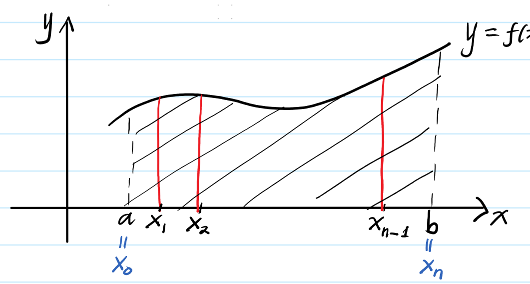
Kelas Maret - Materi 1

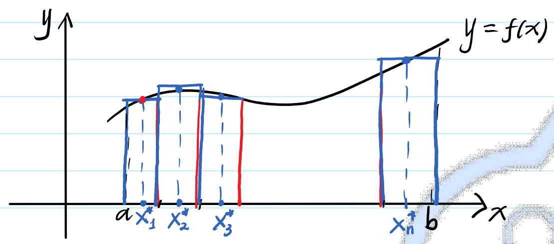
11 March 2023 10:00

Materi : Integrasi Numerik & Integral Tak Wajar

A. Hampiran Jumlahan Riemann

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2}(2^2 - 1^2)$$
$$= \frac{1}{2}(4-1)$$
$$= \frac{3}{2} \quad \text{(Penyelesaian Analitik)}$$



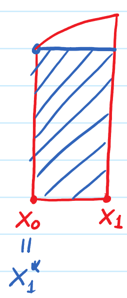


$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

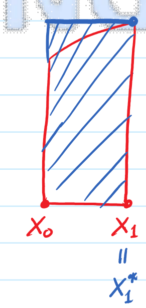
$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx f(x_1^*)\cdot\Delta x + f(x_2^*)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\cdot\Delta x \\ &\approx \Delta x\left[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)\right]\end{aligned}}$$

Lebih lanjut, ada 3 jenis x_k^*

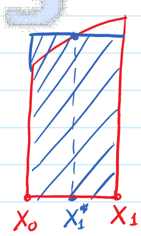
(i). Ujung kiri



(ii). Ujung kanan

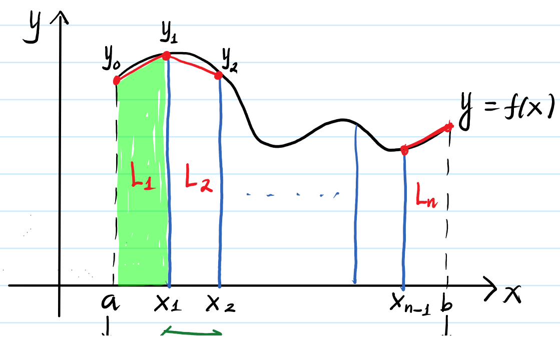


(iii). Titik tengah



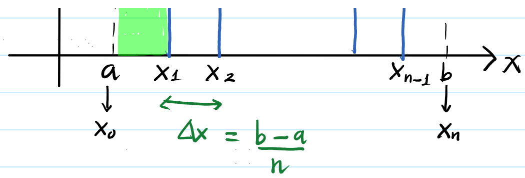
$$x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

B. Aturan Trapesoidal



$$L_1 = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\cdot\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\cdot\frac{b-a}{n}$$
$$= \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + y_1)$$

$$L_2 = \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_1 + y_2)$$



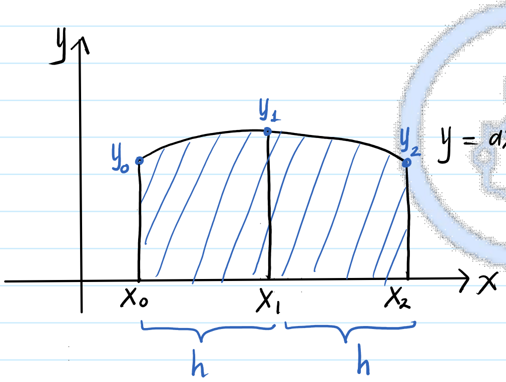
$$\Rightarrow L_2 = \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_1 + y_2)$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow L_n = \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_{n-1} + y_n)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx L_1 + L_2 + \cdots + L_n \\ &\approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)\end{aligned}}$$

C Aturan Simpson



$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \cdots + \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{3n}\right)[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]}$$

Aturan Simpson dapat digunakan dgn syarat n harus genap

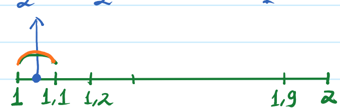
Contoh Soal

Selesaikan $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ menggunakan integrasi numerik, bagilah menjadi 10 partisi ($n = 10$)

① Hampiran Jumlahan Riemann (Titik Tengah)

Kanan x_i	Ujung Kiri x_i	i	Titik Tengah x_i	f(x_i) $\frac{1}{x_i}$
1,1	1	1	1,05 ✓	0,952380952
1,2	1,1	2	1,15	0,869565217
1,3	1,2	3	1,25	0,8
1,4	1,3	4	1,35	0,740740741
1,5	1,4	5	1,45	0,689655172
1,6	1,5	6	1,55	0,64516129
1,7	1,6	7	1,65	0,606060606
1,8	1,7	8	1,75	0,571428571
1,9	1,8	9	1,85	0,540540541
2	1,9	10	1,95	0,512820513

$\frac{1+1,1}{2} = \frac{2,1}{2} = 1,05$



$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0,1$

$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0,1 \times$ Jumlah

※ Penyelesaian Analitik :

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^2$$

$$= \ln|2| - \ln|1|$$

$$= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0}$$

$$= \ln 2$$

$$= 0,69315$$

1,8	1,7		
1,9	1,8		
2	1,9		

8	1,75	0,571428571
9	1,85	0,540540541
10	1,95	0,512820513
	Jumlah	6,928353604
ln(2) ✓		
0,69315		0,69283536

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0,1 \times \text{Jumlah}$$

$$\approx 0,6928 \ldots$$

② Aturan Trapesoidal

i	Titik Ujung x_i	f(x_i) $\frac{1}{x_i}$	Pengali w_i	w_i x f(x_i)
0	1	1	1	1
1	1,1	0,909091	2	1,8181818
2	1,2	0,833333	2	1,6666667
3	1,3	0,769231	2	1,5384615
4	1,4	0,714286	2	1,4285714
5	1,5	0,666667	2	1,3333333
6	1,6	0,625	2	1,25
7	1,7	0,588235	2	1,1764706
8	1,8	0,555556	2	1,1111111
9	1,9	0,526316	2	1,0526316
10	2	0,5	1	0,5
			Jumlah	13,875428
				0,6937714 ⊛

1 1,1 1,2 1,9 2

x_0 x_{10}

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0,05 \times \text{Jumlah}$$

$$\approx ⊛$$

③ Aturan Simpson

i	Titik Ujung x_i	f(x_i)	Pengali w_i	w_i x f(x_i)
0	1	1	1	1
1	1,1	0,90909	4	3,6363636
2	1,2	0,83333	2	1,6666667
3	1,3	0,76923	4	3,0769231
4	1,4	0,71429	2	1,4285714
5	1,5	0,66667	4	2,6666667
6	1,6	0,625	2	1,25
7	1,7	0,58824	4	2,3529412
8	1,8	0,55556	2	1,1111111
9	1,9	0,52632	4	2,1052632
10	2	0,5	1	0,5
			Jumlah	20,794507
				0,6931502 ✪

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{0,1}{3} \times \text{Jumlah}$$

$$\approx ✪$$

D. Integral Tak Wajar

I. Integral pada Selang Tak Hingga

(i) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \ldots ?$

Penyelesaian : $\lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{a} f(x)\,dx$

(ii) $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \ldots ?$

Penyelesaian : $\lim_{\ell \to +\infty} \int_{a}^{\ell} f(x)\,dx$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \ldots ?$

Penyelesaian : $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{0} f(x)\,dx + \lim_{k \to +\infty} \int_{0}^{k} f(x)\,dx$$

Contoh Soal

① Selesaikan $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}}\,dt$

① Selesaikan $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

$$= \lim_{l \to -\infty} \int_{l}^{0} \underbrace{\frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}}_{*}\,dt + \lim_{k \to +\infty} \int_{0}^{k} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

$$\int \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \int \frac{e^{-t}}{1+(e^{-t})^2}\,dt \to \int \frac{1}{1+(e^{-t})^2} \cdot e^{-t}\,dt$$

Substitusi : $u = e^{-t}$

$du = -e^{-t}\,dt$

$-du = e^{-t}\,dt$

$$= \int \frac{1}{1+u^2} \cdot -du$$

$$= -\int \frac{1}{1+u^2}\,du = -\tan^{-1} u = \underbrace{-\tan^{-1}(e^{-t})}_{*}$$

$$= \lim_{l \to -\infty} -\tan^{-1}(e^{-t})\Big|_{l}^{0} + \lim_{k \to +\infty} -\tan^{-1}(e^{-t})\Big|_{0}^{k}$$

$$= \lim_{l \to -\infty} -\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(\underbrace{e^{-l}}_{+\infty}) + \lim_{k \to +\infty} -\tan^{-1}(\underbrace{e^{-k}}_{0}) + \tan^{-1}(1)$$

$$= \cancel{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} + 0 + \cancel{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

(II) Integral dengan Integrannya Menuju Tak Hingga

(i) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx = \ldots ?$ di $x = 1$, penyebut $= 0$, $f(x)$ tidak terdefinisi

$$= \int_{1^+}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{l \to 1^+} \int_{l}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx$$

1^- 1^+

1

$1^+ = 1{,}000 \ldots 01$

$1^- = 0{,}999 \ldots 9$

(ii) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{x-4}\,dx = \ldots ?$

$$= \int_{2}^{4^-} \frac{1}{x-4}\,dx = \lim_{l \to 4^-} \int_{2}^{l} \frac{1}{x-4}\,dx$$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx = \ldots ?$ di $x = 2$, penyebut $= 0$.

$[0,3]$

$\downarrow$

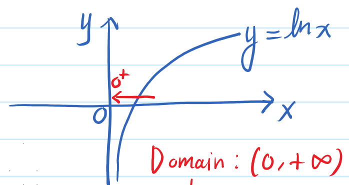
2

$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx = \int_{0}^{2^-} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_{2^+}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{l \to 2^-} \int_{0}^{l} \frac{1}{x-2}\,dx + \lim_{k \to 2^+} \int_{k}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx$$

Contoh Soal

① Selesaikan $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx = \ldots ?$



Domain : $(0, +\infty)$

$\downarrow x > 0$

0^- 0^+

di $x = 2$, penyebut $= 0$, maka $f(x)$ tidak terdefinisi

$$= \int^{2^-} \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ldots ?$$

Substitusi $u = x - 2$

$$= \int_0^{2^-} \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{\ell \to 2^-} \int_0^{\ell} \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{\ell \to 2^-} \ln|x-2| \Big|_0^{\ell}$$

$$= \lim_{\ell \to 2^-} \ln|\ell-2| - \ln|0-2|$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ldots ?$$

Substitusi $u = x-2$

$du = dx$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u|$$

$$= \ln|x-2|$$

$$= \ln|2^- - 2| - \ln|-2|$$

$$= \ln|0^-| - \ln|-2|$$

$$= \ln 0^+ - \ln 2$$

$$= -\infty - \ln 2$$

$$= -\infty$$

$x > 0$

0^- 0^+

0

$\ln(+\infty) = +\infty$

$\ln(0^+) = -\infty$

E. Limit Bentuk Tak Tentu

TEOREMA 3.3.1 (Aturan L'Hôpital untuk bentuk $\frac{0}{0}$).
Misalkan lim *menyatakan salah satu limit* $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, *dan diasumsikan bahwa* $\lim f(x) = 0$ *dan* $\lim g(x) = 0$. *Jika* $\lim\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$ *mempunyai nilai berhingga L, atau jika limit ini* $+\infty$ *atau* $-\infty$ *maka* $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\frac{0}{0}$

Pada dasarnya, aturan L'Hôpital memungkinkan mengganti satu masalah limit dengan yang lain yang mungkin lebih sederhana. Pada setiap contoh berikut akan digunakan langkah-langkah proses penyelesaian sebagai berikut:

Langkah-1 Periksa apakah $\lim f(x)/g(x)$ berbentuk tak tentu. Jika tidak, aturan L'Hôpital tidak dapat digunakan.

Langkah-2 Jika ya, lakukan diferensiasi terhadap f dan g secara terpisah.

Langkah-3 Tentukan $\lim f'(x)/g'(x)$. Jika limit ini berhingga, $+\infty$, atau $-\infty$ maka itu sama dengan $\lim f(x)/g(x)$.

Langkah-4 Jika $\lim f'(x)/g'(x)$ dari bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, ulangi langkah kedua, dan demikian seterusnya sampai diperoleh bentuk bukan $\frac{0}{0}$.

TEOREMA 3.3.3 ATURAN L'HÔPITAL UNTUK BENTUK $\frac{\infty}{\infty}$.
Misalkan lim *menyatakan salah satu limit* $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ *dan anggap bahwa* $\lim f(x) = \infty$ *dan* $\lim g(x) = \infty$. *Jika* $\lim\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$ *mempunyai nilai berhingga L atau jika limit ini* $+\infty$ *atau* $-\infty$ *maka* $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh Soal

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \ldots ?$ $\frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0} \longrightarrow$ Aturan L'Hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x]}{\frac{d}{dx}[1-x]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1}$$

$$= \lim \; -\frac{1}{x}$$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{-1}{\frac{1}{x}}$

$= -\dfrac{1}{1} = -1$

Bentuk Tak Tentu Yang Lain

$(0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$, **dan** $0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty)$

☐ BENTUK-BENTUK TAK TENTU TIPE 0.∞

Limit suatu perkalian dua fungsi, $\lim f(x) \cdot g(x)$, disebut bentuk tak tentu tipe $0.\infty$, jika $\lim f(x) = 0$ dan $\lim g(x) = \infty$. Limit tipe ini dapat diubah menjadi bentuk $\boxed{\frac{0}{0}}$ dengan menulis

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

$\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \dfrac{0}{\frac{1}{+\infty}} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ L'Hopital

atau bentuk $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ dengan menulis

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

$\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \dfrac{+\infty}{\frac{1}{0}} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$ L'Hopital

Dengan demikian limit tersebut dimungkinkan dapat dihitung dengan aturan L'Hôpita

☐ BENTUK-BENTUK TAK TENTU TIPE $\infty - \infty$

Jika masalah limit seperti

$$\lim[f(x) - g(x)] \quad \text{dan} \quad \lim[f(x) + g(x)]$$

mengarah pada salah satu pernyataan

$$(+\infty) - (+\infty) \quad , \quad (-\infty) - (-\infty)$$

$$(+\infty) + (-\infty) \quad , \quad (-\infty) + (+\infty)$$

maka satu suku cenderung menekan pernyataan ke arah positif dan yang lain ke arah negatif, menghasilkan bentuk tak tentu. Ini disebut bentuk tak tentu tipe $\infty - \infty$. Bentuk-bentuk semacam itu kadang diperlakukan dengan mengkombinasikan dua suku menjadi satu dan memanipulasi hasil menjadi satu dalam bentuk sebelumnya.

☐ BENTUK-BENTUK TAK TENTU TIPE 0^0, ∞^0, 1^∞

Limit-limit yang berbentuk

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$$

memberikan ***bentuk tak tentu tipe*** 0^0, ∞^0 ***dan*** 1^∞. Tiga tipe ini dinyatakan, pertama, dengan memperkenalkan peubah bebas

$$\boxed{y = f(x)^{g(x)}}$$

$\ln a^n = n \cdot \ln a$

dan kemudian menghitung

$$\boxed{y = f(x)^{g(x)}}$$

dan kemudian menghitung

$$\lim_{x\to a} \boxed{\ln y} = \lim_{x\to a}\left[\boxed{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}\right] = \lim_{x\to a}[\,g(x)\ln f(x)]$$

Jika nilai limit $\lim\limits_{x\to a}\ln y$ dapat ditentukan, maka

$$\lim_{x\to a}\ln y = \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}}$$

akan lebih mudah ditentukan seperti ditunjukkan dalam contoh selanjutnya.

$$\ln y = b$$
$$\cancel{y = e^b}$$
$$e^{\ln y} = e^b$$
$$y = e^b$$

Contoh soal !

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = \ldots ?$ $\quad +\infty\cdot e^{-\infty} = +\infty\cdot\frac{1}{e^{+\infty}} = +\infty\cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ : Aturan L'Hopital}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}[x]}{\frac{d}{dx}[e^x]}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}$$
$$= \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = \ldots ?$ $\quad (1+\infty)^{\frac{1}{\ln\infty}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \underbrace{\infty^0}$

Misal : $y = (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\ln y = \ln(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$$
$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\cdot\ln(1+x^2)$$
$$\ln y = \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}$$
$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\ln y} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x} \rightarrow \frac{\ln\infty}{\ln\infty} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{L'Hopital}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} \to \frac{\infty}{\infty} \to \text{L'Hopital}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4x}^{\,2}}{\cancel{2x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2$$

$$= 2 \quad \checkmark$$

Diperoleh $\lim_{x \to +\infty} \ln y = 2 \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} y = \ldots ?$

Karena $\ln y = 2$, untuk $x \to +\infty$, maka

$$e^{\ln y} = e^2$$

$$y = e^2 \quad \text{, untuk } x \to +\infty$$

Shg $\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$= e^2$$