4.1

4.1 假设 $x(t)$是一个周期为 1 ms 的连续时间信号，它的傅里叶级数为

$$x(t)=\sum_{k=-9}^{9}a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

对于$|k|>9$，傅里叶系数 a_k 为零，以采样间隔 $T=\frac{1}{6}\times10^{-3}$ s 对 $x(t)$采样，得到

$$x(n)=x\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$$

(1) $x(n)$是周期的吗？如果是，周期为多少？

(2) 采样周期 T 是否充分小而可以避免混叠？

(3) 利用 a_k 求出 $x(n)$的离散傅里叶级数系数。

解：

（1） $x(n)=\sum_{k=-9}^{9}a_k e^{j2\pi kn/6}$

x(t)的周期为 1ms，因此 x(n)的周期为$N=10^{-3}/T=6$

（2） $X(j\Omega)=\sum_{k=-9}^{9}a_k\delta(\Omega-2\pi k/10^{-3})$，其截止频率为$\Omega_0=2\pi\cdot9/10^{-3}$

而采样频率$\Omega_s=2\pi/T=2\pi\cdot6/10^{-3}<2\Omega_0=2\pi\cdot19/10^{-3}$，因此不能避免混叠

（3）记周期信号$x(n)$为$\tilde{x}(n)$,其 DFS 为

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{s=-9}^{9}a_s e^{j2\pi sn/6}e^{-j2\pi kn/N}$$

$$=\sum_{s=9}^{9}a_s\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi sn/6}e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{s=9}^{9}a_s\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi(s-k)n/N}=\sum_{s=9}^{9}a_s\frac{1-e^{2\pi(s-k)}}{1-e^{j2\pi(s-k)/N}}$$

由于$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi(s-k)sn/N}=\begin{cases}N,\ s-k=mN,m\in R\\0,\ 其它\end{cases}$

所以$s=k+mN$

$\tilde{X}(0)=6(a_0+a_6+a_{-6}),\tilde{X}(1)=6(a_1+a_7+a_{-5}),\tilde{X}(2)=6(a_2+a_8+a_{-4})$

$\tilde{X}(3)=6(a_3+a_9+a_{-3}+a_{-9}),\tilde{X}(4)=6(a_4+a_{-2}+a_{-8}),\tilde{X}(2)=6(a_5+a_{-1}+a_{-7})$

4.5

4.5 图 4.17 表示三个周期 $N=7$ 的周期序列 $\tilde{x}_1(n)$、$\tilde{x}_2(n)$和 $\tilde{x}_3(n)$，试求：

(1) 序列 $\tilde{y}_1(n)$的 DFS 等于 $\tilde{x}_1(n)$的 DFS 和 $\tilde{x}_2(n)$的 DFS 的乘积，即

$$\tilde{Y}_1(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$

(2) 序列 $\tilde{y}_2(n)$的 DFS 等于 $\tilde{x}_1(n)$的 DFS 和 $\tilde{x}_3(n)$的 DFS 的乘积，即

$$\tilde{Y}_2(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_3(k)$$

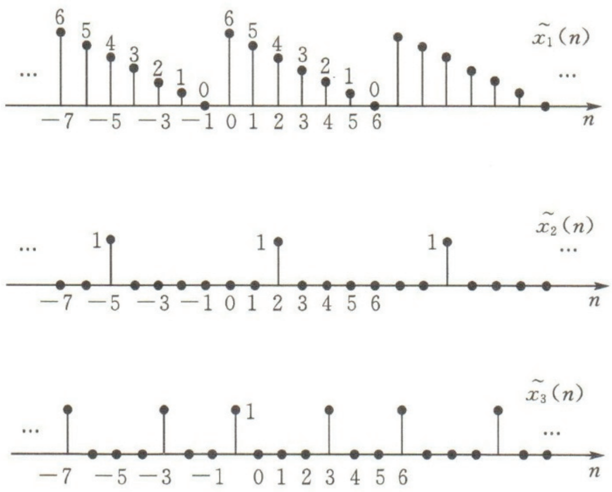
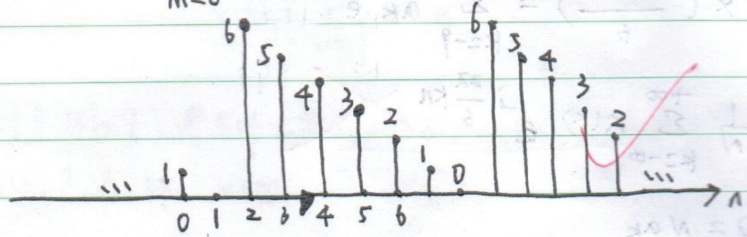


图 4.17　习题 4.5

解：$\tilde{Y}_1(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$　　$N_1=7$　　$N_2=7$

$$\tilde{y}_1(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \cancel{\tilde{x}_1(n)}\ \cancel{x_1(\ )}\ \tilde{x}_1(m)\,\tilde{x}_2(n-m)$$



4.6

4.6 请叙述傅里叶级数、连续时间傅里叶变换、离散时间傅里叶变换和离散傅里叶变换所对应的是何种类型信号的傅里叶表示，它们之间存在着什么样的关系？

连续时间周期信号 —— 傅里叶级数表示

连续时间非周期信号 —— ~~傅里~~连续时间傅里叶变换

离散非周期 —— DTFT

离散周期 —— DFT

对DTFT频域采样得到DFS 取主值得到DFT

对x(t)采样，频域由FT → DTFT

4.10

4.10 考虑复序列

$$x(n)=\begin{cases} e^{j\omega_0 n}, & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0, & 其他\ n \end{cases}$$

(1) 求 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$；

(2) 求有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT；

(3) 对于 $\omega_0=2\pi k_0/N$，其中 k_0 为整数的情况，求 $x(n)$ 的 DFT。

（1）$x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-0}^{N-1}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j(\omega-\omega_0)N}}{1-e^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

（2）

有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}W_N^{kn}=\frac{1-e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)N}}{1-e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)}}$$

可以注意到：

$$X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=(2\pi k/N)}$$

（3）

当 $\omega_0=2\pi k_0/N$，其中 k_0 为整数时，$x(n)$ 的 DFT 为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi n(k_0-k)/N}=N\delta(k-k_0)$$

4.14

4.14 设 $X(e^{j\omega})$ 为序列 $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 的离散时间傅里叶变换，令 $y(n)$ 表示一个长度为 10 的有限长序列（$0\leqslant n\leqslant 9$），$y(n)$ 的 10 点 DFT 用 $Y(k)$ 表示，它对应于 $X(e^{j\omega})$ 的 10 个等间隔样本，即 $Y(k)=X(e^{j2\pi k/10})$，求 $y(n)$。

解：

$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 的离散时间傅里叶变换为：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

由于 $Y(k)=X\left(e^{j2\pi k/10}\right)$，则 $y(n)$ 的 10 点 DFT 即 $Y(k)$ 为：

$$Y(k)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(2\pi k/10)}}=\sum_{n=0}^{9}y(n)W_{10}^{kn},\quad 0\le k\le 9$$

由于$\left(\frac{1}{2}\right)^n$的$N$点 DFT 为：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\rightarrow\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}e^{-j(2\pi k/N)}}$$

可以得到：

$$y(n)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}},\quad 0\le n\le 9$$

4.19

4.19 考虑如图 4.22 所示的实有限长序列 $x(n)$。

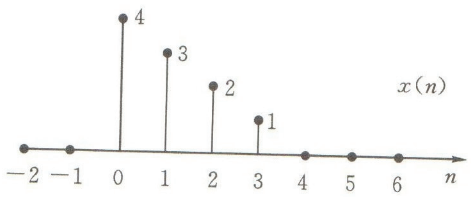


图 4.22 习题 4.19 图

(1) 画出有限长序列 $y(n)$ 的图形，其 6 点 DFT 为

$$Y(k)=W_6^{4k}X(k)$$

式中 $X(k)$ 为 $x(n)$ 的 6 点 DFT。

(2) 画出有限长序列 $w(n)$ 的图形，其 6 点 DFT 为

$$W(k)=\mathrm{Re}[X(k)]$$

(3) 画出有限长序列 $q(n)$ 的图形，其 3 点 DFT 为

$$Q(k)=X(2k),\quad k=0,1,2$$

解：

（1）当一个序列的 DFT 与一个复指数相乘，时域信号可用循环位移的方式得到。

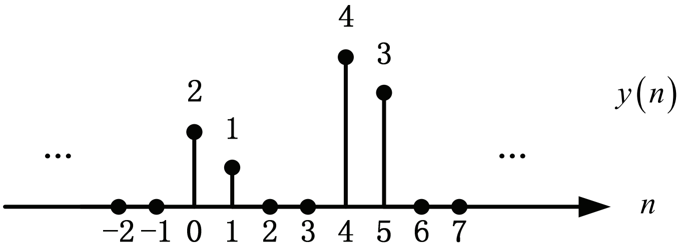
由于：

$$Y(k)=W_6^{4k}X(k),\quad 0\le k\le 5$$

因此：

$$y(n)=x((n-4))_6,\quad 0\le n\le 5$$

如下图所示：



4.21

假设有两个 4 点序列 $x(n)$ 和 $h(n)$，表示式如下：

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\quad n=0,1,2,3$$

$$h(n)=2^n,\qquad n=0,1,2,3$$

(1) 计算 4 点 DFT $X(k)$；

(2) 计算 4 点 DFT $H(k)$；

(3) 直接用循环卷积计算 $y(n)=x(n)④h(n)$；

(4) 采用将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 DFT 相乘，然后求其 IDFT 的方法，计算(3)中的 $y(n)$。

解：

（1）由于：

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\quad n=0,1,2,3$$

则有：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)W_4^{kn},\quad 0\le k\le 3$$

即：

$$X(k)=1-e^{-j\pi k}=1-W_4^{2k},\quad 0\le k\le 3$$

（2）

由于：

$$h(n)=2^n,\quad n=0,1,2,3$$

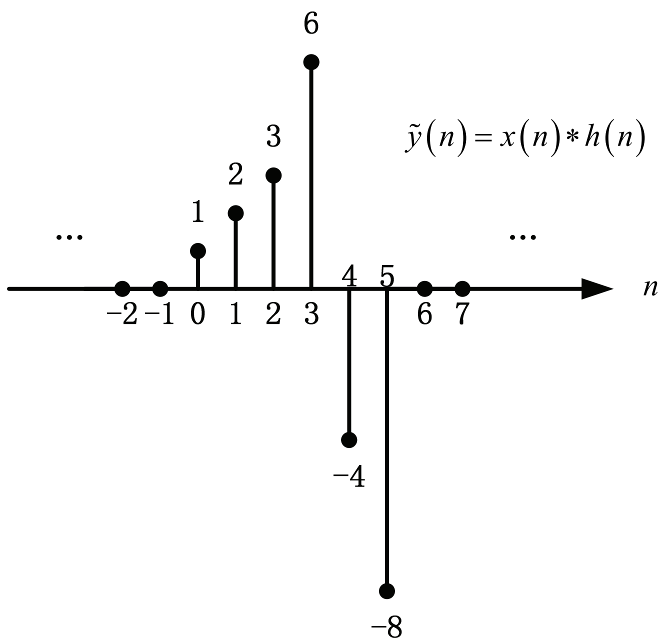
则有：

$$H(k)=\sum_{n=0}^{3}2^nW_4^{kn}=1+2W_4^{k}+4W_4^{2k}+8W_4^{3k},\quad 0\le k\le 3$$

（3）

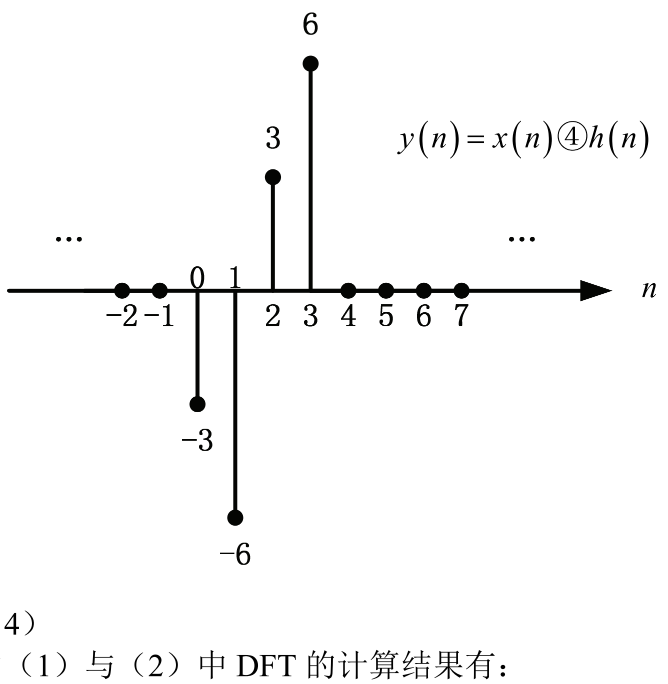
当 $N\ge 3+4-1=6$ 时，可避免混叠。题中 $N=4$，则混叠不可避免。

计算卷积 $\tilde{y}(n)=x(n)*h(n)$ 如下图所示：



欲求得 $y(n)=x(n)④h(n)$，则可将 $\tilde{y}(n)$ 中的末尾三个点（$n=4,5,6$）叠加至开头三个点（$n=0,1,2$）上。

可得 $y(n)=x(n)④h(n)$ 如下图所示：



（4）

由（1）与（2）中 DFT 的计算结果有：

$$Y(k)=X(k)H(k)=1+2W_4^k+4W_4^{2k}+8W_4^{3k}-W_4^{2k}-2W_4^{3k}-4W_4^{4k}-8W_4^{5k}$$

由于 $W_4^{4k}=W_4^{0k}$ 且 $W_4^{5k}=W_4^k$，有：

$$Y(k)=-3-6W_4^{k}+3W_4^{2k}+6W_4^{3k},\quad 0\le k\le 3$$

计算其离散傅里叶逆变换：

$$y(n)=-3\delta(n)-6\delta(n-1)+3\delta(n-2)+6\delta(n-3),\quad 0\le n\le 3$$

4.27

4.27 考虑图 4.25 所示的函数 $x(t)$，用 $N=6$ 对其采样。假如应用 DFT 对波形作谐波分析，那么采样间隔 T 应取多大？计算和画出 DFT 的结果，并与该函数的傅里叶级数比较，看看两者的差别。

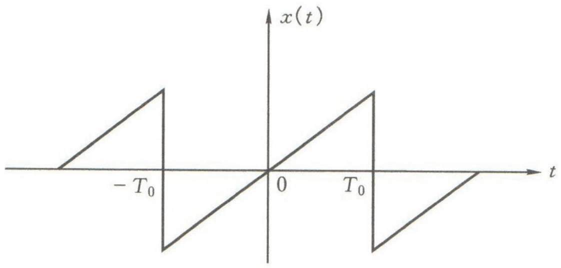


图 4.25 习题 4.27 图

解：周期 $2T_0$ $\quad x(t)=\frac{t}{T_0}\quad -T_0\le t\le T_0 \quad x(t+2T_0)=x(t)$

$\cancel{\frac{2\pi}{T} > \frac{2\pi}{2T_0}}$ ~~则 $T\le T_0$~~

$\cancel{X(j\omega)=\int_{-T_0}^{T_0} t e^{-j\omega t}\,dt=\frac{2j T_0\cos(\omega T_0)}{\omega}-\frac{2j\sin(\omega T_0)}{\omega^2}}$

$\cancel{a_k=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} t e^{-j\omega t}\,dt}\qquad a_k=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\frac{t}{T_0}e^{-jk\frac{2\pi}{2T_0}t}\,dt$

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{j\cos(k\pi)}{k\pi} & k\ne 0\\ 0 & k=0\end{cases}$$

~~x(jω)~~ = N=6 对其采样

采样间隔 $T=\frac{2T_0}{6}=\frac{T_0}{3}$

$$x(n)=x\left(\frac{nT_0}{3}\right)$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{5} x\left(\frac{nT_0}{3}\right) e^{-j\frac{2\pi}{6}kn}$$

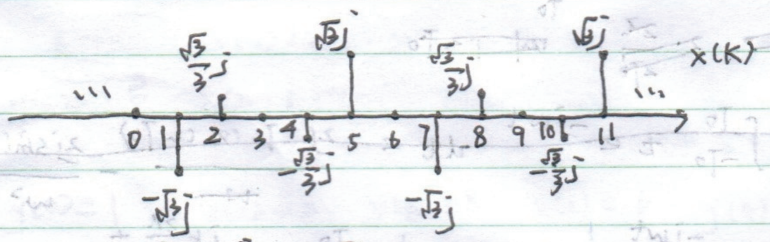
$$=0+\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}k}+\frac{2}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+\cancel{e^{-j\pi k}}\,0$$

$$-\frac{2}{3}e^{-j\frac{4}{3}\pi k}-\frac{1}{3}e^{-j\frac{5\pi}{3}k}$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2j\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)+\frac{2}{3}\left(-2j\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$=-\frac{2}{3}j\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$a_k=\begin{cases} j\dfrac{\cos(k\pi)}{k\pi} & k\neq 0\\ 0 & k=0\end{cases}$$



X(k)是 a_k 谱混叠的结果

例 4.7（略）