5.4

第五章

5.4 解：

(1) $V(k)=DFT[v(n)]$

$$=\sum_{n=0}^{2N-1} v(n) W_{2N}^{kn}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} v(2m) W_{2N}^{k2m}+\sum_{m=0}^{N-1} v(2m+1) W_{2N}^{k(2m+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} v(2m) W_{N}^{km}+W_{2N}^{k}\sum_{m=0}^{N-1} v(2m+1) W_{N}^{km}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} f(m) W_{N}^{km}+W_{2N}^{k}\sum_{m=0}^{N-1} g(m) W_{N}^{km}$$

$$=F(k)+W_{2N}^{k}G(k) \qquad k=0,1,\cdots,2N-1$$

$\therefore$ $V(k)=F(k)+W_{2N}^{k}G(k) \qquad k=0,1,\cdots,N-1$

$$V(k+N)=F(k+N)+W_{2N}^{k+N}G(k+N)$$

$$=F(k)+(-1)W_{2N}^{k}G(k)$$

$$=F(k)-W_{2N}^{k}G(k) \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

(2) $X(k)=DFT[x(n)]$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}[f(n)+jg(n)]W_{N}^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_{N}^{kn}+j\sum_{n=0}^{N-1} g(n) W_{N}^{kn}$$

$$=F(k)+jG(k)$$

$\therefore$ $Re[X(k)]=F(k) \qquad Im[X(k)]=G(k)$

$\therefore$ $F(k)$ 和 $G(k)$ 可以由 $DFT[x(n)]$ 得到，故 $v(n)$ 的DFT可以通过 $x(n)$ 的DFT 来完成.

$\because$ 直接计算 $v(n)$ 的DFT时，需要计算2N个点，

而计算 $x(n)$ 的DFT时，只要计算N个点.

又因为实序列是看成虚部为零的复序列进行计算的.

求得 $DFT[x(n)]$ 之后只需进行简单的分离与组合

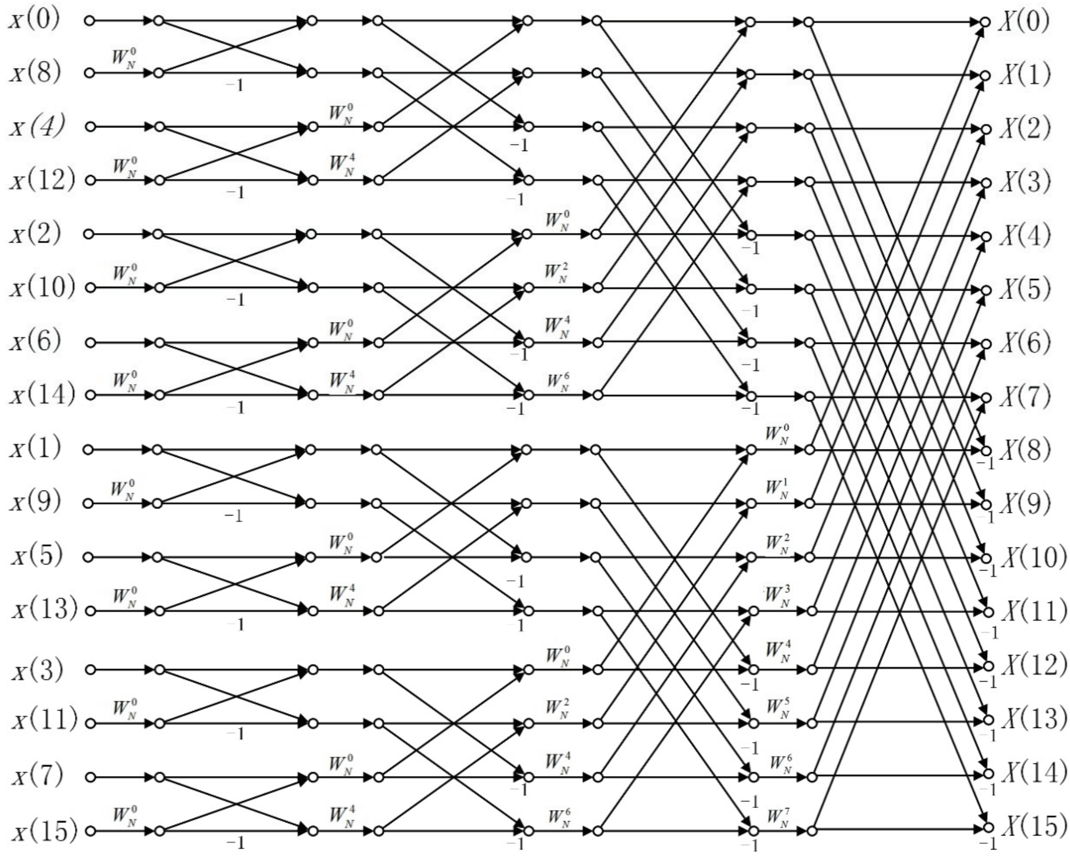
（组合时 $0\le k\le N-1$ 和 $N\le k\le 2N-1$ 分别乘以不同的系数）

即可得到 $DFT[v(n)]$

$\therefore$ 通过求 $DFT[x(n)]$ 间接求 $V(k)$ 有更高的效率.

5.5

（1）



5.8

5.8 解:

1) $z_k = a^k$ $\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$

$A = z_0 = a^0 = 1$

$W^{-k} = z_k/A = a^k$

∵ $a \neq \pm 1$

∴ z_k是螺线的一部分，不是重叠的点

∴ 可以用CZT来计算$x(n)$在z_k上的$X(z_k)$

2) $z_k = ak$ $\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$

$A = z_0 = 0$

~~∵~~ z_k不能写成AW^{-k}的形式

∴ z_k不是螺线的一部分.

∴ 不可以用CZT计算$x(n)$在z_k上的$X(z_k)$.

不意味着不能用CZT计算实z点上的z变换$X(z)$

只是不能在此z_k上计算$X(z_k)$

5.10

解：由题意知：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,2,\dots N-1$$

其中$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$。

由于$Y(k)$是$y(n)$的 32 点 DFT，所以有：

$$\begin{aligned}Y(k)&=\sum_{n=0}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{32}^{kn}+\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{N}{32}kn}+\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}\\&=X(\frac{N}{32}k)+\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn},\quad k=0,1,2,...,31\end{aligned}$$

这里$y(n)$是 2N+1 点而$Y(k)$是$y(n)$的 32 点 DFT，所以需要考虑 2N+1 和 32 的大小关系。

又由于 N 是偶数，所以只要分析 N 与 16 的大小。

当$N\le n\le 2N$时，$y(n)=x(n-16)$。

为了保证$y(n)$在$N\le n\le 2N$时有值这里假定$N\ge 8$。

当 N=16 时：

$$\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N}^{31}x(n-16)W_{32}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{n+16}{2}k}=X(\frac{k}{2})(-1)^k$$

此时有$Y(k)=[1+(-1)^k]X(\frac{k}{2})$。

当 N<16 时：

$$\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N}^{2N}x(n-16)W_{32}^{kn}=\sum_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{(n+16)k}=\sum_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$$

此时有$Y(k)=X(\frac{N}{32}k)+\sum_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$。

当 N>16 时：

$$\sum_{n=N}^{31}y(n)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N}^{N+15}x(n-16)W_{32}^{kn}=\sum_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{(n+16)k}=\sum_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$$

此时有$Y(k)=X(\frac{N}{32}k)+\sum_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k$。

综上可得：

$$Y(k)=\begin{cases} X(\frac{N}{32}k)+\sum\limits_{n=0}^{2N-16}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k, & N<16 \\ [1+(-1)^k]X(\frac{k}{2}), & N=16 \\ X(\frac{N}{32}k)+\sum\limits_{n=N-16}^{N-1}x(n)W_{32}^{nk}(-1)^k, & N>16 \end{cases}$$

5.13

5.13 解:

(1) $x(n)=-x((n+N/2))_N \quad 0\le n\le N-1$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}-x((n+N/2))_N W_N^{kn}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{kn}-\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x(n-\frac{N}{2})W_N^{kn}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{kn}-\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}x(m)W_N^{k(m+\frac{N}{2})}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{kn}-W_N^{k\frac{N}{2}}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}x(m)W_N^{km}$$

$\because\ x(n+\frac{N}{2})=-x((n+N))_N=-x(n)$

$$\therefore\ X(k)=-\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}-x(n)W_N^{kn}-e^{-jk\pi}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}x(m)W_N^{km}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^{kn}-e^{-jk\pi}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$=(1-e^{-jk\pi})\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$=\begin{cases}2\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)W_N^{kn} & k=1,3,5,\cdots,N-1\\ 0 & k=0,2,4,\cdots,N-2\end{cases}$$

$\therefore$ 原命题得证.

(2) 由(1)知，当 $k=1,3,5,\cdots,N-1$ 时

$$X(k) = 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{kn}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_{\frac{N}{2}}^{\frac{k}{2}n}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_{\frac{N}{2}}^{\frac{k-1}{2}n}W_{\frac{N}{2}}^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n)W_N^{n}\right]W_{\frac{N}{2}}^{\frac{k-1}{2}n}$$

令 $k=2m+1 \quad (m=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1)$

$$X(2m+1) = 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n)W_N^{n}\right]W_{\frac{N}{2}}^{mn}$$

∴ 奇序号DFT值 $X(k)$ 可以由序列 $x(n)W_N^n$ 进行 $N/2$ 点 DFT 再加少量乘法运算得到.

5.16

解：由题可得：

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r z^{-r}}{1-\sum_{l=1}^{N}b_l z^{-l}}$$

$$H\left(e^{j2\pi k/512}\right)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r e^{-j2\pi kr/512}}{1-\sum_{l=1}^{N}b_l e^{-j2\pi kl/512}}$$

假设 $N\le 511$ 且 $M\le 511$（一般情况下，系统阶数较低），令：

$$a[n]=\begin{cases}a_n,\ 0\le n\le M\\ 0,\ \ M+1\le n\le 511\end{cases}$$

$$b[n]=\begin{cases}1,\ n=0\\ b_n, 1\le n\le N\\ 0,\ N+1\le n\le 511\end{cases}$$

令 $A[k]$ 与 $B[k]$ 分别为 $a[n]$ 与 $b[n]$ 的 512 点 DFT，则：

$$H\left(e^{j2\pi k/512}\right)=\frac{A[k]}{B[k]}$$