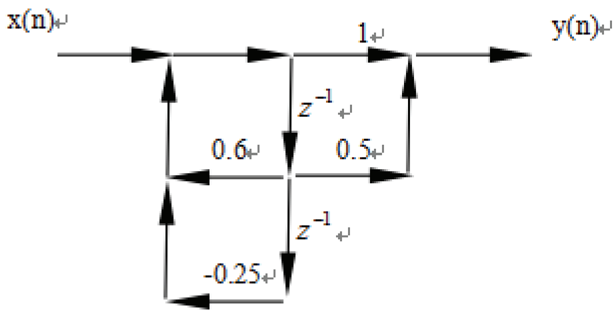
7.2

解：由差分方程可得系统函数为：

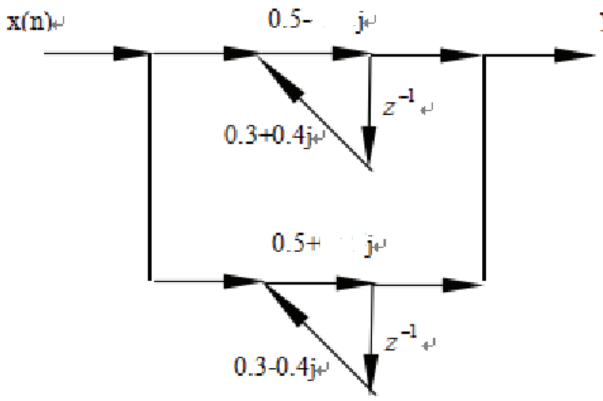
$$H(z)=\frac{1+0.5z^{-1}}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}}=\frac{1+0.5z^{-1}}{\left[1-(0.3+0.4j)z^{-1}\right]\left[1-(0.3-0.4j)z^{-1}\right]}$$

$$=\frac{0.5-j}{1-(0.3+0.4j)z^{-1}}+\frac{0.5+j}{1-(0.3-0.4j)z^{-1}}$$

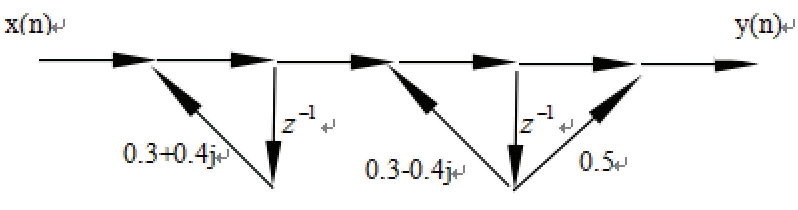
系统的直接型是：



系统的并联型是：



系统的级联型是：



7.5

解：滤波器的冲击响应为：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\omega n+j\sin\omega n)d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos\omega n)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0}^{\pi}(\cos\omega n)d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi n-\sin\omega_0 n}{n}$$

因为低通滤波器于高通滤波器存在关系：

$$H_L=1-H_d$$

则其对应冲击响应为：

$$h_l(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-H_d)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi n}{n}-h_d(n)$$

7.10

解：由 $y(n)=x(n)-x(n-N)$ 得

$$H(z)=1-z^{-N}，H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega N}=e^{\frac{-j\omega N}{2}}\left(e^{\frac{j\omega N}{2}}-e^{\frac{-j\omega N}{2}}\right)=2j\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)e^{\frac{-j\omega N}{2}}$$

幅频响应和相频响应为

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=2\left|\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\right|$$

$$\theta\left(H(e^{j\omega})\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega N}{2}+\arg\left(\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\right)$$

三个滤波器设计题目如下：（7.8 选做）

参见《数字信号处理教程》（程佩青 编）第四版课后题及解答

7.1 设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器。技术指标为 $\omega_p=0.2\pi$，$\omega_{st}=0.4\pi$，$A_s=45\text{dB}$。求 $h(n)$ 并画出幅度响应（以 dB 表示）及相位响应曲线。

7.2 设计一个线性相位 FIR 数字高通滤波器。技术指标为 $\omega_p=0.7\pi$，$\omega_{st}=0.5\pi$，$A_s=55\text{dB}$。求 $h(n)$ 并画出幅度响应（以 dB 表示）及相位响应曲线。

7.8 用频率抽样法设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，其通带截止频率为 $\omega_p=0.3\pi$，过渡带宽为 $\Delta\omega=0.1\pi$，阻带最小衰减为 50dB，试确定过渡带抽样点数 m，并用累试法确定过渡带中频率响应的抽样值以及滤波器长度 N，写出其 $H(k)$ 表达式，求出其 $h(n)$ 及 $20\lg|H(e^{j\omega})|$，并画图。

7.1 设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器。技术指标为 $\omega_p=0.2\pi,\omega_{st}=0.4\pi,A_s=45\text{dB}$。求 $h(n)$并画出幅度响应(以 dB 表示)及相位响应曲线。

分析

窗函数法设计线性相位 FIR DF 的设计步骤为:

① 确定所需滤波器的性能指标要求;

② 按 4 种理想线性相位 DF(低通、带通、带阻、高通)的表达式 $H_d(e^{j\omega})$,将理想滤波器的截止频率(或上下截止频率)确定为过渡带的算术中心频率。

③ 可得到理想滤波器冲激响应 $h_d(n)$。

④ 选择窗函数的类型和长度点数 N。窗函数的类型由给定滤波器阻带最小衰减 A_s(dB)确定。窗的长度点数 N 由滤波器过渡带宽 $\Delta\omega$ 来确定。

⑤ 求加窗后的实际滤波器冲激响应 $h(n)=h_d(n)w(n)$。

⑥ 检验 $H(e^{j\omega})=\text{DTFT}[h(n)]$是否满足所求滤波器的性能要求。

解

由题目条件,有

$$\omega_p=0.2\pi,\quad \omega_{st}=0.4\pi,\quad A_s=45\text{dB}$$

理相低通滤波器的 $H_d(e^{j\omega})$和 $h_d(n)$分别为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau}, & 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, & n\neq\tau\\ \omega_c/\pi, & n=\tau(\tau=\text{整数时})\end{cases}$$

其中 $\tau=(N-1)/2,\omega_c=0.5(\omega_p+\omega_{st})=0.3\pi$。

由阻带衰减 $A_s=45\text{dB}$ 确定窗形状。查教程表 ,海明窗阻带最小衰减为 53dB 满足要求。

由过渡带宽 $\Delta\omega=\omega_{st}-\omega_p=0.4\pi-0.2\pi=0.2\pi$,查教程表 ,海明窗的过渡带宽为 $\Delta\omega=6.6\pi/N$,故有

$$N=6.6\pi/\Delta\omega=6.6\pi/0.2\pi=33$$

则

$$\tau=\frac{N-1}{2}=16$$

于是,海明窗 $w(n)$为

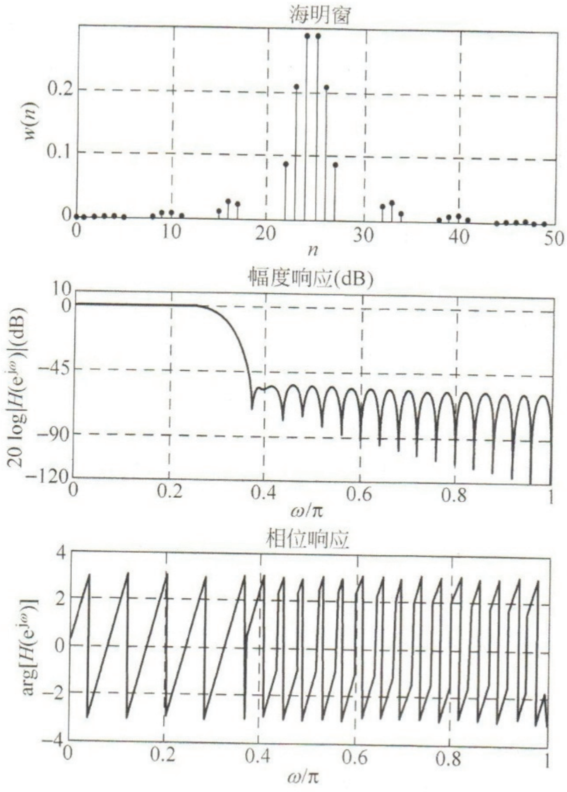
$$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)\right]R_{33}(n)$$

由此可得线性相位 FIR 低通滤波器的 $h(n)$为

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}\left[0.54-0.46\cos\left(\dfrac{\pi n}{16}\right)\right]R_{33}(n), & n\neq 16\\ 0.3, & n=16\end{cases}$$

求 $H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{32}h(n)e^{-j\omega n}$,检验各项指标可知满足设计要求。

采用 MATLAB 工具可画出 $h(n)$和滤波器幅度响应,相位响应如图



7.2 设计一个线性相位 FIR 数字高通滤波器。技术指标为 $\omega_p=0.7\pi$,$\omega_{st}=0.5\pi$,$A_s=55\text{dB}$。求 $h(n)$并画出幅度响应(以 dB 表示)及相位响应曲线。

分析

相同的解题思路。

解

由题目条件,有

$$\omega_p=0.7\pi,\quad \omega_{st}=0.5\pi,\quad A_s=55\text{dB}$$

理相高通滤波器的 $H_d(e^{j\omega})$和 $h_d(n)$分别为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau}, & \omega_c\leqslant|\omega|\leqslant\pi\\ 0, & 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c\end{cases}$$

$$h_d(n)=\begin{cases}-\dfrac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{\pi(n-\tau)}, & n\neq\tau\\ 1-\omega_c/\pi, & n=\tau(\tau=\text{整数时})\end{cases}$$

其中 $\tau=(N-1)/2, \omega_c=0.5(\omega_p+\omega_{st})=0.6\pi$。

由阻带衰减 $A_s=55\text{dB}$，查教程表 ，布莱克曼窗阻带最小衰减为 74dB 满足要求。

由过渡带宽 $\Delta\omega=\omega_p-\omega_{st}=0.2\pi$，查教程表 ，布莱克曼窗的过渡带宽为

$$\Delta\omega = 11\pi/N$$

故有

$$N = 11\pi/\Delta\omega = 11\pi/0.2\pi = 55$$

则

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 27$$

于是，布莱克曼窗为

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{27}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi n}{27}\right)\right]R_{55}(n)$$

由此可得线性相位 FIR 高通滤波器的 $h(n)$ 为

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n)w(n) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{\sin[0.6\pi(n-27)]}{\pi(n-27)}\left[0.42 - 0.5\cos\left(\dfrac{\pi n}{27}\right) + 0.08\cos\left(\dfrac{2\pi n}{27}\right)\right]R_{55}(n), & n \neq 27 \\ 0.4, & n = 27 \end{cases} \end{aligned}$$

经检验，满足各项设计指标要求。

采用 MATLAB 工具画出 $h(n)$ 和滤波器的幅度响应，相位响应如图