8.1 解：（1）设中间变量为 T

$$\begin{cases} X+\dfrac{1}{2}z^{-1}T=T \\ T+\dfrac{1}{4}z^{-1}T=Y \end{cases} \text{得到：} \quad H=\frac{Y}{X}=\frac{1+\dfrac{1}{4}z^{-1}}{1-\dfrac{1}{2}z^{-1}}$$

（2）设中间量变量为 T_1,T_2

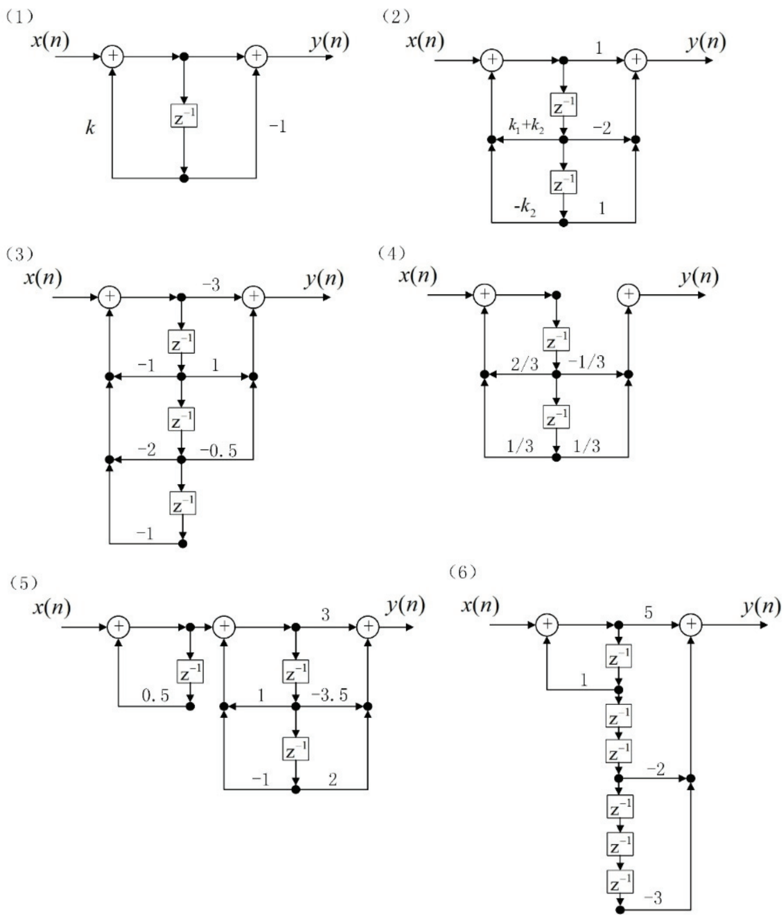
$$\begin{cases} X+\left(-r\sin\theta\right)z^{-1}Y+r\cos\theta\cdot T_2=T_1 \\ T_1\cdot z^{-1}=T_2 \\ T_2+Y\cdot z^{-1}\cdot r\cos\theta=Y \end{cases}$$

得到：$H=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{z^{-1}}{1-2r\cos\theta z^{-1}+\left(r^2\cos^2\theta+r\sin\theta\right)z^{-2}}$

（3）由图，得：

$$X+X\cdot z^{-2}\cdot\left(-1\right)+Y\cdot z^{-1}\cdot 1.6+Y\cdot z^{-2}\cdot\left(-0.9\right)=Y \text{ 得到：} \quad H=\frac{Y}{X}=\frac{1-z^{-2}}{1-1.6z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

8.2 直接 II 型结构如下：



8.4

解：由冲击响应不变法得到的数字滤波器的系统函数为（公式 8.4）：

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-\mathrm{e}^{s_{pk}T}z^{-1}}$$

题中：

$$H(s)=\frac{s+0.5}{(\mathrm{s}+0.5)^2+2^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+0.5+2\mathrm{j}}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+0.5-2\mathrm{j}}$$

所以，$s_{pk}=-0.5-2j,\ -0.5+2j$

则有

$$H(z)=\frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-0.5T-2\mathrm{j}T}z^{-1})}+\frac{1}{2(1-e^{-0.5T+2\mathrm{j}T}z^{-1})}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5T}\cos(2T)z^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-0.5T-2\mathrm{j}T}z^{-1})(1-e^{-0.5T+2\mathrm{j}T}z^{-1})}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5T}\cos(2T)z^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-0.5T}\cos(2T)z^{-1}+\mathrm{e}^{-T}z^{-2}}$$

8.6

解：

把 $s=c\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 带入 H(s)中得

(注：有些参考教材中在此处直接采用常数 c=1，本教材为更好地说明物理意义采用 c=2/T。请注意在预畸变过程中和 s-z 过程中常数 c 应保持一致)

$$H\ (z)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{\dfrac{c+1+(1-c)z^{-1}}{1+z^{-1}}\cdot\dfrac{c+2+(2-c)z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{2(1+z^{-1})^2}{c^2+3c+2+(4-2c^2)z^{-1}+(c^2-3c+2)z^{-2}},\text{其中}\mathrm{c}=\frac{2}{T},T\text{为采样周期}$$

由公式 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ 得出数字滤波器的时域递归表达式为

令 T=2,即 c=1,则系统函数为

$$H\left(z\right)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{6-2z^{-1}}$$

8.11

8.11.

$f_s=1.2KHZ \Rightarrow$ 采样周期：$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{1200}s$

$\Omega_c=2\pi f_c=900\pi$

$w_c=\Omega_c T=0.75\pi \ rad/s$.

预畸变：$\Omega_c=\frac{2}{T}\tan\frac{w_c}{2}=5794 \ rad/s$

三阶巴特沃斯滤波器：

$$H(s)=\frac{\Omega_c^3}{s^3+2\Omega_c s^2+2\Omega_c^2 s+\Omega_c^3}$$

令 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

$$H(z)=\frac{5794^3}{[2400\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}]^3+2.5794[2400\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}]^2+6.6533[2400\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}]+5794^3}$$

备注：巴特沃斯滤波器中的 Ω_c 指的是 3dB 衰减截止频率，为简化问题，我们默认给定的滤波器截止频率 w_c 均指 3dB 衰减截止频率。下面的 2 个题目同此题。

8.12

解：对应的数字频率是：

$$w_c=2\pi\frac{f_c}{f_s}=\frac{2\pi\times1.2\times10^3}{6\times10^3}=0.4\pi$$

采用归一化原型低通滤波器作为变换的低通原型，则低通到高通的变换所需的 Ω_c 为：

（注意：为说明常数 c，此题采用 c=1）

$$1/\Omega_c=1/ctg(\omega_c/2)=\tan(\omega_c/2)=\tan(0.4\pi/2)=0.72654253$$

归一化的巴特沃斯低通原型为

$$H_{LP}(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

因此数字高通滤波器的系统函数为：

$$H_{HP}(z)=H_{LP}(s)\big|_{s=\frac{1}{\Omega_c}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

将 Ω_c 代入得

$$H_{HP}(z)=\frac{0.25691560(1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3})}{1-0.50830585z^{-1}+0.42178705z^{-2}-0.05629724z^{-3}}$$

8.13

解：由题意知：$N=3$

$$w_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = \frac{6\pi}{43}$$

$$w_\tau = 2\pi \frac{f_\tau}{f_s} = \frac{40\pi}{43}$$

中心频率： $\cos w_0 = \dfrac{\sin(w_c + w_\tau)}{\sin w_c + \sin w_\tau} = -\dfrac{\sin\frac{3\pi}{43}}{\sin\frac{6\pi}{43} + \sin\frac{40\pi}{43}} \approx 0.06524$

$$\Omega_c = \frac{\cos w_0 - \cos w_\tau}{\sin w_\tau} \approx 18.30898$$

备注：张老师的课件上的预畸变函数是 Ω_c =tan（（w_t-w_c）/2）,这两个式子完全等价，可通过数学推导证明。

又因为 3 阶巴特沃斯低通滤波器归一化原型系统函数为：

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$$

将 $s = s/\Omega_c$ 代入得到：

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2(s/\Omega_c) + 2(s/\Omega_c)^2 + (s/\Omega_c)^3} = \frac{6137.5134}{s^3 + 670.4375s^2 + 36.6180s + 6137.5134}$$

将 $s = \dfrac{z^2 - 2z\cos w_0 + 1}{z^2 - 1} = \dfrac{z^2 - 0.1305z + 1}{z^2 - 1}$ 代入上式得：

$$H(z) =$$

$$\frac{6137.5134}{\left(\frac{z^2 - 0.1305z + 1}{z^2 - 1}\right)^3 + 670.4375\left(\frac{z^2 - 0.1305z + 1}{z^2 - 1}\right)^2 + 36.6180\frac{z^2 - 0.1305z + 1}{z^2 - 1} + 6137.5134}$$