$ $|z_3|<1$)

则 $H(z) = \frac{K(z-z_1)}{(z-z_2)(z-z_3)}$

⇒ $y(n) - (z_2+z_3)y(n-1) + z_2z_3y(n-2) = Kx(n-1) - Kz_1x(n-2)$

↓

无限长

(3) 假设其为线性相位 则 $H(z^{-1})$ 和 $H(z)$ 必须

有相同零极点，而显然不对

⇒ 非线性相位.

(4) 由于单位圆上有极点，且又是

因果、线性时不变系统 ⇒ 系统不稳定

知识要点：理解零点、极点的物理意义（对频率响应的影响）,理解共轭零点（极点）、单位圆镜像零点（极点）的意义。

6.16

6.16 6.2.1 节讨论了四种类型因果线性相位 FIR 滤波器，对于以下列出的每种滤波器，指出四种 FIR 滤波器类型中的哪些可以用来逼近所要求的滤波器：

（1）低通；

（2）带通；

（3）高通；

（4）带阻；

（5）微分器。

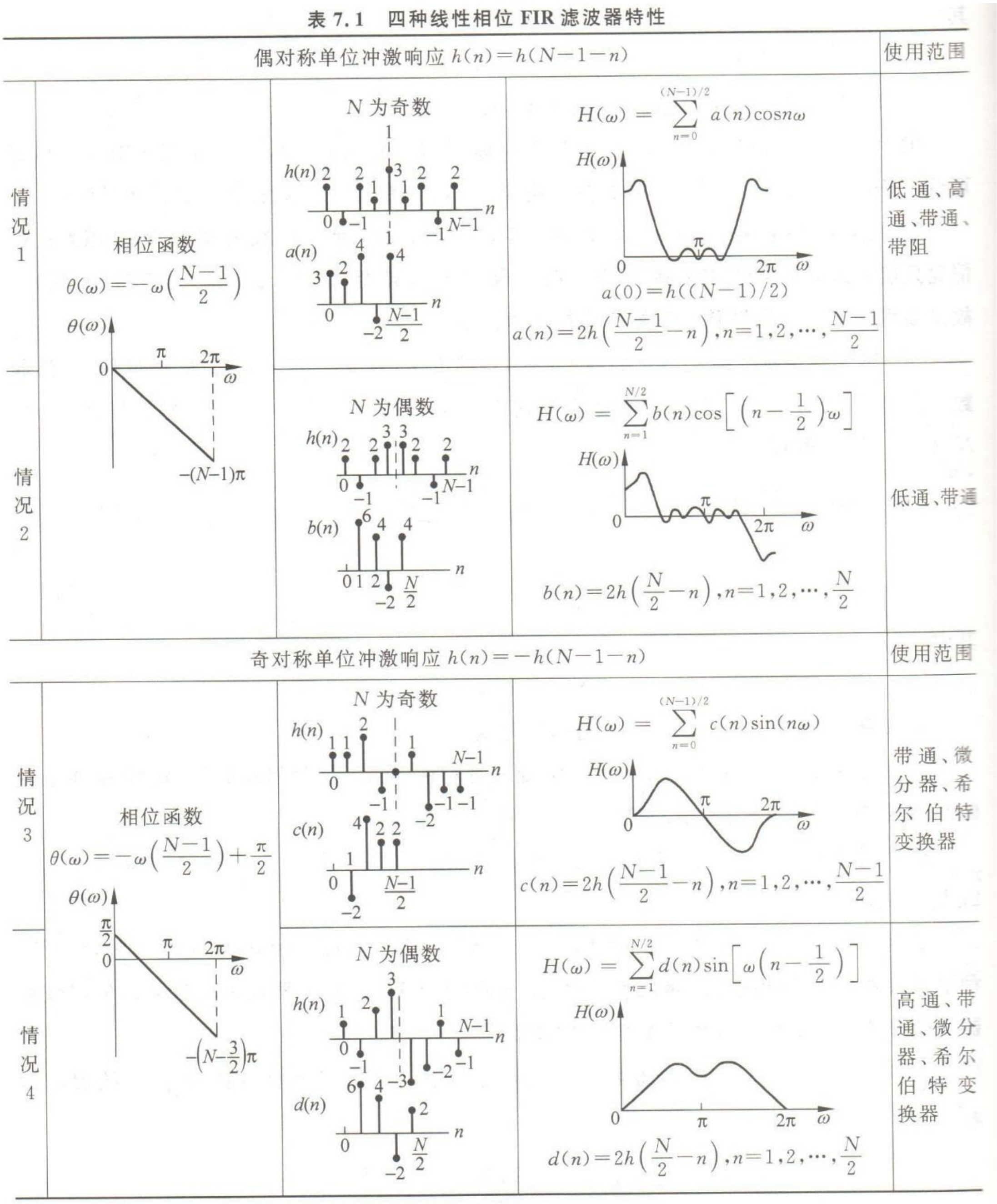


表 7.1 四种线性相位 FIR 滤波器特性

	偶对称单位冲激响应 $h(n)=h(N-1-n)$			使用范围
情况 1	相位函数 $\theta(\omega)=-\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)$	N 为奇数	$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos n\omega$；$a(0)=h((N-1)/2)$；$a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$	低通、高通、带通、带阻
情况 2		N 为偶数	$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$；$b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$	低通、带通
	奇对称单位冲激响应 $h(n)=-h(N-1-n)$			使用范围
情况 3	相位函数 $\theta(\omega)=-\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$	N 为奇数	$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} c(n)\sin(n\omega)$；$c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$	带通、微分器、希尔伯特变换器
情况 4		N 为偶数	$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$；$d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$	高通、带通、微分器、希尔伯特变换器

知识要点：微分器=jw，它要求滤波器有 90 度相移，因此 h（n）偶对称显然不符合。

第七章

注：第七、八章的重点是滤波器设计，请认真对照参考答案复习相关的作业题，这里不专门讲解。

7.5

7.5 设计一个 FIR 高通数字滤波器来逼近所希望的幅频特性：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}0, & |\omega|<\omega_0\\ 1, & \omega_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

试问其冲激响应与同样带宽的 FIR 数字低通滤波器的冲激响应之间有什么关系？

解：滤波器的冲击响应为：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\omega n+j\sin\omega n)d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos\omega n)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0}^{\pi}(\cos\omega n)d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi n-\sin\omega_0 n}{n}$$

因为低通滤波器于高通滤波器存在关系：

$$H_L=1-H_d$$

则其对应冲击响应为：

$$h_l(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-H_d)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi n}{n}-h_d(n)$$

知识要点：滤波器带宽定义。

7.10

7.10 设有一个 FIR 系统的差分方程为

$$y(n)=x(n)-x(n-N)$$

给出该系统的幅频响应及相频响应。

解：由 $y(n)=x(n)-x(n-N)$ 得

$$H(z)=1-z^{-N},\ H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega N}=e^{\frac{-j\omega N}{2}}\left(e^{\frac{j\omega N}{2}}-e^{\frac{-j\omega N}{2}}\right)=2j\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)e^{\frac{-j\omega N}{2}}$$

幅频响应和相频响应为

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=2\left|\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\right|$$

$$\theta\left(H(e^{j\omega})\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega N}{2}+\arg\left(\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\right)$$

知识要点：-1 包含相位 pi，前面章节也有相关题目。

第八章

8.1

8.1 根据图 8.24 所示数字滤波器的结构图，推导出相应的系统函数。

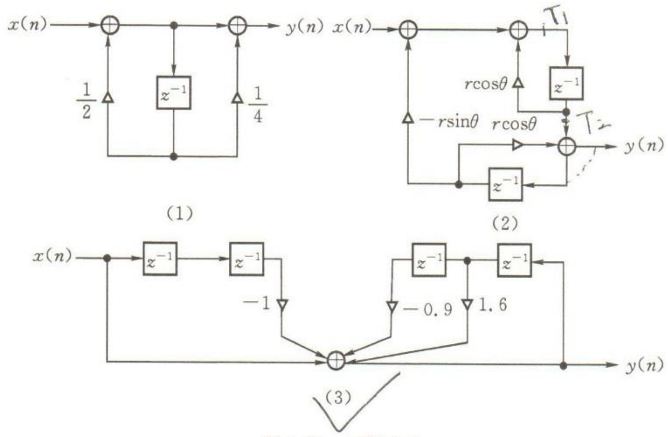


图 8.24 习题 8.1

（1）设中间变量为 T

$$\begin{cases} X+\frac{1}{2}z^{-1}T=T \\ T+\frac{1}{4}z^{-1}T=Y \end{cases} \text{得到：} H=\frac{Y}{X}=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

（2）设中间量变量为 T_1, T_2

$$\begin{cases} X+\left(-r\sin\theta\right)z^{-1}Y+r\cos\theta\cdot T_2=T_1 \\ T_1\cdot z^{-1}=T_2 \\ T_2+Y\cdot z^{-1}\cdot r\cos\theta=Y \end{cases}$$

得到：$H=\frac{Y}{X}=\frac{z^{-1}}{1-2r\cos\theta z^{-1}+\left(r^2\cos^2\theta+r\sin\theta\right)z^{-2}}$

（3）由图，得：

$$X+X\cdot z^{-2}\cdot(-1)+Y\cdot z^{-1}\cdot 1.6+Y\cdot z^{-2}\cdot(-0.9)=Y \text{ 得到：} H=\frac{Y}{X}=\frac{1-z^{-2}}{1-1.6z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

知识要点：根据结构图求解系统函数可通过中间变量法，一般可以以+号为参考建立若干方程。